

Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

begründet

von

Karl Ohrtmann und Felix Müller.

Im Verein mit anderen Mathematikern und unter Mitwirkung von
Albert Wangerin, Erich Salkowski, Arthur Korn
sowie der **Berliner Mathematischen Gesellschaft**

herausgegeben

von

Emil Lampe.

Band 44. Jahrgang 1913.



Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1918.

Erklärung der Zitate.

Eine eingeklammerte Zahl vor der (fett gedruckten) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu welcher der Band gehört. Einige periodische Schriften, in denen nur zuweilen eine vereinzelte mathematische Arbeit erschienen ist, sind in dieses Verzeichnis nicht aufgenommen worden; das bezügliche Zitat im Texte ist dann in hinreichender Ausführlichkeit gegeben.

Abh. zur Gesch. der Math.: Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Leipzig, B. G. Teubner. 8⁰. **24**$_2$.

Acta Math.: Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm. 4⁰. **36**, **37**.

Acta Soc. Fennicae: Acta Societatis scientiarum Fennicae. Helsingfors. 4⁰. (A) **3**.

Agram Ak.: Arbeiten der südslavischen Akademie von Agram, Kroatien. (Kroatisch.) **190**, **193**.

Allgem. Bauztg.: Österreichische Vierteljahrsschrift für den öffenlichen Baudienst, herausgegeben von den Ministerien für öffentliche Arbeiten, der Finanzen, des Handels, der Eisenbahnen und des Ackerbaus. Wien: Druckerei- und Verlagsaktiengesellschaft R. v. Waldheim. Jos. Eberle & Co. 4⁰. **78**.

American Acad. Proc.: Proceedings of the American Academy of arts and sciences. Boston. 8⁰. **48**, **49**.

American J.: American Journal of Mathematics. Edited by Fr. Morley. With the cooperation of A. Cohen, Ch. A. Scott etc. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Baltimore. 4⁰. **35**.

Amer. Math. Monthly: The American Mathematical Monthly. Founded by B. F. Finkel. A journal for teachers of mathematics in the collegiate and advanced secondary fields. Published with the cooperation of the Universities of Chicago, Illinois, Indiana, Iowa, Kansas, Michigan, Minnesota, Missouri, Nebraska, Northwestern University, Colorado College, and Oberlin College. Editorial Committee: H. E. Slaught, G. A. Miller, E. R. Hedrick. Lancaster, P. A., and Chicago. 8⁰. **20**.

American M. S. Bull.: Bulletin of the American Mathematical Society. A historical and critical review of mathematical science. Edited by F. N. Cole, E. W. Brown, V. Snyder, A. Ziwet, D. E. Smith, J. W. Young, A. Ranum. New York. 8⁰. (2) **19**, **20**.

American M. S. Trans.: Transactions of the American Mathematical Society. Edited by M. Bôcher, H. S. White, L. E. Dickson. With the cooperation of G. D. Birkhoff etc. Published by the Society: Lancaster, Pa., and New York. 4⁰. **14**.

Amst. Akad. Verh.: Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. (Eerste Sectie.) 4⁰. **11.**

Amst. Ak. Versl.: Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Verslag van de gewone Vergaderingen der wis- en natuurkundige Afdeeling. 4⁰. **21**, **22**.

Annali di Mat.: Annali di matematica pura ed applicata già diretti da Francesco Brioschi e continuati dai professori L. Bianchi, U. Dini, G. Jung, C. Segre. Milano. 4⁰. (3) **20**, **21**, **22**.

Annals of Math.: Annals of Mathematics. (Founded by Ormond Stone.) Edited by O. Stone, M. Bôcher, G. D. Birkhoff, L. P. Eisenhart, O. Veblen, E. Swift, J. H. M. Wedderburn. Published under the auspices of Princeton University. Lancaster, P. A., and Princeton, N. J. 4⁰. (2) **14**, **15**.

Ann. de Chim. et Phys.: Annales de Chimie et de Physique par MM. Haller, Lippmann, Bouty. Paris: Masson et Cie, éditeurs. 8⁰. (8) **28**, **29**, **30**.

Ann. de l'Éc. Norm.: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées etc. par un comité de rédaction composé de MM. les maîtres de conférences de l'École. Paris: Gauthier-Villars. 4⁰. (3) **30**.

Ann. der Physik: Annalen der Physik. Begründet und fortgeführt durch U. A. C. Gren, L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff, G. und E. Wiedemann. Kuratorium: M. Planck, G. Quincke, W. C. Röntgen, E. Warburg. Unter Mitwirkung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft und insbesondere von M. Planck herausgegeben von W. Wien. Leipzig: J. A. Barth. gr. 8⁰. (4) **40**, **41**, **42**.

Ann. sc. Ac. Polyt. Porto: Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto publicados sob a direcção de F. Gomes Teixeira. Coimbra. 8⁰. 8.

Annuaire Longit.: Annuaire pour l'an 1914, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris: Gauthier-Villars. 16mo.

Arch. d. Math. u. Phys.: Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten. Gegründet 1841 durch J. A. Grunert. Dritte Reihe. Unter Mitwirkung von E. Lampe, W. Fr. Meyer herausgegeben von E. Jahnke. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. gr. 8⁰. (3) **20**, **21**, **22**.

Arch. du Musée Teyler: Archives du Musée Teyler. Haarlem: Les héritiers Loosjes. 8⁰. (2).

Arch. Gesch. d. Naturw. u. Techn.: Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik unter Mitwirkung der Herren usw. herausgegeben von K. von Buchka, H. Stadler, K. Sudhoff. Leipzig: F. C. W. Vogel. 8⁰. **6**.

Arch. Néerl.: Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem et rédigées par J. P. Lotsy Secrétaire, avec la collaboration des Membres de la Société. La Haye: Martinus Nijhoff. 8⁰.

Arch. sc. phys.: Bibliothèque universelle. Archives des sciences physiques et naturelles. Genève, Bureau des Archives. 8⁰. (4) **35**, **36**.

Archief voor de Verz. Wetensch.: Archief voor de verzekerings-wetenschap en aanverwante vakken, uitgegeven door de vereeniging van wiskundige-adviseurs bij Nederlandsche maatschappijen voor levensverzekering. Commissie van redactie: G. J. D. Mounier en J. P. Janse. 's Gravenhage: M. Nijhoff.

Ark. för Mat., Astron. och Fys.: Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, utgivet af K. Svenska Vetenskaps-Akademien i Stockholm. 8⁰. **8**, **9**.

Assoc. Franç.: Association Française pour l'avancement des sciences. Compte rendu de la **41**me session. Congrès de Nîmes (1912). Congrès de Tunis (1913). **42,** Paris au secrétariat de l'association et chez G. Masson et Cie. 8° (1913).

Astron. Journ.: Astronomical Journal. Albany. **27, 28.**

Astr. Nachr.: Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher. Unter Mitwirkung des Vorstandes der Astronomischen Gesellschaft herausg. von H. Kreutz. Kiel. 4°. **193, 194, 195.**

Atti Acc. Gioenia: Atti della Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania. Catania: C. Galàtola. (5) **6.**

Atti dell' Acc. Pont.: Atti dell' Accademia Pontaniana. Napoli. **43** [(2) **18**].

Batt. G.: Giornale di matematiche di Battaglini per il progresso degli studi nelle università italiane. Fondato nel 1863. Proseguito dal prof. E. Pascal. Napoli: Pellerano. gr. 8°. **51** [(3) **4**].

Belg. Bull. Sciences: Académie Royale de Belgique. Bulletin de la classe des sciences. Bruxelles: F. Hayez. 8°. 1913.

Belg. Mém.: Mémoires de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Classe des Sciences. Bruxelles: F. Hayez. 4°.

Belg. Mém. cour.: Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Collection in-8°. Bruxelles: F. Hayez.

Belgrad Ak.: Veröffentlichungen der Kgl. Serbischen Akademie. Belgrad (Serbisch). **87.**

Berl. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°. 1913.

Berl. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8°. 1913.

Bern. Mitt.: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1913. Bern. 8°.

Bibl. Math.: Bibliotheca Mathematica, Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von Gustaf Eneström in Stockholm. Leipzig: B. G. Teubner. gr. 8°. (3) **14.**

Boll. della Mathesis: Bollettino della „Mathesis" Società italiana di matematica. Pubblicazione quadrimestrale. Roma: Coop. Tipogr. Manuzio. 8°. **5.**

Bologna Mem.: Memorie della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4°. (6) **9.**

Bologna Rend.: Rendiconto delle sessioni dell' Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna. Bologna. 8°.

Bordeaux Procès-verbaux: Procès-verbaux des séances de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°. 1912/13.

Brit. Ass. Rep.: Report of the meeting of the British Association for the advancement of science. gr. 8°. Dundee (1912) **82,** Birmingham (1913) **83.**

Brux. S. sc.: Annales de la Société scientifique de Bruxelles. Bruxelles: Schepens; Paris: Gauthier-Villars. (Doppelt paginiert, unterschieden durch A und B; A=1ère partie, B=2e partie.) gr. 8°. **37.**

Bull. astr.: Bulletin astronomique, publié par l'observatoire de Paris. Paris: Gauthier-Villars. 8⁰. **30.**

Cambr. Phil. Soc. Proc.: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge: University Press. 8⁰. **17.**

Cambr. Trans.: Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge: University Press. 4⁰. **22.**

Časopis: Časopis; Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigiert mit besonderer Rücksicht auf Studierende der Mittel- und Hochschulen. Herausgegeben vom Verein böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8⁰. (Böhmisch.) **47.**

Christiania Vidensk. Selsk. Skr.: Christiania Videnskaps-Selskabets Skrifter. **2** (1912).

C. R.: Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris: Gauthier-Villars. 4⁰. **156, 157.**

Darboux Bull.: Bulletin des sciences mathématiques, rédigé par MM. G. Darboux, E. Picard et avec la collaboration de MM. Brocard etc. Paris: Gauthier-Villars. 8⁰. (2) **37.**

Deutsche Math.-Ver.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes von A. Gutzmer. Leipzig. B. G. Teubner. 8⁰. **22.**

Dublin Proc.: Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A. Dublin. Hodges, Figgis & Co. 8⁰. (3) **30, 31.**

Dublin R. S. Scient. Proc.: The scientific proceedings of the Royal Dublin Society. Published by the Royal Dublin Society. London: Williams and Norgate. New Series. **13, 14.**

Dublin Trans.: The Scientific Transactions of the Royal Dublin Society. Dublin.

Edinb. M. S. Proc.: Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 8⁰. **30, 31.**

Edinb. R. S. Proc.: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh: Robert Grant and Son. 8⁰. **33.**

Edinb. Trans.: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh: Robert Grant and Son. **49.**

Ed. Times: Mathematical questions and solutions, from the „Educational Times", with many papers and solutions in addition to those published in the „Educational Times". Edited by C. J. Marks. London: Francis Hodgson. 8⁰. (2) **23, 24.**

Elektrot. u. Maschinenbau: Elektrotechnik und Maschinenbau. Zeitschrift des elektrotechnischen Vereins in Wien. Chefredakteur: I. Seidener. Wien: Selbstverlag des elektrotechnischen Vereins: R. Lechner & Sohn. 4⁰. **30.**

Encykl. d. math. Wiss.: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Herausgegeben von H. Burkhardt, Fr. Meyer, F. Klein, A. Sommerfeld usw. Leipzig: B. G. Teubner. gr. 8⁰. **2, 3.**

Ens. math.: L'enseignement mathématique. Revue internationale paraissant tous les deux mois. Directeurs: C.-A. Laisant, H. Fehr. Paris: Gauthier-Villars. Genève: Georg et Cie. 8⁰. **15.**

Erl. Ber.: Sitzungsberichte der Physikalisch-medizinischen Sozietät in Erlangen. Erlangen. 8⁰.

Gött. Abh.: Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 4⁰. 1913.

Gött. Nachr.: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1913. Göttingen. 8⁰.

Hamb. Mitt.: Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Leipzig: B. G. Teubner. 8⁰. **5.**

Handel. Nederl. Natuur- en Geneesk. Congr.: Handelingen van het Vlaamsch Natuur- en Geneeskundig Congres (Leuwen) uitgegeven door het bestuur.

Heidelb. Ak. Sitzber.: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Stiftung Heinrich Lanz. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Heidelberg: Carl Winter. 8⁰. 1913.

Hibbert Journ.: The Hibbert Journal. A quarterly review of religion, theology, and philosophy. Editor: L. P. Jacks. London: Williams and Norgate. **11**, **12**.

Jahrb. d. drahtl. Tlg. u. Tlph.: Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie sowie des gesamten Gebietes der elektromagnetischen Schwingungen. Unter Mitarbeit usw. und unter besonderer Mitwirkung von Zenneck herausgegeben von G. Eichhorn. Leipzig: J. A. Barth. 8⁰. **6.**

J. de l'Éc. Pol.: Journal de l'École Polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement. Paris: Gauthier-Villars. 4⁰. (2) **17.**

J. für Math.: Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A. L. Crelle 1826. Herausgegeben unter Mitwirkung der Herren Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz von K. Hensel. Berlin: G. Reimer. 4⁰. **142, 143.**

Il Pitagora. Giorn. mat. delle scuole secondarie. Pubblicato per cura da G. Fazzaro. Palermo. **19, 20.**

Indian Math. Soc. J.: The Journ. of the Indian Mathematical Society. Edited by M. T. Naraniengar. Hony, Joint Secretary. With the cooperation of R. P. Paranjpye, A. C. Wilkinson, and others. Madras. 8⁰. **5.**

Interméd. des math.: Intermédiaire des mathématiciens. Directeurs-rédacteurs: Ed. Maillet, A. Maluski, A. Boulanger. Paris: Gauthier-Villars. 8⁰. **19, 20.**

Johns Hopkins Univ. Circ.: Johns Hopkins University Circulars. Published with the approbation of the Board of Trustees. Baltimore. 8⁰. 1913, Nr. 7.

Journ. de Math.: Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par J. Liouville etc. Publié par C. Jordan avec la collaboration de G. Humbert, E. Picard, H. Poincaré. Paris: Gauthier-Villars. 4⁰. (6) **9.**

Journ. de Phys.: Journal de physique théorique et appliquée. Fondé par J. Ch. d'Almeida et publié par la Société française de Physique, Directeur de la publication: Amédée Guillet. Paris: Au Bureau du Journal de Physique. 8⁰. (5) **3.**

Krak. Anz.: Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie. Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. 8⁰. (A) 1913.

Leipz. Abh.: Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Leipzig: B. G. Teubner. 4⁰. **32.**

Leipz. Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Leipzig: B. G. Teubner. 8⁰. **65.**

Leop. Nova Acta: Nova Acta Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae Germanicae Naturae Curiosorum. Abhandlungen der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Halle. 4⁰.

Leopoldina: Leopoldina. Amtliches Organ der Kais. Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Herausgegeben von A. Wangerin. Halle a. S. gr. 4⁰. **49.**

Liége Mém.: Mémoires de la Société Royale des sciences de Liége. Bruxelles: Hayez; Paris: Roret. (3) **9.**

Lomb. Ist. Rend.: Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti: Milano: U. Hoepli. 8⁰. (2) **46.**

Lond. M. S. Proc.: Proceedings of the London Mathematical Society. London. F. Hodgson. gr. 8⁰. (2) **11, 12, 13.**

Lond. Phil. Trans.: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. 4⁰. (A) **212, 213.**

Lond. R. S. Proc.: Proceedings of the Royal Society of London. London. 8⁰. (A) **88, 89.**

Loria Boll. bibl.: Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di Gino Loria. Torino: Carlo Clausen. 8⁰. **15.**

Manchester Mem. and Proc.: Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society. 8⁰. **57.**

Math. Ann.: Mathematische Annalen. Begründet 1868 durch A. Clebsch und C. Neumann. Unter Mitwirkung der Herren P. Gordan, O. Hölder, C. Neumann, M. Noether, K. Von der Mühll, H. Weber gegenwärtig herausgegeben von F. Klein, W. von Dyck, D. Hilbert, O. Blumenthal. Leipzig: B. G. Teubner. 8⁰. **73, 74.**

Math. és phys. lapok: Mathematikai és physikai lapok. (Ungarisch.) Budapest. 8⁰. **22, 23.**

Math. és termész. ért.: Mathematikai és természettudományi értesitö. (Ungarisch.) Budapest. **31.**

Mathesis: Mathesis, Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne publié par P. Mansion et J. Neuberg avec la collaboration de plusieurs professeurs belges et étrangers. Paris: Gauthier-Villars. Gand: Hoste. 8⁰. (4) **3.**

Math. Gazette: The Mathematical Gazette, edited by W. J. Greenstreet. London: George Bell & Sons. 8⁰. **6, 7.**

Math. naturw. Bl.: Mathematisch-naturwissenschaftliche Blätter. Organ des Verbandes mathematischer und naturwissenschaftlicher Vereine an deutschen Hochschulen. Leipzig: B. G. Teubner. 4⁰. **10.**

Math.-naturw. Mitt.: Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen. Im Auftrag des mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins in Württemberg herausgegeben von A. Schmidt, A. Haas, E. Wölffing. Stuttgart: J. B. Metzler. 8⁰. (2) **15.**

Mem. della Soc. It.: Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle scienze (detta dei XL). Roma. (3) **18.**

Messenger: The Messenger of Mathematics. Edited by J. W. L. Glaisher. London and Cambridge: Macmillan and Co. 8⁰. (2) **42, 43.**

Meteorol. Zs.: Meteorologische Zeitschrift. Herausgegeben im Auftrage der k. k. österreich. Gesellschaft für Meteorologie und der deutschen Meteorol. Gesellschaft, redigiert von J. Hann und R. Süring. Braunschweig: Friedr. Vieweg u. Sohn. Lex. 8⁰. **30.**

Mind: Mind. A quarterly review of psychology and philosophy. Edited by Prof. G. F. Stout. Published for the Mind Association by Macmillan & Co., London and New York. New Series. **22.**

Mitteil. Ver. Ing. östr. Staatsb.: Mitteilungen des Vereins der Ingenieure der k. k. österreichischen Staatsbahnen. Herausgegeben vom Zentralausschuß. Linz a/D. Druck der ob.-östr. Buchdruckerei und Verlagsgesellschaft. 4⁰. **10.**

Modena Mem.: Memorie della Regia Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena. Modena. 4⁰. (3) **10.**

Monatsh. f. Math.: Monatshefte für Mathematik und Physik. Mit Unterstützung des hohen K. K. Ministeriums für Kultus und Unterricht herausgegeben von G. v. Escherich, F. Mertens und W. Wirtinger in Wien. Wien. 8⁰. **24.**

Monist: The Monist. A quarterly Magazine devoted to the philosophy of science. Editor Paul Carus. Chicago: The Open Court Publishing Co. London: Kagan Paul, Trench, Trübner and Co. **23.**

Monthly Notices: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. London. 8⁰. **73. 74.**

Münch. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Zweite Klasse. München. 4⁰. **26.**

Münch. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. München. 8⁰. 1913.

Napoli Atti: Società reale di Napoli. Atti della Reale Accademia delle scienze fisiche e matematiche. Napoli. 4⁰. (2) **15.**

Napoli Rend.: Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Napoli. 4⁰. (3) **19.**

Nature: Nature, a weekly illustrated journal of science. London and New York: Macmillan and Co. 4⁰. **90, 91, 92.**

Naturwissensch.: Die Naturwissenschaften. Berlin: Julius Springer. 4⁰. **1.**

Nieuw Archief: Nieuw Archief voor wiskunde uitgegeven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam onder redactie van J. C. Kluyver, D. J. Korteweg en P. H. Schoute. Amsterdam: Delsmann en Nothenius. 8⁰. (2) **10.**

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux Écoles spéciales à la licence et à l'agrégation, rédigé par C. A. Laisant, C. Bourlet et R. Bricard. Paris: Gauthier-Villars. 8⁰. (4) **13.**

Nuovo Cimento: Il Nuovo Cimento. Giornale fondato da C. Matteucci e R. Piria. Organo della Società Italiana di Fisica, publ. per cura dei Direttori A. Battelli, A. Ròiti, V. Volterra e del delegato della Società G. P. Grimaldi. Pisa. gr. 8⁰. (6) **5, 6.**

Nyt Tidsskr. for Math.: Nyt Tidsskrift for Mathematik. Redigeret af P. T. Fold erg og C. Juel. (Abteilung A für elementare, B für höhere Mathematik.) Kjöbenhavn. 8⁰. **24.**

Open Court: The Open Court. A monthly magazine devoted to the science of religion, the religion of science, and the extension of the religions parliament idea. Editor: Paul Carus. Chicago: The Open Court Company. **27.**

Östr. Wochenschr. f. d. öffentl. Baudienst: Österreichische Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst. Amtliches Fachblatt, herausgegeben von den k. k. Ministerien für öffentliche Arbeiten, der Finanzen, des Handels, der Eisenbahnen und des Ackerbaues. Wien: Druckerei- und Verlagsaktiengesellschaft R. v. Waldheim. Jos. Eberle & Co. 4⁰. **18.**

Östr. Zs. f. Vermessw.: Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen. Organ des Vereins der österreichischen k. k. Vermessungsbeamten. Redigiert von E. Doležal und S. Wellisch. Herausgeber und Verleger: Verein der österreichischen k. k. Vermessungsbeamten. Druckerei: Joh. Wladacz. Baden N. Ö. 8⁰. **10.**

Östr. Flugzs.: Österreichische Flugzeitschrift. Organ der k. k. flugtechnischen Vereine in Wien. Chefredakteur: A. Budau. Herausgegeben vom k. k. flugtechnischen Verein. Druck von Otto Maaß Söhnen. Wien. 4⁰. 1913.

Östr. Mittelsch.: Österreichische Mittelschule der Vereine „Mittelschule" und „Realschule" in Wien. Wien: Alfred Hölder. 8⁰. **26, 27.**

Palermo Rend.: Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Direttore: G. B. Guccia. Palermo. gr. 8⁰. **35, 36.**

Periodico di Mat.: Periodico di matematica per l'insegnamento secondario fondato da D. Besso, continuato da A. Lugli ed attualmente diretto dal Dott. G. Lazzeri. Livorno. 8⁰. **28, 29.** [(3) **10, 11.**]

Phil. Mag.: The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science. Conducted by Sir O. J. Lodge, Sir J. J. Thomson, J. Joly, G. C. Foster, W. Francis. London. 8⁰. (6) **25, 26.**

Phys. Rev.: The Physical Review, a journal of experimental and theoretical physics. Conducted with the co-operation of the American Physical Society by E. L. Nichols, E. Merritt, F. Bedell. Lancaster, Pa., and Ithaca, N. Y. 8⁰. **35.** (2) **1.**

Physik. Zs.: Physikalische Zeitschrift. Herausgegeben von E. Riecke und H. Th. Simon. Redaktion: F. Krüger. Leipzig: S. Hirzel. 4⁰. **14.**

Poske Zs.: Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. Unter der besonderen Mitwirkung von E. Mach herausgegeben von F. Poske. Berlin: J. Springer. gr. 8⁰. **26.**

Pr. = Programmabhandlung, *Gymn.* = Gymnasium, *Realgymn.* = Realgymnasium, etc. 1913.

Prace mat.-fiz.: Prace matematyczno-fizyczne. (Mathematische und physikalische Abhandlungen, herausgegeben in Warschau von S. Dickstein, W. Gosiewski, E. u. W. Natanson.) gr. 8⁰. (Polnisch.) **22, 23.**

Prag. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 8⁰. 1913.

Proc. Aristot. Soc.: Proceedings of the Aristotelian Society. Containing the papers read before the Society. London: Williams and Norgate. New Series. **13.**

Quart. J.: The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Edited by J. W. L. Glaisher. London. 8⁰. **44, 45.**

Rev. Acad. Madrid: Revista de la Real Academia de Ciencias exactas, fisicas y naturales de Madrid. **11.**

Rev. Soc. mat. esp.: Revista Sociedad matemática española. Revista mensual publicada por el Comité de redacción y por los secretarios de la S. M. E. Redacción y domicilio social San Bernardo, 51, Madrid. 8⁰. **2, 3.**

Revue de Math. spéc.: Revue de Mathématiques spéciales rédigée par MM. E. Humbert et G. Papelier avec la collaboration de MM. etc. Paris: Vuibert et Nony. 4⁰. **23, 24.**

Rev. de métaph. et de mor.: Revue de métaphysique et de morale. **21.**

Revue des Quest. sc.: Revue des Questions scientifiques, publiée par la Société scientifique de Bruxelles. Louvain: Secrétariat de la Société scientifique. gr. 8⁰. (3) **23, 24.**

Revue scientifique: Revue scientifique. Directeur: M. Ch. Richet. Paris: L. Baudouin. 8⁰. (5) **19, 20.**

Rom. Acc. L. Mem.: Memorie della Reale Accademia dei Lincei. Roma. gr. 4⁰. (5).

Rom. Acc. L. Rend.: Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Roma. 4⁰. (5) **22.** (Je zwei Semester, unterschieden als $\mathbf{22}_1$ und $\mathbf{22}_2$.)

Rom. Acc. P. d. N. L. Atti: Atti dell' Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei. Roma. 4⁰. **64.**

Rom. Acc. P. d. N. L. Mem.: Memorie dell' Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei. Roma. 4⁰.

Rozpravy: Rozpravy české Akademie císaře Frantiska Josefa pro vědy, slovesnost a umění (II. Cl.). Prag. (Böhmisch.) (Dazu: *Bulletin international.* **18.** Résumés des travaux présentés. Classe des sciences mathématiques et naturelles. — Académie des Sciences de l'Empereur François Joseph I.) **29.**

Science (N. S.): Science. A weekly journal devoted to the advancement of science. Published weekly by The Macmillan Company New York. 4⁰ (New Series). **38.**

Sitzungsber. Berl. Math. Ges.: Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft. (Im Arch. d. Math. u. Phys.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. 8⁰. **12.**

S. M. F. Bull.: Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires. Paris. 8⁰. **41.**

Suppl. al Period.: Supplemento al Periodico di Matematica. Direttore: G. Lazzeri. Livorno: R. Giusti. 8⁰. **16, 17.**

Suppl. Vriend der Wisk.: Supplement op „De Vriend der Wiskunde". Onder redactie van A. J. van Breen, G. N. L. H. de Laive en J. J. C. Westendorp. Culemborg: Blom en Olivierse. 8⁰. **25.**

Techn. Blätter: Technische Blätter. Zeitschrift des deutschen polytechnischen Vereins für Böhmen. Redigiert von Hugo Fuchs. Selbstverlag des Vereins. Prag: J. G. Calversche Hof- und Universisätsbuchhandlung: J. Koch. 8⁰. **44.**

Tôhoku Math. J.: The Tôhoku Mathematical Journal. Edited by T. Hayashi with the cooperation of M. Fujiwara, J. Ishiwara, T. Kubota, S. Kakeya, K. Ogura. Sendai, Japan. 8⁰. **3, 4.**

Tôhoku Science Rep.: The science reports of the Tôhoku Imperial University. First series (mathematics, physics, chemistry). Sendai, Japan. 4⁰. **1, 2.**

Tokyo Math. Ges.: Tôkyô sûgaku buturigakkwai kizi. (Zeitschrift der Physiko-Mathematischen Gesellschaft in Tokyo. Englisch und Japanisch.) Tokyo. 8⁰. (2) **7, 8.**

Torino Atti: Atti della Reale Accademia di Torino. Torino: C. Clausen. 8⁰. **48.**

Torino Mem.: Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino. Torino: C. Clausen. 4⁰. (2) **63.**

Toulouse Ann.: Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées par un comité de rédaction composé des professeurs de mathématiques, de physique et de chimie de la Faculté etc. Paris: Gauthier-Villars. 4⁰. (3) **3**.

Ungar. Ber.: Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ung. Akademie der Wissensch. und der Königl. Ung. naturwissenschaftlichen Gesellschaft herausgegeben von Baron R. Eötvös etc. Redig. v. J. Kürschák u. Fr. Schafarzik. Leipzig: B. G. Teubner. 8⁰. **26**, **27**.

Unterrichtsbl. f. Math.: Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. Herausgegeben von A. Thaer. Berlin: O. Salle. 4⁰. **19**.

Ven. Ist. Atti: Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 8⁰. **72** [(8) **15**].

Verh. Deutsche Phys. Ges.: Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Jahre 1913. Im Auftrage der Gesellschaft herausgegeben von K. Scheel. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn. 8⁰. **15**.

Verh. Naturf. Ges.: Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte zu Münster i. W. (1912). Herausgegeben von A. Witting. Leipzig: F. C. W. Vogel. **1**, **2**.

Vierteljahrsschr. Astr. Ges.: Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von den Schriftführern der Gesellschaft R. Lehmann-Filhés und G. Müller. Leipzig: W. Engelmann. 8⁰. **48**.

Vriend der wiskunde: De vriend der wiskunde. Tijdschrift voor allen, die examen in dat vak moeten afleggen. Onder redactie van A. J. van Breen, G. L. N. H. de Laive en J. J. C. Westendorp. Culemberg: Blom & Olivierse. **27**.

Wektor: Wektor, mathematisch-physikalische Zeitschrift (Polnisch). Warszawa **1**, **2**, **3**. (1911—1913).

Wiad. Mat.: Wiadomosci Matematyczne. Redactor i Wydawca S. Dickstein. Warszawa. (Polnisch.) 8⁰. **17**.

Wien. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Zweite Abteilung. Wien. 8⁰. **122**.

Wisk. Tijdschr.: Wiskundig Tijdschrift. Onder redactie van F. J. Vaes, C. Krediet, N. Quint. Haarlem: P. Visser Azn. 8⁰. **10**.

Wiskundige Opgaven: Wiskundige Opgaven. Opgaven met de oplossingen van het Wiskundig Genootschap ter spreuke voerende „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven“. Amsterdam: Delsman en Nothenius. 8⁰. **11**.

Zs. f. Math. u. Phys.: Zeitschrift für Mathematik und Physik. Begründet 1856 durch O. Schlömilch. Organ für angewandte Mathematik. Gegenwärtig unter Mitwirkung von C. von Bach usw. herausgegeben von R. Mehmke und C. Runge. Leipzig: B. G. Teubner. 8⁰. **61**, **62**.

Zs. f. Vermessw.: Zeitschrift für Vermessungswesen. Organ des deutschen Geometervereins. Herausgegeben von C. Steppes. Stuttgart: Konrad Wittwer. 8⁰. **42**.

Zs. f. math. u. naturw. Unterr.: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Begründet 1869 und bis 1901 herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Gegenwärtig herausgegeben unter Mitwirkung der Herren usw. von H. Schotten. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. 8⁰. **44**.

Zs. f. d. Realschulw.: Zeitschrift für das Realschulwesen. Herausgegeben und redigiert von E. Czuber, Ad. Bechter, M. Glöser. Wien: Alfred Hölder. 8°. **37**:

Zs. f. d. östr. Gymn.: Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien. Wien. Alfred Hölder. 8°. **63**.

Zs. östr. Ing. u. Archit. Ver.: Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. Schriftleiter: Hermann Paul. Wien: Verlag für Fachliteratur. 4°. **64**.

Zürich. Naturf. Ges.: Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Herausgegeben unter Mitwirkung etc. von F. Rudio. Zürich. 8°. **58**.

Inhaltsverzeichnis.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.)

Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

Kapitel 1. Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

B. Geschichte einzelner Disziplinen.

Kapitel 2. Philosophie, Mengenlehre und Pädagogik.

A. Philosophie.

B. Mengenlehre.

C. Pädagogik.

Zweiter Abschnitt. Algebra.

Kapitel 1. Gleichungen, universale Algebra und Vektoranalysis.

A. Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transzendente Gleichungen.)

B. Universale Algebra und Vektoranalysis.

Kapitel 2. Theorie der Formen (Invariantentheorie).

A. Theorie der algebraischen Formen.

B. Differentialinvarianten.

Kapitel 3. Substitutionen, und Gruppentheorie, Determinanten, Elimination und symmetrische Funktionen.

A. Substitutionen und Gruppentheorie.

B. Determinanten.

C. Elimination und symmetrische Funktionen.

Dritter Abschnitt. Niedere und höhere Arithmetik.

Kapitel 1. Niedere Arithmetik.

Kapitel 2. Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

B. Theorie der Formen.

Kapitel 3. Kettenbrüche.

Vierter Abschnitt.

Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Kapitel 1. Allgemeines.

Kapitel 2. Besondere Reihen.

Seite

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Kapitel 1. Allgemeines (Lehrbücher usw.).

Kapitel 2. Differentialrechnung (Differentiale, Funktionen von Differentialen. Maxima und Minima).

Kapitel 3. Integralrechnung.

Kapitel 4. Bestimmte Integrale.

Kapitel 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen und Funktionalgleichungen.

A. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

B. Funktionalgleichungen.

Seite

Kapitel 6. Partielle Differentialgleichungen.

Kapitel 7. Variationsrechnung.

Siebenter Abschnitt. Funktionentheorie.

Kapitel 1. Allgemeines.

Kapitel 2. Besondere Funktionen.

A. Elementare Funktionen, Gammafunktionen und hypergeometrische Reihen.

B. Elliptische Funktionen.

C. Hyperelliptische, Abelsche und verwandte Funktionen.

Seite

D. Kugelfunktionen und verwandte Funktionen.

Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Kapitel 1. Prinzipien der Geometrie.

Seite

Kapitel 3. Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

Kapitel 4. Darstellende Geometrie.

C. Besondere räumliche Gebilde.

D. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

Kapitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen.

B. Theorie der algebraischen Raumkurven und Flächen.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

D. Andere spezielle Raumgebilde.

E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

Kapitel 4. Liniengeometrie (Komplexe, Strahlensysteme).

Kapitel 5. Verwandtschaft, Transformationen, Abbildungen.

A. Allgemeines.

B. Konforme Abbildungen und dergleichen.

Seite

Zehnter Abschnitt. Mechanik.

Kapitel 1. Allgemeines (Lehrbücher, Prinzipien usw.).

Kapitel 2. Kinematik.

Kapitel 3. Statik.

A. Statik fester Körper.

B. Hydrostatik.

Kapitel 4. Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

B. Hydrodynamik.

C. Aerodynamik.

Kapitel 5. Potentialtheorie.

Elfter Abschnitt. Mathematische Physik.

Kapitel 1. Molekularphysik, Kapillarität, Elastizität, Akustik.

A. Molekularphysik und Allgemeines.

B. Kapillarität.

Seite

C. Elastizität.

D. Akustik.

Seite

Kapitel 2. Optik.

A. Theoretische Optik.

B. Geometrische Optik.

Kapitel 3. Elektrizität und Magnetismus.

Kapitel 4. Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

Kapitel 2. Astronomie.

Anhang.

Verzeichnis

der Mitarbeiter, die für den vierundvierzigsten Band Berichte geliefert haben.

(Die Verantwortung für den Inhalt der Berichte tragen die Mitarbeiter. Die in Klammern gesetzten Buchstaben bezeichnen den Übersetzer der nicht deutsch eingesandten Berichte.)

A. K. Herr Prof. A. Korn Charlottenburg.
A. R. „ Dr. A. Rosenblatt Krakau.
B. „ Prof. Beck Bonn.
Ba. „ Dr. Baruch Berlin.
Bi. „ Prof. Bieberbach Frankfurt a. M.
Bl. „ Prof. Blaschke Königsberg i. Pr.
Brw. „ Prof. Brouwer Amsterdam.
C. „ Dr. Cauer im Felde.
Dz. „ Prof. Dziobek Charlottenburg.
E. „ Prof. Eneström Stockholm.
E. J. „ Dr. E. Jacobsthal Berlin.
El. „ Prof. Engel Gießen.
Fa. „ Prof. Faber München.
Fr. „ Dr. Freundlich Neubabelsberg.
Fs. „ Prof. Fuchs Halensee.
Fu. „ Prof. Fueter Zürich.
Gd. „ Dr. Gaedecke Wilmersdorf.
Gs. „ Dr. Groß Wien.
Gz. „ Prof. Gutzmer Halle a. S.
Hn. „ Prof. Hahn Bonn.
Hng. „ Prof. Hellinger Frankfurt a. M.
J. „ Dr. Jourdain Cambridge.
Jhk. „ Prof. Jahnke Berlin
Kb. „ Prof. Koebe Jena
K. K. „ Prof. K. Knopp Berlin.
Kr. „ Prof. Krazer Karlsruhe.
La. „ Prof. Loria Genua.
Lp. Herr Prof. Lampe Berlin.
Ltn. „ Prof. Lichtenstein Charlottenburg.
Lw. „ Oberl. Löwenheim Berlin.
M. „ Geheimr. Michaelis † Berlin.
Mn. „ Prof. Mansion Gent.
My. „ Prof. W. Fr. Meyer Königsberg i. Pr.
Pe. „ Prof. Petr Prag.
P. H. „ Prof. P. Heegaard Kopenhagen.
Pz. „ Dr. Petzold Friedenau.
Re. „ Prof. Rothe Charlottenburg.
Rr. „ Prof. Reißner Charlottenburg.
Rtt. „ Obering. Rotth Berlin.
Sa. „ Dr. Sagert Berlin.
Schn. „ Prof. Schouten Delft.
Schr. „ Prof. v. Schrutka Brünn.
Se. „ Dr. Seeliger im Felde.
Sk. „ Prof. Salkowski im Felde.
S. L. = S. Lo. Herr Dr. S. Loria Krakau.
St. Herr Prof. Stäckel Heidelberg.
Stz. „ Prof. Steinitz Breslau.
T. „ Prof. Toeplitz Kiel.
Vi. „ Prof. Vivanti Pavia.
Wbg. „ Prof. Wallenberg Berlin.
Wn. „ Prof. Wangerin Halle a. S.
Z. „ Dir. Dr. Zühlke Landeshut.
Zch. „ Prof. Zacharias Berlin.
Zö. „ Dr. Zöllich Charlottenburg.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagsbuchhandlung oder unter der Anschrift:
Prof. Dr. Lampe, Berlin W. 15, Fasanenstr. 64.

Erster Abschnitt.

Geschichte und Philosophie.

Kapitel 1.

Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

G. Eneström. Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik". Bibl. Math. (3) **14**, 63-83.

22 Bemerkungen als Fortsetzung der Reihe, die im ersten Bande der dritten Folge der „Bibliotheca mathematica" begann (vgl. F. d. M. **43**, 1, 1912).
E.

E. Gerland. Geschichte der Physik. Erste Abteilung: Von den ältesten Zeiten bis zum Ausgange des achtzehnten Jahrhunderts. Für die Drucklegung durchgesehen von H. v. Steinwehr. Auf Veranlassung und mit Unterstützung Seiner Majestät des Königs von Bayern Maximilian II. herausgegeben durch die Historische Kommission bei der Königl. Akademie der Wissenschaften. München u. Berlin: R. Oldenbourg. VIII u. 762 S. gr. 8°.

Der Gegentitel des Bandes lautet: „Geschichte der Wissenschaften in Deutschland. Neuere Zeit. Vierundzwanzigster Band. Geschichte der Physik. Erste Abteilung." Das Vorwort berichtet über die Entstehung der Schrift: „Als letztes Glied einer im übrigen längst abgeschlossenen, von der Historischen Kommission bei der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften herausgegebenen Sammlung von Werken, welche die Geschichte der Wissenschaften umfaßt, erscheint, leider unvollendet, die hier vorliegende Geschichte der Physik von Ernst Gerland. Ein besonderes Mißgeschick, welches die Entstehung dieses Werkes von Anfang an verfolgte, hat das verspätete Erscheinen dieses Nachzüglers verschuldet. Waren doch bereits zwei Autoren, Karsten und Heller, welche die Ausführung dieser weitaussehenden Arbeit unternommen hatten, gestorben, ohne über die ersten Vorarbeiten hinausgekommen zu sein, als seitens der Historischen Kommission an Gerland die Aufforderung erging, eine Geschichte der Physik zu schreiben. Aber auch ihm war es nicht vergönnt, ein Werk zu vollenden, das auszuführen er sowohl durch zahlreiche eigene Forschungen, als auch durch zusammenfassende Darstellungen, wie seine kleine „Geschichte der Physik" und die in Gemeinschaft mit Traumüller verfaßte „Geschichte der physikalischen Experimentierkunst" besonders berufen erschien. Mitten aus der Arbeit heraus entriß ihn ein uner-

P. Duhem. Le système du monde. Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic. Tome premier. Paris: A. Hermann. VIII + 512 S. gr. 8°.

Das Buch ist uns nicht zugegangen. Besprechungen befinden sich im Bull. des sciences math. (2) **38**, 193-199 (G. Loria) und im Arch. d. Math. u. Phys. (3) **24**, 168-169 (H. Wieleitner). Aus der letzteren entnehmen wir folgende Sätze: „Das Werk, das mit Unterstützung des Institut de France und des Unterrichtsministeriums herauskam, soll nach dem kurzen Vorwort einen großen Umfang erhalten. Der vorliegende erste Band behandelt in der Tat nur die griechische Kosmologie vom Zentralfeuer der Pythagoreer an über die Sphären des Eudoxos und Aristoteles bis zu den Epizykelsystemen des Hipparchos und Ptolemaios. Wie Duhem zur Abfassung dieses Werkes kam, ist leicht für den zu erkennen, der seine letzten großen Arbeiten verfolgte. . . . Sie haben ihn schon zum Studium der ganzen antiken und mittelalterlichen Literatur der Physik und Philosophie veranlaßt. Hiervon sind aber die kosmologischen Theorien untrennbar, und es ist daher nur eine Erweiterung dieser Forschungen, wenn Duhem es jetzt unternimmt, die Entwicklung der menschlichen Ideen in Hinsicht auf das Weltgebäude zu schildern. Die Kontinuität dieser Entwicklung zu betonen, zu beweisen, daß die moderne Wissenschaft unmöglich wäre ohne die Antike und ohne die Scholastik, ist auch hier, wie in den früheren Werken, Duhems Hauptgesichtspunkt. . . . Ein mit ungeheurem Fleiß aus den ersten Quellen erarbeitetes Werk liegt vor uns.“

Lp.

D. J. Rey-Pastor. Discurso leido en la solemne apertura del curso académico de 1913 á 1914. Los matemáticos españoles del siglo XVI. Oviedo. 75 S. 4°.

Diese Eröffnungsrede beschäftigt sich mit dem mathematischen Teile des Buches von A. F. Vallín: „Cultura científica de España en el siglo XVI“ (F. d. M. **25**, 5, 893), um die von Eneström bei der Besprechung jenes Buches in Bibl. Math. 1894 aufgeworfene Frage zu beantworten: „Welches sind die wissenschaftlichen Verdienste der spanischen Mathematiker des sechzehnten Jahrhunderts?“ Das Ergebnis der recht mühevollen Arbeit ist, wie fast zu erwarten war, nicht schmeichelhaft für Spanien. Eneström, der in Bibl. Math. (3) **14**, 85-90 eine eingehende Besprechung der Rede veröffentlicht hat, sagt (S. 89): „Obgleich das Ergebnis der ganzen Untersuchung wesentlich negativ ist, muß es doch als wertvoll betrachtet werden, weil dadurch Behauptungen früherer Historiker ergänzt und berichtigt werden. Wie der Verf. selbst S. 29 bemerkt, würde es ebenfalls von Interesse sein, näher zu untersuchen, ob vielleicht einzelne Sätze der spanischen Mathematiker wenigstens bis zu einem gewissen Grade verdienen können, in der Geschichte der Mathematik erwähnt zu werden.“

Wegen der Ausstellungen gegen Einzelheiten der Schrift ist die mit bekannter Sorgfalt und Sachkenntnis geschriebene Rezension von Eneström zu vergleichen.

Lp.

J. L. Heiberg. Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii iterum edidit J. L. Heiberg. Lipsiae in aedibus B. G. Teubneri. Vol. I.: XI + 445 S. (1910); Vol. II: XVIII + 554 S. (1913) kl. 8°.

Über die erste Auflage der von Heiberg herausgegebenen Archimedis opera ist F. d. M. **13**, 2-4, 1881 berichtet worden. Die inzwischen von Heiberg gemachten bedeutsamen Funde, über die F. d. M. **38**, 6, 1907 Näheres mitgeteilt ist, sowie umfassende Vergleichungen der vorhandenen Kodexe machten es wünschenswert, daß der verdiente Gelehrte eine vollständige Neuausgabe veranstaltete, in der er seine reichen Kenntnisse auch für die Kritik der früher schon bekannten Schriften des Archimedes verwerten konnte. So konnte denn der Verlagskatalog, den die Teubnersche Buchhandlung zur Internationalen Mathematikerversammlung zu Cambridge 1912 veranstaltete, bei der Ankündigung der neuen Auflage sagen: „Der kritische Apparat der neuen Ausgabe ist gänzlich umgestaltet. Die Grundlage der ersten Ausgabe Laur. 28, 4 ist durch den aus vier Abschriften (Laur. 28, 4, Marc. 305, Pariss. 2360 und 2361) wiederhergestellten cod. Georgii Vallae ersetzt worden; hinzu kommen die Lesarten des neu aufgefundenen Constantinopolitanus und der Übersetzung Wilhelms van Moerbek (nach seinem Originalexemplar Ottob. lat. 1850), die so wortgetreu ist, daß sie sich einfach kollationieren ließ. In der Behandlung des Dialekts ist größere Zurückhaltung geübt worden; die Übersetzung ist verbessert, und die Anmerkungen sind revidiert."

Der erste Band enthält: De sphaera et cylindro libri II (S. 1-229). Dimensio circuli (S. 231-243). De conoidibus et sphaeroidibus (S. 245-445).

Der zweite Band umfaßt: De lineis spiralibus (S. 1-121). De planorum aequilibriis libri II (S. 123-213). Arenarius (S. 215-259). Quadratura parabolae (S. 261-315). De corporibus fluitantibus libri I-III (S. 317-413). Stomachion (S. 415-424). De mechanicis propositionibus ad Eratosthenem methodus (S. 425-507). Liber assumptorum (S. 509-525). Problema bovinum (S. 527-534). Fragmenta (S. 535-554).

Dem griechischen Text ist die lateinische Übersetzung gegenübergestellt. Unter sorgfältiger Schonung des ursprünglichen Stils und des Ganges der Beweise sind manchmal die jetzt gebräuchlichen mathematischen Bezeichnungen benutzt und Figuren hinzugefügt. Der kritische Apparat ist in die Fußnoten verwiesen. Am Schluß der Anzeige des ersten Bandes im Bull. des sciences math. (2) **35**, 155-156, 1911 sagen die französischen Rezensenten, daß diese Erklärungen zeigen, mit welcher Gewissenhaftigkeit, Gelehrsamkeit und Sorgfalt Heiberg die schwere und heikle Arbeit vollbracht hat, die er unternommen hatte. Somit muß man seine Veröffentlichung als die beste und vollständigste Ausgabe ansehen. Lp.

Sir Thomas L. Heath. Archimedes' Werke. Mit modernen Bezeichnungen herausgegeben und mit einer Einleitung versehen. Deutsch von Dr. Fritz Kliem. Berlin: O. Häring. XII u. 477 S. gr. 8° (1914).

Die englische Herausgabe der Heathschen Bearbeitung der Werke des Archimedes ist F. d. M. **27**, 4, 1896 angezeigt. Als Ergänzung hierzu hat Heath eine freie Fassung der 1906 von Heiberg entdeckten und ins Deutsche übertragenen Methodenlehre veröffentlicht (F. d. M. **43**, 7, 1912). Unter Hinzufügung dieses Nachtrages hat nun Kliem seine Übersetzung der Werke des großen Griechen angefertigt. Die auf Grund der Heibergschen Funde notwendig gewordenen Änderungen in der Einleitung hat der englische Verf. selbst vorgenommen.

Das Buch zerfällt in die große „Einleitung“ (S. 1-152) und die vorhandenen Schriften des Archimedes. In dem ersten Teil verbreitet sich der gelehrte Forscher, gegenwärtig der beste englische Kenner der altgriechischen Mathematik, über das Leben und die Werke von Archimedes in den Kapiteln: I. Archimedes. II. Handschriften und wichtigste Ausgaben. Reihenfolge der Abfassung. Dialekt. Verlorene Werke. III. Archimedes' Beziehungen zu seinen Vorgängern. IV. Arithmetik bei Archimedes. V. Über die als νεύσεις bekannten Probleme. VI. Kubische Gleichungen. VII. Antizipationen der Integralrechnung bei Archimedes.

Die Schriften sind dann in der Reihenfolge abgedruckt: 1. Über Kegel und Zylinder. 2. Die Kreismessung. 3. Über Konoide und Sphäroide. 4. Über Spiralen. 5. Über das Gleichgewicht von Ebenen. 6. Die Sandrechnung. 7. Quadratur der Parabel. 8. Über schwimmende Körper. 9. Archimedes' Methode, mechanische Sätze behandelnd — an Eratosthenes. 10. Stomachion (Fragmente). 11. Buch der Hülfssätze. 12. Die Rinderaufgabe.

Von deutschen Übersetzungen der Werke des größten griechischen Mathematikers gab es bisher nur zwei: die von Joh. Christ. Sturm (Nürnberg, 1670) und die von Ernst Nizze (Stralsund, 1824). Wenn wir jetzt neben der wissenschaftlich höchststehenden Ausgabe im griechischen Urtexte mit lateinischer Übersetzung eine deutsche Übersetzung des Heathschen Buches erhalten, so ist dies zwar nicht eine an den griechischen Text sich eng anschließende Übersetzung der Schriften des Archimedes. Aber die den Mathematikern der Neuzeit in der Form leichter verständliche Darstellung der Sätze und ihrer Beweise dürfte dazu dienen, die Kenntnis vom Wesen der Archimedischen Forschung allen zu vermitteln, die Neigung zu solchen für die Geschichte der Mathematik wichtigen Studien haben, aber nicht die Zeit besitzen, sich in die bei Archimedes übliche Form der Betrachtung und Sprechweise einzugewöhnen. Bei den wichtigen Schriften ist übrigens ein enger Anschluß an die Darstellung des Urtextes gewahrt geblieben. In der Sandrechnung jedoch und in der Rinderaufgabe ist nicht viel von der ursprünglichen Fassung beibehalten. Für solche Leser, die gern den ganzen Archimedes, so viel von ihm übrig ist, besitzen möchten, wäre es vielleicht angezeigt gewesen, daß der deutsche Übersetzer in einem Nachtrag den aus dem Englischen übernommenen Text durch eine Übertragung der bezüglichen Stellen aus der Heibergschen Ausgabe ergänzt hatte. Dies wäre aber vielleicht dem Verf. nicht recht gewesen. Somit müssen wir zufrieden sein, das treffliche Werk von Heath als Führer in die Schriften des Archimedes empfehlen zu können. Lp.

P. Duhem. Études sur Léonard de Vinci. Troisième partie. Les précurseurs parisiens de Galilée. Paris: Hermann. XIV u. 605 S. 8°; Rom. Acc. L. Rend. **22**$_2$, 429-431.

Das Buch selbst hat der Schriftleitung nicht vorgelegen, sondern nur der Brief, den Duhem bei der Überreichung an die Accademia dei Lincei dem Präsidenten dieser Akademie gesandt hat. Dieser Brief enthält eine gedrängte Übersicht über die in dem Buche gewonnenen Ergebnisse. Drei Vorläufer von Galilei aus der Pariser Schule des vierzehnten Jahrhunderts werden als Vertreter der neuen Anschauungen der Mechanik genannt, die im völligen Gegensatz zu den Peripatetikern stehen: Jean Buridan, Albertus Saxo-

nicus, Nicole Oresme. Der erstere spricht das Trägheitsgesetz aus. Er gibt ihm eine Form, die Galilei unberührt bestehen läßt und deren Schärfe Descartes erst erhöht. „Wer ein Geschoß schleudert, verleiht ihm einen Impetus; dieser Impetus würde in dem Körper konstant bleiben, wenn die Schwere dieses Körpers und der Widerstand des Mediums ihn nicht unaufhörlich schwächten. Dieser Impetus ist das Produkt aus der Masse des Körpers, die Buridan so definiert, wie Newton es später tut, und aus einer wachsenden Funktion der Geschwindigkeit“. ... „Von diesem Trägheitsgesetz macht Buridan die Anwendung auf die Bahnen der Himmelskörper: zufolge dieses Gesetzes behalten diese unbeschränkt die Bewegung, die ihnen im Augenblicke der Schöpfung durch den anfänglichen Knips erteilt war. ... Zum ersten Male hörte man auf, die Bewegung der Gestirne der Einwirkung von Geisterwesen zuzuschreiben, von Denkwesen, die von der Materie getrennt sind.“ Die beiden anderen genannten Gelehrten führen die Buridansche Dynamik noch weiter fort; besonders kommt Albertus Saxonicus schon den Fallgesetzen sehr nahe; er schwankt zwischen $v = cs$ und $v = ct$. Diese Dynamik enthält im wesentlichen „die Prinzipien, die dazu berufen waren, von Galilei und von Descartes eine scharfe mathematische Gestalt und die experimentelle Bestätigung zu erhalten“. Lp.

C. G. Knott. The Napier tercentenary celebration. Math. Gazette **7**, 98-100.

Ankündigung der 1914 abzuhaltenden Feier, sowie des vorläufigen Entwurfes der Festordnung, zum Andenken an die Veröffentlichung der ersten Logarithmentafel. Lp.

Annonym. Merchiston Castle and John Napier. Reprinted from „The Merchistonian“ 1912/13, 14 S. 8°.

Diese Gelegenheitsschrift enthält im ersten Teile eine durch mehrere Abbildungen gezierte Beschreibung des Merchiston Castle, wo John Napier seinen ererbten Wohnsitz hatte. Der zweite Teil gibt einige kärgliche Nachrichten, zum Teil Anekdoten, über Napier und bringt zwei Bildnisse von ihm. Als Berichtigung vieler Angaben wird vermerkt, daß er sich von der Politik fernhielt und nicht den Titel eines Lord besaß: „Sein ältester Sohn Archibald Napier war der erste Lord Napier.“ Lp.

A. Favaro. Studi e ricerche per una iconografia galileiana. Ven. Ist. Atti **72** [(8) **15**], 995-1051.

Ursprünglich hatte Favaro ein Werk geplant, das neben den Bildnissen von Galilei auch die seiner Zeitgenossen, die mit ihm im Zusammenhang gewesen sind, bringen sollte. Wegen der Kostspieligkeit eines solchen Unternehmens hat er aber auf die Ausführung verzichtet. In dem vorliegenden Aufsatze berichtet er über die Ergebnisse seiner Forschungen bezüglich der Person Galileis. Nachdem im Vorwort Äußerungen von Zeitgenossen über das Aussehen Galileis wiedergegeben sind, folgen in drei Kapiteln (I. Gemälde und Stiche. II. Büsten und Denkmäler. III. Denkmünzen) die Nachrichten über Entstehung und Verbleib der einzelnen Bildwerke. Lp.

A. Favaro. Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XXIX. Vincenzio Viviani. Ven. Ist. Atti **72** [(8) **15**], 1-155. Mit Bildnis.

„Es ist nicht meine Absicht, eine wissenschaftliche Biographie Vivianis im strengen Sinne des Wortes zu liefern, einerseits, weil ich nicht die passende Gelegenheit dazu sehe, andererseits, weil sie nicht meinen ganz bescheidenen Zwecken entsprechen würde. Vor allem habe ich vor, volle Klarheit zu bringen in seine Beziehungen zu dem, dessen letzter Schüler zu sein er sich rühmte, ein Titel, den er jedem anderen unter denen vorzog, die er sich doch erworben hatte. Ferner über die mannigfachsten Arten, in denen er im Leben und im Tode den Kultus bekunden wollte, den er mit seinem Andenken trieb. Endlich auch will ich, wenn auch nur summarisch, die Beiträge erörtern, die er in den verschiedenen Zweigen des Wissens, denen er seine staunenswerte Tätigkeit widmete, geliefert hat. Da ich als letzter der Geschichtschreiber des Studiums zu Padua nun gefunden habe, daß er danach gestrebt hat, den Lehrstuhl zu erhalten, den sein Meister für Jahrhunderte mit einem Glorienschein umgeben hat, hielt ich es für nötig, diese Episode zu beleuchten, soweit sie zu meiner Kenntnis gelangt ist, während sie sowohl seinen Biographen als den Historikern der Universität unbekannt geblieben ist. Endlich, um eine Vorstellung zu geben von der wissenschaftlichen Arbeit, die er in seinem langen Leben entfaltet hat, habe ich es für passend gehalten, das Verzeichnis der Handschriften hinzuzufügen, die von ihm übriggeblieben sind und in der Nationalbibliothek von Florenz aufbewahrt werden. Und da ich nicht eine vollständige Übersicht über das Ganze seines aufgehäuften Briefwechsels vorlegen kann, habe ich wenigstens die Namen seiner Briefschreiber anmerken wollen. Beides habe ich in der Hoffnung getan, daß jemand durch das Verlangen gereizt werde, direkt zu diesen Quellen hinabzusteigen, um aus ihnen vieles hervorzuziehen, was dort begraben liegt und recht wert sein dürfte, um ans Licht gefördert zu werden."

Die einzelnen Teile der umfangreichen Schrift sind betitelt: I. Mit Galilei. II. Mit dem Söhnchen von Galilei. III. Mit Torricelli. IV. In der Accademia del Cimento. V. Die Vorlesung über Mathematik in dem Studium zu Padua. VI. Die Divination des Apollonius. VII. Andere geometrische Arbeiten im Druck. VIII. Nicht veröffentlichte geometrische Arbeiten. IX. Andere Studien und Arbeiten. X. Über die Erläuterung der Werke Galileis. XI. Über die „Vita" Galileis und die Ausgabe seiner Werke. XII. Zum Andenken Galileis. Anhang I. Viviani-Handschriften in der Galilei-Sammlung der Nationalbibliothek von Florenz. Anhang II. Briefschreiber Vivianis, aus seinem Briefwechsel entnommen. (Geb. zu Florenz 5. April 1622, gest. 22. September 1703 ebenda.) Lp.

J. Klug. Die nachgelassenen Schriften Dr. Emil Wohlwills. Arch. Gesch. d. Naturw. u. Techn. **6**, 216-221.

Bericht über den literarischen Nachlaß. Von dem in Aussicht genommenen zweiten Bande der Galilei-Biographie sind nur Bruchstücke vorhanden, die kurz aufgezählt werden. Klug ist mit der Durchsicht und der Veröffentlichung des Nachlasses betraut worden. Lp.

F. Poske. Galilei und der Kausalbegriff. Arch. Gesch. d. Naturw. u. Techn. **6**, 288-294.

„Es ist bei den Theoretikern des naturwissenschaftlichen Forschungsverfahrens neuerdings Mode geworden, den Kausalbegriff zum alten Eisen zu werfen. Man beruft sich dabei gern auf Gustav Kirchhoffs Scheu vor der metaphysischen Unklarheit, die ihm mit dem Kausalbegriff untrennbar verknüpft schien. P. Volkmann hat sogar versucht, diese moderne Kausalitätsauffassung auf unsere ältesten Klassiker, auf Galilei und Newton, zurückzuführen. In betreff Newtons mag die Behauptung einstweilen dahingestellt bleiben; in bezug auf Galilei läßt sie sich mit leichter Mühe als unzutreffend erweisen." Der Nachweis wird gerade an der Stelle der Discorsi geführt, die Volkmann als Stütze für seine Ansicht verwendet hat. Lp.

P. Richer. Sur l'identification du crâne supposé de Descartes par sa comparaison avec les portraits du philosophe. C. R. **156**, 188-191.

Im Museum der Académie des Beaux Arts zu Paris befindet sich ein Schädel, der als der von Descartes bezeichnet ist, dessen Identität aber schon vor etwa 100 Jahren angezweifelt ist. Damals hat Cuvier sich für die Echtheit ausgesprochen, während Delambre anderer Meinung war. Auf die Anregung von Darboux hat Richer jetzt eine neue Untersuchung vorgenommen und ist zu dem Ergebnis gelangt: „Der im Museum aufbewahrte Schädel besitzt eine absolute Ähnlichkeit mit dem, welchen das von Frans Hals angefertigte Bildnis umkleidet. Bei den anderen Bildnissen ist diese Ähnlichkeit zwar nicht ebenso vollständig, liefert aber nichtsdestoweniger einen neuen Beitrag zugunsten der Echtheit des Schädels." Lp.

Y. Mikami. Notes on the Portuguese astronomers in Japan. Ann. sc. Ac. Polyt. Porto **8**, 5-14.

Geschichtliches über den Astronomen Sawano Chian, einen im 17. Jahrhundert in Japan eingebürgerten Portugiesen, dessen wirklicher Name nicht bekannt ist. Vgl. „On an astronomical treatise composed by a Portuguese in Japan" (Nieuw Archief (2) **10**, 61-70; F. d. M. **43**, 80, 1912). Lp.

F. Rudio. Die Euler-Ausgabe (Fortsetzung). Zürich. Naturf. Ges. **58**, 431-437.

Bericht über den Stand der Herausgabe und die zur Beschaffung der Kosten getroffenen Schritte. In letzterer Beziehung ist abgedruckt der Aufruf zum Beitritt zu einer Leonhard Euler-Gesellschaft, die in der Schweiz zu dem Zweck der Unterstützung des Unternehmens gegründet ist. Ferner ist über die Nachforschungen nach Briefen von Leonhard Euler berichtet. Lp.

G. Eneström. Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers. Zweite Lieferung. Leipzig: B. G. Teubner. S. 209-388.

Als zweite Lieferung des vierten Ergänzungsbandes zum Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung bringt das Heft zunächst den Schluß der ersten Abteilung: Eulers Schriften nach den Druckjahren geordnet (vgl. F. d. M. **71**, 10, 1910). Hier sind auch Nachträge zur ersten Lieferung angehängt, ferner ein Verzeichnis der Schriften von Johann Albrecht Euler.

Die zweite Abteilung (S. 223-270) enthält die Schriften Eulers nach der Abfassungszeit geordnet. Die nachgelassenen Schriften, deren Abfassungszeit noch nicht näher ermittelt worden ist, sind am Schluß dieser Abteilung zusammengestellt.

In der dritten Abteilung (S. 271-340) sind Eulers Schriften nach dem Inhalt geordnet.

Den Schluß der Lieferung bildet ein alphabetisch geordnetes Register (S. 341-388).

Als Schlußlieferung soll noch ein drittes Heft erscheinen: die Einleitung und unter anderem ein möglichst vollständiges Verzeichnis des ungedruckten Eulerschen Briefwechsels. Lp.

G. Eneström. Bericht an die Euler-Kommission der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft über die Eulerschen Manuskripte der Petersburger Akademie. Deutsche Math.-Ver. **22** (2), 191-205.

Der Verf. hat sich wegen des Mangels an der erforderlichen Zeit darauf beschränken müssen, zwei Fragen, soweit möglich, zu erledigen: a) Welche Handschriften beziehen sich auf schon gedruckte Arbeiten von Leonhard Euler? b) Auf welche Gegenstände beziehen sich die übrigen Handschriften, die von Leonhard Euler herrühren?

Als bedeutsam ist der Fund von Notizbüchern zu bezeichnen, in denen Euler gelegentlich solche Sachen aufzeichnete, mit denen er sich gerade beschäftigte. Durch sie ist ein Einblick in die Geschichte der Eulerschen Entdeckungen ermöglicht.

Das Ergebnis der Untersuchung der Eulerschen Handschriften hat der Verf. teils in einer tabellarischen Übersicht, teils in einem Verzeichnis der ungedruckten Handschriften niedergelegt. Lp.

Leonhardi Euleri Opera omnia sub auspiciis Societatis scientiarum Helveticae edenda curaverunt F. Rudio, A. Krazer, P. Stäkkel. Series prima. Opera mathematica. Volumen decimum.

Leonhardi Euleri Institutiones calculi differentialis edidit Gerhard Kowalewski. Lipsiae et Berolini in aedibus B. G. Teubneri. VI u. 676 S. 4°.

Der Titel der Ausgabe von 1755, der in Faksimiledruck nachgebildet ist, lautet: Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum auctore Leonhardo Eulero Acad. reg. scient. et

eleg. litt. Boruss. directore prof. honor. Acad. imp. scient. Petrop. et Academiarum regiarum Parisinae et Londinensis socio. Impensis Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae. 1755.

In gleicher Nachbildung werden die Titel der einzelnen Teile wiedergegeben:

Institutionum calculi differentialis pars prior continens completam huius calculi explicationem.

Institutionum calculi differentialis pars posterior continens usum huius calculi in analysi finitorum nec non in doctrina serierum.

Die Titel der einzelnen Kapitel der beiden Teile lauten:

I. 1. De differentiis finitis. 2. De usu differentiarum in doctrina serierum. 3. De infinitis atque infinitis parvis. 4. De differentialium cuiusque ordinis natura. 5. De differentiatione functionum algebraicarum unicam variabilem involventium. 6. De differentiatione functionum transcendentium. 7. De differentiatione functionum duas pluresve variabiles involventium. 8. De formularum differentialium ulteriori differentiatione. 9. De aequationibus differentialibus.

II. 1. De transformatione serierum. 2. De investigatione serierum summabilium. 3. De inventione differentiarum finitarum. 4. De conversione functionum in series. 5. Investigatio summae serierum ex termino generali. 6. De summatione progressionum per series infinitas. 7. Methodus summandi superior ulterius promota. 8. De usu calculi differentialis in formandis seriebus. 9. De usu calculi differentialis in aequationibus resolvendis. 10. De maximis et minimis. 11. De maximis et minimis functionum multiformium pluresque variabiles complectentium. 12. De usu differentialium in investigandis radicibus realibus aequationum. 13. De criteriis radicum imaginariarum. 14. De differentialibus functionum in certis tantum casibus. 15. De valoribus functionum qui certis casibus videntur indeterminati. 16. De differentiatione functionum inexplicabilium. 17. De interpolatione serierum. 18. De usu calculi differentialis in resolutione fractionum. Lp.

Leonhardi Euleri Opera omnia sub auspiciis Societatis scientiarum naturalium Helveticae edenda curaverunt F. Rudio, A. Krazer, P. Stäckel. Series prima. Opera mathematica. Volumen undecimum.

Leonhardi Euleri Institutiones Calculi integralis ediderunt Friedrich Engel et Ludwig Schlesinger. Volumen primum. Lipsiae et Berolini typis et in aedibus B. G. Teubneri. XX u. 462 S. 4°.

Aus dem Vorwort (VII-XV), in welchem sich die beiden Herausgeber über den dauernden Wert der Institutiones calculi differentialis et integralis von Euler in dankenswerter Weise auslassen, entnehmen wir die Stelle, welche über die bei der Ausgabe der drei Bände der Integralrechnung befolgten Grundsätze handelt.

„Der vorliegenden Ausgabe des Calculus integralis liegt die Urausgabe zugrunde, die einzige, die bei Eulers Lebzeiten erschienen ist. Und zwar beschränkt sich unsere Ausgabe auf die ursprünglich veröffentlichten drei Bände; der vierte Band, der unter dem Titel „Institutionum calculi integralis volumen quartum, continens supplementa partim inedita partim iam in operibus aca-

demiae imperialis scientiarum Petropolitanae impressa“ im Jahre 1794, also nach Eulers Tode, herausgegeben worden ist, enthält 28 Abhandlungen, die auf andere Bände der Gesamtausgabe verteilt worden sind. Die Urausgabe wurde aber mit den späteren Auflagen und mit der deutschen Übersetzung von Salomon verglichen.... Offenbare Druckfehler wurden stillschweigend ausgemerzt, bei kleineren Rechenfehlern der Text verbessert und der Urtext in einer Fußnote angegeben. Einschaltungen der Herausgeber sind in eckigen Klammern eingeschlossen. Einige Fußnoten geben teils Literaturangaben, teils auch Hinweise auf Versehen, die im Texte vorkommen; von erläuternden und ergänzenden Anmerkungen mußte im Sinne der für diese Gesamtausgabe geltenden Grundsätze Abstand genommen werden. Dagegen ist es möglich geworden, die beiden Teile der „Adnotationes ad calculum integralem Euleri“ von Lorenzo Mascheroni, die 1790 und 1792 in Pavia erschienen und zurzeit recht selten geworden sind, unserer Ausgabe einzuverleiben. Sie folgen im zwölften Bande der ersten Serie auf den zweiten Band des Calculus integralis, der den Liber prior des ganzen Werkes abschließt, da sie sich ausschließlich auf diesen beziehen.“

Wir beschränken die Anzeige auf den dem Berichtsjahre angehörigen ersten Band der Integralrechnung.

Der volle, im Faksimiledruck nachgebildete Titel lautet: Institutionum calculi integralis volumen primum in quo methodus integrandi a primis principiis usque ad integrationem aequationum differentialium primi gradus pertractatur. Auctore Leonhardo Eulero Acad. scient. Borussiae directore vicennali et socio Acad. Petrop. Parisin. et Londin. Petropoli. Impensis Academiae Imperialis Scientiarum 1768.

Der Inhalt des Bandes geht aus dem folgenden Inhaltsverzeichnis hervor:

Index capitum in volumine primo contentorum. Praenotanda de calculo integrali in genere.

Liber prior. Pars prima seu methodus investigandi functiones unius variabilis ex data relatione quacunque differentialium primi gradus. Sectio prima. De integratione formularum differentialium. I. De integratione formularum differentialium rationalium. II. De integratione formularum differentialium irrationalium. III. De integratione formularum differentialium per series infinitas. IV. De integratione formularum logarithmicarum et exponentialium. V. De integratione formularum angulos sinusve angulorum implicantium. VI. De evolutione integralium per series secundum sinus cosinusve angulorum multiplorum progredientes. VII. Methodus generalis integralia quaecunque proxime inveniendi. VIII. De valoribus integralium, quos certis tantum casibus recipiunt. IX. De evolutione integralium per producta infinita.

Sectio secunda. De integratione aequationum differentialium. I. De separatione variabilium. II. De integratione aequationum differentialium ope multiplicatorum. III. De investigatione aequationum differentialium, quae per multiplicatores datae formae integrabiles reddantur. IV. De integratione particulari aequationum differentialium. V. De comparatione quantitatum transcendentium in forma $\int Pdx/\sqrt{A+2Bx+Cxx}$ contentarum. VI. De comparatione quantitatum transcendentium in forma

$$\int Pdz/\sqrt{A+2Bz+Czz+2Dz^3+Ez^4}$$

contentarum. VII. De integratione aequationum differentialium per approximationem.

Sectio tertia. De resolutione aequationum differentialium in quibus differentialia ad plures dimensiones assurgunt vel adeo transcendenter implicantur.

Auch die drei Titelblätter der drei Sektionen sind faksimiliert. Lp.

Leonhardi Euleri Opera omnia sub auspiciis Societatis scientiarum naturalium Helveticae edenda curaverunt F. Rudio, A. Krazer, P. Stäckel. Series prima: Opera mathematica. Volumen vicesimum primum.

Leonhardi Euleri Commentationes analyticae ad theoriam integralium ellipticorum pertinentes edidit Adolf Krazer. Volumen posterius. Lipsiae et Berolini typis et in aedibus B. G. Teubneri. XII u. 380 S. 4°.

Vgl. die Anzeige des ersten Bandes mit den Abhandlungen zur Theorie der elliptischen Transzendenten F. d. M. **43**, 15, 1912. Wir lassen in gleicher Weise die mit den Nummern des Eneström schen Verzeichnisses versehenen Titel der einzelnen Abhandlungen folgen.

506. Dilucidationes super methodo elegantissima, qua illustris de la Grange usus est in integranda aequatione differentiali $dx/\sqrt{X} = dy/\sqrt{Y}$ (1—38).

581. Plenior explicatio circa comparationem quantitatum in formula integrali $\int Zdz/\sqrt{1+mzz+z^4}$ contentarum denotante Z functionem quamcunque rationalem ipsius zz (39-56).

582. Uberior evolutio comparationis, quam inter arcus sectionum conicarum instituere licet (57-77).

590. Theoremata quaedam analytica, quorum demonstratio adhuc desideratur (78-90).

605. De miris proprietatibus curvae elasticae sub aequatione

$$y = \int xxdx/\sqrt{1-x^4}$$

contentae (91-118).

624. De superficie coni scaleni, ubi imprimis ingentes difficultates, quae in hac investigatione occurrunt, perpenduntur (119-141).

633. De binis curvis algebraicis inveniendis, quarum arcus indefinite inter se sint aequales (142-150).

638. De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus parabolicos metiri licet (151-162).

639. De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcos ellipticos metiri licet (163-179).

645. De curvis algebraicis quarum longitudo exprimitur hac formula integrali $\int v^{m-1}\, dv/\sqrt{1-v^{2n}}$ (180-206).

676. Methodus succinctior comparationes quantitatum transcendentium in forma $\int Pdz/\sqrt{A+2Bz+Czz+2Dz^3+Ez^4}$ contentarum inveniendi (207-226).

714. Exempla quarundam memorabilium aequationum differentialium, quas adeo algebraice integrare licet etiamsi nulla via pateat variabiles a se invicem separandi (227-240).

780. De infinitis curvis algebraicis, quarum longitudo indefinita arcui elliptico aequatur (241-245).

781. De infinitis curvis algebraicis, quarum longitudo arcui elliptico aequatur (246-247).

782. De binis curvis algebraicis eadem rectificatione gaudentibus (248-261).

783. De curvis algebraicis, quarum omnes arcus per arcus circulares metiri liceat (262-273).

817. De lineis curvis, quarum rectificatio per datam quadraturam mensuratur (274-295).

818. De comparatione arcuum curvarum irrectificabilium (296-357).

819. Fragmentum ex „Adversariis mathematicis" depromptum (358-368).

Fragmenta nova ex „Adversariis mathematicis" deprompta (Ex manuscriptis academiae scientiarum Petropolitanae nunc primum edita) (369-380).

Lp.

G. Loria. G. L. Lagrange nella vita e nelle opere. Annali di Mat. (3) **20**, IX-LII.

Die Schriftleitung der Annali di Mat. hat in dem Jahre, das die hundertste Wiederkehr des Todestages von Lagrange († 10. April 1813) umschloß, zwei Bände der Zeitschrift dem Andenken dieses berühmten Sohnes italienischer Erde gewidmet, und G. Loria hat es unternommen, das Lebensbild seines Landsmannes zu entwerfen und die mathematischen Leistungen des Forschers zu würdigen, der unserem Goethe als vollkommener Mathematiker galt, weil er ein vollkommener Mensch war: gründlich, durchsichtig, umsichtig, rein, klar, anmutig, ja elegant.

Diese neue Darstellung des Lebensganges und des Lebenswerkes von Lagrange beruht auf ausgedehnten Studien, wie aus den 128 Noten auf Seite XLII-LII hervorgeht, und ist jedenfalls vollständiger und gründlicher als die bekannte, übrigens aber noch immer wertvolle Lobrede von Delambre, die im ersten Bande der Oeuvres de Lagrange abgedruckt ist. In drei Teilen behandelt Loria die drei Perioden des Lebens von Lagrange in Turin, in Berlin (1766-1787), in Paris. Diese drei Perioden werden durch die Schlagworte gekennzeichnet: Periode angespannter und heißer Vorbereitung in Turin, Periode größter originaler Produktion in Berlin, Periode großer amtlicher und unterrichtlicher Betätigung in Paris. Auf Einzelheiten können wir hier nicht eingehen. Die Schlußworte mögen hergesetzt werden: „Wir finden den Namen Lagrange noch immer verknüpft mit allen Zweigen der mathematischen Wissenschaft; somit ist es für alle, die sich ihnen widmen, Pflicht und Ruhm, sich als Schüler des unsterblichen Gelehrten zu bekennen, dem Italien den Werdegang gegeben hat, dem Deutschland die für eine fruchtbare wissenschaftliche Arbeit unerläßliche friedliche Stille und behagliche Ruhe gesichert hat, dem Frankreich mit unübertrefflicher Großmut die höchsten Ehren erteilt hat, nach denen ein Forscher streben kann."

Lp.

A. Korn. Joseph Louis Lagrange († den 10. 4. 1813). (Zu seinem hundertjährigen Todestage.) Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **12**, 90-94.

Durch den Hinweis darauf, daß Lagrange 1766 bis 1786 in Berlin seine reifsten mathematischen Entdeckungen gemacht hat, begründete der zeitige Vorsitzende der Berliner Mathematischen Gesellschaft die Pflicht, in der Aprilsitzung dieses Jahres an das Leben und das Wirken des Gelehrten zu erinnern, dem Deutschland die Muße und den behaglichen Unterhalt zum Forschen gewährt hat. Die Gedächtnisrede von Delambre hat die biographische Grundlage der Rede geliefert; die Würdigung der Hauptleistungen gehört dem Redner an. Lp.

K. Bopp. Eine Schrift von Ensheim „Recherches sur les calculs différentiel et intégral" mit einem sich darauf beziehenden, nicht in die „Oeuvres" übergegangenen Brief von Lagrange analysiert und zum 10. April herausgegeben. Gefolgt von einem Überblick über die Publikation von Lagrange-Briefen. Heidelb. Ak. Sitzungsber. 1913, Nr. 7, 49 S.

Die zur Hundertjahrfeier des Todestages von Lagrange ausgegebene Abhandlung entwickelt die Gedanken der im Jahre VII (1799) der französischen Republik in Paris erschienenen Schrift von Ensheim, von der nach einer Fußnote auf S. 4 außer dem Exemplar des Verf. nur noch eines in der Berliner Königlichen Bibliothek bekannt, eines in der Bibliothek von Chasles vorhanden gewesen ist. Die Methode, die zur Entwicklung der Formeln der Infinitesimalrechnung in ihr entwickelt wird, hat eine gewisse Beziehung zu dem von Lagrange angewandten bekannten Verfahren. Lagrange spricht sich in dem abgedruckten Briefe vom 3. Frimaire, an 7 (23. 11. 1799) über die ihm unterbreitete Schrift so aus: „Ihre Art, diese Rechnung zu betrachten, hat vieles gemein mit der, die Landen, ein englischer Mathematiker, in dem Werke Residual analysis, London 1764, benutzt hat. Allein ich muß Ihnen gestehen, daß weder die eine, noch die andere mir ganz von den Fehlern befreit zu sein scheint, auf die man in den Prinzipien der Differentialrechnung stößt. Es ist jedoch möglich, daß Ihre Analysis für viele befriedigender ist als die gewöhnliche Analysis des Unendlichkleinen und der Grenzen, und unter diesem Gesichtspunkt kann sie dem Fortschritt der Wissenschaften nützlich sein." Bopp hat sicher in Ensheims Versuch eine heute noch lesenswerte Urkunde dieser Bestrebungen ans Licht gebracht und dadurch auch einige Aufhellung auf die Operationen Fontaines geworfen, der von Ensheim zitiert wird.

In besonderen Zusammenhang mit Lagrange bringt der Verf. seine Arbeit durch den „Überblick über die Publikation von Lagranges Briefen" (S. 44-48) und das Verzeichnis der Biographien von Lagrange (S. 48-49), zu denen jetzt die im Jahre 1913 erschienenen natürlich hinzuzufügen sind. Lp.

W. und J. Bolyai. Geometrische Untersuchungen. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgeg. von P. Stäckel. Erster Teil: Leben und Schriften der beiden

Bolyai. Zweiter Teil: Stücke aus den Schriften der beiden Bolyai. Leipzig: B. G. Teubner. 281 u. 274 S. gr. 8°.

Das vorliegende Werk bildet den zweiten Band der „Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie“, von denen der erste Band, der sich auf N. I. Lobatschewskij bezieht, schon 1899 von Fr. Engel herausgegeben worden ist (F. d. M. **30**, 429, 1899). Der erste Teilband gibt ein packendes Bild von der eigenartigen Charakteranlage und persönlichen Entwicklung, sowie den wechselvollen Lebensschicksalen von Vater und Sohn Bolyai. Wie ein Roman mutet den Leser der sachlich kühle, Schuld und Sühne abwägende Bericht des Herausgebers über die Romantik und Tragik des Lebens dieser beiden vielseitig und hoch begabten Söhne der Pußta an, die beide nach einem kurzen, glänzenden Aufstieg flügellahm zu Boden sanken. Im zweiten Teilband ist alles vereinigt, was von wissenschaftlich wertvollen Ergebnissen von W. und J. Bolyai veröffentlicht worden ist, und was sich davon in ihrem Nachlaß vorgefunden hat. Die Anmerkungen lassen ahnen, welche unsägliche Mühe und Sorgfalt es gekostet hat, um das, was die beiden hochbegabten Außenseiter für die Wissenschaft geleistet haben, aus der Fülle des vorhandenen Manuskriptmaterials auszusondern. Die mathematische Welt aber wird Stäckel und seinen Mitarbeitern diese Mühe danken, die uns gestattet, zwei der merkwürdigsten Mathematiker des 19. Jahrhunderts in ihrer Eigenart zu verstehen und zu werten. Sk.

F. Klein. Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken. Gött. Nachr. (Gesch. Mitt.) 1913, 15-17; Math. Ann. **74**, 410-412.

Den Hauptteil des Berichtes bildet eine Mitteilung von L. Schlesinger über die beiden von ihm veröffentlichten Hefte zur Funktionentheorie von Gauß (F. d. M. **43**, 536, 1912). Lp.

A. Cauchy. Oeuvres complètes d' Augustin Cauchy, publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices de M. le ministre de l'instruction publique. IIe Série. Tome XI. Paris: Gauthier-Villars. IV + 512 S. 4°.

Mit diesem Bande ist die zweite Auflage vom ersten Bande der „Exercices d'analyse et de physique mathématique“ (nouveaux exercices) endlich der langsam fortschreitenden Sammlung der Werke Cauchys hinzugefügt worden. Das Titelblatt dieses „Tome premier“ ist im Faksimiledruck beigegeben. Der Band enthält:

1. Mémoire sur les mouvements infiniment petits d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. 2. Note sur les sommes formées par l'addition de fonctions semblables des coordonnées de différents points. 3. Note sur la transformation des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires. 4. Note sur l'intégration des équations différentielles des mouvements planétaires. 5. Mémoire sur les mouvements infiniment petits de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement. 6. Mémoire sur l'intégration des équations linéaires. 7. Mémoire sur les mouvements infiniments petits dont les équations présentent une forme indépendante de la direc-

tion des trois axes coordonnés, supposés rectangulaires, ou seulement de deux de ces axes. 8. Mémoire sur la réflexion et la réfraction d'un mouvement simple transmis d'un système de molécules à un autre, chacun de ces deux systèmes étant supposé homogène et tellement constitué que la propagation des mouvements infiniment petits s'y effectue en tous sens suivant les mêmes lois. 9. Mémoire sur la transformation et la réduction des intégrales générales d'un système d'équations linéaires aux différences partielles. 10. Mémoire sur les rayons simples qui se propagent dans un système isotrope de molécules et sur ceux qui se trouvent réfléchis ou réfractés par la surface de séparation de deux semblables systèmes. 11. Sur les relations qui existent entre l'azimut et l'anomalie d'un rayon simple doué de la polarisation elliptique. 12. Considérations nouvelles sur la théorie des suites et sur les lois de leur convergence. 13. Mémoire sur les deux espèces d'ondes planes qui peuvent se propager dans un système isotrope de points matériels. 14. Mémoire sur l'intégration des équations différentielles. 14. Mémoire sur l'intégration des équations différentielles. 15. Mémoire sur l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques. Lp.

C. J. Rueda. Biografía de D. Simón Archilla y Espejo. Rev. Soc. Mat. Esp. **2**, 213-219.

Simón Archilla y Espejo, geb. 7. Juni 1836 zu Murtos in der Provinz Granada, gest. 29. August 1890 zu Sigüenza, wurde Baccalaureus artium 1861 in Madrid, B. scientiarum 1866 und Licentiatus scientiarum exactarum 1867 in Valladolid, endlich Doctor scientiarum exactarum 1875 in Madrid. Seit 1869 war er Lehrer an der neuen katholischen Universität zu Madrid für verschiedene Wissenschaften. Professor für höhere Algebra und analytische Geometrie an der Universität zu Barcelona wurde er 1876, für die infinitesimale Analysis in Madrid 1881. Sein Hauptwerk ist das Buch „Principios fondamentales del Calculo diferencial" (1880), von dem 1894 nach seinem Tode eine nach seinen handschriftlichen Bemerkungen verbesserte zweite Auflage erschienen ist. Seit 1888 schwer leidend, wurde der als Lehrer hochgeschätzte Dulder 1890 aus dem Leben abgerufen. Der Verf. rühmt ihn als scharfsinnigen Logiker der Mathematik. Lp.

A. Kistner. Aus dem Briefwechsel des Physikers Oskar Emil Meyer und des Chemikers Lothar Meyer. Arch. Gesch. d. Math. u. Naturw. **6**, 207-215.

Ausschnitte aus den Briefen, die sich auf berühmte Hochschullehrer aus der Zeit von 1861 bis 1864 beziehen; für das Jahrbuch kommen Bemerkungen über Weierstraß, Riemann, Fr. Neumann, Clausius in Betracht. Lp.

Paul Tannery. Mémoires scientifiques publiés par J.-L. Heiberg & H.-G. Zeuthen. II. Sciences exactes dans l'antiquité 1883-1898. II. Toulouse: Édouard Privat. Paris: Gauthier-Villars. XII + 555 S. 4°.

Vgl. die Anzeige des ersten Bandes F. d. M. **43**, 29, 1912. In dem vorliegenden Bande sind, fortlaufend beziffert, die folgenden Abhandlungen enthalten:

30. Pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'antiquité. Darb. Bull. (2) **7**, 278-291; **8**, 19-30 u. 101-112 (F. d. M. **16**, 38, 1884).

31. Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide. Darb. Bull. (2) **8**, 162-175 (F. d. M. **16**, 7, 1884).

32. Sur les manuscrits de Diophante à Paris. Bordeaux Ann. **1** 88-94, 1884.

33. La perte de sept livres de Diophante. Darb. Bull. (2) **8**, 192-206 (F. d. M. **16**, 9, 1884).

34. Sur la langue mathématique de Platon. Bordeaux Ann. **1**, 95-105, 1884.

35. Domninos de Larissa. Darb. Bull. (2) **8**, 288-298 (F. d. M. **16**, 10, 1884).

36. Eutocius et ses contemporains. Darb. Bull. (2) **8**, 315-329 (F. d. M. **16**, 9, 1884).

37. Questions héroniennes. Darb. Bull. (2) **8**, 329-344, 359-376 (F. d. M. **16**, 35, 1884).

38. Sur l'arithmétique pythagoricienne. Darb. Bull. (2) **9**, 69-88 (F. d. M. **17**, 24, 1885).

39. L'οὐγκιασμὸς ὕδατος (école héronienne). Rev. archéologique (3) **6**, 365 -369, 1885.

40. Notes critiques sur Domninos. Rev. de Philologie **9**, 129-137, 1885.

41. Sur la représentation des fractions chez les Grecs. Bibl. math. 1886, 235-236.

42. Autolycos de Pitane. Bordeaux Mém. (3) **2**, 173-199 (F. d. M. **18**, 31, 188, 1886).

43. La coudée astronomique et les anciennes divisions du cercle. Rev. archéologique (3) **7**, 27-37, 1886.

44. Rapport sur une mission en Italie du 24 janvier au 24 février 1886. Arch. des Missions scient. et littér. (3) **13**, 409-455, 1888.

45. Scholies sur Aristarque de Samos. Rev. de Philologie **11**, 33-41, 1887.

46. La grande année d'Aristarque de Samos. Bordeaux Mém. (3) **4**, 79-96 (F. d. M. **20**, 39, 1888).

47. Études sur Diophante. Bibl. Math. **1**, 37-43, 81-88, 103-108; **2**, 3-6 (F. d. M. **19**, 6, 1887 u. **20**, 6, 1888).

48. L'hypothèse géométrique du Ménon de Platon. Arch. für Gesch. der Philos. **2**, 509-514, 1889.

49. L'art d'Eudoxe. Rev. de Philol. **13**, 143-150, 1889.

50. Les manuscrits de Diophante à l'Escorial. Nouv. Arch. des Missions scient. et littér. **1**, 383-393, 1891.

51. Sur une épigramme attribuée à Diophante. Rev. des études grecques **4**, 377-382, 1891.

51 bis. Note rédigée sur la demande de MM. Eugène d'Eichtal et Théodore Reinach, et faisant suite à leur étude sur „les Problèmes musicaux dits d'Aristote". Rev. des études grecques **5**, 51-52, 1892.

52. Sur les épigrammes arithmétiques de l'Anthologie palatine. Rev. des études grecques **7**, 59-62, 1894.

53. Un fragment des métriques de Héron. Zs. f. Math. u. Phys. **39**, 13-15 (F. d. M. **25**, 57, 1894).
54. Sur un fragment inédit des métriques de Héron d'Alexandrie. Darb. Bull. (2) **18**, 18-22 (F. d. M. **25**, 57, 1894).
55. Théon de Smyrne. Rev. de Philol. **18**, 145-152, 1894.
56. Sur un passage de Théon de Smyrne. Rev. de Philol. **19**, 67-69, 1895.
56 bis. Sur un passage d'Adraste cité par Viète. Bordeaux Ann. **2**, 200-201, 1880.
57. Geometria (Γεωμετρία). Dictionnaire des antiquités grecques et romaines **4**, 1543-1546, 1895.
58. L'inscription astronomique de Keskinto. Rev. des études grecques **8**, 48-58.
59. Sur l'inscription astronomique de Keskinto. C. R. **120**, 363-365 (F. d. M. **26**, 67, 1895).
60. Une inscription grecque astronomique. Bull. astron. **12**, 317-328, 1895.
61. Sur les subdivisions de l'heure dans l'antiquité. Rev. archéol. **25**, 359-364.
62. Sur la religion des derniers mathématiciens de l'antiquité. Ann. de Philos. chrét. **34**, 26-36, 1896.
63. Sur la locution ἐξ ἴσου. Rev. des études grecques **10**, 14-18, 1897.
64. Σκούτλωσις et στροφίολος. Rev. archéol. **39**, 78-80, 1897.
65. Sur Carpos d'Antioche. Rev. de Philol. **22**, 93-97, 1898. Lp.

W. Hartmann. Gedenkrede bei der Enthüllung des Denkmals für Franz Reuleaux, gehalten am 9. November 1912 in der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin. Monatsbl. d. Berl. Bezirksver. Deutscher Ing. Sonderdruck, 8 S. gr. 4⁰.

Franz Reuleaux, geb. 30. September 1829 zu Eschweiler, studierte nach praktischer Tätigkeit 1850-1852 in Karlsruhe, dann auf den Universitäten zu Berlin und Bonn, war zunächst wieder praktisch beschäftigt als Vorsteher einer Cölner Maschinenfabrik, wurde 1856 Professor des Maschinenbaus in Zürich, 1864 an der Gewerbeakademie zu Berlin, 1868 bis 1879 Direktor dieser Akademie, von da bis 1896 Professor an der durch Verschmelzung der Gewerbeakademie mit der Bauakademie gebildeten Technischen Hochschule; von 1896 bis zum Tode 19. August 1905 lebte er im Ruhestande in Berlin.

Vielseitig gebildet, vertrat er im wesentlichen die Anwendung der analytischen Mechanik auf die Technik und betätigte sich praktisch bei Weltausstellungen als Regierungskommissar. Von seinen Schriften sind am meisten verbreitet gewesen der „Konstrukteur" und das Lehrbuch der Kinematik (Bd. I F. d. M. **7**, 540, 1875; Bd. II **31**, 677, 1900). Berühmt ist die Sammlung seiner kinematischen Modelle, deren Originale die Technische Hochschule zu Charlottenburg besitzt. Lp.

G. Vivanti. Commemorazione del M. E. prof. comm. Giuseppe Bardelli. Lomb. Ist. Rend. (2) **46**, 695-706.

Giuseppe Bardelli, geb. 8. April 1837 zu Sedriano in der Provinz

Mailand, gest. zu Mailand 1. März 1908, erhielt seine Vorbildung auf den Lehranstalten seiner Vaterstadt, erwarb 1859 die Doktorwürde als Bauingenieur an der Universität zu Pavia, wandte sich aber dem Lehrerberufe zu und unterrichtete in verschiedenen Anstalten zu Mailand, wo er als Assistent besonders von Schiaparelli arbeitete. Durch die Vermittlung von Brioschi wurde er schon 1864 auf den Lehrstuhl für Mechanik an dem Polytechnikum seiner Vaterstadt berufen, den er nun bis zu seinem Ende behielt. Präsident des „Istituto tecnico Carlo Cattaneo" von Mailand war er von 1871 bis 1907. Sein Denkmal wurde am 16. Mai 1909 in diesem Institut enthüllt. Die hierüber ausgegebene Schrift „Onoranze alla memoria di Giuseppe Bardelli" (Milano, 1910), die uns nicht zugegangen ist, hat dem Verf. die biographischen Notizen verschafft. Vor allem wird der wirksame Unterricht Bardellis gerühmt. Die am Schluß der Gedenkrede abgedruckte Liste der Veröffentlichungen umfaßt 30 Titel. Die meisten Arbeiten gehören natürlich der Mechanik an, insbesondere der Kinematik und der Statik, die ja für Techniker vor allem bedeutsam sind. Zumeist in Lomb. Ist. Rend. erschienen, sind sie alle im Jahrbuche besprochen; die letzte im Jahrgang 1905. Lp.

G. H. B(ryan). Obituary notice of Samuel Hawksley Burbury, 1831-1811. Lond. Roy. Soc. Proc. (A) 88, I-IV.

Vgl. F. d. M. **42**, 33, 1911 u. **43**, 35, 1912. „Das Lebenswerk Burburys bestand hauptsächlich in einem Versuch, die logische Strenge der Behandlung in den Zweigen der mathematischen Physik sicherzustellen, an denen er interessiert war." Dies wird in Kürze an den Hauptschriften erläutert (18. Mai 1831 bis 18. August 1911). Lp.

J. S. Black and C. G. Knott. Professor George Chrystal. Edinb. Roy. Soc. Proc. **32**, 477-503.

George Chrystal (vgl. F. d. M. **42**, 34, 1911), geb. 8. März 1851 in der Nähe von Aberdeen, gest. 5. November 1911 zu Edinburgh. In Cambridge kam er unter den Einfluß von James Clerk Maxwell; daher wurde ein großer Teil seiner Arbeitszeit auf Gegenstände der Elektrizität und des Magnetismus verwendet. Professor der Mathematik war Chrystal an der Universität von St. Andrews 1877-1879, von 1879 an bis zu seinem Tode an der Universität von Edinburgh. Seine innere Neigung trieb ihn zur Physik; dennoch beschäftigte er sich viel mit der reinen Mathematik. Ein Verzeichnis seiner Beiträge zur wissenschaftlichen Literatur ist angehängt. Erwähnt werde, daß Chrystal zwei Lehrbücher über Algebra verfaßt hat (vgl. F. d. M. **18**, 51, 1886; **21**, 73, 1889). J. (Lp.)

C.V. B. Obituary notice of Frederick John Jervis-Smith, 1848-1911. Lond. Roy. Soc. Proc. (A) 88, IV-VI.

Geb. 2. April 1848 zu Taunton, wurde Jervis-Smith auf den Wunsch seines Vaters Geistlicher, beschäftigte sich aber nebenbei in seiner Werkstatt mit praktisch-mechanischen Arbeiten und wurde 1886 mit der Leitung des

Ingenieur-Laboratoriums am Trinity College zu Oxford betraut. „Der Gegenstand, dem er sich ganz besonders widmete, war der von arbeitsmessenden Maschinen und Integratoren, und viele seiner Veröffentlichungen handeln hiervon (Phil. Mag. 1882-1902). Manche seiner Schriften beziehen sich auf die Messung der Torsion rotierender Wellen, um dadurch die Übermittelung von Kraft zu bestimmen.“ Mitglied der Royal Society wurde er 1894. Ein lebhaftes Interesse bekundete er für Geschichte der Physik; er spürte oft die Vorwegnahme neuer Erfindungen auf, so die des Telephons durch einen Italiener.
Lp.

F. A. H. Schreinemakers. Iets over het wetenschappelijk werk van Prof. Dr. J. M. van Bemmelen. Amst. Ak. Versl. **21**, 1401-1412.

Wegen der Biographie von van Bemmelen (geb. zu Almelo 3. November 1830, gest. zu Leiden 13. März 1911) wird verwiesen auf W. P. Jorissen, Gedenkbook, aangeboden aan Prof. Dr. J. M. van Bemmelen op zijn 80sten verjaardag, ferner auf W. Ostwald, Die Absorption; gesammelte Abhandlungen über Kolloide und Absorption von J. M. van Bemmelen. Die vorliegende Schrift beschäftigt sich nur mit der Würdigung der wissenschaftlichen Leistungen des gefeierten Gelehrten, der in der Richtung der physikalischen Chemie gearbeitet und sich besonders auch um die Phasenlehre große Verdienste erworben hat. Lp.

I. Sobotka. V. K. Řehořovský. Časopis **42**, 129-145. (Böhmisch.)

V. K. Řehorovský (geb. am 1. November 1849) wirkte zuerst als Lehrer an der höheren Staatsgewerbeschule in Prag (1882-1900), im Jahre 1900 wurde er zum Professor der allgemeinen Mechanik und Hydromechanik an der böhmischen Technischen Hochschule in Brünn ernannt. Von seinen Arbeiten ist hervorzuheben das Lehrbuch über symmetrische Funktionen der Wurzeln algebraischer Gleichungen (in böhmischer Sprache) und „Tafeln der symmetrischen Funktionen der Wurzeln vom Gewichte elf und zwölf“ (in Denkschriften der Akad. in Wien vom Jahre 1882). Er starb in Prag am 12. Dezember 1911.
Pe.

E. Jost. Nekrolog. Ernst Becker. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **48**, 2-12.

Ernst Emil Hugo Becker, geb. 11. August 1843 zu Emmerich am Rhein, gest. 6. August 1912 zu Freiburg i. B. Er besuchte das Gymnasium seiner Vaterstadt, studierte zuerst 1861 das Baufach, von 1862 an reine Mathematik und Astronomie auf der Universität zu Berlin, wurde früh zu astronomischen Berechnungen für die Berliner Sternwarte herangezogen, am 2. August 1869 in Berlin zum Doktor promoviert auf Grund der Dissertation „Nova elementa Amphitrites planetae ex observationibus etc.“, die einen Teil der größeren Arbeit bildet: „Tafeln der Amphitrite mit Berücksichtigung der Störungen durch Jupiter, Saturn und Mars“ (1870). Zum 1. Januar 1870 folgte er einem Ruf als Observator der Leidener Sternwarte; im Juli 1871 ging er in gleicher Stellung nach Neuenburg, 1874 als erster Observator an die Berliner Sternwarte,

nahm ferner in demselben Jahre an der Venusexpedition nach Ispahan teil. 1883 wurde er Direktor der Sternwarte in Gotha; 1887 im Dezember Professor der Astronomie an der Universität zu Straßburg i. E. und Direktor der dortigen Sternwarte. Im Frühjahr 1909 legte er diese Ämter wegen Kränklichkeit nieder und verlebte die letzten drei Jahre seines Daseins in Freiburg i. B. „Mit ihm ist ein Mann dahingegangen, der in der selbstlosen Hingabe an seine Wissenschaft vorbildlich war, dessen Strenge gegen andere verschwand an dem Maßstabe, den er an sich selbst legte. Gewissenhaftigkeit und Pflichterfüllung machten den inneren Wert und den Reichtum seines Lebens aus, und diese Eigenschaften befähigten ihn, auf dem weiten Gebiet der messenden und rechnenden Astronomie Bedeutendes zu leisten.“ Lp.

E. Ascione. Ernesto Cavalli †. Necrologia. Atti Acc. Pontaniana **43** [(2) **18**], Nr. 2, 8 S.

Cavalli wurde geboren zu Livorno 21. Juli 1852, starb zu Neapel 7. Mai 1912. Seit 1891 war er Professor am Polytechnikum zu Neapel. Seine Arbeiten beziehen sich auf reine und angewandte Kinematik (Rev. sem. $\mathbf{22}_2$, 97-98). Lp.

A. Macfarlane. Gaston Combebiac. Bull. Assoc. Prom. Quat. 1913, 17-20.

Combebiac starb am 12. Juli 1912 im Alter von 50 Jahren zu Limoges; kurz vorher hatte er seine Stellung als chef du bataillon du génie niedergelegt, um sich ganz mathematischen Arbeiten zu widmen. Im übrigen enthält der noch von Macfarlane vor seinem Tode abgefaßte Artikel neben kargen Nachrichten über das Leben Combebiacs hauptsächlich Auszüge aus seinen Briefen, die sich auf die Rechnung mit Quaternionen beziehen. Lp.

Ph. E. B. Jourdain. Sir George Darwin: a biographical sketch. Open Court **27**, 193-201.

Eine Skizze des Lebens und des Lebenswerkes von George Howard Darwin (1845-1912). Hervorgehoben wird nicht nur die außerordentliche Mühseligkeit seiner Arbeiten über die dynamische Astronomie, sondern auch (was oft übersehen wird) die Eleganz seiner in den Vorlesungen benutzten mathematischen Methoden. Ein Bildnis von Darwin ist dem Artikel beigegeben. J. (Lp.)

Ph. E. B. Jourdain. Note on Sir George Darwin. Open Court **27**, 572-573.

Ein Nachtrag zu der im vorstehenden Referate besprochenen Lebensskizze. Angaben über die Vererbung der mathematischen Begabung in der Familie Darwin. J. (Lp.)

ZIRWER. Rede bei der Gedächtnisfeier für den Professor Dr. Karl Färber (gehalten am 11. Mai 1912). Progr. Luisenst. Oberrealsch. Berlin 1913, 27-31.

Vgl. F. d. M. **43**, 40, 1912, das Referat über die Gedächtnisrede von Rich. Müller. Vor den Schülern und Amtsgenossen des Verstorbenen gehalten, geht die Rede genauer auf die Lebensumstände, die Familie, das Verhältnis zur Schule innerhalb und außerhalb des Unterrichtes ein, weniger auf die wissenschaftlichen Leistungen. Lp.

A. VOSS. Wilhelm Fiedler. Deutsche Math. Ver. **22**, 97-113.

M. GROSSMANN. Prof. Dr. Otto Wilhelm Fiedler. 1832-1912. Verh. Schweiz. Naturf. Ges. Frauenfeld 1913, 8 S. 8°.

S. KOLLROS. Wilhelm Fiedler (3. avril 1832 — 19. novembre 1912). Ens. math. **15**, 66-68.

W. Fiedler wurde am 3. April 1832 in Chemnitz geboren. Aus engen Verhältnissen stammend, gelang es ihm mit zäher Energie, die Gewerbeschule seiner Vaterstadt und die Bergakademie zu Freiberg zu absolvieren. Noch nicht 20 Jahre alt, hatte er nach dem Tode seines Vaters für den Unterhalt seiner Mutter und Geschwister zu sorgen; er wurde Lehrer an der Werkmeisterschule in Freiberg. Nur durch privates Studium neben anstrengender Lehrtätigkeit lernte er die geometrischen Methoden kennen, daneben beschäftigten ihn ausgedehnte naturwissenschaftliche und literarische Studien. 1863 wurde er Professor für darstellende Geometrie an der Technischen Hochschule in Prag, 1867 in Zürich, 1907 trat er in den Ruhestand. Beide Nachrufe, der erste von einem näheren Freunde, der zweite von einem Schüler und dem Nachfolger Fiedlers im Lehramte, geben ein schönes und klares Bild der kraftvollen Persönlichkeit und der wissenschaftlichen Bedeutung des Altmeisters der darstellenden Geometrie. Angefügt ist ein Verzeichnis seiner Schriften (vgl. F. d. M. **43**, 40, 1912). Sk.

A. Y. Obituary notices on Paul Gordan. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, LI-LIV.

Redaktion der Mathematischen Annalen. Paul Gordan †. Math. Ann. **73**, 321-322.

Paul Albert Gordan, geb. 27. April 1837 in Breslau, gest. 21. Dezember 1912 in Erlangen, zuerst zum Kaufmann bestimmt, wurde als solcher von Schellbach in die Mathematik eingeführt, erhielt das Reifezeugnis 1857 vom Gymnasium in Neiße, studierte darauf 1 Semester in Breslau, 3 in Königsberg, 4 in Breslau, 1 in Berlin, wurde in Berlin 1862 auf Grund seiner Breslauer Preisschrift „De linea geodetica", die zur Dissertation umgearbeitet war, zum Dr. phil. promoviert, studierte im Winter 1862/3 weiter in Göttingen, habilitierte sich, durch Clebsch aufgefordert, 1863 in Gießen, wurde 1874 als außerordentlicher Professor an die Universität Erlangen berufen, am 1. April 1875 zum Ordinarius befördert und verblieb in dieser Stellung bis zum Frühjahr 1910, hielt aber noch Vorlesungen bis zu dem Semester vor seinem Ableben. Der Redaktion der „Math. Ann." hat er seit 1872 angehört.

„Überblickt man das Verzeichnis von Gordans Arbeiten, so fällt auf, wie viele derselben in Gemeinschaft mit befreundeten Mathematikern, zuerst Clebsch, dann Klein und Noether, entstanden sind. Hierin prägt sich ein Grundsatz seines Charakters aus. Er fühlte sich als Meister auf dem Gebiete der invarianten-theoretischen Rechnungen und ließ sich mit sichtlicher Freude und großer Bereitwilligkeit zur Mitarbeit heranziehen, wenn invariantentheoretische Probleme berührt wurden. Dabei verband er mit einem ungewöhnlichen Verstand, der auf die Einzelheiten der Aufgabe helles Licht zu werfen wußte, eine besondere anregende Kraft.“ — Kurze Nachrufe stehen in Ens. math. **15**, 149; Nature **90**, 597; Leopoldina **49**, 46. Lp.

R. Bricard. Lucien Lévy. Nouv. Ann. (4) **13**, 355-363.

Vgl. F. d. M. **43**, 43, 1912. Geb. 7. Oktober 1853 in Paris, gest. 2. August 1912 ebenda. Lévy war Schüler von Darboux auf dem Lycée Louis-le-Grand, bezog die École Polytechnique 1872, unterrichtete seit 1876 in Rennes, seit 1880 in Paris an dem Lycée, dessen Schüler er war; 1885 wurde er Direktor der wissenschaftlichen Studien zu Sainte-Barbe, 1890 Prüfer für die Aufnahme in die École Polytechnique, 1910 für die Abgangsprüfungen in der Mechanik. Durch seine vielseitige amtliche Tätigkeit wurde seine wissenschaftliche Forschung eingeengt. Trotzdem ist die Anzahl und der Wert seiner Arbeiten nicht gering. Mit partiellen Differentialgleichungen beginnend, beschäftigte er sich bald mit anderen Fragen der Analysis und der Differentialgeometrie, so besonders mit Systemen dreifach orthogonaler Flächen. Von größeren selbständigen Werken sind zu nennen ein Lehrbuch der elementaren Arithmetik, eine Einführung in die Theorie der elliptischen Funktionen mit Zahlentafeln und Anwendungen, ein Lehrbuch der infinitesimalen Analysis für Ingenieure, in Gemeinschaft mit E. Rouché verfaßt. Für die französische Ausgabe der mathematischen Enzyklopädie bearbeitete er den bei seinem Tode noch nicht abgedruckten Artikel über die geometrischen Elemente, deren die Mechanik sich bedient. Lp.

G. Grassi. Commemorazione di Antonio Pacinotti. Torino Mem. (2) **63**, 205-211; Nuovo Cimento (6) **5**, 149-158.

Vgl. das Referat über den Nachruf von Cantone F. d. M. **43**, 44, 1912. Berichtigend ist hinzuzufügen, daß der Geburtstag hier auf den 17. Juni 1841 festgesetzt ist, ferner daß die Veröffentlichung über die Erfindung erst 1864 im Nuovo Cimento stattfand, nicht aber 1860, von welchem Jahre in der Tat die Erfindung datiert. Die vorliegende Gedächtnisrede ist zunächst wieder dem Nachweis gewidmet, daß Pacinotti neun Jahre vor Gramme seinen Ring ersonnen hat. Die übrigen wissenschaftlichen Arbeiten Pacinottis sowie seine Lebensschicksale werden kurz besprochen. Lp.

V. Boccara. In memoria di Antonio Pacinotti (17 giugno 1841 — 25 marzo 1912). Periodico di Mat. (3) **10**, 188-190.

Kurze Nachrichten über den Lebensgang und die wissenschaftlichen Leistungen, unter Verweisung auf eine mit dem gleichen Titel erschienene Schrift des Verf. Pisa, 1913. Lp.

G. Loria. Prof. Carlo Maria Piuma. Cenno necrologico. Genova: Soc. tip.-litogr. ligure E. Oliveri & C. 8 S. Lex.-8°.

Geb. 26. September 1837 zu Genua, gest. 12. Mai 1912 ebenda. Piuma erhielt seine Vorbildung in der mathematischen Fakultät des Athenäums seiner Vaterstadt, erhielt das Magisterdiplom 1856, bestand die Prüfung als Ingenieur der Hydraulik und als Zivilarchitekt 1860, wandte sich dann aber rein mathematischen Studien zu, deren Früchte als Abhandlungen aus der Analysis und Zahlentheorie in den Annali di Matematica, später auch aus der analytischen Geometrie in anderen Zeitschriften erschienen. Dies brachte ihm eine Stelle im Doktorenkollegium der naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität ein, aus welchem die künftigen Universitätslehrer hervorgingen. Einen Lehrauftrag für die Infinitesimalrechnung erhielt er 1881, außerordentlicher Professor wurde er 1882, ordentlicher 1886. In den Ruhestand trat er 1904. Lp.

E. Picard. L'oeuvre de Henri Poincaré. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **10**, 463-482.; Rev. scient. 1913, II, 705-713.

Eine geistreiche Darstellung der Arbeitsweise und der Denkweise Poincarés auf den verschiedenen Gebieten der Mathematik, der Astronomie, der Physik und der Philosophie.

„Man könnte von Henri Poincaré sagen, er war nicht nur ein großer Mathematiker, sondern die Mathematik selbst. In der Geschichte der mathematischen Wissenschaften haben wenige Mathematiker so wie er das Vermögen gehabt, aus dem mathematischen Geist alles herauszuholen, was er in jedem Augenblick zu spenden fähig war. In der reinen Mathematik war seine Erfindungskraft staunenswert, und man steht verblüfft vor der Meisterschaft, mit der er das bestgeeignete Werkzeug in allen Fragen, die er angriff, zu schmieden wußte. Poincaré war kein Fremdling in irgendeiner der Wissenschaften, die bis zu einer solchen Stufe hinlänglich aufgerückt sind, um wenigstens in einigen ihrer Teile eine mathematische Form annehmen zu können. Er ist besonders ein großer Kritiker der Theorien der modernen Physik gewesen, gewandt, sie zu vergleichen und ihren wahren Ursprung herausspringen zu lassen; mit Vorliebe hob er ihre schwachen Punkte und ihre Widersprüche hervor. Sein Ruf als Philosoph war bedeutend. Jeder philosophische Begriff ist seiner Natur nach streitig; welche Meinung man aber auch über manche Ideen Poincarés haben mag, so ist doch die Bewunderung für den adligen Denker darum nicht weniger lebhaft, für den scharfen Dialektiker und den Schriftsteller mit persönlichem Stil, in dem der Geist der Mathematik und der Geist der Feinheit sich den Rang streitig machen. Mangels einer eingehenden Forschung, die eine große Arbeit erfordern würde, will ich es versuchen, eine Skizze von dem Lebenswerk des großen Mathematikers zu entwerfen." Das in diesen Sätzen der Einleitung angedeutete Programm wird in dem Aufsatz mit der den Franzosen eigenen Eleganz durchgeführt. Lp.

L. Brunschvicg. Henri Poincaré: le philosophe. Rev. de métaphys. et de mor. **21**, 585-616.

J. Hadamard. Henri Poincaré: le mathématicien. Ebenda, 617-658.

A. LEBEUF. Henri Poincaré: l'astronome. Ebenda 659-674.

P. LANGEVIN. Henri Poincaré: le physicien. Ebenda 675-718.

In diesen Artikeln, die von berufenen Vertretern der einzelnen von Poincaré gepflegten Wissenschaften verfaßt sind, erhält der Leser einen Überblick über die bewundernswerten Leistungen des vielseitigen Forschers, über die neuen Gedanken, mit denen er alle Gebiete bereichert hat, die er mit kaum begreiflicher Macht beherrschte. In ihrer Gesamtheit geben diese Artikel eine an sich zwar nicht kurze, im Verhältnis zur Größe des Gegenstandes aber eine knappe Darstellung des wissenschaftlichen Lebenswerkes des betrauerten Gelehrten. Als Sonderausgabe sind diese Aufsätze unter dem Titel erschienen: L'oeuvre de Henri Poincaré. Par Brunschwicg, Hadamard, Lebeuf, Langevin. (Paris: A. Hermann & Fils. 120 S. 8°.) Der Artikel von Langevin steht auch in Rev. du mois **16**, 419-463. Lp.

V. VOLTERRA. Henri Poincaré: l'oeuvre mathématique. Rev. du mois **15**, 129-154.

P. BOUTROUX. Henri Poincaré: l'oeuvre philosophique. Rev. du mois **15**, 155-183.

J. HADAMARD. Henri Poincaré et le problème des trois corps. Rev. du mois **16**, 385-418.

Die beiden ersten Aufsätze verfolgen dieselben Zwecke wie die vorstehend angeführten von Hadamard und Brunschwicg. Der Artikel von Hadamard ist der Abdruck des bezüglichen Teiles seines vorstehend erwähnten Aufsatzes. Lp.

HENRI POINCARÉ (29 avril 1854 — 17 juillet 1912). Suppl. Palermo Rend. 8, 13-32.

Die Schriftleitung der Rendiconti del Circolo matematico di Palermo hat unter dieser Überschrift eine Anzahl von Artikeln vereinigt, die dem Andenken des Verstorbenen gewidmet sind. — In der Zeitung „Le Temps" erschien schon am Todestage der Aufsatz von P. Painlevé, der Artikel von G. Humbert einige Tage später in der Revue „La Nature". Die 7 Reden bei der Begräbnisfeier am 19. Juli sind F. d. M. **43**, 45, 1912 erwähnt. Ebenso ist die Rede des Präsidenten der Académie des Sciences G. Lippmann vom 16. Dezember 1912 auf S. 36 desselben Bandes angeführt. Danach wird auf zwei Seiten das Faksimile eines Briefes an die Schriftleitung gegeben, der sich auf den letzten Beitrag Poincarés für die Rendiconti del Circolo bezieht. Endlich folgt ein Verzeichnis der von Poincaré für diese Zeitschrift gelieferten 15 Abhandlungen. Lp.

CH. NORDMANN. Henri Poincaré: his scientific work, his philosophy. Annual Rep. Smithsonian Inst. 1912, 741-763.

Der Artikel ist übersetzt aus der Revue des Deux Mondes vom 15. September 1912. Nach den einleitenden Worten folgen die Teile: 1. Der Mensch

und der Gelehrte. 2. Poincaré der Mathematiker. 3. Poincaré der Astronom. 4. Poincaré der Philosoph. Ausgelassen ist der Länge wegen Abschnitt 5 des Originals: Poincaré und das moralische Problem. 6. Schluß (ganz kurz auf $^2/_3$ Seite). Von Bewunderung getragen, ist die Schilderung des unbegreiflich hohen Genius, ein würdiges Denkmal für den zu früh von seiner Arbeit abgerufenen Denker. Lp.

A. Korn. Henri Poincaré (1854-1912). Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **12**, 2-13.

„Das Leben und Wirken dieses großen, vielseitigen Mannes in der Berliner Mathematischen Gesellschaft, welcher er auch als Mitglied angehörte, nach seinem Scheiden zu beleuchten, war eine Ehrenpflicht des Vereins.“ Im beschränkten Rahmen einer solchen Gedächtnisrede wird ein farbenreiches Bild des Erdenwallens des gottbegnadeten Forschers und seiner Leistungen in der Mathematik, Physik, Astronomie vorgeführt. „Seine Naturphilosophie wollte nicht ein System der Naturphilosophie sein; sie ist mehr eine Fortsetzung der kritischen Philosophie und eine Philosophie als Verbindung und Krönung der Einzelwissenschaften.“ Lp.

A. E. H. L(ove). Obituary notices on Jules Henri Poincaré. Lond. M. S. Proc. (2) **11**, XLI-XLVIII.

Die Schilderung des Lebens und der Forschungsergebnisse ist in manchen Beziehungen reizvoll. Wir teilen folgende Sätze aus dem Schluß mit: „Seine Lebensschau zeigt, daß er keiner von denen war, die am Wege sitzen und auf Eingebung harren. Er war immer an der Arbeit, sammelte stets frische Kenntnisse ein, indem er sich die Arbeit anderer zu eigen machte und beständig einen sprachlichen Ausdruck für die Gestalt fand, in der sich die erlangten Kenntnisse seinem Geiste darstellten, sowie für die Beziehung, in der sie zu den ihm vorher bekannten Dingen standen. Wenigen Menschen ist es gegeben, auch nur einen einzigen solchen Traum zu träumen, wie die Auffindung der automorphen Funktionen, die Fassung des geometrischen Kennzeichens der Stabilität oder die Entdeckung von Familien periodischer Bahnen. Hierzu bedurfte es eines Geistes, der ausgestattet war mit der Kenntnis der Gruppen, der Funktionen, der Reihen, der Differentialgleichungen, allgemeiner Theoreme bezüglich der Gleichungen der Dynamik, der harmonischen Analyse, der nichteuklidischen Geometrie und der vieldimensionalen Geometrie, der Analysis situs. Alle diese Kenntnisse und außerdem noch viele andere konnte er spielen lassen bei jedem Gegenstand, auf den sie angewandt werden konnten. Aber noch eins war nötig: das Unerklärliche, was wir Genie nennen. Sein Recht ist jetzt anerkannt, und es ist nicht wahrscheinlich, daß künftige Geschlechter das Urteil abändern werden: seine Stelle ist zwischen den größten Mathematikern aller Zeiten.“ Lp.

L. Margaillan. Henri Poincaré. Internationale Monatschr. **7**, 545-556.

Lebenslauf, Leistungen 1. in Mathematik, Astronomie und Physik, 2. in der Philosophie, 3. als Stilistiker. Lp.

A. Buhl. Henri Poincaré. Ens. math. **15**, 9-32 (mit Bildnis).

Nicht der Lebenslauf Poincarés, auch nicht seine Persönlichkeit soll geschildert werden; sondern die wissenschaftlichen Leistungen im großen Umriß bilden den Inhalt des Artikels, der von einem begeisterten Schüler verfaßt ist. Demgemäß zerfällt der Aufsatz nach der Einleitung in die Abschnitte: Der Mathematiker, der Astronom, der Physiker, der Philosoph. Lp.

A. Geikie. Presidential address. Lond. Roy. Soc. Proc. (A) 88, 1-12.

In dieser Antrittsrede spricht der Präsident der Royal Society auf S. 2—3 warme Worte zum Gedächtnis von H. Poincaré aus. Seite 6 gedenkt er auch der Verdienste von O. Reynolds. Lp.

H. L. Obituary notice of Osborne Reynolds, 1842-1912. Lond. Roy. Soc. Proc. (A) 88, XV-XXI.

Vgl. F. d. M. **43**, 48, 1912. Nach kurzer Darstellung des Lebensganges werden die wissenschaftlichen Arbeiten ausführlicher besprochen. „In der wissenschaftlichen Welt wird in Zukunft der Ruf von Reynolds zumeist auf seinen Beiträgen zur allgemeinen Physik und besonders zur Hydrodynamik beruhen." Als Hauptleistungen werden hervorgehoben die Untersuchung über das Wesen der Schmiermittel, das Widerstandsgesetz in parallelen Kanälen unter Einführung des Begriffes der kritischen Geschwindigkeit, die Bestimmung des mittleren mechanischen Wärmeäquivalents zwischen Gefrierpunkt und Siedepunkt des Wassers. Der Stil in seinen Schriften wird nicht gelobt; doch versucht der Verf. des Artikels die Wunderlichkeiten zu erklären und zu entschuldigen. Lp.

Weinreich. Nachruf an Rudolf Schimmack. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 113-116.

Rudolf Albert Theodor Schimmack, geb. 22. Februar 1881 zu Münster i. W., gest. 2. Dezember 1912 zu Göttingen, besuchte das Domgymnasium zu Verden von 1890 bis 1899, studierte in Freiburg i. B. und Münster je 1 Semester, in Berlin 2, von 1901 an in Göttingen, bestand 1905 in Göttingen die Oberlehrerprüfung und war seit dieser Zeit als Lehrer am Göttinger Gymnasium tätig; 1908 wurde er mit der Dissertation „Axiomatische Untersuchungen über die Vektoraddition" (F. d. M. **40**, 1027, 1909) in Göttingen zum Dr. phil. promoviert; er habilitierte sich 1911 an der dortigen Universität für die Didaktik mathematischer Wissenschaften. Seine wissenschaftliche Haupttätigkeit bestand in einem verständnisvollen Eingehen und Verarbeiten der Ideen von F. Klein über die Reform des mathematischen Unterrichts. Lp.

C. A. Laisant. Nécrologie. Gabriel Arnoux. Ens. math. **15**, 337-339.

Gabriel Arnoux, geb. in les Mées (Basses-Alpes) am 23. März 1831, gest. zu Monaco am 3. April 1913, besuchte die École navale 1846, gab aber als enseigne de vaisseau 1858 seiner Gesundheit wegen die Laufbahn als Seemann auf und lebte als Privatmann in seinem Heimatsort, bis er einige Jahre zur besseren Pflege nach Monaco übersiedelte. Über sein in vier Bänden erschienenes Hauptwerk „Essais de psychologie et de métaphysique positives; arithmétique graphique“ (1894, 1906, 1908, 1911), in welchem er sich mit einem gewissen Stolz als nicht zünftigen Mathematiker bekannt und beweist, ist im Jahrbuch regelmäßig berichtet worden. Laisant, ein Verehrer des Verstorbenen, hat schon zu seinen Lebzeiten den Inhalt dieses Werkes dem Fachmathematiker näherzuführen versucht. Lp.

J. L. E. D. Obituary notice of Sir Robert Ball, F.R.S. Nature **92**, 403-404.

Robert Stawell Ball, geb. zu Dublin 1. Juli 1840, gest. zu Cambridge 25. November 1913, studierte im Trinity College zu Dublin seit 1857, erwarb die akademischen Würden bis 1861, war Lehrer der drei jüngeren Söhne des Earl of Rosse, zugleich Beobachter am sechs- und am dreifüßigen Fernrohr (1866), wurde 1867 Professor für angewandte Mathematik und Mechanismen am Royal College of Science für Irland zu Dublin und veröffentlichte 1871 sein erstes volkstümliches Werk über experimentelle Mechanik. Von 1870 an entwickelte er die Theorie, die seinen Namen in allen mathematischen Kreisen sofort bekannt machte: seine Theorie der Schrauben, die in dem Bande Treatise on the theory of screws 1900 als Ganzes erschien. Infolge seiner wachsenden Berühmtheit erhielt er 1874 die Andrewssche Professur der Astronomie zu Dublin, 1892 die Lowndeansche Professur der Astronomie und Geometrie sowie das Direktorat der Sternwarte zu Cambridge. Sein letztes Werk „A treatise on spherical astronomy“ erschien 1908. Lp.

P. W. R. v. Bergmann †. Meteorol. Zs. **30**, 182.

Reinhold v. Bergmann, gest. 8./21. Februar 1913 im 64. Lebensjahr, war 30 Jahre Abteilungsvorsteher am Physikalischen Nikolai-Zentral-Observatorium zu St. Petersburg. Seine wissenschaftlichen Arbeiten gehören der Meteorologie an. Lp.

F. Linke. Richard Börnstein †. Meteorol. Zs. **30**, 347-349.

Richard Börnstein, geb. zu Königsberg i. Pr. 9. Januar 1852, gest. 13. Mai 1913 zu Berlin, studierte in Heidelberg und Göttingen, war Kriegsfreiwilliger 1870/71, wurde promoviert in Göttingen 1872, arbeitete bei Fr. Neumann in Königsberg und bei G. Wiedemann in Leipzig, habilitierte sich als Assistent von Quincke 1877 in Heidelberg, ging 1878 an die Landwirtschaftliche Akademie in Proskau, siedelte mit ihr 1881 an die Landwirtschaftliche Akademie nach Berlin über. Als Professor der Physik entfaltete er hier eine segenreiche Tätigkeit, die sich auf Hörer der Tierärztlichen Hoch-

schule und der Universität ausdehnte, an der er sich als Privatdozent habilitierte. In dem vorliegenden Artikel werden besonders die Verdienste Börnsteins um die Meteorologie hervorgehoben. Ganz übersehen ist, daß Börnstein die „Fortschritte der Physik" durch energisches Eingreifen als Redakteur auf den jetzigen Stand gebracht hat, wonach jeder Band schon nach der ersten Hälfte des dem Berichtsjahre folgenden Jahres fertiggestellt wird. Vgl. auch die biographischen Mitteilungen in Leopoldina **49**, 61-62. Lp.

G. Castelnuovo. Carlo Bourlet. Boll. Mathesis **5**, 85.

Nachruf auf den im 47. Lebensjahr als Opfer eines Unglücksfalls verstorbenen Professor der Pariser École nationale des Beaux Arts. Sk.

C. A. Laisant, R. Bricard. Décès de M. C. Bourlet. Nouv. Ann. (4) **13**, 337.

R. Bricard. Carlo Bourlet. Nouv. Ann. (4) **13**, 433-438.

H. Fehr. Carlo Bourlet. Ens. math. **15**, 417-418.

Carlo Bourlet, geb. zu Straßburg i. E. 25. April 1866, gest. 12. August 1913 zu Annecy, docteur ès Sciences mathématiques Paris 1891 (Thèse: Sur les équations aux derivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues. F. d. M. **23**, 386, 1891), Professor an der École Nationale et Spéciale des Beaux Arts de Paris, einer der drei Schriftleiter der Nouv. Ann.; die beiden anderen rühmen von ihm: „Es ist ein Gelehrter von hohem Wert, ein Lehrer von unanfechtbarem Ansehen, der in Carlo Bourlet dahingeht, in voller Tätigkeit, als Opfer eines unbeugsamen Geschickes. Die an der Schriftleitung dieser Zeitschrift Beteiligten verlieren in ihm den hingebendsten Mitarbeiter, den zuverlässigsten Freund." Seine Lehrbücher der Elementarmathematik wurden viel benutzt. Die wissenschaftlichen Arbeiten (Geometrie und Mechanik) sind im Jahrbuch regelmäßig besprochen. Lp.

Obituary notice on Lord Crawford F.R.S. Nature **90**, 652-653.

James Ludovic Lindsay, geb. 28. Juli 1847 zu St. Germain-en-Laye, gest. 31. Januar 1913, 26. Earl of Crawford nach dem Tode seines Vaters 1880, ausgezeichnet als Astronom, errichtete eine Sternwarte zu Dun Echt, Aberdeenshire und schenkte später die kostbaren Instrumente der königlichen Sternwarte von Edinburgh. Lp.

Biographische Mitteilungen über Dr. J. Domke. Leopoldina **49**, 70.

Gest. im Alter von 46 Jahren 3. Juni 1913 in Charlottenburg; Astronom, Mitglied der Normal-Eichungskommission, Mitherausgeber der Ambronn-Domkeschen Tafeln zur astronomisch-geographischen Ortsbestimmung, Spezialist auf dem Gebiete der Nomographie. Lp.

A. DAUNDERER. Hermann Ebert †. Meteorol. Zs. **30**, 302-304.

Gest. 12. Februar 1913 zu München im 52. Lebensjahre. In Leipzig geboren und gereift, ging er mit E. Wiedemann nach Darmstadt und Erlangen, wo er sich habilitierte. 1894 erhielt er eine Professur für theoretische Physik in Leipzig, ging aber bald als Experimentalphysiker nach Kiel. Seit 1898 wirkte er als Professor für Experimentalphysik an der Technischen Hochschule zu München. Lp.

F. ZSCHOKKE. Nekrolog François Alphonse Forel. Zürich. Naturf. Ges. **58**, 437-442.

F. A. Forel, geb. 2. Februar 1841 zu Morges, gest. 8. August 1913 ebenda, überall bekannt als Erforscher der Erscheinungen der „Seiches" des Genfer Sees, studierte in Genf, Montpellier und Würzburg, wo er 1865 den medizinischen Doktortitel erwarb und längere Zeit als Prosektor tätig war. Von 1870 bis 1895 war er Lehrer der Anatomie und Physiologie in Lausanne. Dann lebte er als Privatmann seinen Forschungen, die allen Erscheinungen im Genfer See, seine Fauna und Flora einbegriffen, galten. Lp.

E. JAHNKE. Richard Güntsche (1861-1913). Sitzber. Berl. Math. Ges. **12**, 96-110.

Heinrich Eduard Richard Güntsche, geb. zu Rudolstadt 16. Februar 1861, gest. 15. Mai 1913 in Berlin, besuchte die Realschule seiner Vaterstadt und das Realgymnasium zu Weimar, studierte von 1879 an in Berlin, Leipzig und wieder in Berlin, bestand die Oberlehrerprüfung in Berlin 1884, erwarb den Doktortitel in Jena 1891. Als Lehrer wirkte er am Saldernschen Realgymnasium in Brandenburg a. H., an verschiedenen Lehranstalten in Berlin und Frankfurt a. O., bis er 1888 in Berlin an der dritten Realschule fest angestellt wurde; 1902 ging er an das Falk-Realgymnasium in Berlin über, wo er als Professor starb. Seine wissenschaftlichen Arbeiten, nach der Dissertation aus der Theorie der Differentialgleichungen, erstreckten sich auf die Geometrographie, die er mit besonderer Liebe pflegte, und auf das Problem der Ganzzahligkeit von Kanten und Inhalt eines Tetraeders, Lp.

L. SILLA. Giuseppe Lauricella. Boll. Mathesis **5**, 34-40.

Giuseppe Lauricella, geb. 15. Dezbr. 1867 zu Girgenti, gest. 9. Jan. 1913 zu Catania, besuchte die Scuola e l' Istituto Tecnico seiner Vaterstadt bis 1887, studierte auf der Scuola Normale von Pisa unter Bianchi, Dini und Volterra, erwarb den Grad eines Doktors der Mathematik daselbst 1892, wurde 1894 zum Assistenten des Lehrstuhls für infinitesimale Analysis ernannt, 1895 zum Professor am Istituto Tecncio von Melfi, 1896 nach Pesaro versetzt, erhielt 1898 den Lehrstuhl für infinitesimale Analysis und der mathematischen Physik an der Universität zu Catania, wurde 1910 als Nachfolger von Cerruti nach Rom be-

rufen, kehrte aber nach einem Jahre aus Familienrücksichten nach Catania rück. „Sein Verlust gestaltete sich um so schmerzlicher, als er wie der von Cesàro von ausnahmsweise wehmütigen Umständen begleitet war. Um einem der eigenen Söhne zu Hülfe zu eilen, blieben beide als Opfer der Vaterliebe.“ Der Verf. des kurzen Nachrufes, der als Assistent von Lauricella mit ihm befreundet war, rühmt den vorzüglichen Charakter des der Wissenschaft zu früh Entrissenen. Die Liste der Schriften auf S. 30-40 umfaßt 60 Nummern; die Arbeiten gehören der Analysis und der mathematischen Physik, besonders der Elastizitätstheorie an. Lp.

J. B. Shaw. Alexander Macfarlane, L.L.D., D.Sc., F.R.S.E. Bull. Assoc. Prom. Quatern. 1913, 11-16.

C. G. Knott. Obituary notice of Alexander Macfarlane. Nature **92**, 103-104.

Geb. 21. April 1851 zu Blairgowrie in Schottland, gest. 28. August 1913 zu Chatham, Ontario, Canada. Macfarlane studierte auf der Universität Edinburgh und erregte dort die Aufmerksamkeit von Tait, in dessen Laboratorium seine Doktordissertation aus der Elektrizitätslehre entstand (1878). Von 1874 bis 1878 war er Neil Arnott Instructor für Physik, seine akademischen Grade erwarb er 1875, 1877 und 1878, in welcher Zeit er „Maclaren fellow“ an der Universität war. Zum Mitglied der Royal Society zu Edinburgh wurde er 1879 gewählt. Stellvertretender Professor der Physik an der Universität Andrews von 1880 bis 1881, Examinator an der Universität Edinburgh 1881 bis 1884, Professor der Physik an der Universität von Texas von 1885 bis 1894. Von nun an lebte er in Canada, wo er große Ländereien besaß. Sekretär der Association for the Promotion of Quaternions and Allied Systems von 1897 bis 1907, Vorsitzender von 1907 bis zu seinem Tode 1913. Die Liste der auf S. 15 bis 16 verzeichneten Schriften zeigt, daß die Vektoranalysis im Mittelpunkt seiner Interessen stand. Eingeschaltet ist eine nachgelassene Antwort auf die Kritik von G. B. M. in Nature, 8. August. 1913. Lp.

C. G. Knott. Obituary notice of Prof. James Gordon MacGregor. Nature **91**, 323-324.

MacGregor, geb. 31. März 1852 zu Halifax in Neuschottland, gestorben 21. Mai 1913 zu Edinburgh, war Professor der Physik am Dalhousie College und Clifton College (1876-1879) in seiner Vaterstadt, erhielt den neugegründeten Munro-Lehrstuhl für Physik ebenda 1880 und wurde 1901 der Nachfolger von Tait in Edinburgh. Lp.

G. Castelnuovo. Mario Pieri. Boll. Mathesis **5**, 40-41.

B. Levi. Mario Pieri. Loria Boll. bibl. **15**, 65-74.

Mario Pieri, geb. zu Lucca am 22. Juni 1860, gest. am 1. März 1913 zu Pieve di Compito bei Lucca, erhielt seine Vorbildung auf den technischen

Schulen zu Lucca und Bologna, studierte 1880-1881 auf der Universität zu Bologna unter Pincherle, ging 1881 auf die Scuola Normale di Pisa über und vervollständigte seine mathematischen Studien auf der dortigen Universität. Seine Lehrer waren hier Betti, De-Paolis, Dini, Bianchi, Finzi, Nardidei. Den Grad des Doktors der Mathematik erwarb er in Pisa 1884 mit der ungedruckten Dissertation Sulle singolarità della Jacobiana di quattro, di tre, di due superficie. Er unterrichtete nacheinander am Gymnasium zu Livorno, zu Turin, wo er bis 1900 Professor der projektiven Geometrie an der Militärakademie und Assistent an der Universität war, ging dann als Professor für projektive und darstellende Geometrie an die Universität zu Catania, 1908 in gleicher Stellung nach Parma. Das Schriftenverzeichnis (S. 69-74) in Loria Boll. bibl. umfaßt 60 Nummern. Die Arbeiten sind ausschließlich geometrisch und betreffen besonders auch die Prinzipien der Geometrie. Lp.

W. Voigt. Nachruf für Prof. Dr. Friedrich Pockels. Beibl. zu Ann. d. Phys. **37**, Nr. 19, I-IV.

Friedrich Karl Alwin Pockels, geb. 18. Juni 1865 zu Vicenza, gest. 29. August 1913 zu Heidelberg, erhielt die Schulbildung in Braunschweig, studierte zuerst in Braunschweig und Freiburg i. B., 1883 dann in Göttingen, wurde zum Dr. phil. daselbst 1888 promoviert, habilitierte sich ebenda 1892 für theoretische Physik, war von 1889 bis 1896 Assistent am Physikalischen Institut, wurde 1896 außerordentlicher Professor an der Technischen Hochschule in Dresden, 1900 an der Universität in Heidelberg. Seit 1908 war er Schriftleiter der Beiblätter der Physik. Seine bedeutungsvollen Arbeiten aus der mathematischen Physik sind im Jahrbuch angezeigt worden. Lp.

Biographische Mitteilungen über Dr. F. W. Ristenpart. Leopoldina **49**, 47.

Friedrich Wilhelm Ristenpart, geb. 8. Juni 1868 in Frankfurt a. M., gestorben als Direktor der Sternwarte und Professor der Astronomie zu Santiago (Chile), studierte in Jena und Straßburg, erwarb den Doktorgrad 1892, war Assistent der Sternwarten in Karlsruhe, Heidelberg, Kiel, Dozent an der Universität Berlin. Er starb Anfang April 1913. Lp.

Biographische Mitteilungen über Professor Dr. Louis Saalschütz. Leopoldina **49**, 64.

Geb. 1. Dezember 1835 zu Königsberg i. Pr., gest. ebenda 25. Mai 1913. Er studierte in seiner Vaterstadt 1854/59, erwarb daselbst den Doktorgrad 1861, war 1861 bis 1882 Lehrer an der dortigen Gewerbeschule, Privatdozent an der Universität 1871, außerordentlicher Professor 1875, seit 1888 etatsmäßig. Seine Arbeiten beziehen sich auf die reine und die angewandte Mathematik. Lp.

In memoriam P. H. Schoute. Amst. Ak. Versl. **21**, 1396-1400.

H. Fehr. P. H. Schoute. Ens. math. **15**, 256-257.

F. G. Teixeira. Pieter Hendrik Schoute. Ann. sc. Ac. Polyt. Porto **8**, 125.

Pieter Hendrik Schoute, geb. 21. Jan. 1846 zu Wormerveer, gest. zu Groningen 18. April 1913, wurde vorgebildet auf dem Gymnasium zu Deventer, studierte auf der Technischen Hochschule zu Delft und erwarb dort das Diplom 1867 als Zivilingenieur, setzte dann seine mathematischen Studien in Leiden fort und erwarb dort den Doktortitel 1870, wirkte als Lehrer in Nijmwegen und im Haag; von 1881 bis zu seinem Tode war er Professor an der Universität zu Groningen. Seine wissenschaftlichen Arbeiten erstreckten sich auf die verschiedenen Zweige der Geometrie: Differentialgeometrie, geometrische Verwandtschaften, kinematische Geometrie, Analysis Situs, Liniengeometrie, zuletzt besonders mehrdimensionale Geometrie. Er gehörte der Schriftleitung des Nieuw Archief und der Revue semestrielle an. Lp.

A. Berson. Léon Teisserenc de Bort †. Meteorol. Zs. **30**, 143-146.

Der Meteorologe Teisserenc de Bort (geb. 5. November 1855 in Paris, gest. 2. Jan. 1913 in Cannes). arbeitete unter Mascart im Bureau central météorologique 14 Jahre bis 1892. Einige Jahre nachher gründete er sich ein eigenes Observatorium in Trappes hinter Versailles. Unter seinen vielen erfolgreichen wissenschaftlichen Arbeiten zur Meteorologie kommen für das Jahrbuch hauptsächlich seine Untersuchungen zur Mechanik der Luftbewegungen in Betracht. Lp.

W. N. Shaw. Léon Philippe Teisserenc de Bort. Nature **90**, 519-520.

Anerkennende Würdigung der Leistungen des Verstorbenen in der Meteorologie. Lp.

C. Juel. Herman Valentiner. Nyt Tidsskr. for Mat. (B) **24**, 65-69.

Nekrolog für den dänischen Mathematiker, geb. 8. Mai 1850 auf Gjorslev (Seeland), gest. 17. September 1913 als Versicherungsmathematiker. Besonders werden erwähnt: seine Arbeiten über Schnittpunkte und Schnittkurven zwischen algebraischen Kurven und Flächen (1879-82), seine Dissertation (1881) über Raumkurven und seine Arbeit über endliche Transformationsgruppen (1889). P. H.

Nécrologie. H. Valentiner. Ens. math. **15**, 513.

Hermann Valentiner, geb. zu Gjorslev 8. Mai 1850, gest. 17. September 1913 zu Kopenhagen, erwarb die Doktorwürde an der Universität Kopenhagen 1881, war später Direktor der Lebensversicherungsgesellschaft „Dan“

in Kopenhagen. Als Korrespondent für die dänische mathematische Literatur hat er durch seine Beiträge in den Bänden **20** bis **41** (1888 bis 1910) dem Jahrbuche 22 Jahre hindurch in gefälliger Weise treue Dienste geleistet. Daß er trotz seiner praktischen Amtsgeschäfte und seiner in den letzten Lebensjahren geschwächten Gesundheit sich noch immer mathematisch beschäftigte, zeigen seine letzten Veröffentlichungen aus den Jahren 1909 und 1910. Lp.

H. Fehr. H. Weber. Ens. math. **15**, 339-340.

F. Rudio. Nekrolog. Heinrich Weber (1842-1913, Mitglied der Gesellschaft seit 1870. Ehrenmitglied seit 1896.) Zürich. Naturf. Ges. **58**, 437-453.

Biographische Mitteilungen über Heinrich Weber. Leopoldina **49**, 64.

Heinrich Weber, geb. 5. März 1842 zu Heidelberg, gest. 17. Mai 1913 zu Straßburg i. E., studierte in Heidelberg, Leipzig und Königsberg, wurde in Heidelberg promoviert 1863, habilitierte sich ebenda 1867, wurde dort außerordentlicher Professor 1869, folgte dann als Professor der Mathematik den Rufen an das Polytechnikum in Zürich 1870, an die Universität Königsberg 1875, an die Technische Hochschule zu Berlin 1883, an die Universitäten zu Marburg 1884, Göttingen 1893, Straßburg 1895. Die drei kurzen Nekrologe können nur in knappen Wendungen der Bedeutung des Verstorbenen gerecht werden. In dem zweiten der angeführten Artikel werden hauptsächlich die Beziehungen Webers zu der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich hervorgehoben. Lp.

Redaktion der Mathematischen Annalen. Heinrich Weber †. Math. Ann. **74**, 1-2.

Der Artikel beschäftigt sich hauptsächlich mit den Beziehungen Webers († 17. Mai 1913) zu den Math. Ann. und gibt eine allgemeine Charakteristik. Lp.

S. Dickstein. August Wiktor Witkowski (ur. 12 pardziernika 1853, † 21 stycznia 1913). Wiadom. Mat. **17**, 189-193. (Polnisch, mit Bildnis.)

Wl. Natanson. Rede in der feierlichen Sitzung, Donnerstag den 12. Juni 1913, gewidmet dem Gedächtnis des Professors August Witkowski († 21. Januar 1913). Ebenda, 195-201. (Polnisch.)

K. Zakrzewski. Die wissenschaftliche Arbeit von August Witkowski. Ebenda, 211-224. (Polnisch.)

Witkowski (12. Oktober 1853 — 21. Januar 1913), Professor der Physik an der Universität Krakau; das Hauptfeld seiner Forschung war die Thermodynamik. Lp.

K. Schwarzschild. Antrittsrede. Berl. Ber. 1913, 596-600.
M. Planck. Erwiderung. Berl. Ber. 1913, 600-602.

Beide Reden betonen die Zusammengehörigkeit von Mathematik, Physik, Chemie, Mineralogie, die „in einer Front marschieren. Wer zurückbleibt, wird nachgezogen. Wer vorauseilt, zieht die andern mit“. Lp.

E. M. Langley. The early history of the „Mathematical Gazette“. Math. Gazette 7, 134-136.

Um die Gründung der Math. Gazette verständlich zu machen, gibt der Verf. einen Überblick über die Entstehung und Wirksamkeit der Association for the Improvement of Geometrical Teaching seit 1871. Als Gesellschaft seit 1876 bestehend, nahm sie 1897 die Bezeichnung an „The Mathematical Association, an Association of Teachers and Students of Elementary Mathematics“. Das auf Antrieb von Langley ins Leben gerufene Organ der Gesellschaft „The Mathematical Gazette, a Terminal Journal for Students and Teachers“ besteht seit 1894, wo die erste Nummer im April ausgegeben wurde. Der Verf. verbreitet sich besonders über die Gelehrten, die sich um das neue Blatt verdient gmacht haben. Lp.

A. Lodge, C. S. Jackson. The Mathematical Gazette. Special Commemorative Issue. London: G. Bell & Sons. 48 S. 8°.

Im Vorjahre ist die Nummer 100 der Math. Gaz. erschienen; aus diesem Anlaß ist das vorliegende „Gedenkheft“ veröffentlicht, das die laufende Nr. 103 trägt.

Als Einleitung wird auf S. 25-27 ein geschichtlicher Rückblick auf die Wandlungen der „Mathematical Association“ gegeben, deren Organ die Gazette ist, sowie auf die Entstehung und Fortführung dieser Zeitschrift. Die einzelnen Artikel des Heftes werden an den geeigneten Stellen des Jahrbuchs besprochen. Lp.

J. P. Kirkman. Biographical note. E. M. Langley. Math. Gazette 7, 28.
Biographical note. W. J. Greenstreet. Math. Gazette 7, 28-29.

Da die Gedenknummer der Math. Gazette zu Ehren des Gründers Langley und des gegenwärtigen Schriftleiters Greenstreet ausgegeben ist, so sind ihr auf besonderen Blättern die sehr gut ausgeführten Bildnisse beider Männer beigegeben und kurze Nachrichten über ihren Lebensgang hinzugefügt. Lp.

Bulletin of the International Association for promoting the study of quaternions and allied systems of mathematics. June 1913. Press of the New Era Printing Company: Lancaster Pa. 35 S. 8°.

Enthält: Liste der Beamten und Mitglieder, Bericht des Sekretärs J. B. Shaw, Kassenbericht, Nekrolog für Alexander Macfarlane, für

Gaston Combebiac, Notizen über Bücher (Burali-Forti und Marcolongo, Analyse vectorielle générale. — Wilson and Lewis, Algebra for four-dimensional space), Supplement zur Bibliographie. Lp.

A. Gérardin. Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Proc. 5. Intern. Congr. Cambr. **2**, 444-446.

Kurze Angabe über den Stand des Unternehmens und die Einteilung. Lp.

Die Physikalisch-Technische Reichsanstalt. Fünfundzwanzig Jahre ihrer Tätigkeit. Die Naturwissenschaften **1**, Sonderdruck. 19 S. 4⁰. (Berlin: J. Springer.)

1. Allgemeines von K. Scheel. 2. Wärme von L. Holborn. 3. Elektrizität von W. Jaeger. 4. Optik von E. Brodhun. Lp.

K. Scheel. Die Physikalisch-Technische Reichsanstalt in Charlottenburg. Akad. Rundschau **1**, 221-227.

Geschichte und Ziele dieser Reichsanstalt. Lp.

Société mathématique de France. Comptes rendus des séances de l'année 1913. Paris: Gauthier-Villars. IV + 62 S. gr. 8⁰.

Die Sitzungsberichte erscheinen hier getrennt vom Bulletin der Soc. math. de France. Außer den geschäftlichen Mitteilungen enthält das Heft aber auch kurze Berichte über gehaltene Vorträge; diese werden daher auch an den für den Gegenstand geeigneten Stellen erwähnt werden. Lp.

A. Hilsenbeck. Register zu den ersten 50 Jahrgängen der Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse 1860-1910. Münch. Ber. Registerheft. IV + 152 S. 8⁰.

Das Heft enthält ein Register der Autoren (S. 1-60), ein Sachregister (S. 145-152). Eine fortlaufende Bandzahl haben nur die Jahrgänge 1871-1908, von Bd. 1 bis Bd. 38. Daher sind durchweg die Jahrgänge angeführt. Lp.

Atti della Società italiana per il progresso delle scienze. Sesta riunione: Genova, ottobre 1912. Roma: Società italiana per il progresso delle scienze. LVI + 952 S. 8⁰.

Dieser Band enthält die folgenden mathematischen Schriften:
M. Abraham. Una nuova teoria della gravitazione (S. 457-475).

Dieser Vortrag, der gleichzeitig auch in Nuovo Cimento (6) **4** erschienen ist, stellt in gemeinverständlicher Form die in andern Schriften entwickelten Ansichten des Verf. über das Gravitationsgesetz dar; siehe z. B. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{20}_2$, 678-682 (F. d. M. **42**, 852, 1911); (5) $\mathbf{21}_1$, 27-29, 94-97, 432-437 (F. d. M. **43**, 899-900, 1912); Annali di Mat. (3) **20**, 29-35 (Bericht in diesem Bande).

L. Roller. Il terzo principio della termodinamica (S. 477-489). Mit diesem Namen bezeichnet der Verf. die von W. Nernst im Jahre 1906 vorgeschlagene Hypothese, nach welcher jede in der Nähe des absoluten Nullpunktes der Temperatur stattfindende Umwandlung eines kondensierten Systemes die Entropie unverändert läßt. Der Verf. entwickelt die theoretischen und praktischen Folgen dieses Prinzips.

U. Cisotti. Su alcune recenti ricerche di idrodinamica (S. 491-511). Eine zusammenfassende Darstellung der neueren Untersuchungen von T. Levi-Cività, U. Cisotti, G. Colonnetti, H. Villat u. a. über Hydrodynamik, mit einem bibliographischen Verzeichnis.

L. Amoroso. Sopra un nuovo tipo di equazione integro-differenziale (S. 743-746). Die behandelte Gleichung ist hyperbolisch; eine analoge Gleichung von parabolischem Typus ist vom Verf. in Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{21}_2$, 141-146, 257-263 (F. d. M. **43**, 434, 1912) untersucht worden.

E. Ciani. Le curve piane di quint' ordine invarianti rispetto a gruppi di collineazioni piane (S. 747-752). Auszug einer in Palermo Rend. **36**, 58-78 unter dem Titel: Le quintiche piane autoproiettive erschienenen Abhandlung (Bericht in diesem Bande). Vi.

The celebration of the two hundred and fiftieth anniversary of the Royal Society of London on July 15-19, 1912. London Humphrey Milford. 128 S.

Enthält ein vollständiges Verzeichnis der Abgesandten, den Wortlaut der Adressen, Reden, Telegramme und Briefe, die an die Gesellschaft von gelehrten Gesellschaften und andern Körperschaften aus der ganzen Welt gerichtet wurden.

J. (Lp.)

Weitere Literatur.

M. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Von 1200-1668. Unveränderter Neudruck der zweiten Auflage. Leipzig: B. G. Teubner. XII + 943 S. 8°.

C. Wargny. Historia de las matemáticas. Santiago: Cervantes. 375 S. 8°.

D. E. Smith and Y. Mikami. A history of Japanese mathematics. Chicago: Open Court Publishing Co. V + 288 S. 8°.

R. Pitoni. Storia della fisica. Torino. (Periodieo di Mat. **29**, 94-95.)

Y. Mikami. The development of mathematics in China and Japan. Abhandlg. z. Gesch. d. math. Wissensch. Bd. 30. Leipzig: B. G. Teubner, X + 347 S. gr. 8°. Vgl. F. d. M. **43**, 3, 1912.

L. Bourgeois. Les anciennes mathématiques japonaises. Rev. du mois **16**, 129-160.

J. A. Vollgraf. De methode van Archimedes (volgens het in 1906 door Heiberg ontdekte handschrift). Nederl. Nat. en Geneesk. Congr. 1913, 211-213.

Archimedes. Geometrical solutions derived from mechanics. A treatise recently discovered and translated from the Greek by J. L. Heiberg. English version by L. G. Robinson. Chicago: Open Court Co. 28 S.

J. Firmicus Maternus. Matheseos libri VIII. Ediderunt W. Kroll, F. Skutsch et K. Ziegler. Fasciculus posterior libros 4 posteriores cum praefatione et indicibus continens. Lipsiae: B. G. Teubner. LXX + 558 p. 8⁰.

J. Heilbronn. Die mathematischen und naturwissenschaftlichen Anschauungen des Josef Salomo Medigo, dargestellt nach seinem Sefer Elim. Diss. Erlangen. 92 S. 8⁰ (1912).

A. Marie. L'œuvre scientifique de Blaise Pascal. Bibliographie critique et analyse de tous les travaux qui s'y rapportent. Préface par P. Duhem. Paris: A. Hermann & Fils. XXX + 184 S. 8⁰.

W. von Dyck. Über einen von ihm im Britischen Museum wieder aufgefundenen Brief von J. Kepler an Edmund Bruce. Verh. Naturf. Ges. Münster **2**, 12.

M. Simon. Bemerkung zu den Oeuvres de Fermat. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **21**, 300.

Berichtigung eines Zitates im dritten Bande, S. 240, Fußnote. Lp.

E. Altkirch. Spinoza im Porträt. Jena: E. Diederichs. 111 S. gr. 8⁰.

L. C. Karpinski. John Caswell. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 446.

Vgl. F. d. M. **43**, 14, 1912.

A. Jemelka. Über das Leben und die Tätigkeit des Mathematikers P. Jak. Kresa S. J. Časopis **42**, 501-509. (Böhmisch.)

F. Rudio. Mitteilungen über die Euler-Ausgabe. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 529-532.

W. von Dyck. Über den Mechaniker und Ingenieur Georg von Reichenbach. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 528.

Bericht über die vom Verf. 1912 herausgegebene Schrift: Georg von Reichenbach. 140 S. Fol.

Bessel und Steinheil. Briefwechsel. Herausgegeben im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Berlin und München. Leipzig: Engelmann. XVI + 249 S. 8⁰.

A. Maire. Quelques lettres de H.-C. Schumacher à François Arago. Ass. Franç. Nîmes **41**, C. R. 68.

P. Mansion. Esquisses biographiques extraites du liber memorialis de l'université de Gand. Mathesis (4) **3**, supplém. 28 S.

Biographien von J. Ch. Hauff, J. G. Garnier, J. A. Timmermanns, A. Bommart, A. H. E. Lamarle, E. J. Boudin, M. Schaar, Ch. Bergmans. (Rev. sem. $\mathbf{22}_1$, 13.) Lp.

E. Betti. Opere matematiche, pubblicate per cura della R. Accademia dei Lincei. Tomo II. Milano: U. Hoepli. VIII + 496 S. 8°.

Alf Guldberg. Verzeichnis über den wissenschaftlichen Nachlaß von Sophus Lie. 2. Mitteilung. Kristiania: J. Dybwad. III + 40 S. Lex.-8°.

A. Rivaud. Paul Tannery, historien de la science antique. Rev. de métaphys. et de mor. **21**, 177-210.

The Glasgow memorial to Lord Kelvin. Nature **92**, 200-201 (mit Bildnis).

Bericht über die Feier der Enthüllung des Kelvin-Denkmals in Glasgow am 8. Oktober 1913. Lp.

J. Y. Buchanan. Scientific papers. Volume I. Cambridge: University Press.

G. Galucci. Alfredo Capelli † (1855-1910). Necrologia. Atti Acc. Pontaniana **43** [(2) **18**], Nr. 3, 49 S.

Vgl. F. d. M. **41**, 26-27, 1910.

H. Fehr. Sir George Darwin. Ens. math. **15**, 68.

Kurzer Nachruf (vgl. F. d. M. **43**, 38, 1912).

Biographische Mitteilungen über G. H. Darwin. Leopoldina **49**, 45-46.

A. E. H. L. Obituary notice. George Howard Darwin. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, LV-LIX.

I. Dolbnia. Oeuvres mathématiques. Publiées sous les auspices de l'École supérieure des mines de l'Impératrice Cathérine II à Saint-Pétersbourg. Avec une préface de G. Darboux et une notice sur la vie et les travaux scientifiques de Dolbnia, par N. Kryloff. Paris: A. Hermann & Fils. XIV + 348 S.

J. Pionchon. Notice sur la vie et les travaux de Charles Méray (1835 bis 1911). Dijon: Marchal. 158 S. 8° (1912).

Vgl. F. d. M. **42**, 36, 1911.

P. Appell. Sur Henri Poincaré. Rev. scient. **20**, 144-146.

L. Rougier. Henri Poincaré et la mort des vérités nécessaires. (La Phalange.) Paris: Crès. 22 S. 8°.

J. Rudnicki. Die mathematischen Arbeiten von H. Poincaré. Wektor **2**, 271-281, 312-321 (Polnisch).

C. Cappeller. Persönliche Erinnerungen an Hermann Schaeffer. Für seine Freunde niedergeschrieben. Jena: B. Vopelius. 31 S. 8°.

P. Stäckel. Nachruf auf Peter Treutlein. Ber. u. Mitt. der I. M. U. K. 8, 129-131.

Vgl. F. d. M. **43**, 50, 1912.

Adresse an Herrn Heinrich Weber zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 19. Februar 1913. Berl. Ber. 1913, 248-249.

L. Autonne. Notice sur les recherches mathématiques de Léon Autonne. Paris: Gauthier-Villars. 36 S. 4°.

E. Lebon. Gaston Darboux. Biographie; bibliographie analytique des écrits. 2e édition, entièrement refondue. (Savants du jour.) Paris: Gauthier-Villars. IV + 96 S. 4°.

W. L. Webb. Brief biography and popular account of the unparalleled discoveries of J. J. See. Lynn, Mass.: Nichols. XII + 298 S. 8°.

Revue semestrielle des publications mathématiques rédigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam. Table des matières contenues dans les cinq volumes XVI-XX (1908-1913) suivies d'une table générale par noms d'auteurs. Amsterdam: Delsman en Nothenius. 172 S. 8°.

R. Conrubert. Dictionnaire allemand-français et français-allemand des termes et locutions scientifiques. Chimie, physique, mathématique, minéralogie. Paris: Dunod et Pinat. 252 S. 8°.

H. Fehr. Compte rendu du Congrès de Cambridge. (Publications du comité central, 2me série, 1re fascicule.) Genève: Georg. 97 S. 8°.

Feier zum fünfzigjährigen Jubiläum des Vereins der böhmischen Mathematiker und Physiker (Jednota českých mathematiků a fysiků). Časopis **42**, 273-324. (Böhmisch.)

B. Geschichte einzelner Disziplinen.

G. Eneström. Die mathematisch-historische Forschung und der mathematisch-historische Schulunterricht. Bibl. Math. (3) **14**, 1-8.

Eneström bemängelt die bisherigen Ansätze, den Wert des historischen Elementes bei dem mathematischen Schulunterrichte hervorzuheben, weil sie fast vollständig stillschweigend die Frage übergehen, ob und bis zu welchem Grade der Mathematiklehrer irgendein Gewicht auf Mitteilung korrekter historischer Angaben zu legen braucht. Er betont, daß Korrektheit der Notizen allerdings nicht besonders wichtig sei, wenn man nur beabsichtigt, durch die Einführung des historischen Elementes den Unterricht erfolgreicher und angenehmer zu machen; dagegen muß man vom prinzipiellen Gesichtspunkte aus eine möglichst große Korrektheit fordern, weil es eben der Zweck des Unterrichts ist, richtige Kenntnisse mitzuteilen. Da es anderseits gegenwärtig für die meisten Schullehrer unmöglich ist, zu entscheiden, inwieweit die Angaben der ihnen zugänglichen Handbücher der Geschichte der Mathematik richtig sind, kommt Eneström zu dem Ergebnis, daß für eine durchgeführte Berücksichtigung des historischen Elementes die Zeit noch nicht gekommen ist. Um eine solche Berücksichtigung recht bald zu ermöglichen, regt er die Bearbeitung einer mathematisch-historischen Exzerptensammlung mit Übersetzungen in deutscher Sprache und erläuternden Anmerkungen an. Die Exzerpte sollten natürlich aus den eigentlichen Quellenschriften entnommen werden, so daß man ein speziell für den mathematischen Schulunterricht abgefaßtes mathematisch-historisches Lesebuch bekäme. E.

G. Loria. La storia delle scienze, è una scienza? Atti Soc. It. per il Progr. delle Sc. **6**, 19. S.

Nachdem der Verf. die Schwierigkeiten dargelegt hat, die, wie jeder historischen Forschung, auch dem Studium der Geschichte der Naturwissenschaften

entgegenstehen, zeigt er, daß trotzdem nach Methode, Wichtigkeit und Nutzen die Geschichte der exakten Wissenschaften eine wahre Wissenschaft ist und wohl wert, an den Universitäten planmäßig getrieben zu werden. Er weist auf das mathematisch-historische Seminar in München hin, das, von Braunmühl geschaffen, in der kurzen Zeit seines Bestehens viele wertvolle Ergebnisse gefördert hätte.
Sk.

Fr. Pahl. Geschichte des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts. Leipzig: Quelle und Meyer. IX u. 368 S. gr. 8⁰. (Handbuch des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts. Herausgegeben von J. Norrenberg. I. Bd.)

„Aus der Überzeugung heraus, daß geschichtliche Hinweise den exaktwissenschaftlichen Unterricht beleben, ihn nicht nur anregender, sondern auch wirklich wertvoller machen, daß es daher für jeden Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaften notwendig ist, nicht nur die Geschichte seines Lehrfachs, sondern auch den Entwicklungsgang des Unterrichts in ihm zu kennen, ist die vorliegende Arbeit entstanden. Den beiden zuletzt angedeuteten Gesichtspunkten entsprechend, ist jeder Abschnitt in zwei Teile gegliedert, von denen der erste die Entwicklung der betreffenden Wissenschaften selbst behandelt, die für das Verständnis des zweiten, der Entwicklung des Unterrichts in ihnen gewidmeten Teiles unentbehrlich ist. Auch ist bei jeder Epoche darauf Bedacht genommen, eine Darstellung der gesamten Kulturentwicklung zu geben, um so für das Bild des Unterrichtswesens einen geeigneten Hintergrund zu schaffen und die Erscheinungen desselben in ihrem ursächlichen Zusammenhang mit dem jeweiligen Kulturzustande verständlich zu machen.“

Inhaltsverzeichnis. Einleitung. I. Die Mathematik und die Naturwissenschaften im Altertum und im Mittelalter. 1. Die mathematischen und die naturwissenschaftlichen Kenntnisse der Alten. 2. Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht im Altertum. 3. Mathematik und Naturwissenschaften im Mittelalter. 4. Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht im Mittelalter.

II. Das 16. Jahrhundert. 1. Wissenschaftliches Leben im Jahrhundert der Reformation. 2. Die Begründung des höheren Schulwesens im Zeitalter der Reformation. Erste Anfänge des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

III. Das 17. Jahrhundert. 1. Das saeculum mathematicum. 2. Die pädagogischen Strömungen und der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht im 17. Jahrhundert.

IV. Das 18. Jahrhundert. 1. Wissenschaftliche Leistungen und Kulturfortschritt im „saeculum philosophicum“. 2. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht im 18. Jahrhundert.

V. Das 19. Jahrhundert. 1. Wissenschaftliche Leistungen und Kulturfortschritt im „saeculum historicum“. 2. Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht unter dem Einfluß der staatlichen Verfügungen.

Schlußbetrachtung. Literatur. Anmerkungen. Namen- und Sachverzeichnis.

Es ist ein großes Verdienst des Verf., auf einem Gebiete, wo so wenig zusammenfassende Vorarbeiten ihm die Arbeit erleichterten, eine gut lesbare Dar-

stellung zu stande gebracht zu haben, von der jeder Lehrer mit Vergnügen Kenntnis nehmen wird. Wegen der großen Menge der zu berücksichtigenden Einzelheiten kann es nicht wundernehmen, daß in solchen Einzelheiten manches zu berichtigen übrig bleibt, wie dies Wieleitner in seiner scharfen Rezension im Archiv der Math. u. Phys. (3) **23**, 71-72, mit Lebhaftigkeit betont. Ref. möchte im Gegensatz hierzu aber das Wertvolle des Buches anerkennend hervorheben. Lp.

A. Witting und M. Gebhardt. Beispiele zur Geschichte der Mathematik. Ein mathematisch-historisches Lesebuch. II. Teil. Mit einem Titelbild und 28 Figuren im Text. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. VIII u. 61 S. 8°. (Math. Bibl. hrsg. v. W. Lietzmann u. A. Witting. Nr. XV.)

Mit diesem Bändchen eröffnet die Mathematische Bibliothek von Lietzmann und Witting eine kleine Quellensammlung für den mathematischen Unterricht, die sich vor allen Dingen an die Schüler unserer höheren Unterrichtsanstalten wendet. Das zuerst erschienene zweite Bändchen dieses mathematischen Lesebuches enthält 20 Stücke, die aus dem Zeitraum zwischen 1000 und 1600 stammen. Die Stoffe sind dem gewöhnlichen Rechnen, der Arithmetik, der Algebra, der Geometrie und der Vermessungskunst entnommen. Unter den Mathematikern, deren Werken die einzelnen Stücke entnommen wurden, sind die bedeutendsten Al Biruni, Regiomontanus, Albr. Dürer, Adam Riese, Mich. Stifel, Joh. Scheubel, Cardano, Chr. Rudolff und Gemma Frisius. Die in deutscher Sprache erschienenen Stücke sind im Urtext gegeben, die ursprünglich fremdsprachlichen dagegen in deutscher Übersetzung, die, falls noch keine Verdeutschung vorlag, von den Herausgebern angefertigt ist.

Außer der Anzeige von E. Löffler im Archiv der Math. (3) **23**, 56-57, wo manche Wünsche bezüglich derartiger Sammlungen kundgegeben werden (die vorliegenden Sätze sind jener Anzeige entnommen), ist besonders die schneidige Besprechung in Bibl. Math. (3) **14**, 181-185,, zu erwähnen. Trotz aller Ausstellungen gesteht aber Eneström zu: „Der fragliche Zweck ist durch die Auszüge insofern erreicht worden, als diese ermöglichen, den Stand gewisser Teile der Mathematik im Mittelalter und am Anfange der neueren Zeit mit dem heutigen Stand der Wissenschaft zu vergleichen. . . . Man kann damit einverstanden sein, daß das Buch ein dankenswerter Beitrag zur Verbreitung mathematisch-historischer Kenntnisse ist.“ Lp.

Felix Müller. Versuch einer Gruppierung der neueren mathematisch-historischen Schriften (1887-1911). Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 461-463.

Diese Vorarbeit für den 7. Band der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften soll ein leichtes Auffinden der einzelnen Arbeiten ermöglichen Lp.

G. Eneström. Das Bruchrechnen des Jordanus Nemorarius. Bibl. Math. (3) **14**, 41-54.

Eneström hat in zwei früheren Artikeln (Über die Demonstratio Jordani de algorismo, Bibl. Math. (3) **7**, 24-37 [vgl. F. d. M. **37**, 40, 1906], und Über eine dem Jordanus Nemorarius zugeschriebene kurze Algorismusschrift, Bibl. Math. (3) **8**, 135-153 [vgl. F. d. M. **38**, 57, 1907]) zwei Traktate über Rechnung mit ganzen Zahlen behandelt, welche Traktate als zwei Redaktionen ein und derselben Schrift betrachtet werden können, und welche schon im Mittelalter dem Jordanus zugewiesen wurden. Hier berichtet er über zwei ähnliche Traktate vom Bruchrechnen, welche in den Handschriften mit den anderen vereinigt sind und auch dem Jordanus zugewiesen werden. Der kürzere Traktat, den Eneström als den älteren betrachtet, enthält eine recht ausführliche Einleitung und 26 Sätze, der längere Traktat eine fast ebenso ausführliche Einleitung und noch 9, also zusammen 35 Sätze.

In den Einleitungen werden die verschiedenen Arten von Brüchen angegeben, wobei ein gewöhnlicher Bruch „vaga sumptio partium" und ein Sexagesimalbruch „consimilis sumptio partium" genannt wird, sowie die Definitionen der benutzten Kunstwörter gebracht. Die Einleitung des kürzeren Traktates enthält überdies einige mehr philosophische, zum Teil recht dunkle Ausführungen. Von den Sätzen sind die meisten nur Hülfssätze, und was gelehrt wird, ist hauptsächlich Gleichnamigmachen, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Ausziehung von Quadratwurzeln. Bei dem Gleichnamigmachen ist von der Aufsuchung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nenner nicht die Rede, sondern es wird nur bemerkt, daß man eine Zahl suchen soll, die durch jeden Nenner dividiert werden kann, und daß er um so bequemer wird, je kleiner diese Zahl ist. Viele Sätze des längeren Traktates beziehen sich nur auf Sexagesimalbrüche. Bei Quadratwurzelausziehung aus gewöhnlichen Brüchen wird nach der Regel $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$ verfahren, wenn b nicht eine Quadratzahl ist. E.

G. Eneström. Über die Geschichte der Kubikwurzelausziehung im Mittelalter. [Anfrage 163.] Bibl. Math. (3) **14**, 83-84.

Nachdem man die erste Ziffer a der Kubikwurzel einer ganzen Zahl von mehr als drei Ziffern gefunden hat, benutzt man bekanntlich die Größe $3a^2$ als Divisor, um die zweite Ziffer aufzufinden. Dieses Verfahren kommt noch nicht bei Sacrobosco, sondern erst bei Petrus de Dacia (1291) vor, und dieser schreibt sich selbst die Entdeckung des Verfahrens zu. Es wird gefragt, ob es wirklich von Petrus de Dacia erfunden worden ist. E.

G. Loria. Intorno ai metodi usati dagli antichi Greci per estrarre le radici quadrate. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 518-525.

In dem Aufsatz „Byzantinische Analekten" (M. Cantor-Festschr. F. d. M. **30**, 38, 1899) teilt Heiberg aus einem byzantinischen Rechenbuche Tabellen mit, die angenäherte Werte von Quadratwurzeln aus einer Reihe ganzer Zahlen enthalten. Loria zeigt jetzt, wie diese Werte aus sieben Näherungsformeln folgen, von denen die erste $\sqrt{a^2+b} \backsim a + b/2a$ bei Euklid vorkommt, die zweite $\sqrt{a^2+b} \backsim a + 2ab/(4a^2+b)$ mit jener dadurch in Zu-

sammenhang gebracht wird, daß im Nenner $2a$ der ersten Formel zu $2a$ noch $b/2a$ addiert wird. Durch die 7 Formeln können nicht nur alle Zahlen der von Heiberg veröffentlichten Tabellen berechnet werden, sondern auch andere aus dem griechischen Altertum überlieferten Werte für Quadratwurzeln.

Lp.

M. Raṅgācārya. The Ganita-Sāra-Sangraha of Mahāvīrācārya with English Translations and Notes. Sanskrit text and English translation. Madras: Government Press. XXVII + 325 S. (1912.)

Von diesem Werke gibt D. E. Smith im Bull. Amer. Math. Soc. (2) **19**, 310-315 einen Bericht, aus dem wir folgende Angaben entnehmen. Mahāvīrācārya lebte um 850, also zwischen Brahmagupta und Bhāskara. Von dem Werke sind 4 oder 5 Handschriften vorhanden, alle in Sanskrit. Das Werk ist in 9 Kapitel geteilt und behandelt die Rechenarten, mit Ausnahme der als bekannt vorausgesetzten Addition und Subtraktion, einschließlich der Algebra und der rechnerischen Behandlung geometrischer Aufgaben.

Wir besitzen in der Arbeit von Raṅgācārya „den bemerkenswertesten einzigen Beitrag zur Geschichte der Hindumathematik, der seit nahezu einem Jahrhundert geliefert ist. Welches Licht er auf die Beziehung von Bhāskaras Lilāvati zu Werken seiner Vorgänger werfen wird, auf die Beziehung der Schulen von Pataliputra und Ujjain zueinander und zu der von Mysore (der Heimat des Verf.), auf die Kenntnis der griechischen Mathematik im Osten und auf den Stand der Algebra in Indien ungefähr um die Zeit, wo Al-Khowārazmi sein Al-jebr w'al-muqābala in Bagdad schrieb, kann jetzt noch nicht gesagt werden." Lp.

M. Simon. Zu Brahmaguptas diophantischen Gleichungen zweiten Grades. Arch. der Math. u. Phys. (3) **20**, 280-281.

Aus der Colebrookeschen Ausgabe (Question 27, S. 363) schließt der Verf., daß Brahmagupta die Lösungen der Gleichungen

$$4(\lambda^2 \mp 2)x^2 + 1 = y^2 \text{ und } (\lambda^2 \pm 2)x^2 + 1 = y^2$$

besessen hat, um für $92x^2 + 1 = y^2$ und $83x^2 + 1 = y^2$ Lösungen zu finden.

Lp.

E. Bortolotti. Sul nome „algoritmo". Loria Boll. Bibl. **15**, 97-98.

Liber Maumeti filii Moysi alchoarismi de algebra et almuchabala incipit wird in der italienischen Übersetzung der Geschichte der mathematischen Wissenschaften in Italien (Buch I, S. 103) so gegeben: Comincia il Libro di Maometto figlio di Mosè sull' alguritmo per l' algebra e per l' almacabala (1842, also drei Jahre, bevor Reinaud seine Erklärung der Entstehung vom „Algorithmus" aus dem Namen Alkwarismi gegeben hat). Lp.

J. Grabowski. Benedykta Herbesta Arithmetica Linearis. Cracoviae 1577. (Arithmetica Linearis von Benedictus Herbestus, Cracoviae 1577.) Krakow Akad. umiej. Rozpravy **53**, 401-415; Krak. Anz. (A) 1913, 63-64.

Der Verf. liefert in seiner polnischen Originalarbeit eine eingehende Betrachtung des Inhalts und eine kritische Analyse des kleinen arithmetischen Werkes von dem gelehrten polnischen Jesuiten Benedictus Herbestus (1530-1593). Auf Grund der Vergleichung der beiden Ausgaben (Krakau 1561 und 1577) gelangt er zu dem Schluß, daß Herbest bestrebt war, in der zweiten Auflage alle dem praktischen Leben entnommenen Rechenbeispiele, besonders das kaufmännische Rechnen, auszuscheiden. Dieses Streben finde Erklärung in dem Umstande, daß das Werk für die Söhne des polnischen Adels bestimmt war, der zu jener Zeit die jesuitischen Schulen bevorzugte. Lp.

F. Podetti. La teoria delle proporzioni in un testo del XVII secolo. Loria Boll. bibl. **15**, 1-8, 33-41.

Zuerst wird darauf hingewiesen, daß schon Galilei in seinem Dialog „Sopra le definizioni delle proporzioni d'Euclide (Opere 8, 349) eine einfachere Darstellung der Lehre von den Proportionen gefordert und vorbereitet hat. Den hier gegebenen Weisungen folgten Vincenzo Viviani in seinem „Quinto libro degli Elementi di Euclide, spiegato colla dottrina di Galileo“ (Firenze, 1674) und Giordano Vitale im „Euclide restituto“ (Roma, 1680). Den glücklichsten Versuch in dieser Richtung machte aber G. Alfonso Borelli in seinem „Euclides restitutus“ (1658, 3. Aufl., Roma, 1679), dessen italienische Übersetzung „Euclide rinnovato, volgarizzato da Domenico Magni, e dall' istesso autore rivisto e corretto“ 1663 in Bologna erschien.

Der Verf. der vorliegenden Abhandlung will „zeigen, daß die von Borelli herrührende Theorie der Proportionen es auch verdiene, in Erinnerung gebracht zu werden. In ihr werden gemäß den Schlüssen der Kritik Galileis an die Stelle der Definitionen des fünften Buches der Elemente von Euklid andere Definitionen gesetzt, hieraus wird dann der Beweis der in den euklidischen Definitionen ausgesprochenen Sätze abgeleitet. Aber anders als Viviani, der sich darauf beschränkt, in seinem Quinto libro degli Elementi di Euclide die von Galilei benutzten Definitionen und Beweise einzustellen, sonst aber fast allen anderen Definitionen dieselbe Form zu belassen, die sie bei Euklid hatten, gab Borelli seiner Theorie eine durchaus neue, organische und vollständige Entwicklung. Noch ein anderer Umstand trägt dazu bei, die Borellische Theorie der Verhältnisse merkwürdig zu machen. Bekanntlich wird die Theorie der reellen Zahlen als der Verhältnisse von Größen implizit in dem fünften Buche des Euklid entwickelt. In der neuen Darstellung, die Borelli der Lehre von den Proportionen gibt, findet man die Grundlagen einer synthetischen Theorie der reellen Zahlen in einer ähnlichen Weise dargelegt, wie dies Dedekind in seiner allbekannten analytischen Theorie der reellen Zahlen ausgeführt hat.“ Lp.

A. Shinomiya. Die kaihô-tetsujutsu. Tôhoku Math. J. **4**, 54-67. (Japanisch.)

Die Methode zur Lösung einer Zahlengleichung zweiten und höheren Grades, wie sie in der Landesmathematik Japans praktisch angewandt wird. Lp.

H. Vogt. Zur Entdeckungsgeschichte des Irrationalen. Bibl. Math. (3) **14**, 9-29.

Schon vor einigen Jahren hatte Vogt die älteste Geschichte der irrationalen Größen behandelt (siehe Die Entwicklungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrhunderts, Bibl. math. (3) **10**, 97-155; F. d. M. **40**, 53-54, 1909), und er war dabei zu gewissen Resultaten gekommen, die nicht mit den früheren Darstellungen der Geschichte des Irrationalen vor Euklides übereinstimmen. Indessen gelangte Zeuthen in einer Abhandlung über dieselbe Frage (Sur la constitution des livres arithmétiques des Éléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationnalité, Danske Vidensk. Selsk. Overs. 1910, 395-435; F. d. M. **41**, 50, 537-538, 1910) zu anderen Ergebnissen, und dieser Umstand hat Vogt veranlaßt, noch einmal auf die Frage zurückzukommen. Er hält dabei seinen früheren Standpunkt aufrecht und betont besonders, daß Zeuthen den älteren Pythagoreern zu große Verdienste in betreff der Entdeckung des Irrationalen zuweist. Die Beweismomente, auf welche sich Zeuthen stützt, unterwirft Vogt einer eingehenden Kritik; er charakterisiert das Zeuthensche Verfahren als ein Streben, die Momente der Entwicklung des Irrationalen über ihr literarisches Hervortreten hinaus so weit rückwärts zu verfolgen, wie es historisch möglich und nicht durch direkte Zeugnisse widerlegbar erscheint. Mit einem Verfahren dieser Art, das natürlich nie zu sicheren Ergebnissen führen kann, will Vogt sich nicht einverstanden erklären. E.

The Annual of the British School at Athens. No. XVIII. Session 1911-1912. London: Macmillan and Co.

Enthält einen Aufsatz über die griechische Bezeichnung der Zahlen von M. N. Tod (vgl. Nature **92**, 266). J.

Y. Mikami. On Aida Ammei's solution of an equation. Ann. sc. Ac. Polyt. Porto 8, 210-216.

In einer größeren Fußnote zu diesem Aufsatz gibt der Verf. einen kurzen Überblick über die von den älteren japanischen Mathematikern benutzten Annäherungsmethoden zur Auflösung numerischer Gleichungen und beansprucht unter anderem die Erfindung der nach Horner benannten Methode für die Chinesen des 17. Jahrhunderts. In einer andern Fußnote werden einige Notizen über Aida Sanzayemon Ammei (1747-1817) mitgeteilt, einen Mathematiker von „außergewöhnlichem Talent", der aber fern von den Zentren japanischer Mathematiker lebte und daher nichts von den geheim gehaltenen Schätzen der mathematischen Kreise erfuhr. Unter den „Tausenden von Büchelchen", die er geschrieben hat, befindet sich eine Handschrift, die Mikami erst nach Abfassung seiner Bücher über die Geschichte der Mathematik im fernen Osten kennen gelernt hat. Aus dem Jahre 1798 stammend, enthält diese Schrift eine Methode, die mit dem Newtonschen Näherungsverfahren übereinkommt, ohne daß der Verf. den Begriff einer Funktion und ihrer Derivierten besessen hat. Lp.

BELGA. Question 4256. Interméd. des math. **20**, 263.

Die Anfrage von Lecat, betreffend die Literatur zu der von Bern. van Bauhuysen (1575-1619) gegebenen Aufgabe der Permutationen des Hexameters Tot tibi sunt dotes, virgo, quot sidera coelo, die wieder Hexameter sind, beantwortet der Verf. durch den Hinweis auf Sommervogel, S. J. in seiner Bibliographie de la Compagnie de Jésus **1** (1890), Artikel Bauhuis. Der an dieser Stelle gegebene Nachweis der bezüglichen Schriften wird vom Verf. in einzelnen Punkten ergänzt und berichtigt. Lp.

J. L. WILDSCHÜTZ-JESSEN. Om Eulers Kriterium. Nyt Tidsskr. for Mat. (B) **24**, 69-71.

Der Verf. vermißt in bezug auf Eulers Kriterium in den Lehrbüchern und in P. Bachmanns Enzyklopädieartikel IC 1, 6, Anm. 33 — wo nur Opusc. anal. I, 242-268 (1773) genannt wird — die Hinweise auf die zwei Abhandlungen: Theoremata circa divisores numerorum und Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta (N. Comm. Ac. Petrop. I (1747-48) und VII (1758-59). P. H.

A. GÉRARDIN. Note historique sur la théorie des nombres. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 539.

Der Verf. veröffentlicht nachgelassene Schriften über Zahlentheorie von Éd. Lucas, Proth, Pépin und G. de Rocquigny. Er fordert auf zur Einsendung von Beiträgen: „Briefen, Schriftstücken, Noten, Artikeln . . . aller modernen oder alten Zahlentheoretiker, lebender oder verstorbener, berühmter oder unbekannter". Lp.

MAX SIMON. Die Dreihundertjahrfeier der Logarithmentafel. Österr. Polyt. Zs. **10**, 157-159, gr. 4°; Frankf. Ztg. 1913, 7. Juli.

In diesem inhaltreichen Artikel gibt der Verf. sowohl die nötigen biographischen Notizen über John Napier und Jost Bürgi, als auch eine mit vielen geschichtlichen Notizen versehene Angabe über die Entstehung des Begriffs der Logarithmen, seine Durcharbeitung und Bedeutung für die reine und die angewandte Mathematik. Lp.

PH. E. B. JOURDAIN. Note on Fourier's influence on the conceptions of mathematics. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 526-527.

Die Arbeiten Fouriers über die trigonometrischen Reihen haben zur schärferen Auffassung der Begriffe: Stetigkeit und Unstetigkeit, Funktion, Integral und Integrierbarkeit, gleichmäßige Konvergenz den Hauptanstoß gegeben; Fourier selbst hat dies nachweisbar gefühlt. Lp.

PH. E. B. JOURDAIN. The ideas of the „Fonctions analytiques" in Lagrange's early work. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 540-541.

„Es scheint bislang nicht bemerkt zu sein, daß die Gedanken, die von Lagrange in einer Schrift aus dem Jahre 1774 ausgesprochen sind (Oeuvres **3**, 441-476), später in der „Théorie des fonctions analytiques" (1797), sich in einer Abhandlung von Daviet de Foncenex über die Grundprinzipien der Mechanik befinden (Misc. Taur. **2**, 299-322), die 1761 veröffentlicht ist. Bekannt ist ja, daß Lagrange zu Delambre sich ausgelassen hat, er habe für Foncenex unter anderen Dingen eine neue Theorie des Hebels verfaßt in dem dritten Teil der Abhandlung von Foncenex, und offenbar bezieht sich Lagrange auf den bezüglichen Teil jener Abhandlung." Dies wird näher ausgeführt. In dieser also von Lagrange herrührenden Mitteilung wird zum ersten Mal auch die Bezeichnung ψ' für $d\psi/dx$ gebraucht. Ferner ist ersichtlich, daß Lagrange schon zu jener Zeit die Methode der Reihenentwicklung neben der Infinitesimalmethode zur Herleitung von Differentialquotienten benutzt hat. Lp.

Ph. E. B. Jourdain. The development of the theory of transfinite numbers. (Part. III, continued from **16**, 43.) Arch. d. Math. u. Phys. (3) **22**, 1-21.

Vgl. F. d. M. **41**, 51, 1910. Beendigung der Besprechung der Ansichten von P. du Bois-Reymond. Es folgt die Darstellung des Kroneckerschen Zahlbegriffs; danach als Nr. 3: „Cantors Leistung in der Mengenlehre" (1879-1883). Lp.

Vilh. Thomsen und J. P. Gram. To Breve fra Karl Verner. (Zwei Briefe von Karl Verner.) Kopenhagen, Overs., 1913, 161-212.

Neuausgabe und französische Übersetzung zweier Briefe des verstorbenen dänischen Sprachforschers Karl Verner an Hugo Pipping (früher herausgegeben in den „Neuphilologischen Mitteilungen", Helsingfors 1903, 90-109) mit Einleitung von den obengenannten. Außer der Beschreibung des Vernerschen Phonautographen enthält sie eine von Verner ersonnene Methode zu harmonischer Analyse, die wohl als Zeugnis der Schöpfungskraft des berühmten Sprachforschers historisches Interesse hat, kaum aber die gewöhnlichen Methoden verdrängen kann. P. H.

P. Mansion. Sur un passage géométrique d'Aristote. Bibl. Math. (3) **14**, 30-32.

Eine dunkle Stelle des zweiten Buches der Aristotelischen Physik, die sich auf die Summe der Winkel eines Dreiecks bezieht, erklärt sich leicht, wenn man annimmt, daß Aristoteles ein gemischtliniges Dreieck in Betracht zieht. E.

T. Kierboe. Bemerkungen über die Terminologie des Archimedes. Bibl. Math. (3) **14**, 33-40.

Um zu erklären, warum die Terme „Achse" und „Scheitel" bei Euklides eine speziellere Bedeutung als bei Apollonios haben, zieht Kierboe

die Archimedische Terminologie in Betracht. Die Erklärung ist, daß bei Archimedes eine schrittweise Entwicklung der Bedeutung der fraglichen Terme zu erkennen ist, und die Bezugnahme auf diese Entwicklung gibt auch wertvolle Beiträge zur Bestimmung der chronologischen Ordnungsfolge der Archimedischen Schriften. Beispielsweise ist Kierboe dadurch zu dem Ergebnis gekommen, daß die Schrift „Ephodikon“ nicht, wie Heiberg annahm, älter als die Bücher über Kugel und Zylinder ist. E.

P. J. Harding. The geometry of Thales. Proc. 5. Intern. Math. Congr. 2, 533-538.

Der Verf. unterscheidet in der Auffassung des Winkelbegriffs drei Stufen: 1. Winkel (einer Straße, eines Hauses) ohne Vorstellung von Größe. 2. Winkel als Neigung ohne Vorstellung von Meßbarkeit. 3. Winkelgröße, vermittelt durch Drehung. Hiernach wird gezeigt, es sei nicht einmal wahrscheinlich, daß Thales einer der älteren Geometer war, die mittels eines archaischen Beweises erkannten, daß die Winkelsumme im Dreieck gleich zwei Rechten ist; es scheint daher, daß Thales über die zweite der oben angedeuteten Stufen nicht hinausgekommen ist. Die historische Ansicht, daß Thales den Satz vom rechten Winkel im Halbkreise gefunden habe, läßt sich vielleicht dadurch stützen, daß er, den Ägyptern folgend, Rechtecke gezeichnet, die Gleichheit der Diagonalen bemerkt hat und so zu dem Satze der reinen Geometrie aufgestiegen ist. Der Verf. stimmt also mit Zeuthen in der Beurteilung der Leistungen von Thales überein. Lp.

E. W. Hobson. „Squaring the Circle“: A history of the problem. Cambridge: University Press. 57 S.

Diese Vorlesungen über die Geschichte des Problems der Kreisquadratur benutzen die wohlbekannten Werke von F. Rudio, T. L. Heath, M. Cantor, K. Th. Vahlen, Y. Mikami, H. Schubert und D. E. Smith. Das kleine, sie wiedergebende Buch ist in vier Kapitel geteilt: Allgemeiner Bericht über die Aufgabe. Die erste Periode (von den ersten Erwähnungen versuchlicher Bestimmungen von π bis zur Erfindung der Differential- und Integralrechnung). Die zweite Periode (bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts). Die dritte Periode (bis spät in das 19. Jahrhundert). In dem letzten Kapitel wird ein einfacher und klarer Beweis von der Irrationalität von π auf Grund des Beweises von Gordan gegeben. J. (Lp.)

J. Würschmidt. Ioannis Verneri de triangulis sphaericis libri quatuor, de microscopiis libri sex cum prooemio Ioachimi Rhetici. II. De meteoroscopiis. Herausgegeben von J. W. unter Benutzung der Vorarbeiten von A. Björnbo. Mit einem Vorwort von Eilhard Wiedemann und 97 Figuren im Text. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. VI u. 260 S. gr. 8°. (Abh. z. Gesch. d. math. Wiss. **24** $_2$.)

Das Vorwort von E. Wiedemann möge als Referat dienen: „A. A. Björnbo hat im Jahre 1907 das erste der beiden bedeutungsvollen Werke

von Johannes Werner, nämlich „De triangulis sphaericis", in vortrefflicher Weise herausgegeben. Dabei hat er alle zur Charakterisierung der Handschrift nötigen Angaben gemacht sowie die Textgeschichte beider Werke behandelt. An den Text des ersten Werkes schließt sich unmittelbar das zweite große Werk „De meteoroscopiis" an; von ihm war auf Kosten der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München eine weißschwarze Photographie hergestellt worden, nach der A. A. Björnbo eine Abschrift gemacht hat; zugleich hat er einige wenige der durchweg fehlenden Figuren ergänzt. Ein unerbittliches Schicksal hat den hervorragenden Kenner der älteren Mathematik vor der Vollendung dieses wie zahlreicher anderer Arbeiten der Wissenschaft entrissen. In trefflicher Weise hat J. L. Heiberg seine Verdienste in der Bibliotheca Mathematica gewürdigt (F. d. M. **42**, 32, 1911). Auf meine Anregung ist dann von der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, die sich zunächst an mich wandte, das von Björnbo hinterlassene Material an Dr. Würschmidt übergeben und diesem dessen Bearbeitung anvertraut worden. Um die Arbeit von Werner allgemein zugänglich zu machen, schien es Würschmidt zweckmäßig, nicht dem lateinischen Text eine deutsche Übersetzung beizugeben, sondern den Inhalt der einzelnen Sätze und Beweise, erläutert durch Figuren, in moderner mathematischer Sprache, aber in engem Anschluß an Werners Behandlungsweise darzustellen. Außerdem hat Würschmidt zum Schluß in einem Wörterbuche, welches das von Björnbo für den ersten Teil gelieferte ergänzt, die selteneren Wörter zusammengestellt." Lp.

Y. Mikami. The circle measurement of the Takuma school. Tokyo Math. Ges. (2) **7**, 46-56.

In der von Takuma (1730) gegründeten Schule der Mathematiker ist die Kreisausmessung anders behandelt worden als von Seki und seinen Schülern. Deshalb gibt der Verf. hier genauere Nachrichten über die von Tukuma und seinen Schülern befolgten Methoden. Bei der ersten Aufgabe wird vom ein- und vom umgeschriebenen Quadrat eines Kreises ausgegangen und durch Verdoppelung der Seitenzahl, wie bei Ludolph van Ceulen, fortgeschritten, aber bis zum regulären Vieleck von 2^{43} Seiten. Das arithmetische Mittel aus den Umfängen der so berechneten Vielecke ergibt π richtig auf 25 Dezimalen. Andere Aufgaben über Berechnungen des Pfeils eines Bogens von gegebener Länge und dergleichen gehen von der Aufstellung unendlicher Reihen aus. Lp.

Y. Mikami. On the formula for an arc of a circle in the „Kwatsuyō Sampō" and allied subjects. Tokyo Math. Ges. (2) **7**, 157-170.

In dem Werke „The development of mathematics in China and Japan" (F. d. M. **43**, 3-6, 1912) hat der Verf. für den Bogen a vom Pfeile s im Kreise vom Durchmesser d eine Formel aus dem im Titel angeführten Werke (1709) mitgeteilt und abgeleitet. Diese Ableitung befriedigt ihn nicht mehr; er ersetzt sie daher durch eine neue und bespricht mehrere andere Formeln bei späteren Mathematikern, die zur Lösung derselben Aufgabe ersonnen sind.

Y. Mikami. The parabola and hyperbola in Japanese mathematics. Tôhoku Math. J. **3**, 29-37.

Nachdem der Verf. in einem vorjährigen Aufsatz (F. d. M. **43**, 6, 1912) auf die seltsame Tatsache hingewiesen hatte, daß die japanischen Mathematiker erst in der Mitte des 19. Jahrhunderts angefangen haben, sich mit der Hyperbel und Parabel zu beschäftigen, bringt er als Frucht eingehenderer Nachforschungen weitere Notizen, die Nachrichten aus denselben enthalten. Wir erwähnen, daß Koide 1846 die Wurfparabel behandelt hat, anscheinend aber beeinflußt durch ein europäisches Werk über das Schießen. Auch das Rotationsparaboloid und der parabolische Zylinder fanden bald Behandlung bei Aufgaben der Kubatur. Lp.

K. Yanagihara. On some geometrical propositions in Wasan, the Japanese native mathematics. Tôhoku Math. J. **3**, 87-95.

In dieser Note sind einige Sätze der elementaren Geometrie zusammengestellt, die sich bei den Wasanisten in den Jahren 1820 bis 1840 vorfinden. Sie betreffen zumeist die Inversion von Kreisen und Kugeln und daraus abzuleitende Eigenschaften. Bekanntlich hat sich Steiner zu derselben Zeit auch mit der Inversion beschäftigt und ist dadurch auf seine Schließungssätze von Kreisreihen geführt worden. Die Japaner sind nicht so weit vorgedrungen, obschon sie solchen Fragen nahegekommen sind. Ihren rechnerischen Neigungen folgend, haben sie besonders Beziehungen zwischen den Radien der sich berührenden Kreise und Kugeln aufgespürt, was ja Steiner ebenfalls getan hat. Lp.

H. Wieleitner. Zwei Bemerkungen zu Stirlings „Lineae tertii ordinis Newtonianae". Bibl. Math. (3) **14**, 55-62.

Die erste Bemerkung bezieht sich auf eine in den Cantorschen „Vorlesungen" vorkommende Angabe, laut welcher Stirling behauptet hätte, bei den Ovalen müsse man sich imaginäre, in der Unendlichkeit liegende Doppelpunkte vorstellen, eine offenbar unsinnige Behauptung. In Wirklichkeit ist es leicht, den richtigen Sinn der Stirlingschen Behauptung auszufinden, wenn man bemerkt, teils daß dieser nur von einer speziellen Art ovalförmiger Kurven spricht, teils daß bei ihm das Wort „imaginär" als „konjugiert unendlich fern" zu deuten ist.

In der zweiten Bemerkung weist Wieleitner nach, daß Stirling der erste gewesen sein dürfte, der aus der allgemeinen Gleichung eines Kegelschnittes die Lage der Achsen berechnet hat. E.

R. Pitoni. Cenni storici sulle leggi della caduta dei gravi. Suppl. al Period. **16**, 53-56.

Angaben über die Ansichten im Altertum und über die Anzweifelungen der von Galilei aufgestellten Gesetze des freien Falles sowie des parabolischen Wurfes bei seinen Zeitgenossen und Nachfolgern. Der Artikel ist der „Storia della Fisica" des Verf. entnommen. Lp.

PH. E. B. JOURDAIN. The nature and validity of the principle of least action. Monist 23, 277-293.

Dritter und letzter Teil der Artikel von Jourdain über das Prinzip der kleinsten Wirkung (Monist 22, 285-304, 414-459; F. d. M. 43, 75, 1912). Er betrifft hauptsächlich die Prüfung der Ansichten von Maupertuis, Euler, d'Arcy und andern, von denen die früheren Aufsätze handelten. „Das Ziel dieser Prüfung", sagt der Verf., „ist das, was ich für das Ziel jeder historischen und kritischen Forschung in der Wissenschaft halte: die Klärung der Prinzipien und Methoden unter Betonung dessen, was sich als psychologisch wichtig erwiesen hat." Zuerst kommen Betrachtungen über die Differentialgleichungen der Mechanik, die es ermöglichen, das Wesen des Prinzips der kleinsten Wirkung und seine Stellung in bezug auf andere, wie dasjenige von d'Arcy (der Flächen), zu bestimmen. Die Frage bezüglich der Ausdehnung der Gültigkeit des Prinzips der kleinsten Wirkung ist in neuerer Zeit ganz befriedigend beantwortet worden, vornehmlich dank der Arbeit von Hölder; hierüber handelt besonders der erste der oben erwähnten Artikel. Der vorliegende enthält weiter eine Abwägung von Recht und Unrecht in den Streitfragen bei Maupertuis, d'Arcy, Euler, Louis Bertrand, Lagrange und andern. Hierbei wird Maupertuis günstiger beurteilt und d'Arcy weniger günstig, als nach hergebrachter Meinung zu erwarten war. Doch wird anerkannt, daß Maupertuis keine stichhaltigen Gründe zur Stütze seiner Behauptung gab, dunkel und vielleicht nicht immer abgeneigt war, vorzugeben, er sehe Wahrheiten, wo er es nicht tat, aber es gern gemocht hätte. D'Arcy kritisierte Maupertuis bis zur Vernichtung und hatte oft recht. Ob er unrecht hatte, das sah Maupertuis nicht, ausgenommen in einer Sache: der Definition von „Aktion". J. (Lp.)

PH. E. B. JOURDAIN. The principle of least action. Chicago and London: The Open Court Publishing Company. 83 S.

Diese geschichtliche und kritische Studie besteht aus drei Artikeln, die ursprünglich in „The Monist" erschienen sind („The principle of least action". Monist 22, 285-304; F. d. M. 43, 75, 1912. — „The nature and validity of the principle of least action." Referat vorstehend.). In dem ersten Teil („Maupertuis and the principle of least action"), einer gründlichen Studie nach den Urquellen: Maupertuis, Euler, Daniel Bernoulli, König, d'Arcy, Louis Bertrand und andern, werden Irrtümer bei Adolf Mayer („Geschichte des Prinzips der kleinsten Aktion", Leipzig, 1877), Mach und Lord Morley verbessert. In dem zweiten Teil („Remarks on some passages in Mach's mechanics") wird die Entwicklung der Ansichten über das Prinzip verfolgt, wiederum ganz eingehend, bei Lagrange, Rodrigues, Jacobi, Ostrogradski und Hertz bis zu den neuesten Ergebnissen von Hölder, Voß, Réthy und Jourdain. Diese neueren Ergebnisse ermöglichen es, das im letzten Teil erörterte Problem zu lösen über das Wesen und die Gültigkeit des Prinzips der kleinsten Wirkung. Auch hier werden die früheren Abhandlungen der Kritik unterworfen, und der Endertrag stimmt nicht in jeder Hinsicht mit der hergebrachten Meinung; dies liegt teilweise an Irrtümern, die nur durch gründliche geschichtliche Forschung berichtigt werden können. J. (Lp.)

Ph. E. B. Jourdain. Robert Hooke as a precursor of Newton. Monist **23**, 353-384.

Der Weg zu der Großtat des Denkvermögens in Newtons Theorie der Gravitation wurde weit mehr von seinem mathematischen Fortschreiten und weit weniger von seiner Einbildungskraft geebnet, als angenommen wird, z. B. bei Mach. Eine recht vollständige Erzählung mit Anführungen aus den Untersuchungen Hookes über Gravitation und seinem Briefwechsel mit Newton wird gegeben. Jourdain macht ausgiebigen Gebrauch von S. P. Rigaud, „Historical essay on the first publication of Sir Isaac Newton's Principia" (Oxford, 1838) und W. W. R. Ball, „An essay on Newton's Principia" (F. d. M. **25**, 84, 1893); ebenso auch von Hookes eigenen Veröffentlichungen. Ferner wird die wichtige Tatsache ermittelt, daß Hooke den Anfang gemacht hatte, das Prinzip der Mechanik einzufangen, das Newton fester in seinem dritten Bewegungsgesetze faßte. Newton selbst scheint den Wert der Arbeit von Hooke unterschätzt zu haben, vielleicht sogar ihren Einfluß auf ihn selbst, und hier gibt der Gegenstand Anlaß zu einer kurzen Studie einer Seite des besonderen Charakters von Newton.

J. (Lp.)

P. Carus. Schopenhauer on Newton and Hooke. Monist **23**, 439-445.

Im Zusammenhang mit dem Artikel von Jourdain (Referat vorstehend) gibt Carus eine Übersetzung verschiedener Auszüge aus Schopenhauers Schriften über das Thema der Beziehungen zwischen Hooke und Newton. Die Auszüge sind aus „Parerga und Paralipomena" und „Welt als Wille und Vorstellung". J. (Lp.)

H. Carrington. Early theories of gravity. Monist **23**, 445-458.

Enthält Angaben über Theorien der Schwere bei Newton (1678), Arago, Ph. Villemot (1707), Bernoulli, Lesage (1750), Euler (1760), Herapath (1816), Guyot (1861), Faraday (1844, 1850), Séguin (1848, 1858), de Boucheporn (1849), G. Lamé (1852), J. J. Waterston (1858), J. Challis (1859 und 1876), J. S. Glennie (1861), Keller (1863), P. G. Tait (1864), Saigey (1866), J. Croll (1867), P. Leray (1869), Boisbaudran (1869), Guthrie (1878), W. Crookes (1873), Kelvin (1901), W. B. Taylor (1876). J. (Lp.)

P. van Geer. Hugeniana geometrica, XII. (Slot). Nieuw Archief (2) **10**, 370-395.

In diesem Schlußartikel werden die geometrischen Fragen behandelt, die in den letzten Teilen des Briefwechsels von Huygens vorkommen. Zuerst handelt es sich um die Konstruktion der Normale für die Konchoide des Nikomedes, wie sie ohne Beweis von Descartes in seiner „Géométrie" gegeben ist. Der Verf. teilt zwei umständliche Beweise mit, die van Schooten geliefert hat, danach den kürzeren von Huygens, endlich einen nach den Methoden der Differentialrechnung von ihm selbst aufgestellten. Dann

wird die von Leibniz gestellte, von Huygens gelöste Aufgabe behandelt, die Kurve zu finden, längs welcher ein schwerer Körper reibungslos abgleitend in gleichen Zeiten gleiche Höhen durchläuft (Neilsche Parabel). Endlich handelt es sich um die von Huygens gestellten und von Leibniz bearbeiteten Aufgaben, die in der jetzt üblichen Ausdrucksweise lauten, die Kurven zu finden, deren Subtangenten $\pm\left(\frac{y^2}{2x}-2x\right)$ oder $\pm\frac{2x^2y-a^2x}{3a^2-2xy}$ sind. Andere allgemeine Betrachtungen übergehend, setzen wir aus den Schlußworten die folgenden Sätze her: „Mit Huygens ist auch seine Methode geometrischer Untersuchung untergegangen; eine Belehrung darüber hat er nicht gegeben und deshalb auch keine Schüler herangebildet; so war er der letzte seiner Zeit. Seine Methode wurde verdrängt durch die viel umfassendere von Newton und Leibniz, wobei eben das Eigenartige der Untersuchung verloren ging. Dieses bestand in der engen Verbindung der Entstehung einer Kurve mit ihren Eigenschaften; diese Verbindung mußte in jedem besonderen Fall aufgespürt und verfolgt werden.“ Lp.

F. Dannemann. Die Naturwissenschaften in ihrer Entwicklung und in ihrem Zusammenhange. Arch. Gesch. d. Naturw. u. Techn. **6**, 39-45.

Aus der Einleitung des IV. Bandes von „F. Dannemann, Die Naturwissenschaften in ihrer Entwicklung und in ihrem Zusammenhang“, Leipzig, W. Engelmann, 1913, Bd. IV: Das Emporblühen der modernen Naturwissenschaften seit der Entdeckung des Energieprinzips. [Bd. I: Von den Anfängen bis zum Wiederaufleben der Wissenschaften (1910). Bd. II: Von Galilei bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts (1911). Bd. III: Die modernen Naturwissenschaften bis zur Entdeckung des Energieprinzips (1911)]. Der Verf. fordert energisch Vorlesungen über Geschichte der Einzelwissenschaften (also auch der Mathematik) an den Hochschulen. Lp.

T. Martini. Le dottrine del Fusinieri nei rapporti con la fisica moderna. Ven. Ist. Atti **72** [(8) **14**], 603-644.

Ambrogio Fusinieri, geb. zu Vicenza 10. Febr. 1775, bezog schon mit 15 Jahren die Universität und studierte auf Wunsch seines Vaters die Rechtswissenschaft, hörte aber daneben auch Vorlesungen über Physik und Mathematik, wurde dann im praktischen Leben als Jurist verwendet, teils in der Advokatur, teils als Rechtslehrer. Nach Beendigung der napoleonischen Zeit, als Österreich in Norditalien herrschte, zog er sich in das Privatleben zurück und lebte nur seinen experimentellen und theoretischen Studien in der Physik, von denen er seit 1819 durch eine Reihe von Veröffentlichungen Kunde gab. Er selbst veröffentlichte 1844 seine gesammelten Schriften „Opere di Ambrogio Fusinieri“ (Padova: Sicci. 3 Bände). Die Lebensumstände sind enthalten in: „Notizie tratte dai cenni sulla vita di Ambrogio Fusinieri stesi da sua figlia. Scritti vari di A. F. illustrati da Giovanni Cantoni.“ Vicenza 1878.

Sein Kampf galt einer einheitlichen Auffassung aller Naturkräfte wider die Annahme der verschiedenen Imponderabilien: Wärmestoff, magnetische und elektrische Fluida. Insofern kann er als Vorläufer der modernen Physik gelten. Seine aus den Experimenten hervorgegangenen theoretischen Anschauungen sind aber unfruchtbar geblieben. „In der verdünnten Materie entwickelt sich eine Abstoßungskraft, durch welche sie danach strebt, sich weiter zu verdünnen und sich unter neuer Entwicklung derselben Kraft zu teilen. Somit wird die frühere Wirkung zur Ursache einer weiteren Wirkung und so unbegrenzt weiter, wofern nicht äußere Hindernisse den Fortgang hemmen." Dieses ist der grundlegende Satz, von dem er in seinen Entwicklungen ausgeht. Lp.

G. ENESTRÖM. Question 4197. Interméd. des math. **20**, 166.

Die Aufgabe über den Körper kleinsten Widerstandes ist von W. Emerson in dem Werke behandelt „Miscellanies. Or a miscellaneous treatise; containing several mathematical subjects" (London, 1776) im Artikel XVIII, Nr. 22, S. 456-458: To construct the solid of least resistance for the figure of a ship that will sail the fastest possible. Lp.

A. E. HAAS. Die Elektronenhypothese in ihrem Verhältnis zu älteren physikalischen Theorien. Arch. Gesch. d. Naturw. u. Techn. **6**, 144-149.

Die historische Übersicht schließt mit den Sätzen: „So waren es schließlich drei ganz verschiedene Phänomene, die man nicht anders als durch die Annahme substantieller Elektrizitätsatome erklären zu können glaubte: die Erscheinungen der Elektrolyse, die Kathodenstrahlen und die elektrodynamisch-optischen Vorgänge im Innern der Körper. Durch den Umstand, daß man aus allen diesen grundverschiedenen Phänomenen dennoch den gleichen Wert für eine das Elektron charakterisierende Konstante erhielt, erschien die Hypothese experimentell gerechtfertigt, die in den Elektronen die letzten gleichartigen Bausteine der Materie erblickt." Lp.

F. R. HELMERT. Die internationale Erdmessung in den ersten fünfzig Jahren ihres Bestehens. Internationale Monatsschrift **7**, 397-423.

Der mit dem Bildnis von Johann Jakob Baeyer geschmückte Artikel gibt einen Abriß von der Entwicklung dieses internationalen Unternehmens, von den Leistungen und den sich stets erweiternden Plänen. Lp.

T. HEATH. Aristarchus of Samos: The ancient Copernicus. A history of Greek astronomy to Aristarchus with Aristarchus's treatise on the sizes and distances of the Sun and Moon. A new Greek text with translation and notes. Oxford: Clarendon Press. VIII u. 426 S. 8°.

Archimedes sagt deutlich in seinem „Psammites" oder „Sandrechner", daß Aristarchus der Erste war, der den scheinbaren Durchmesser der Sonne zu $^1/_{720}$ des vollständigen Kreises bestimmte, den sie bei ihrem täglichen Umlauf beschreibt, oder mit andern Worten, daß der Winkel, unter dem ihr Durchmesser erscheint, ein halber Grad ist, was der Wahrheit sehr nahe kommt. Der Unterschied läßt vermuten, daß die Schrift von Aristarchus, die wir besitzen, ein frühes Werk war; doch war es noch notwendig, die Geschichte der griechischen Astronomie nach Schätzungen älterer Astronomen zu durchforschen, die in Betracht kommen könnten, in der Absicht, dem Ursprung der Zahl 2^0 möglichst nachzuspüren. Diese Schrift enthält nicht irgendeine Andeutung von einer andern Ansicht des Weltalls als der geozentrischen; Archimedes aber berichtet uns, daß Aristarchus ein Buch der Hypothesen geschrieben hat, deren eine besagte, die Sonne und die Fixsterne bleiben unbewegt, die Erde rollt um die Sonne in dem Umfange eines Kreises. Nun war Archimedes ein jüngerer Zeitgenosse von Aristarchus; er muß das in Rede stehende Buch der Hypothesen gesehen haben, und wir könnten keine bessere Beweisurkunde dafür haben, daß dem Aristarchus die erste Fassung der Hypothese von Copernicus zuzuschreiben ist. Die Angelegenheit hätte dabei sein Bewenden haben können, wenn nicht Schiaparelli 1898 behauptet hätte, daß trotz alledem nicht Aristarchus, sondern Heraklides von Pontus zuerst die heliozentrische Hypothese aufgestellt habe. Schiaparelli, dessen beide Schriften: „Le sfere omocentriche di Eudosso, di Callippo e di Aristotele" und „I precursori di Copernico nell' antichità" klassisch sind, zeigte in der letzteren, daß Heraklides entdeckte: die Planeten Venus und Merkur wälzen sich um die Sonne wie Trabanten; ebenso auch fand er, die Erde dreht sich um ihre eigene Achse in etwa 24 Stunden. In seiner letzten Schrift vom Jahre 1898 (Origine del sistema planetario eliocentrico presso i Greci) ging Schiaparelli noch weiter und meinte, Heraklides müsse zu demselben Schluß in bezug auf die oberen Planeten gelangt sein, wie bei Venus und Merkur, und würde also dafür gehalten haben, daß alle in gleicher Weise sich um die Sonne wälzen, während die Sonne mit den in ihren Bahnen sich bewegenden Planeten wirklich die Erde als Mittelpunkt in einem Jahre umkreisen; mit andern Worten: nach Schiaparelli war Heraklides wahrscheinlich der Erfinder des Systems, welches als das von Tycho Brahe bekannt ist; oder er kannte es und nahm es an, wenn es von einem Zeitgenossen erfunden war und nicht von ihm selbst. Soweit kann zugestanden werden, daß Schiaparelli einen annehmbaren Fall ausgegrübelt hatte; wenn er aber in derselben Schrift weitergeht und Heraklides zutraut, dieser habe auch die Hypothese von Copernicus ins Dasein gerufen, so betritt er damit einen viel unsichereren Boden. Immerhin war es klar, daß seine Beweisgründe die sorgfältigste Beachtung verdienen, und dies nötigte wiederum zu einer Nachforschung in der früheren Geschichte der griechischen Astronomie, damit jeder Schritt in dem Vordringen bis zur wirklichen Kopernikanischen Theorie aufgespürt werde. Die Ersten, die ein anderes Zentrum an Stelle der Erde in dem Himmelssystem setzten, waren die Pythagoreer, die die Erde ebenso wie Sonne, Mond und Planeten um ein Zentralfeuer laufen ließen; und als die Forschung von Heath über den Gegenstand erst so weit zurückgegangen war, meinte er, die passendste Einleitung zu Aristarchus würde eine Skizze der ganzen Geschichte der griechischen Astronomie bis zu seiner Zeit sein. Was den neuesten Anspruch betrifft, den

Schiaparelli zugunsten des Heraklides von Pontus erhebt, so hat Heath, wie er hofft, gezeigt, daß der Fall nicht erwiesen ist und noch immer kein Grund vorliegt, das einstimmige Zeugnis des Altertums anzuzweifeln, daß Aristarchus der wirkliche Urheber der Kopernikanischen Hypothese ist. Abgesehen von dem astronomischen Inhalt ist die Schrift des Aristarchus „Über die Größen und Entfernungen von Sonne und Mond" von größtem Interesse wegen ihrer Geometrie. Durchaus klassisch nach Form und Sprache, wie sich dies für die Periode zwischen Euklides und Archimedes von selbst versteht, ist sie die erste vorhandene Probe reiner Geometrie, angewandt auf eine trigonometrische Sache, und ist in dieser Hinsicht eine Art Vorläufer der Kreismessung von Archimedes. Die Gelegenheit ist benutzt worden, einen neuen griechischen Text der Schrift einzufügen; dies war nötig, weil die vorhandenen Texte nicht leicht beschaffbar sind und sich außerdem nicht auf die besten Handschriften gründen. Das beste Manuskript bildet einen Teil des schönen Codex Vaticanus Graecus 204 aus dem 10. Jahrhundert. Auf einer Photographie dieses Manuskripts (natürlich mit den vorhandenen Texten verglichen) beruht der hier dargebotene durchgesehene Text. Inhalt: Teil I. Die griechische Astronomie bis auf Aristarchus von Samos. Quellen der Geschichte. Homer und Hesiod. Thales. Anaximander. Anaximenes. Pythagoras. Xenophanes. Heraklitus. Parmenides. Anaxagoras. Empedokles. Die Pythagoreer. Die Atomisten: Leukippus und Demokritus. Oenopides. Plato. Die Theorie der konzentrischen Sphären. Eudoxus, Kallippus and Aristoteles. Aristoteles (Fortsetzung). Heraklides aus Pontus. Griechische Monate, Jahre, Zyklen. Teil II. Aristarchus über die Größen und Entfernungen von Sonne und Mond. Aristarchus von Samos. Die Abhandlung über Größen und Entfernungen. Geschichte des Textes und der Ausgaben. Inhalt und Abhandlung. Spätere Verbesserungen an den Rechnungen von Aristarchus. Griechischer Text. Übersetzung und Noten. Register. J. (Lp.)

Ph. E. B. Jourdain. An accident that led to a notable discovery. Open Court 27, 39-40.

Eine Erzählung des Zufalles, der zu Oersteds Entdeckung der Einwirkung eines elektrischen Stromes auf eine Magnetnadel führte. J. (Lp.)

G. van Biesbroeck et Alb. Tiberghien. Études sur les notes astronomiques contenues dans les Adversaria d'Ole Roemer. Overs. Danske Vidensk. Selsk. Forhandl. 1913, 213-324.

Durch einen großen Brand in Kopenhagen wurde auch die dortige Sternwarte vernichtet, mit ihr die Manuskripte von Ole Roemer (25. September 1644 — 19. September 1710). Man hielt lange Zeit alle Handschriften dieses berühmten Astronomen für verloren (mit Ausnahme des geretteten „Triduum", 21.—23. Oktober 1706), bis man neuerdings einen von der Witwe 1739 der Universität von Kopenhagen übergebenen Band mit handschriftlichen Aufzeichnungen entdeckte. Dieser wurde 1910 unter dem Titel veröffentlicht: Ole Roemers Adversaria med understøttelse af Carlsbergfondet udgivne af det

Kgl. Danske Videnskabernes Selskab ned Thyra Eibe og Kirstine Meyer. 271 S. 4⁰. Die Verf. der vorliegenden Arbeit stellen fest, daß die ohne ersichtliche Ordnung niedergeschriebenen Notizen aus den Jahren 1700 bis 1710 stammen. „Es ist ein Tagebuch, in welchem der Verf. seine Gedanken über alle möglichen Fragen aufzeichnet, so wie sie ihm einfallen. Man sieht ihn sozusagen bei der Arbeit; man ist Zuschauer bei der Entwicklung seiner Ideen, bei den sich folgenden Wiederaufnahmen, wodurch sie sich abklären. Unter manchen Gesichtspunkten ist diese Sammlung interessanter als eine vollendete Abfassung.“ Ohne Rücksicht auf die Folge der Notizen in der Handschrift geben die Verf. eine Vorstellung von dem Inhalt, indem sie die Gegenstände, die inhaltlich zusammengehören, gemäß sachlichen Gesichtspunkten zusammenstellen. Damit ergibt sich nach der Einleitung folgendes Inhaltsverzeichnis:

Sphärische Astronomie. Bestimmung der Breite durch reziproke Höhen. — Bestimmung der Stunde durch korrespondierende Höhen. — Bestimmung der Stunde in dem Vertikal des Polarsterns. — Über die Bestimmung der Tag- und Nachtgleichen. — Gnomonik. — Berechnung des parallaktischen Winkels.

Theoretische Astronomie. Vergleichung der elliptischen Bewegung nach Kepler und Seth Ward. — Die Sonnenfinsternis vom 14. September 1708. — Die Merkurdurchgänge im allgemeinen und der von 1707 im besonderen. — Sonnentafeln. — Die Sonnenflecken und die Lage des Sonnenäquators in bezug auf die Ebene der Planetenbahnen. — Interpolation.

Physikalische Astronomie. Von der astronomischen Strahlenbrechung. — Von der Transmission des Lichtes.

Praktische Astronomie. Instrumentale Korrektionen an dem Fernrohr von Pilenborg. — Kroki eines Meridiansaales. — Kroki des Gitterfernrohrs (lunette grillée). — Chronologie.

Verschiedenes. Das dritte Keplersche Gesetz und die Rotation der Planeten. — Gedanken über das Weltall der Sterne. — Betreffs einer Abänderung des äquinoxialen Fernrohres und einer Venusbeobachtung. — In bezug auf Castor und Pollux. Lp.

W. Mayher. Die astronomische Zeitrechnung der Völker von ihrem Ursprung bis zur Gegenwart und die Einheitszeit. Mit allen Kalendern vom Jahr 300 bis 1582 im julianischen und von 1583 bis 2000 n. Chr. im gregorianischen Stil, mit einer Weltkarte und erläuternden Figuren. Dießen vor München: Jos. C. Huberts Verl. 116 + 83 S. 8⁰ + Karte.

Dasselbe Werk, das F. d. M. **43**, 79, 1912 angezeigt ist, mit neuem Titelblatt, Jahreszahl 1913 und anderem Verlag. Lp.

Weitere Literatur.

F. Cajori. Zeno's arguments on motion. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 75.

L. C. Karpinski. Hindu numerals among the Arabs. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 294.
Vgl. F. d. M. **43**, 65, 1912.

L. C. Karpinski. The Quadripartitum numerorum of Johannes de Muris. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 294.

Vgl. F. d. M. **43**, 66, 1912.

L. C. Karpinski. The algorism of John Killingworth. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 63.

L. C. Karpinski. The Whetstone of Witte. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 446.

Vgl. F. d. M. **43**, 67, 1912.

Miss J. Burns. The foundation period in the history of group theory. Amer. Math. Monthly **20**, 141-148.

Handelt hauptsächlich über die Beiträge von Cauchy und gibt ein Verzeichnis seiner Fehler.
Lp.

F. Cajori. Historical note on the graphic representation of imaginaries before the time of Wessel. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 222.

F. Cajori. History of the logarithmic and exponential concepts. Amer. Math. Monthly **20**, 5-14, 35-47, 75-84, 107-117, 148-151, 173-182.

H. Bosmans. Sur quelques exemples de la méthode des limites chez Simon Stevin. Brux. S. sc. **37**, 33 S.

H. Bosmans. Les démonstrations par l'analyse infinitésimale chez Luc Valerio. Brux. S. sc. **37**, 22 S.

P. van Geer. De strijd over de uitvinding der differentiaalrekening. Wisk. Tijdschr. **10**, 23-29, 81-86, 120-133.

V. Panhölzl. Wie man im 17. Jahrhundert das Problem von der Quadratur des Zirkels zu lösen suchte. Progr. Budweis. 15 S. 8°.

Toride. Polygones de Poncelet relatifs à deux cercles. (Question 4193.) Interméd. des math. **30**, 130-131.

Literaturangaben von A. Boutin, H. Brocard, Welsch, T. Ono, A. Boulanger.
Lp.

H. Brocard. Section d'or ou divine. (Question 4149. G. Russo.) Interméd. des math. **30**, 119-120.

Verzeichnis neuer Schriften über den Gegenstand und Ursprung des Namens.
Lp.

E. Turrière. Sur l'origine du mot „interscendant". (Question 4119.) Interméd. des math. **30**, 130-131.

Quellenangabe für „interscendens", ebenso auch für „curva transcendens" und „curva mechanica".
Lp.

M. Weiss. Die geschichtliche Entwicklung der Photogrammetrie und die Begründung ihrer Verwendbarkeit für Meß- und Konstruktionszwecke. Stuttgart: Strecker und Schröder. VII + 94 S. 8°.

W. Junk. Rara historico-naturalia et mathematica. Vol. I. (21 partes.) Berlin: W. Junk. III + 121 S. Lex.-8°.

C. Huygens. Die Pendeluhr. Horologium oscillatorium. Herausgegeben von A. Heckscher und A. v. Oettingen. Leipzig: Engelmann. 267 S. 8°. (Ostwalds Klassiker Nr. 192.)

D. E. Guillaume. Les récents progrès du système métrique. Paris: Gauthier-Villars. IV + 118 S. 4⁰.

H. Rubens. Die Entwicklung der Atomistik. Festrede. Berlin: A. Hirschwald. 40 S. 8⁰.

A. Kistner. Im Kampf um das Weltsystem (Kopernikus und Galilei). Voigtländers Quellenbücher Nr. 39. Leipzig: R. Voigtländer. 98 S. kl. 8⁰.

Πρόκλου Διαδόχου Λυκίου στοιχείωσις φυσική. Procli Diadochi Lycii Institutio physica. Edidit et interpretatione germanica commentarioque instruxit Albertus Ritzenfeld. Lipsiae: B. G. Teubner. XVI + 78 p. 8⁰. (1912.)

Claudius Ptolemäus. Handbuch der Astronomie. Aus dem Griechischen übersetzt und mit erklärenden Anmerkungen versehen von K. Manilius. I u. II. Leipzig: B. G. Teubner. XXVIII + 462, VI + 446 S. 8⁰.

A. Stentzel. Jesus Christus und sein Stern. Eine chronologische Untersuchung. Hamburg. VIII + 240 S. 8⁰.

Prompt. Sur le nombre d'or. (Question 1786. P. Tannery.) Interméd. des math. **30**, 56-57.

Widerspricht den Vermutungen zur Erklärung der Bezeichnung: goldene Zahl. Lp.

C. Schoy. Arabische Gnomonik. Diss. Heidelberg. 40 S. 8⁰.

Kapitel 2.

Philosophie, Mengenlehre und Pädagogik.

A. Philosophie.

E. Picard. Das Wissen der Gegenwart in Mathematik und Naturwissenschaft. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. IV u. 292 S. 8⁰. (Wissenschaft u. Hypothese XVI.)

Die Urausgabe „La science moderne et son état actuel" (Paris, 1905) konnten wir F. d. M. **36**, 94 nur mit dem Titel anführen. Jules Tannery sagte über die Schrift (Darb. Bull. (2) **29**, 317, 1905): „Dieses Buch, in welchem Picard auf meisterhafte Weise den gegenwärtigen Stand der Wissenschaften geschildert hat, von der Mathematik bis zur Bakteriologie, brauchen wir bloß zu nennen. Man weiß nicht, was man mehr bewundern soll, die Klarheit und Treffsicherheit der Sprache, den Reichtum der Belehrung, die Weite und die Kühnheit eines Geistes, der vor keiner wissenschaftlichen Vorstellung zurückweicht. An anderer Stelle hatte man diese Eigenschaften schon in dem allgemeinen Bericht über die neueren Fortschritte der Wissenschaften bewundert, den Picard in höherem Auftrage bei der Weltausstellung von 1900 abgefaßt

hatte. Eine humorvolle Spitze, die manchmal durchdringt, verdirbt nichts." Das Münchener Ehepaar, dem wir schon Poincarés „Wissenschaft und Hypothese" in vortrefflicher deutscher Ausgabe danken, hat jetzt dieses Werk in gleicher Weise bearbeitet. Wir setzen zur Kennzeichnung des Inhalts die Überschriften der einzelnen Kapitel her:

Einleitung. I. Über die Entwicklung der mathematischen Analysis und über ihre Beziehungen zu andern Wissenschaften (vgl. F. d. M. **36**, 55, 1905). II. Mathematik und Astronomie. III. Mechanik und Energetik. IV. Physik des Äthers. V. Physik der Materie und die Chemie. VI. Mineralogie und Geologie. VII. Physiologie und biologische Chemie. VIII. Botanik und Zoologie. IX. Medizin und Bakteriologie.

Die erläuternden Anmerkungen von F. Lindemann zu den einzelnen Kapiteln umfassen die Seiten 249-292 in engem Druck. Bei den Kapiteln, die sich mit den naturwissenschaftlichen Fächern beschäftigen, wurde „die gütige Mitteilung von Kollegen" in Anspruch genommen. Lp.

H. Poincaré. Letzte Gedanken. Mit einem Geleitwort von W. Ostwald. Übersetzt von K. Lichtenecker. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft. V u. 261 S. 8°.

Nach der Anzeige des uns nicht zugegangenen Buches im Archiv der Math. u. Phys. (3) **24**, 172-174 sind in diesem vierten Bande der naturphilosophischen Schriften Poincarés folgende Artikel vereinigt: 1. Veränderlichkeit der Naturgesetze. 2. Raum und Zeit. 3. Warum der Raum dreidimensional ist. 4. Logik des Unendlichen. 5. Die Mathematik und die Logik. 6. Die Quantenhypothese. 7. Materie und Weltäther. 8. Moral und Wissenschaft. 9. Die Sittlichkeit als Allgemeingut. Lp.

L. Koenigsberger. Die Mathematik eine Geistes- oder Naturwissenschaft? Festrede. Heidelb. Ak. Sitzber. 1913, Nr. 8, 15 S.

Die Mathematik, aufgebaut auf den Anschauungen von Raum und Zeit mit der geringsten Zahl von Axiomen, Postulaten und Hypothesen, darf ihre Stelle als oberste und einfachste aller Naturwissenschaften beanspruchen. Aber eine Naturwissenschaft, deren Objekte, die Zahlen, absolut geistige, von der physischen Natur völlig losgelöste Individuen sind, ein Forschungs- und Erkenntnisgebiet von idealen Gestalten, darf auch mit demselben Rechte beanspruchen, eine Geisteswissenschaft genannt zu werden, wie die Ethik und Ästhetik. Eine Trennung in Geistes- und Naturwissenschaften wird immer mehr verschwinden und dem Begriff einer großen und umfassenden Kulturwissenschaft Platz machen. Mi.

A. Voss. Über das Wesen der Mathematik. Zweite Auflage. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. 123 S. gr. 8°.

Die vorliegende zweite Auflage unterscheidet sich von der F. d. M. **39**, 81 (1908) angezeigten ersten nur durch einige Kürzungen weniger wesentlicher

Ausführungen, denen aber eine um so eingehendere Behandlung des prinzipiell Wichtigen gegenübersteht. Auch die neueste Literatur findet, soweit sie mit den Zwecken des Ganzen in Beziehung steht, gebührende Berücksichtigung. Sk.

C. Elliott. Models to illustrate the foundations of mathematics. Edinburgh: Lindsay and Co.

Dieses Buch soll dazu beitragen, manche neueren Ansichten über die Grundlagen der Mathematik dadurch in den Bereich des Unterrichtsbetriebes zu bringen, daß es der Rolle, die in ihnen die auf die Klassifizierung bezüglichen Gedanken spielen, eine praktische Auslegung gibt. Der Versuch ist verheißungsvoller geglückt, als dies bei der ersten Überlegung scheinen dürfte, und zwar durch die Tatsache, daß zwei Vorstellungen von grundlegender Bedeutung in der Elementarmathematik, nämlich die der Korrespondenz oder Funktion und die des Multiplex, sich bequem zur Beleuchtung dessen eignen, was hier „klassifikatorische Muster" genannt wird. Unter diesen werden vorbildliche oder künstliche Klassifizierungen verstanden, welche die erörterten Züge tragen. Inhalt: Einleitung. Kap. I. Die Bedeutung von Korrespondenz. Eine Korrespondenz wird als eine Klassifizierung und Kreuzklassifizierung der korrespondierenden Dinge betrachtet. Kap. II. Multiplexe, z. B. Duplexe, Triplexe, Quadruplexe. Kap. III. Räume. Hierunter werden geordnete Multiplexe verstanden, z. B. wenn beide Systeme von Klassen in einem Duplex bestimmte Ordnungen haben, wird das Duplex als ein zweidimensionaler Raum angesehen. IV. Korrespondenz von Operanden mit Funktionen, welche die elementare Vorstellung der eineindeutigen Korrespondenz und einer Gruppe einschließt. Kap. V. Vielfache Korrespondenz, d. h. die gegenseitigen Korrespondenzen der Glieder von Multiplexen. J. (Lp.)

K. Doehlemann. Über den Bildungswert der reinen Mathematik. Deutsche Math.-Ver. **22**, 267-277.

Die erste Stufe im Bildungswerte der mathematischen Wissenschaften ist die Ausbildung der Anschauung. Auf einer zweiten Stufe erfolgt, ohne daß die Anschauung gänzlich ausscheidet, die Arbeit mit logischen Begriffen. Sie bildet den Sinn für logisch strenge Schlußfolgerungen und für notwendige Kausalzusammenhänge aus. Die dritte Stufe bringt die Anwendung der Mathematik auf Objekte der Naturwissenschaften wie Physik, Chemie, Technik. Mi.

Sir W. H. White. The place of mathematics in engineering practice. Proc. 5. Intern. Congr. of math. **1**, 145-161.

Der Vortrag beleuchtet vorurteilsfrei die Bedeutung der Mathematik für den Ingenieur, besonders für den Schiffbauer. In bezug auf den Unterricht in der Mathematik wird empfohlen, diesen Zweig der Ausbildung Mathematikern von Fach anzuvertrauen. „In der üblichen Praxis der Ingenieure ist Raum für abgekürzte Wege und besondere Methoden in der Anwendung der Mathematik; allein ich bin überzeugt, daß während der Ausbildungszeit es sich empfiehlt,

den gewöhnlichen Methoden des Unterrichts zu folgen und die Spezialisierung der Zeit zu überlassen, wo die Ausführung einer vorliegenden Arbeit fast unvermeidlich jeden einzelnen dazu führt, seine Wahl des Zweiges des Ingenieurgebietes zu treffen, das in Betracht kommt, sowie der Methoden, in denen er seine Arbeit und Zeit am ökonomischsten verwenden kann bei der Vollendung der Rechnungen.“ Als Regel gilt: „Der geeignete Gebrauch der Mathematik im Ingenieurwesen schließt, wie allgemein zugegeben wird, die folgenden Schritte ein: Zuerst kommt die Entwicklung einer mathematischen Theorie, gegründet auf die Annahmen, von denen man meint, daß sie die durch vorangegangene Praxis und Beobachtung erschlossenen bekannten Bedingungen darstellt und zusammenfaßt. Aus diesen theoretischen Untersuchungen entspringen wertvolle Hinweise auf versuchliche Fragestellungen oder auf sorgfältige und ausgedehnte Forschungen. Die durch Versuchsarbeiten oder aus Beobachtung und Experiment erhaltenen Ergebnisse müssen der mathematischen Zergliederung unterzogen werden, und die daraus abgezogenen Folgerungen leiten gewöhnlich zu Verbesserungen oder Erweiterungen der ursprünglichen Theorie und zum Ersinnen nützlicher Leitregeln in der Praxis.“ In der Erläuterung dieser Sätze an Beispielen aus der geschichtlichen Entwicklung des Schiffbaues besteht die zweite Hälfte des Vortrages. Lp.

W. Windelband and A. Ruge. Encyclopaedia of the philosophical sciences. English edition under the editorship of Sir Henry Jones. Volume I. Logic. By Arnold Ruge, Wilhelm Windelband, Josiah Royce, Louis Couturat, Benedetto Croce, Federigo Enriques, and Nicolaj Losskij. Translated by B. Ethel Meyer. London: Macmillan and Co. X u. 269 S.

Die Teile dieses Bandes, die für Mathematiker von dem größten Interesse sein werden, sind solche Teile des Artikels von Royce über die Prinzipien der Logik, die von der Übersicht über die Anordnungsformen in der Mathematik handeln, sowie der Artikel von Couturat mit demselben Titel, der sich einerseits mit dem nämlichen Problem befaßt wie die in seinem Buche „L'Algèbre de la Logique“ (Paris, 1905) und andrerseits mit solchen Gegenständen wie Logik der Beziehungen, satzmäßige Funktionen, Wahrscheinlichkeiten, Logik und Sprache. Die neueren Fortschritte der mathematischen Logik (B. Russell, The Theory of implication, Amer. Journ. of Math. **28**, 159-202; F. d. M. **36**, 60, 1906. — Mathematical logic as based on the theory of types, Amer. Journ. of Math. **30**, 222-262; F. d. M. **39**, 85, 1908) werden kurz angeführt. Der Artikel von Enriques über die Probleme der Logik ist ebenfalls für die Mathematiker interessant. J. (Lp.)

E. Bergmann. The significance of La Mettrie and pertinent materials. Open Court **27**, 411-432.

Im Zusammenhang mit der englischen Übersetzung von „L'homme machine“ (F. d. M. **43**, 105, 1912) werden hier Nachträge vereinigt, nämlich: 1. Die von dem Herausgeber der ersten französischen Ausgabe geschriebene Vorrede,

die zeigen soll, daß nach seiner Vorstellung die Veröffentlichung eines solchen irreligiösen Buches ein großes Wagstück wäre. 2. Die Widmung des „L'homme machine" von La Mettrie an Haller, die nicht in der neuen Ausgabe steht und wahrscheinlich vom Übersetzer weggelassen ist, weil sie ihm ohne eine geschichtliche Erklärung unverständlich schien (diese wird hier geliefert durch Auszüge aus Bergmanns Buch „Die Satiren des Herrn Maschine", Leipzig, 1913). 3. Bergmanns Widmung seines Buches, gerichtet an den Geist La Mettries, in einem des La Mettrie selbst würdigen Stil. 4. Ein Artikel Bergmanns über La Mettrie und seine mechanistische Theorie. Diesem folgt 5. seine Erzählung über den Anfang des Streites La Mettrie-Haller und 6. über die Persönlichkeit von La Mettrie.
J. (Lp.)

P. Carus. The mechanistic principle and the non-mechanical. An inquiry into fundamentals with extracts from representatives of either side. Chicago and London: The Open Court Publishing Company. IV u. 125 S.

Die Wahrheit des mechanistischen Prinzips wird ohne jeden Vorbehalt oder Doppelsinn anerkannt, und es wird nachgewiesen, daß die Gesetze der Mechanik ausnahmslos auf alle Bewegungen anzuwenden sind, nicht aber auf Dinge, die keine Bewegungen sind. Während Vorstellungen und Gefühle als solche nicht Bewegungen sind, stellt das physiologische Denkvermögen eine ununterbrochene Kette von Gehirnbewegungen dar. Somit ist zwar das Denken ein durchaus mechanischer Vorgang; aber es besteht in unserem Leben ein nicht mechanisches Element, das auch nicht mechanisch zu erklären ist. Der wesentliche Zug alles höheren organisierten Lebens ist das Auftreten des Zweckes, und die Aufgabe, die sich der Verf. stellt, ist eine sorgfältige Untersuchung des Problems, wie der Zweck in einem mechanisch geregelten System möglich ist. Inhalt: Mechanistik und Teleologie — ein Kontrast. Bewegung und Gehwerk. Der Wille. Das Nichtmechanische. Zeit und Raum. Kausalität. Die Bedeutung der Form. Das Allgemeine und das Besondere. Mark Twains Philosophie. Was ist ein Mensch? Der Geist eine unabhängige Maschine. Geistige Entscheidung. Alles Zutrauen gebührt Gott. Die Ansicht von La Mettrie, der Mensch sei eine Maschine. Laplace glaubt an unbeschränkten Determinismus. Ursache und Wirkung reichen sich nicht einmal die Hand. Der Geist in den Rädern. Der Mechanismus des Weltalls nach der Anschauung eines Theisten. Die Maschinerie des Lebens. In der neuen Ansicht ist kein Raum für Gott. Die melancholische Lehre von heute. J. (Lp.)

A. Pratelle. Atomistic dynamism. Monist **23**, 102-116.

P. Carus. The mechanistic problem. Ebenda, 148-150.

In rhetorischer Weise verwirft Smith den mit der Laplaceschen Intelligenz gepaarten Naturalismus und tritt für den Dualismus ein.

Pratelle tritt für Loeb und die Naturalisten ein.

Carus hat kritische Bemerkungen über beide. J. (Lp.)

E. Mach. Memory, reproduction and association. Open Court **27**, 1-16.

Von Ph. E. B. Jourdain angefertigte Übersetzung des Artikels „Gedächtnis, Reproduktion und Assoziation" in Machs „Erkenntnis und Irrtum" (2. Aufl.; F. d. M. **36**, 77, 1906). Als Titelbild ist der Übersetzung ein recht lebensgetreues Bildnis von Mach nach einer neueren Photographie vorangestellt. J. (Lp.)

E. Mach. Psychic and organic life. Monist **23**, 1-15.

Übersetzung von M. Ladd Franklin aus „Österreichische Rundschau" **29**, 1. J.

M. A. Mügge. Friedrich Nietzsche. London and Edinburgh: T. C. and E. C. Jack („The People's Books", No. 68).

In dieser sehr wohlfeilen und angemessenen Erzählung über das Leben und die Werke von Nietzsche kann die Stelle mit der verunglimpfenden Meinung von Nietzsche über Logik und Mathematik die Mathematiker interessieren. J. (Lp.)

C. D. Broad. Note on the Achilles and the tortoise. Mind **22**, 318-319.

Die Note von Broad interessiert sowohl die Mathematiker als auch die Philosophen. Wichtig ist auch heutzutage noch die Beilegung der angeführten Streitfrage, weil sie und Zenos drei Paradoxien der glückliche Jagdbezirk der Bergsonianer und gleicher Verächter des menschlichen Verstandes geworden sind. Russells Auslegung der Vexierfrage in seinen Principles of Mathematics (F. d. M. **34**, 62, 1903) besagt, daß die Schildhalter des Achillesrätsels zu beweisen suchen, daß die Bahn der Schildkröte nie ein eigentlicher Teil von der des Achilles sein kann, weil die Konstruktion zeige, daß beide die nämliche Zahl von Punkten haben, während eine unendliche Klasse und ein eigentlicher Teil von ihr selbst die nämliche Zahl von Punkten haben kann (Cantor und Dedekind). Broad aber meint, daß die Schwierigkeit, die viele einsichtsvollen Leute fühlen, in des Schildhalters Berufung auf den faßlichen, aber falschen Satz liege, daß, was jenseits jedes einzelnen Punktes einer unendlichen Reihe von Punkten liegt, unendlich weit jenseits des ersten Punktes der Reihe liegen muß. J. (Lp.)

Ph. E. B. Jourdain. Tales with philosophical morals. Open Court **27**, 310-315.

Von diesen fünf Erzählungen beziehen sich drei auf logische Rätselfragen von der Art jener der lügenden Kretenser, deren Lösung durch die mathematische Logik gefunden ist. Die Erzählungen sind populär eingekleidet. J. (Lp.)

Ph. E. B. Jourdain. The nature of mathematics. London and Edinburgh: T. C. and E. C. Jack („The People's Books"). 92 S.

Ein Band aus einer außerordentlich wohlfeilen Reihe von Büchern über exakte Wissenschaft, Philosophie, Religion, Geschichte, Wirtschaftslehre und Literatur, veröffentlicht in Großbritannien, jeder zu sechs Pence. „Der Zweck dieses kleinen Bandes“, sagt der Verf., (S. 7) „ist nicht der, als ein Lehrbuch eine Sammlung mathematischer Methoden und Beispiele zu geben, sondern zuerst das zu leisten, was Lehrbücher nicht tun: zu zeigen, wie und warum diese Methoden entstanden sind. Alle diese Methoden sind einfach Mittel, die mit dem bewußten oder unbewußten Zweck der Ökonomie der Denkarbeit ersonnen sind, zur passenden Behandlung langer und verwickelter Schlußketten. Dieses Schlußverfahren in seiner Anwendung auf die Vorhersage von Naturereignissen auf der Grundlage der Anwendungen der Mathematik, wie es in dem vierten Kapitel skizziert wird, gibt oft verblüffende Resultate. Obschon aber die Methoden der Mathematik oft durch Naturereignisse angeregt werden, so sind sie doch rein logische. In diesem Buche werde ich mich nicht gerade viel beschäftigen mit den Einzelheiten der elementaren Arithmetik, Geometrie und Algebra in den vielen Lehrbüchern, sondern werde mich mit der Erörterung der Begriffe befassen, z. B. mit dem der negativen Zahl, die in jenen Büchern nicht ausreichend erörtert werden. Dann werde ich auch einen ziemlich vollständigen Überblick über die Entwicklung der analytischen Methoden und über gewisse Prüfungen der Prinzipien geben.“

Die ersten fünf Kapitel sind einer historischen Darlegung des Wachsens mathematischer Methoden gewidmet: Das Wachsen der mathematischen Wissenschaft in alten Zeiten. Der Aufstieg und die Fortschritte der modernen Mathematik, Algebra. Der Aufstieg und die Fortschritte der modernen Mathematik, analytische Geometrie und die Methode der Indivisibilien. Die Anfänge der Anwendung der Mathematik auf die Naturwissenschaft, die Wissenschaft der Dogmatik. Der Aufstieg der modernen Mathematik, die Infinitesimalrechnung.

Nach einem Kapitel über neuere Ansichten von Grenzen und Zahlen werden moderne Folgerungen bezüglich des Wesens der Mathematik in dem Schlußkapitel mitgeteilt. „In dem historischen Teil“, sagt der Verf. S. 8, „werden wir sehen, daß die von den Mathematikern bei dem Aufbau ihrer Methoden tatsächlich gemachten Überlegungen oft nicht mit den logischen Regeln im Einklang sind. Wie können wir dann sagen, daß die Schlußweisen der Mathematik in ihrem Wesen logisch sind? Die Antwort lautet, daß das eine Wort „Mathematik“ gewöhnlich in zwei Bedeutungen gebraucht wird, und so habe ich, wie in dem letzten Kapitel erläutert wird, die Mathematik als die Methoden in ihrem Gebrauch zur Entdeckung gewisser Wahrheiten und die Mathematik als die entdeckten Wahrheiten unterschieden. Wenn wir die Stufe überwunden haben, durch äußeren Augenschein oder Vermutung herauszubringen, wie die Mathematik erwuchs mit Aufgaben, die von Naturgeschehnissen angeregt wurden, wie der Fall eines Steines, und dann wie etwas ganz Abstraktes und Unfühlbares, aber sehr Reelles sich aussonderte aus diesen Aufgaben, können wir unsere Aufmerksamkeit dem Problem der Mathematik zuwenden, ohne uns noch weiter zu beunruhigen in bezug auf die Art, wie es uns allmählich ganz klar erschien, daß es überhaupt solch ein Ding wie Mathematik gibt, etwas, was getrennt von seiner Anwendung auf die Naturwissenschaft ein Dasein hat. Die Geschichte hat einen ungeheuren Wert darin, daß sie den Forscher anregt, aber

um logisch zu reden, ist er unerheblich. Nehmen wir an, du seiest ein Mathematiker. Was du ißt, wird einen bedeutenden Einfluß auf deine Entdeckungen haben. Aber du würdest sofort sehen, wie widersinnig es wäre, die Augenblicksentdeckung zu machen, der Satz: 2 zu 3 addiert gibt 5, beruhe auf einer Orgie von Hammelrippen oder Brot mit Fruchtmus. Die Arbeitsmethoden und das tägliche Leben der Mathematiker, die verbindenden Fäden der Anregung, die durch ihre Arbeit laufen, und der Einfluß der verbundenen Arbeit anderer auf ihre Arbeit, all das interessiert den Forscher, weil diese Dinge ihm Beispiele zur Untersuchung liefern und ihn zu neuen Gedanken anregen; aber diese Überlegungen sind psychologisch und nicht logisch.“ Hierin wird der zweite Vorwurf des Buches erblickt.

Die Hauptpunkte des Buches sind: 1. Eine Erörterung der Frage in betreff des Nutzens der Mathematik. 2. Die Hervorhebung der Tatsache, daß die Mathematik eine lebendige Wissenschaft ist. Sie hängt, psychologisch gesprochen, von den Naturwissenschaften ab, schreitet wie sie vermöge der Ökonomie des Denkens fort sowie vermöge dessen, was Glaube genannt werden kann. 3. Der wesentliche Charakter der Mathematik ist der, daß sie sich mit dem Begriff des Willkürlichen beschäftigt. 4. Das Wesen der Mathematik ist logisch, so daß all jene verdrießlichen Fragen, die oft unterhaltsam und oft langweilig sind, über Geschichte, Personen und Völker für die Mathematik an sich unerheblich sind. 5. Die analytische Geometrie wird als ein Abbild algebraischer Prozesse angesehen. 6. Die Erläuterung der Infinitesimalrechnung.

Es möge erwähnt werden, daß ein Teil der Ansichten einem Artikel in dem Monist für 1908 entnommen ist („On the foundation of mathematical physics“, Monist **18**, 217-226; F. d. M. **39**, 92, 1908). J. (Lp.)

A. N. Whitehead and B. Russell. Principia mathematica. Vol. III. Cambridge: University Press. X u. 491 S. 8°.

Der erste Band ist F. d. M. **41**, 83, 1910 besprochen worden, der zweite F. d. M. **43**, 93, 1912. Der vorliegende Band enthält die in dem zweiten Band begonnene Theorie der Reihen (geordnete Mengen) und schreitet dann zu der Theorie des Messens fort. Die Verff. haben es für notwendig gefunden, die Geometrie einem besonderen Schlußbande vorzubehalten. Der dritte Band beginnt mit einer Fortsetzung von Teil V über Reihen (geordnete Mengen), und der erste Abschnitt handelt von wohlgeordneten Reihen. Zugleich stoßen wir auf Verallgemeinerungen. Die Verff. nennen eine Beziehung im allgemeinen wohlgeordnet, wenn jede in ihrem Felde enthaltene vorkommende Klasse ein oder mehrere Minima hat. So ist eine wohlgeordnete Reihe eine solche, die eine wohlgeordnete Beziehung ist. Eine sehr wichtige Eigenschaft wohlgeordneter Reihen besteht darin, daß sie einer ausgedehnten Form mathematischer Induktion gehorchen, die „transfinite Induktion“ genannt wird. Wenn σ eine solche Klasse ist, daß das nächste Element (wenn überhaupt eins) jeder in σ und in der Reihe enthaltenen Klasse ein Glied von σ ist, dann ist die ganze Reihe in σ enthalten. In der Theorie wohlgeordneter und überalldichter Reihen schließen sich die Verff. eng an G. Cantor an („Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. II.“, Math. Ann. **49**, 207-246, 1897; F. d. M. **28**, 61, 1897), nur nicht, wenn sie vom Zermeloschen Theorem sagen („Be-

weis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann". Math. Ann. **59**, 514-516, 1904; F. d. M. **35**, 88, 1904), daß das sogenannte „Zermelo sche Axiom oder „Auswahlprinzip" einschließt, eine Menge könne wohlgeordnet werden, und in den Fällen, wo Cantor dieses Axiom annimmt. So wird dieses Axiom in allen bekannten Beweisen verlangt, daß die Grenze einer Progression (vom Typus ω) von Ordinalzahlen zweiter Klasse eine Ordinalzahl der zweiten Klasse ist (s. S. 170). In der Theorie der wohlgeordneten Reihen besteht oft keine Schwierigkeit, die Existenz gewisser wichtiger „multiplikativer Klassen" zu beweisen. Es mag sein, daß die in dem Gebrauch des Theorems (Zermelos Axiom) von vielen Mathematikern mit Einschluß von Cantor zur Schau getragene Zuversicht dieser Tatsache zuzuschreiben ist. Ordinalzahlen werden in Übereinstimmung mit dem Gebrauch von Cantor definiert; aber die Definitionen von Summen und Produkten gehen über das hinaus, was er gegeben hat. Summen von Ordinalzahlen sind Ordinalzahlen, aber Produkte einer Ordinalzahl von Ordinalzahlen sind im allgemeinen nicht Ordinalzahlen, wie Hausdorff und andere gezeigt haben. Das Produkt einer Ordinalzahl von Reihenzahlen (Ordnungstypen) ist eine Reihenzahl, und das Produkt einer Ordinalzahl (nicht Null) von Ordinalzahlen, die von Null verschieden sind, ist nicht Null, d. h. ein Produkt von Ordinalzahlen, in welchem die Anzahl der Faktoren eine Ordinalzahl ist, verschwindet nicht, wofern nicht einer der Faktoren verschwindet. Hier muß angemerkt werden, daß für Beziehungen im allgemeinen der entsprechende Satz das multiplikative Axiom erfordert. Die üblichen Beziehungen der Addition zur Multiplikation und der Multiplikation zur Exponentiation (Potenzierung), wenn die Summanden oder die Faktoren alle gleich sind, können ohne das multiplikative Axiom aufgestellt werden, vorausgesetzt, daß die Summanden oder die Faktoren Ordinalzahlen sind. Eine recht gründliche Erörterung des wohlbekannten, von Burali-Forti stammenden Axioms wird S. 73-80 gegeben. Die Verff. zeigen, daß es eine wohlgeordnete Reihe gibt, und daß die Reihe aller Ordinalzahlen dessen, was Russell einen gegebenen „logischen Typus" nennt, eine Ordinalzahl hat, die größer ist als jede der Ordinalzahlen des gegebenen Typus. Dies bildet die Lösung des Burali-Fortischen Paradoxons betreffs der größten Ordinalzahl. Es gibt keine größte Ordinalzahl in irgendeinem Typus, und alle Ordinalzahlen eines gegebenen Typus werden übertroffen durch Ordinalzahlen höherer Typen. Der nächste Abschnitt dieses Teiles beschäftigt sich mit der Unterscheidung von endlich und unendlich in Anwendung auf Reihen und Ordinalzahlen, die unterscheidenden Eigenschaften von endlichen Ordinalzahlen, die kleinste unendliche Ordinalzahl ω, gewisse besondere Ordinalzahlen und die Reihen der Cantorschen Alephs. Sätze in betreff der $\aleph_\nu$ und ω_ν, wo ν eine induktive Kardinalzahl ist, können bewiesen werden; aber es gibt bislang noch keinen Beweis für die Existenz der Alephs und der Omegas mit unendlichen Zeigern; dies kommt von der Tatsache her, daß der logische Typus mit jedem Existenztheorem zunimmt, und daß unendliche logische Typen bedeutungslos zu sein scheinen. Die von der Kontinuität gegebene Definition ist die Cantorsche, und die Tatsache, daß die Dedekindsche Definition nicht der Cantorschen äquivalent ist, wird gut erwiesen.

Der Teil VI, „Quantität", über die Theorie von Verhältnis und Maß, ist neu, obschon er eine Entwicklung der in dem fünften Buch von Euklid eingeführten und von Burali-Forti fortgeführten Entwicklung ist (Formu-

laire de Mathématiques **1**, 28-57, 1895). Die folgenden Punkte sind im besonderen anzumerken: 1. Die Quantitäten werden in verallgemeinertem Sinn als „Vektoren" betrachtet, und deshalb werden Verhältnisse als zwischen Beziehungen bestehend angesehen. 2. Die Hypothese, daß die in irgendeinem Zusammenhange betroffenen Vektoren eine Gruppe bilden, die gemeiniglich bei solchen Untersuchungen zu einer ausgezeichneten gemacht ist, sinkt hier zu einer ganz untergeordneten Stelle hinab, weil sie zuweilen überhaupt nicht bestätigt wird, ein anderes Mal eine Folge fruchtbarerer Hypothesen ist. 3. Eine Theorie von Verhältnissen und reellen Zahlen wird entwickelt, die der Theorie des Maßes vorangeht und doch nicht rein arithmetisch ist, d. h. sie behandelt nicht Verhältnisse als bloße Paare ganzer Zahlen, sondern als Beziehungen zwischen wirklichen Größen wie zwei Entfernungen oder zwei Zeitabschnitten. 4. In der Theorie der „Vektorfamilien", nämlich Familien solcher Art, auf welche irgendeine Form des Maßes anwendbar ist, wird ein recht ausgedehntes Gebiet ihrer Eigenschaften entwickelt, bevor Zahlen eingeführt werden; somit fließt die Theorie des Maßes aus der Verbindung zweier anderen Theorien, von denen die eine eine rein arithmetische von Verhältnissen und reellen Zahlen ohne Bezug auf Vektoren ist, die andere eine Theorie von Vektoren ohne Bezug auf Verhältnisse oder reelle Zahlen. 5. Im Hinblick auf theoretische Anwendungen ist ein besonderer Abschnitt den zyklischen Familien gewidmet, wie den Winkeln um einen gegebenen Punkt in einer gegebenen Ebene. Die in diesem Teile entwickelte Theorie des Maßes wird in dem nächsten Bande bei der Einführung der Koordinaten in die Geometrie erforderlich sein. Da der Zweck dieses Teils dahin geht, Arten der Anwendung von Zahlen zu erklären, die Messungen genannt werden können, so werden Verallgemeinerungen der Zahl zuerst betrachtet. Die bisher behandelten Zahlen sind Kardinal- oder Ordinalzahlen gewesen. In dem ersten Abschnitt des Teiles werden positive und negative ganze Zahlen, Verhältnisse und reelle Zahlen betrachtet. Komplexe Zahlen sind unter Geometrie mit zu behandeln, weil sie nicht eine eindimensionale Reihe bilden. Natürlich muß daran erinnert werden, daß in diesem Buch die Geometrie als eine rein logische Wissenschaft betrachtet wird und nicht notwendig etwas mit dem Raum unserer Anschauung zu tun hat. Die positiven und negativen ganzen Zahlen werden als gewisse Beziehungen definiert, und es wird nachgewiesen (S. 234), wie dies in Russells früheren Werken oft geschehen ist, daß eine positive ganze Zahl nicht verwechselt werden darf mit der entsprechenden und nahezu analogen vorzeichenlosen ganzen Zahl, die eine Klasse von Klassen ist. Bei den Theorien von Verhältnissen und reellen Zahlen muß man Russells früher erschienene „Principles of Mathematics" (F. d. M. **34**, 62, 1903) vergleichen. Wie in dem früheren Werk werden die reellen Zahlen als „Segmente" der Reihen rationaler Zahlen definiert, damit man ihrer Existenz sicher ist (S. 220, 316). Eine zur Auswahl gestellte Definition der reellen Zahlen wird weiter vorgelegt. Die Definition von Verhältnissen ist andrerseits verschieden von der in dem früheren Werke und wird gründlich S. 260-315 behandelt. Die Eigenschaften von Verhältnissen erfordern verschiedene Existenztheoreme, und bei dem Aufstellen von Existenztheoremen ohne Annahme des „Axioms der Unendlichkeit" verlangt die Frage der logischen Typen ungemeine Sorgfalt. Eine bemerkenswerte Tatsache ist es, daß bei der Behandlung der Verallgemeinerung der Zahl große Schwierigkeiten bei der Frage der logischen Typen entstehen. Der nächste Abschnitt handelt von dem, was man „Arten" der Quantität

nennen kann, so z. B. Massen, räumliche Abstände, Geschwindigkeit, jedes eine Form einer Art der Quantität. Jede Art der Quantität wird als eine Vektorfamilie angesehen, d. h. als eine Klasse eindeutiger Beziehungen, die alle denselben Umkehrbereich (converse domain) haben, und alle ihren Bereich in ihrem Umkehrbereich enthalten besitzen. An dem Ende dieses Abschnittes werden das archimedische Axiom und das Axiom der Teilbarkeit betrachtet. Der nächste Abschnitt befaßt sich mit dem Messen, d. h. mit der Aufdeckung von Verhältnissen oder der durch reelle Zahlen ausgedrückten Verhältnisse zwischen den Gliedern einer Vektorfamilie. Eine Vektorfamilie ist meßbar, wenn sie ein solches Glied T (die Einheit) enthält, daß jedes andere Glied S eine Beziehung zu T hat, die entweder ein Verhältnis oder eine reelle Zahl ist. Der letzte Abschnitt beschäftigt sich mit den schon angeführten zyklischen Familien von Vektoren, und ein kleiner, aber interessanter Punkt ist der, daß hier das Werk sich mehr mit der gewöhnlichen Arithmetik tränkt, als bis dahin geschehen ist, und daß von da an die bis dahin gebrauchte explizite Bezeichnung für die Addition von Kardinalzahlen aufgegeben und dafür die gewöhnliche Bezeichnung eingesetzt wird.

Zuweilen ist es nötig, sich zu vergegenwärtigen, daß das vorliegende prächtige Werk sich nicht mit den Mitteln zur Entdeckung in der Mathematik befaßt, sondern mit der logischen Ableitung mathematischer Sätze durch rein logische Begründungen. Ohne Frage ist das Werk bei weitem das wichtigste, das in dieser Richtung erstanden ist; und die darauf verwendete Mühe und Gründlichkeit ist kaum glaublich. Sie wetteifern mit dem Sprühfeuer der leitenden Ideen dieses großen Werkes. J. (Lp.)

B. Russell. The philosophical importance of mathematical logic. Monist **23**, 481-493. Von Ph. E. B. Jourdain gelieferte und mit einigen Anmerkungen versehene Übersetzung des Aufsatzes von Russell: „L'importance philosophique de la logistique" (Rev. de Meétaphys. **19**, 281-291, 1911).

Die Mathematik (die Sammlung formeller Sätze) hat die Probleme des Unendlichen und des Kontinuums gelöst und hat eine gefestigte Philosophie von Raum, Zeit und Bewegung möglich gemacht. Die Möglichkeit mathematischer Erkenntnis weist sowohl den Empirismus, als auch den Idealismus ab; sie zeigt ja, daß die menschliche Erkenntnis keineswegs auf subjektive oder psychologische Weise erklärt werden kann. J. (Lp.)

B. Russell. On the notion of cause. Proc. Aristot. Soc. **13**, 1-26; Scientia **13**, 317-338.

Diese Eröffnungsrede, die Russell als Vorsitzender der Aristotelian Society am 4. November 1912 gehalten hat, stimmt genau mit dem Artikel in „Scientia" 1913 überein. J. (Lp.)

Ph. E. B. Jourdain. A correction and some remarks. Monist **23**, 145 u. ff.

Vgl. Jourdains Artikel: „Mr. Russell's first work on the principles of mathematics" (Monist **22**, 149-158; F. d. M. **43**, 96, 1912). J.

P. Boutroux. Les étapes de la philosophie mathématique. Rev. de métaphys. et mor. **21**, 107-131.

Kritische Betrachtungen über das unter diesem Titel jüngst erschienene Buch von L. Brunschwicg. Lp.

P. Boutroux. L'objet et la méthode de l'analyse mathématique. Rev. de métaphys. et de mor. **21**, 307-328.

Um ein geschickter Algebraiker zu sein, muß man sich dazu verstehen, die Bedeutung der verknüpften Elemente zu vergessen, damit man nur noch auf den Mechanismus der Verknüpfung achtet. Darum konnten die griechischen Gelehrten keine guten Algebraiker sein. In den ersten Anfängen der Algebra hatte am meisten Erfolg, wer die wenigsten theoretischen Bedenken aufkommen ließ. Die natürliche Fortsetzung der Algebra ist die algebraisch-logische Synthese, für welche die mathematischen Eigenschaften nicht wahr, auch nicht falsch sind, sondern nur den Definitionen und Axiomen gemäß sind, aus denen sie fließen. Die Zweckmäßigkeit dieser Definitionen und Axiome kann man nur nach zwei Kriterien abschätzen: dem Nutzen und der Handlichkeit der Wissenschaft, die man auf sie gründet. Der heutige Mathematiker kann sich nicht auf die algebraische Arbeit beschränken; die Bedürfnisse der Physik nötigen ihn sehr, gleichzeitig Analytiker zu sein, und seine Aufgabe besteht nicht nur darin, die Elemente zu verknüpfen, sondern auch darin, Teile zu sondern, wo man auf den ersten Blick keine bemerkt. Diese analytische Arbeit treibt den Mathematiker dazu, die algebraische Technik seiner Vorgänger auszuweiten (Rev. sem. 22_1, 60). Lp.

F. v. Krempelhuber. Eine neue Mathematik und Naturphilosophie. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn. VIII + 152 S. 8°. Mit 8 Abbildungen.

„Aus der Differentialrechnung ist bekannt, daß eine algebraische Funktion immer wieder eine algebraische Funktion ergibt, ebenso eine trigonometrische Funktion immer wieder eine trigonometrische, eine Exponentialfunktion immer wieder eine Exponentialfunktion. Ausnahmen kommen nur bei den logarithchen und zyklometrischen (auch hyperbolometrischen) Funktionen vor, also nur bei einer verhältnismäßig kleinen Untergruppe von Funktionen, und zwar liefern diese bei der Differentiation nur algebraische Ausdrücke.“ Die Eigenschaft, daß die Ableitung einer Funktion meistens von derselben Art ist wie die Funktion, wird wahrscheinlich in allen Fällen zutreffen. „Dann kann man ebenso aus der Form einer Ableitung (algebraisch oder transzendent) auf die Art der Integralfunktion selbst schließen. Gemäß dieser Arbeitshypothese kommen wir zu der Annahme, daß der Logarithmus eigentlich eine algebraische Funktion sein muß. Denn seine Ableitung, z. B. $1/x$ für die elementaren $\log x$, ist eine algebraische Funktion.“

Die Arbeit „nimmt das Verdienst in Anspruch, den Schlüssel zu diesen Geheimnissen entdeckt zu haben. Es soll gezeigt werden, daß die meisten Unklarheiten und Widersprüche, wo nicht alle, von einer einzigen Ursache herrühren, und daß tatsächlich ein neues, bisher noch nicht gefundenes Prinzip zur Erklärung genügt. Man hat dieses Prinzip auch schon vermutet, es aber noch nie-

mals beweisen können. Seine Erkenntnis hellt nicht nur das frühere Dunkel auf, sondern bringt auch sehr viel Neues mit sich."

Ref. hat in dem Dunkel des Buches kein zu beweisendes Prinzip, auch keinen lichten Punkt entdeckt. Lp.

F. Kuntze. Denkmittel der Mathematik im Dienst der exakten Darstellung erkenntnistheoretischer Probleme. Berlin: Reuther & Reichard. 31 S. 8° (1912). [Philos. Vorträge veröffentlicht von der Kantgesellschaft. Nr. 3.]

„Ich möchte es als eine natürliche Erfahrung feststellen, daß Methoden, die ursprünglich nur für ein ganz bestimmtes Sondergebiet der Wissenschaft ausgebildet worden sind, immer dann mit Nutzen auf ein anderes Gebiet übertragen werden können, wenn für dieses neue Gebiet dieselbe innere Form charakteristisch ist, die für das alte charakteristisch war.... Zuerst wollen wir Gaußens Metaphysik des Imaginären durch Anführen seiner eigenen Bestimmungen kennen lernen und dann zeigen, daß die Gaußsche Deutungsart nicht auf das mathematische Gebiet beschränkt ist. Schließlich sollen einige der Denkobjekte betrachtet werden, auf die ihrer analytischen Natur nach die Gaußschen Bestimmungen anwendbar sind." Lp.

F. Enriques. Il significato della critica dei principii nello sviluppo delle matematiche. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 67-79.

1. „Die äußerst lebhaften Erörterungen, welche durch die neuesten Forschungsgebiete angeregt sind, und vor allem das neue Gebaren des kritischen Geistes führen zur Aufstellung eines Problems von philosophischem und geschichtlichem Gehalt: Welches ist der eigentliche Wert der Kritik der Prinzipien, und welche Stelle kommt ihr zu in der Anordnung der Fortschritte unserer Wissenschaft?"

Unter diesem Gesichtspunkte betrachtet der Verf. der Reihe nach folgende Gegenstände: 2. Das Kontinuum und das infinitesimale Verfahren im Altertum. 3. Die Grundlegung der Infinitesimalrechnung. 4. Die Kritik der infinitesimalen Begriffe und die neuen Entwicklungen über die Variationsrechnung 5. Die willkürlichen Funktionen und die neuere Bearbeitung des Kontinuumsbegriffes. 6. Die intensive Entwicklung der Mathematik; die Gleichungen und die imaginären Zahlen. 7. Die Theorie der algebraischen Funktionen nach Riemann und die Kritik der Grundlagen der Geometrie. 8. Die neuen Entwicklungen der modernen Algebra. 9. Folgerungen: Mathematischer Pragmatismus und Naturalismus. 10. Die Mathematik als Werkzeug und als Vorbild der Wissenschaft.

„Die Kritik der Prinzipien stellt die Förderung neuer wichtiger Resultate in Aussicht; nachdem sie das eigenartige Wesen der Logik beleuchtet hat, wird es ihr gelingen, die Erforschung der Anschauungselemente verschiedener Ordnung zu ergründen, die der Mathematik ihren unerschöpflichen Wert verleihen." Lp.

E. E. C. Jones. A new logic. Proc. Aristot. Soc. **13**, 92-109.

Kritische Besprechung der Lehren in dem Buche von Ch. Mercier „A new logic" (London, 1912; F. d. M. **43**, 100, 1912).

E. E. C. JONES. Analysis of categorical propositions. Mind **22**, 526-531.

Vgl. E. E. C. Jones: „A new law of thought and its logical bearings. Cambridge 1911. (F. d. M. **42**, 76, 1911.) J.

G. R. F. ROSS. Inversion and the diagrammatic representation of negative terms. Mind. **22**, 254-257.

C. H. RIELER. Is inversion a valid inference? Ebenda, 258-259.

Kritische Bemerkungen über C. E. Hicks Artikel „Euler's circles and adjacent space" (Mind. **21**, 410-415; F. d. M. **43**, 96, 1912). J.

A. PADOA. La valeur et les rôles du principe d'induction mathématique. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 471-479.

In dem ersten Paragraphen über den Wert des Prinzips der mathematischen Induktion bekämpft der Verf. die Ansicht Poincarés, nach der dieses Prinzip vorzugsweise die mathematische Schlußform sei, unendlich viele Syllogismen enthalte und sich nicht auf das Prinzip des Widerspruchs zurückführen lasse. In dem zweiten Teil über die Rollen jenes Prinzips geht der Verf. von seiner Anschauung über das Wesen einer besonderen Wissenschaft aus als einer nicht geordneten (aber endlichen) Menge von Sätzen, die sich auf einen besonderen Wortschatz beziehen, und von denen jeder eine Tatsache aussagt, d. h. eine vollständige Wahrheit; eine deduktive Theorie wird dagegen als eine Folge (geordnete Menge) von Sätzen angesehen, von denen jeder eine der Rollen hat: Postulat oder Definition oder Theorem. „Wenn man also, nachdem man erkannt hat, daß das Prinzip der mathematischen Induktion ein arithmetischer Satz ist, die Frage täte, welches ist ihre Rolle in der als besondere Wissenschaft betrachteten Arithmetik, so würde man eine bedeutungslose Frage stellen. Man kann nur prüfen, welches die Rolle dieses Satzes in jeder deduktiven Theorie ist, in der man ihn explizit als eigenen Satz ausspricht, die verschiedenen vorliegenden Möglichkeiten anmerken und andere aufsuchen." Lp.

G. PEANO. Delle proposizioni esistenziali. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 497-500.

Das Wort „existiert" der gewöhnlichen Rede hat mehrere Bedeutungen, je nach den Fällen. . . . In den beiden Sätzen: „Es existiert eine Quadratzahl, welche die Summe zweier Quadrate ist" und „Es existiert das Integral einer stetigen Funktion" haben die beiden „es existiert" verschiedene Bedeutungen. Das erste bezieht sich auf eine Klasse, das zweite auf ein Einzelwesen; in dem Ausdruck ist das erste von dem unbestimmten Artikel „ein", das zweite von dem bestimmten „das" begleitet. Whitehead und Russell in dem Werke „Principia mathematica" (F. d. M. **41**, 83, 1910 u. **43**, 93, 1912) brauchen die Symbole $\exists$ und E, um die beiden Vorstellungen auszudrücken. In dem „Formulario Mathematico" wird das Symbol $\exists$ in dem ersteren Sinne gebraucht.

Die mathematischen Aussagen, in denen das zweite „existiert" auftritt, werden so umgewandelt, daß sie durch elementarere Symbole ausdrückbar werden. Dies wird in dem Artikel erläutert. Lp.

C. Burali-Forti. Sur les lois générales de l'algorithme des symboles de fonction et d'opération. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 480-491.

„Der Gegenstand dieser Mitteilung hat eine greifbare praktische und theoretische Bedeutung. Marcolongo und ich haben nach den Gesetzen, die ich darlegen werde, ein natürliches vektorielles Rechenverfahren gewinnen können, das in Hinsicht des Vermögens, der Einfachheit, der Schärfe des Begriffes und der Gestaltung allen gewöhnlichen vektoriellen Rechnungsarten überlegen ist. Wir können unser Verfahren auf jedwede physikalisch-mechanisch-geometrische Frage anwenden. Meine Darlegung kann leicht mittels der Symbole der mathematischen Logik von Peano oder von Russell übersetzt werden. Zur Erforschung der Frage habe ich von den logischen Symbolen Gebrauch gemacht, werde mich aber bei der Auseinandersetzung der gewöhnlichen Sprache bedienen, um sie für jedermann gut lesbar zu machen. Die Beispiele beziehen sich auf die Vektorrechnung; man könnte sie leicht aus andern Gebieten der Mathematik wählen. Meine Mitteilung hat einen doppelten Zweck: zunächst die Erkenntnis zu verbreiten, daß, wenn eine Frage bezüglich der vektoriellen Bezeichnungen bestünde, sie heute schon gelöst ist; sodann auf offensichtige Weise zu beweisen, daß die symbolische mathematische Logik nicht, wie manche irrig denken, eine Schnellschrift für die Gedanken ist, sondern vielmehr ein machtvolles Werkzeug zur Zergliederung der Gedanken selbst." Lp.

E. Maccaferri. Le definizioni per astrazione e la classe di Russell. Palermo Rend. **35**, 165-171.

Jede reflexive, transitive und symmetrische Beziehung, wie „||", gibt Anlaß zur Bildung eines abstrakten Begriffs, wie „Richtung", der dadurch charakterisiert ist, daß alle Geraden, die in der Beziehung des Parallelismus stehen, dieselbe Richtung haben. Um nun solche Klassen, wie die Klasse der Richtungen, zu definieren, benutzte Russell eine Klasse $R(u, \alpha)$ von Klassen, während andere, z. B. Burali-Forti, statt dessen einfache Klassen $\Phi(u, \alpha)$ „durch Abstraktion" definierten. Verf. widerlegt durch Beispiele ein dabei von Burali-Forti gebrauchtes „Axiom", das dieser freilich, wie im Nachwort mitgeteilt wird, auf anderer Grundlage begründet hat. Verf. gibt der Klasse $R(u, \alpha)$ im allgemeinen den Vorzug vor der Klasse $\Phi(u, \alpha)$. Lw.

Ph. E. B. Jourdain. The development of the theories of mathematical logic and the principle of mathematics. Quart. J. **44**, 113-128.

Fortsetzung einer sehr ausführlichen Geschichte des Logikkalkuls. Vorliegender Teil behandelt Jevons, insbesondere seine Polemik gegen Boole, der nach Jevons Ansicht das Prinzip ignoriert hat, „what is the same as

A or A or A etc., is the same as A", wodurch manches bei ihm „dark and unintelligible" geworden sei. Ferner habe Boole auch im Logikkalkul die algebraische Addition und Multiplikation einführen wollen, was unmöglich sei. Daher habe er unnötigerweise beim Gebrauch der Worte „und", „oder" stets disjunkte Klassen vorausgesetzt. Aus Jevons' Ansichten ergibt sich eine kleine Änderung der Booleschen Methode, Subsumtionen in Gleichungen (d. h. Sätze mit quantifiziertem Prädikat) zu verwandeln, die Jevons als die fundamentalen Urteilsformen ansieht.

Murphy bemerkt dazu (meiner Ansicht nach fälschlich), daß in der Umfangslogik das Prädikat quantifiziert wird, in der Inhaltslogik dagegen nicht.

Lw.

H. M. Sheffer. A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants. American M. S. Trans. **14**, 481-488.

Als Vorzüge seines Axiomensystems betrachtet Verf. die geringe Anzahl der Axiome (nur 5) sowie das Fehlen von Existenzpostulaten für 0, 1 (Verf. sagt z, u) und das Negat. Den wichtigsten Vorzug aber erwähnt er nicht. Huntington, der einzige, der überhaupt die Unabhängigkeit seiner Axiomensysteme zu beweisen versucht hat, hat nämlich zu diesem Zweck in allen seinen 3 Axiomensystemen auch solche Axiome aufgenommen, welche das Erfülltsein früherer Axiome zur Voraussetzung machen. Dieses billige und unzulässige Mittel, beliebigen Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, vermeidet Verf. und stellt danach zum ersten Mal ein System nachweislich unabhängiger Axiome auf.

Die einzige Operation, die er voraussetzt, ist a/b, die sich nachher mit dem Schröderschen $\bar{a}\bar{b}$ identisch erweist. Negation und Addition lassen sich nun definieren mit Hilfe der / Operation: $\bar{a} = a/a$, $a + b = (a/b)/(a/b)$. Die Russellschen Grundbegriffe der Negation und Disjunktion lassen sich daher ersetzen durch einen einzigen Grundbegriff „/", die „Rejektion".

Die kleine Abhandlung verdient also Beachtung! Lw.

P. A. MacMahon. The indices of permutations and the derivation therefrom of functions of a single associated with the permutations of any assemblage of objects. American J. **35**, 281-322.

Verf. betrachtet die Permutationen von Ausdrücken wie $a_1^{i_1} a_2^{i_2} a_3^{i_3} \ldots$. Das Zusammenstoßen von $a_s\, a_t$ in einer solchen Permutation heißt „maior", „equal" oder „minor contact", je nachdem $s \gtreqless t$. Schreibt man unter das linke Glied jedes maior contacts die Zahl, welche angibt, das wievielte Glied der Permutation von links gerechnet es ist (z. B. $\beta_1\, \alpha\, \alpha\, \alpha\, \gamma\, \gamma_6\, \beta_7\, \alpha\, \gamma$), so ist die Summe dieser Zahlen $p_1 + p_2 + \cdots = p$ der „greater index" ($1 + 6 + 7$ in unserem Beispiel). Entsprechend erhält man den „equal index" q und den „lesser index" r, indem man unter das linke Glied eines equal oder minor contacts die entsprechenden Zahlen schreibt und addiert.

Im ersten Teil der Abhandlung werden Eigenschaften der Funktionen $\sum x^p$,

$\sum x^q$, $\sum x^r$, $\sum x^{p+q}$, $\sum x^{p+q+r}$ betrachtet, wo die Summation sich über sämtliche Permutationen von $a_1^{i_1} a_2^{i_2} a_3^{i_3} \ldots$ erstreckt. Dann werden die arithmetischen Mittel der einzelnen Indizes für sämtliche Permutationen berechnet, ebenso die arithmetischen Mittel der Quadrate und Kuben.

Im zweiten Teil werden dieselben Untersuchungen durchgeführt für den „maior" und „minor" index (wobei freilich einige Fragen offen bleiben). Ist $a_\mu\, a_\lambda$ der g^{te} maior contact einer Permutation von links ab gerechnet und a_μ der p_g^{te} Buchstabe der Permutation, so ist $\sum_g (\mu - \lambda) p_g = P$ der „maior" index. Entsprechned wird der „minor" index definiert. Lw.

L. Löwenheim. Über Transformationen im Gebietekalkül. Math. Ann. **73**, 245-272.

In der Einleitung wird der Peirce-Schröder sche Relativkalkul zu einem allgemeinen Gebiets-Matrizen-Kalkul erweitert. § 1 enthält Sätze über Gebietsmatrizen und Unabhängigkeit von Gebietssystemen. § 2 löst das Problem der Umkehrung von Gebietstransformationen im allgemeinen Fall und in wichtigen Spezialfällen. Überall gelingt die Lösung der Probleme auf das einfachste mit den Hülfsmitteln der Disjunktivsysteme, der Reduktion, des Verifikations- und Entwicklungstheorems, die Verf. in einer früheren Abhandlung entwickelt hatte. Das zeigt sich besonders in § 3, wo die interessantesten der von Whitehead mit vieler Rechnung bewiesenen Sätze nicht nur ohne nennenswerte Rechnung bewiesen, sondern auch wesentlich erweitert werden. Der wichtigste Gedanke von § 3 dürfte der sein, daß jeder Satz über Transformationen beliebiger Dinge (die bisher noch nie in dieser Allgemeinheit betrachtet sind) bewiesen ist, falls er für Gebietstransformationen bewiesen ist. Lw.

L. Löwenheim. Potenzen im Relativkalkul und Potenzen allgemeiner endlicher Transformationen. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **12**, 65-71.

In einem endlichen Denkbereich bilden die relativen Potenzen ($a;a$, $a;a;a$ usw.) eines Relativs im allgemeinen eine unrein periodische Reihe. Verf. bestimmt die maximale Gliederzahl der Periode und des „Vorspiels". (Spezialfälle des Problems waren schon in vorstehend angezeigter Abhandlung gelöst.) Wichtiger als das Ergebnis erscheint dem Verf. die benutzte Beweismethode, weil er erstens hofft, daß diese Methode sich im Relativkalkul sehr fruchtbar erweisen wird, und weil sie zweitens den Relativkalkul als eine Erweiterung der Permutationslehre erscheinen läßt. Endlich legt Verf. großen Wert darauf, daß der bewiesene Satz, gemäß dem im vorigen Referat angedeuteten Gedanken, zugleich ein Satz über allgemeine endliche Transformationen ist, und ein zahlentheoretisches Beispiel macht deutlich, daß durch diese Untersuchungen auch die Mathematik bereichert wird, und widerlegt endgültig das Vorurteil, als ob der Logikkalkul die Mathematik nicht zu fördern vermag. Lw.

L. Löwenheim. Über Möglichkeiten im Relativkalkul. Math. Ann. **76**, 447-470 (1915).

Zunächst wird hier K o r s e l t s Beweis dafür mitgeteilt, daß Summen über Indizes sich im allgemeinen nicht kondensieren lassen, wie S c h r ö d e r glaubte. Dann wird gezeigt, daß Summen über Gebiete sich im allgemeinen nicht zurückführen lassen auf Summen über Indizes, wohl aber stets dann, wenn außer 0′ und 1′ nur uninäre Relative vorkommen. Aus den Beweishülfsmitteln ergibt sich als Nebenresultat, daß Bereiche, welche man zu konstruieren hat, um die Unabhängigkeit der S c h r ö d e r schen oder M ü l l e r schen Gebietsaxiome zu untersuchen, stets nur endlich viele oder abzählbar viele Elemente zu enthalten brauchen. Zuletzt wird bewiesen, daß alle Probleme des ternären, quaternären usw. Relativkalkuls (und somit auch alle Probleme der Mathematik) sich zurückführen lassen auf Probleme des binären Relativkalkuls.

Lw.

K. Schwering. Natürliche und künstliche Zahlen. Kempten u. München: Jos. Köselsche Buchhandl. 7. S. 8°. (Sonderdruck aus Festschrift, G e o r g v. H e r t l i n g zum 70. Geburtstag 31. 8. 1913 dargebracht.)

Natürliche Zahl ist die bestimmte Menge, gemessen durch die Einheit, einschließlich der Mengen Eins und Null. Künstliche Zahlen sind solche Zeichen, welche untereinander und mit den natürlichen Zahlen so verbunden werden, als wären sie natürliche Zahlen. Diese Verbindungen werden ebenfalls künstliche Zahlen genannt. Die Rechnungsgesetze der natürlichen Zahlen finden auch auf die künstlichen Anwendung. Sind Gleichungen für künstliche Zahlen gegeben, so können daraus neue gebildet werden, genau wie bei den Gleichungen zwischen natürlichen Zahlen durch Vergleichung, Addition und Multiplikation. In Wirklichkeit sind nur zwei künstliche Zahlen $\mathfrak{D}$ und i nötig, um die Arithmetik aufzubauen. Jeder auch noch so fernliegende Satz der Algebra und der höheren Analysis läßt sich als ein Satz über die natürlichen Zahlen aussprechen. Heute bleiben in der Analysis nur noch die natürlichen Zahlen, die mit zwei künstlichen zu endlichen und unendlichen Gebilden vereinigt und untereinander durch ein Netz von Gleichheits- und Ungleichheitsverhältnissen verbunden sind.

Mi.

Ph. E. B. Jourdain. On isoid relations and theories of irrational number. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 492-496.

„Isoid nenne ich eine Beziehung, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Solche Beziehungen treten vornehmlich in dem Werke von P e a n o und bei seiner Schule auf. Der eng damit zusammenhängende Gegenstand der „Definition durch Abstraktion" ist besonders von B u r a l i - F o r t i und neuerdings (1907) von P a d o a behandelt worden; der letztgenannte Verf. entwickelt einige der vorher von R u s s e l l erlangten Schlüsse. R u s s e l l hat ein Mittel angegeben, wonach, falls a in einer isoiden Beziehung zu b steht, immer ein Ding definiert werden kann, das eine einmengige Beziehung zu allen solchen b hat, die in der besprochenen isoiden Beziehung zu a stehen. R u s s e l l hat das Prinzip, das auf dieser Vorstellung beruht, das „Prinzip der Abstraktion" genannt. Ich möchte zeigen, daß R u s s e l l in einer augenscheinlich

von Willkür nicht ganz freien Art verschiedene Methoden zur Bildung solcher Vorstellungen benutzt, je nachdem er es mit ganzen Zahlen (kardinalen oder ordinalen) oder reellen Zahlen zu tun hat, und möchte auf eine Erörterung eingehen in bezug darauf, warum diese besonderen Formen vorzugsweise statt anderer zu benutzen sind. In Verbindung hiermit will ich gewisse Punkte in der Theorie der irrationalen Zahl erörtern.“ Lp.

G. Loria. Excentricités et mystères des nombres. Ens. math. **15**, 193-201.

Plauderei über große Zahlen und über das Eigentümliche zahlentheoretischer Resultate und Methoden. Schr.

H. Blumberg. A set of postulates for arithmetic and algebra. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 461-465.

„In der folgenden Abhandlung beabsichtige ich, ein System von Postulaten für die Arithmetik und die Algebra vorzulegen, das nach meiner Meinung die Vorteile der sogenannten „genetischen“ und der „axiomatischen“ Methode für Grundlegungen in der Mathematik vereinigt. Dieses System ist aus Unterhaltungen mit Zermelo entstanden; es ist unsere Absicht, unsere Ergebnisse in größerer Ausführlichkeit baldigst zu veröffentlichen. Jetzt werde ich mich darauf beschränken, die Hauptpunkte anzudeuten. Wir beginnen mit einem System von Postulaten, das den allgemeinsten Körper definiert, für den das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht zu gelten braucht. Ein solcher Körper wird hinfort einfach „nichtkommutativ“ genannt. Durch die Hinzunahme eines Postulats erhalten wir ein zweites System von Postulaten, das den allgemeinsten nichtkommutativen Körper definiert, der als einen Unterkörper den Körper der rationalen Zahlen enthält. Durch die weitere Hinzunahme eines Postulats erhalten wir ein drittes System, das den allgemeinsten nichtkommutativen Körper definiert, der als einen Unterkörper den Körper der reellen Zahlen enthält. Schließlich bekommen wir durch die Hinzunahme eines Postulats zu diesem dritten System ein viertes System von Postulaten, das den allgemeinsten nichtkommutativen Körper definiert, der als einen Unterkörper den Körper der gewöhnlichen komplexen Zahlen enthält.“ Lp.

A. Wolf. The philosophy of probability. Proc. Aristot. Soc. **13**, 328.

Die Absicht des Verf. geht nicht darauf aus, die ganze Theorie der Wahrscheinlichkeit durchzugehen, sondern nur die Umrisse einer allgemeinen Orientierung über ihre grundlegenden Probleme zu skizzieren. Das Endergebnis seiner Prüfung der verschiedentlichen Vorstellungen der Wirklichkeit im Verhältnis zu den Begriffen Aussicht (chance), Zufälligkeit, Möglichkeit, Wahrscheinlichkeit ist dieses: das Postulat des partiellen Determinismus und des partiellen Indeterminismus bildet die logische Grundlage der Wahrscheinlichkeit. J. (Lp.)

M. Kleinschmidt. Versuch einer allgemeinen Theorie des Grenzverfahrens. Jena: B. Vopelius. XI + 66 S. 8°.

Kleinschmidt stellt, ausgehend von dem Gedanken, daß sich für jede Aufgabe eine Voraussetzung finden läßt, welche die Lösung implizit umfaßt, eine Methode auf, die er Einkreisungs- oder Grenzverfahren nennt, und die darin besteht, daß man möglichst enge Grenzen angibt, innerhalb deren sich das Gesuchte notwendig befindet, und diese Grenzen so lange einschnürt, bis sie außer dem Gesuchten nichts mehr umfassen. Er wendet die Methode auf die Erschließung von Wortbedeutungen, die Entstehung physischer Aggregate, die Ableitung des Gravitationsgesetzes und die Schöpfung der Sprache an. Umsponnen sind diese Ausführungen von rein spekulativen Gedanken über die Harmonie schöpferischen Denkens und Handelns. Mi.

E. Study. Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume. Geometrie, Anschauung und Erfahrung. Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰςίτω. Braunschweig: Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn. X u. 145 S. 8°. (Sammlung: Die Wissenschaft Bd. 54.)

Im vorliegenden Bande wird zu zeigen versucht, daß die Frage nach dem Wesen unseres Raumes ein naturwissenschaftliches Problem ist wie andere, daß man sie also nicht nach Kant durch „reine Vernunft" entscheiden kann. Das Raumproblem wird im Zusammenhang mit dem weiteren Kreise erkenntnistheoretischer Fragen behandelt, zu denen es gehört. Die Weltansicht des Realismus der großen Naturforscher wird theoretisch begründet und gegen die Angriffe der Philosophenschulen der Idealisten, Positivisten und Pragmatisten verteidigt. Aus diesem Teile der Schrift ist eine Kritik der gegnerischen Grundsätze geworden.

In der Theorie des Raumproblems wird gezeigt, daß man da, wie in den Naturwissenschaften, nur durch Erfahrung und mit Hülfe von Hypothesen etwas ausrichten kann. Von ihnen hat nur die euklidische Hypothese praktische Bedeutung gewonnen. Daneben muß einigen Annahmen jüngeren Ursprungs, den Hypothesen der nichteuklidischen Geometrie, bis auf weiteres ein gleicher Erkenntniswert eingeräumt werden. Die Poincarésche Begründung einer hiervon abweichenden Absicht wird als widerspruchsvoll nachgewiesen.

Den Schluß bildet eine vor allen die Mathematiker angehende Erörterung über die Axiomatik in der Geometrie. Lp.

R. F. Muirhead. On superposition as a basis for geometry — its logic, and its relation to the doctrine of continuous quantity. Proc. 5. Intern. Math. Congr. 2, 505-511.

„Diese Abhandlung erstrebt die Wiederherstellung der Geometrie auf einer rein geometrischen Grundlage. Die Einleitung weist nach, daß der Begriff der Zahl weder tiefer noch genauer ist als der Begriff des Messens des Raumes oder ausgedehnter Größen, und führt dazu, daß die Versuche, die Lehre vom Messen auf die von der Zahl zu gründen, die in den letzten Jahren die Aufmerksamkeit der Mathematiker so viel in Anspruch genommen haben, als Mißgriffe zu betrachten sind, falls gezeigt werden kann, daß eine rein geometrische Lehre, die auf der Überlagerung beruht, logisch aufgebaut werden kann. Es wird nach-

gewiesen, daß der zur tiefsten Grundlage dienende Teil der Geometrie in den elementaren Prinzipien der Topologie liegt, die sich mit den Vorstellungen von Körpern beschäftigen, welche vor den Ideen von Gestalt und Maß vorhanden sind, und daß diese die natürliche und eigentliche Basis der geometrischen Theorie bilden. Die Hauptzüge der in dieser Abhandlung entwickelten Theorie der Geometrie sind die folgenden: Die Theorie verwirft den Raumbegriff als verschieden von Körpern im Raume; sie hat mit den Beziehungen eines Körpers zu einem andern zu tun. Der „Raum" ist einfach ein Körper, der abgesondert ist von andern Körpern als ein Bewegungskörper, der aber keinen wesentlichen Unterschied von den andern betrachteten Körpern besitzt. Solche Körper werden vorgestellt, als seien sie fähig, sich zu decken oder denselben Raum einzunehmen in dem Sinne, daß beliebig viele von ihnen ganz oder teilweise zusammenfallen, seien sie ein- oder mehrdimensional. . . . Ein anderer charakteristischer Zug dieser Theorie ist, daß sie mit einer rein topologischen Behandlung des Raumes beginnt; solche Begriffe wie Geradheit und metrische Beziehungen werden erst eingeführt, nachdem geeignete Postulate den ersten topologischen Prinzipien hinzugefügt sind." Lp.

A. A. Robb. A theory of time and space. Cambridge: W. Heffer and Sons.

Der Verf. hofft, eine Darstellung der Theorie eingehend entwickeln zu können, von der hier eine kurze Übersicht gegeben wird. Die fragliche Theorie ist eine Untersuchung der Beziehungen von Zeit und Raum im Zusammenhang mit den physikalischen Erscheinungen der Optik und ist verknüpft mit der Relativitätstheorie. Die wesentlichen physikalischen Betrachtungen der Relativitätstheorie werden Larmor und Lorentz zugeschrieben. Larmor zeigte zuerst, daß die elektromagnetischen Gleichungen mittels einer linearen Substitution so eingerichtet werden könnten, daß sie dieselbe Gestalt annehmen, wenn sie in bezug auf ein mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegendes System genommen werden, die sie in bezug auf ein System in Ruhe hatten, und zu ähnlichen Ergebnissen war Lorentz gelangt. Dies schien anzudeuten, daß, wenn solch ein Ding wie absolute Ruhe bestände, wir auf diese Weise nicht imstande sein würden, sie von der Bewegung mit gleichförmiger Geschwindigkeit zu unterscheiden. Nur um die Symmetrie zu wahren, machte Einstein die Überlegung, daß Geschehnisse zugleich dem einen Beobachter gleichzeitig, dem andern ungleichzeitig vorkommen könnten. In der „Optical geometry of motion" von Robb (Cambridge, 1911) wird ein Umriß einer Behandlungsmethode vorgezeichnet, in welcher jeder Versuch vermieden ist, Zeitpunkte an verschiedenen Orten zu identifizieren. Die Ansicht wurde vertreten, daß die Axiome der Geometrie zumeist als der formelle Ausdruck gewisser optischer Tatsachen angesehen werden können. Hier gibt nun der Verf. eine kurze Skizze von einer Behandlung der grundlegenden Vorstellungen. Durch eine geometrische Deutung, die mehr als eine Dimension umfaßt, beweist er die einleuchtende Tatsache, daß, wenn bei einem Aggregat, das nicht linear ist, A weder „vor" noch „hinter" B ist, A und B nicht notwendig identisch sind, und dann stellt er die Ansicht auf, daß die einzigen Geschehnisse, die in Wahrheit gleichzeitig sind, nur solche Geschehnisse sind, die an demselben Orte sich ereignen. Somit ist Robb der Meinung, daß, obschon die Menge der Momente, deren

sich irgend jemand direkt bewußt ist, oder die Menge der Punkte, die ein einziges Massenteilchen einnimmt, eine Menge in linearer Anordnung ist, daß aber das Aggregat aller Momente oder Punkte nicht eine Menge in linearer Anordnung bildet. Man könnte meinen, es seien Paradoxien, verknüpft mit der Ansicht, die Zeit sei nicht eindimensional; es ist aber schwierig, den wesentlichen Punkt der Theorie in der kurzen, vom Verf. gegebenen Darstellung zu erfassen.

J. (Lp.)

P. Carus. Problems of pure form. An editorial discussion with M. Lucien Arréat and G. A. Black. Monist **23**, 611-617.

Bemerkungen von Arréat and Black über einige Punkte der Philosophie der Geometrie von Carus in seiner „Philosophy of Form" (Chicago, 1911) nebst den Zusätzen. J. (Lp.)

Ch. Dunan. La nature de l'espace. II. La conception nativistique de l'espace. Rev. de métaphys. et de mor. **21**, 61-100.

1. Die Ausdehnung und der Ort. 2. Der Raum und die Mathematik. 3. Der nativistische Raum und das Problem des Ortes. 4. Der nativistische Raum und die Mathematik. Nach dem Verf. beweist die Existenz des Irrationalen die Wahrheit des Nativismus, und zwar nicht weniger für die Ausdehnung als für die Zahl (Rev. sem. $\mathbf{21}_2$, 57). Lp.

E. V. Huntington. A set of postulates for abstract geometry expressed in terms of the simple relation of inclusion. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 466-470.

Die Hauptresultate aus der gleichbetitelten Abhandlung in Math. Ann. **73**, 522-559 (Referat in diesem Bande, Abschnitt VIII, Kap. 1). Lp.

S. Janiszewski. Rectification. J. de l'Éc. Pol. (2) **17**, 207-208.

Berichtigungen zu der großen Abhandlung „Sur les continus irréductibles entre deux points" (F. d. M. **43**, 567, 1912). Lp.

H. Poincaré. The relativity of space. Monist **23**, 161-180.

P. Carus. Henri Poincaré on the relativity of space. Ebenda, 315-317.

Der erste Artikel ist eine von Halsted angefertigte Übersetzung des Kapitels „La relativité de l'espace" in „Science et méthode".

Carus gibt einige kritische Bemerkungen: die Schwierigkeiten bei Poincaré sind von ihm selbst gemacht. J.

P. Carus. The principle of relativity as a phase in the development of science. Monist **23**, 417-421.

Wenn die Physiker es als selbstverständlich erachtet hätten, daß alle Bestimmungen und Berechnungen von Messungen einen Bezugspunkt erfordern, der in seinen Beziehungen zu andern Punkten innerhalb des Beobachtungsfeldes ungeändert bleibt und als fest angenommen wird, so würde das Problem nie entstanden sein. Die neuen Fälle unfester Bezugspunkte, die zuerst 1727 mit Bradleys Forschungen auftraten, würden einfach eine Beschränkung erheischen, ohne im mindesten die überlieferte Ansicht umzustoßen, und das wird schließlich bei der neuen Bewegung herauskommen. Es darf vorhergesagt werden, daß in dem geräuschvollen Rennen die paradoxen Züge des Relativismus schwinden werden, und wenn die Ergebnisse der neuen Sätze ohne Aufheben in nüchterner Folgerichtigkeit abgefaßt sein werden, so wird sich finden. daß sie die alte überkommene Physik und Astronomie nur unter gewissen, besonders verwickelten Umständen abwandeln, besonders wenn der Ort eines Beobachters, während er seine Beobachtungen anstellt, eine Bewegung besitzt, welche die unter Beobachtung stehenden Bewegungen behaftet. Die Annahme von Bezugspunkten ist durchaus unerläßlich für jede Art von Messungen, sei es in der neuen Relativitätsmechanik oder in der alltäglichen Ansicht von der hergebrachten Mechanik. Ein Artikel von E. V. Huntington, „A new approach to the theory of relativity“ (Phil. Mag. (6) **23**, 494-513; F. d. M. **43**, 778, 1912) wird angeführt. Man vergleiche auch die Artikel von Carus über das Relativitätsprinzip im Monist **22**, 188 u. 540 (F. d. M. **43**, 102, 1912).

J. (Lp.)

P. Carus. The principle of relativity in the light of the philosophy of science. With an appendix containing a letter from the Rev. James Bradley on the motion of the fixed stars, 1727. Chicago and London: The Open Court Publishing Co.

Abdruck dreier Artikel von Carus: „The principle of relativity“, „The philosophy of relativity in the light of the philosophy of science“ (F. d. M. **43**, 102, 1912), „The principle of relativity as a phase in the development of science“ (Monist **23**, 417-421, 1913; Referat vorstehend). J. (Lp.)

M. Brillouin. Propos sceptiques au sujet du principe de relativité. Scientia **13**, 10-26.

Außerhalb der elektrisch-optischen Versuche, für welche die Relativitätstheorie ausdrücklich erdacht wurde, ist sie tatsächlich unprüfbar; sie auf das ganze Gebiet der Naturphilosophie ausdehnen, das bedeutet nicht Physik treiben, sondern Metaphysik. Außerdem entkleiden die letzten Arbeiten Einsteins diese Theorie ihres allgemeinen Charakters und machen aus ihr eine physikalische Hypothese so wie die andern, eine Durchgangsstufe wie sie (Rev. sem. $\mathbf{21}_3$, 95).

Lp.

H. Poincaré. The new mechanics. Monist **23**, 385-395.

Dieser von G. B. Halsted übersetzte Artikel beschäftigt sich in einer ganz volkstümlichen Weise mit dem Prinzip der Begrenzung der Geschwindigkeit

und dem Relativitätsprinzip, ist aber nicht eine Übersetzung aus „La Nouvelle Mécanique" in „Science et Méthode", ist jedoch volkstümlicher als letztere. J. (Lp.)

Vicomte Roger de Boberil. Réflexions sur la loi de l'attraction. Proc. 5. Intern. Math. Congr. 2, 512-517.

Der Verf. meint, das Newtonsche Gravitationsgesetz sei, wie aus der Kugelausbreitung folge, selbstverständlich, und jede andere Annahme, wie z. B. die Clairautsche, die zwei Glieder annehme:

$$F = \frac{1}{x^2} + \frac{m}{x^4},$$

sei widersinnig. Lp.

S. Waterlow. „Interlingua" and the problem of a universal language. Monist **23**, 567-585.

P. Carus. English as a universal language. Ebenda, 603-605.

„Interlingua" ist der Name eines von Peano eingeführten flexionslosen Lateins („De latino sine flexione lingua auxiliare internazionale", F. d. M. **34**, 78, 1903). Der Artikel wurde abgefaßt auf den Wunsch von Peano und gibt eine vorurteilsfreie kritische Übersicht. Die internationale Sprache des Volapük, Esperanto, Ido usw. werden auch hineinbezogen.

Carus gibt einige Bemerkungen über „Interlingua" usw. und über die Möglichkeit, das Englische zu einer Weltsprache zu machen. J. (Lp.)

G. A. Miller. Mathematical definitions in the new standard dictionary. Science (N. S.) **38**, 772-773.

Der Verf. legt Verwahrung ein gegen die Ungenauigkeit, mit der die Definitionen aus der Mathematik in dem „New Standard Dictionary of the English Language" (1913) abgefaßt sind. Nach den mitgeteilten Beispielen scheinen diese Artikel auf einem Mangel an Kenntnis der Mathematik zu beruhen. Lp.

Weitere Literatur.

N. Ach. Über die Erkenntnis a priori insbesondere in der Arithmetik. Leipzig: Quelle & Meyer.

A. Aubry. Erreurs de mathématiciens. Ass. Franç. Nîmes **41**, C. R. 60-61.

L. Favre. Erreurs de mathématiciens. Ass. Franç. Nîmes **41**, C. R. 61.

Kurze Berichte über die auf die Tagesordnung gesetzten Fragen. Vgl. F. d. M. **43**, 107, 1912. Lp.

R. P. Baker. The topology of logical diagrams. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 446.

H. BARTH. Descartes' Begründung der Erkenntnis. Bern: Akadem. Buchhdl. M. Drechsel. 90 S. 8°.

H. BERGMANN. Das Unendliche und die Zahl. H. Halle: M. Niemeyer. VII + 88 S. gr. 8° (Referat S. 93).

F. BON. Ist es wahr, daß $2 \times 2 = 4$ ist? Eine experimentelle Untersuchung. Erster Band: Von den Begriffen, dem Urteilen und der Wahrheit. Leipzig: E. Reinecke. XXVIII + 523 S. 8°.

W. BONNAR. The mathematical laws of psychic phenomena; discovered, formulated and elucidated with practical diagrams. Buffalo, N. Y.: Bonnar. XX + 193 S. 4°.

E. BRANDT. Ein neues Weltgesetz? Beweismöglichkeit der Kant-Laplaceschen Nebelhypothese. Bremen: O. Melchers. 24 S. 8°.

L. E. J. BROUWER. Intuitionism and formalism. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 81-96.

Vgl. F. d. M. **43**, 111, 1912.

C. CAILLER. Les équations du principe de relativité. Arch. sc. phys. et nat. (4) **35**, 109-139.

H. W. CALL. Life and logic. Mind **22**, 484-492.

W. K. CLIFFORD. Der Sinn der exakten Wissenschaften, in gemeinverständlicher Form dargestellt. Deutsch nach der 4. Aufl. d. engl. Orig. v. H. Kleinpeter. Leipzig: J. A. Barth. VIII + 282 S.

G. COHEN. Das Dasein Gottes vom Standpunkte der reinen Logik. — Raum und Zeit, eine metaphysische Untersuchung. Hannover: C. V. Engelhard u. Co. 56 u. 38 S. gr. 8°.

E. COHN. Physikalisches über Raum und Zeit. 2. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner. 24 S. 8°.

L. COUTURAT. Logistique et l'intuition. Rev. de métaphys. et mor. **21**, 260-268.

P. DUHEM. Examen logique de la théorie physique. Rev. scient. **19**, 737-740.

F. ENRIQUES. Les concepts fondamentaux de la science. Leur signification réelle et leur acquisition psychologique. Traduit par L. Rougier. Paris: Flammarion. 315 S. 18mo.

G. FILIASI. Appunti di fisica e metafisica, intorno ad alcune odierne vedute sulla costituzione della materia e sulla interpretazione dei fenomeni naturali; le matematiche transcendentali e la conoscenza delle cose; gli spazi metageometrici e l'evoluzione degli esseri vivanti; la natura e la divinità. Parte I: Le intuizioni. Napoli: Pierro. XXIII + 315 S. 8°.

P. GABIUS. Denkökonomie und Energieprinzip. Berlin: K. Curtius. XIII+208 S. 8°.

S. GINZBERG. Note sur le sens équivoque des propositions particulières. Rev. de métaphys. et mor. **21**, 101-106.

L. COUTURAT. Des propositions particulières et de leur portée existentielle. Rev. de métaphys. et mor. **21**, 256-259.

E. GOBLOT. La relation des jugements. Rev. de métaph. et mor. **21**, 733-751.

Disjunktive, kategorische, hypothetische Urteile.

T. P. Hall. Scientific theology. Monist **23**, 90-101.

P. Carus. Theonomy (with reference to Dr. Hall's „Scientific theology"). Monist **23**, 137-145.

J. B. Heberle. Das Wesen der Schwerkraft, Elektrizität, chemischer Affinität, des Magnetismus u. a. Eine Erklärung auf einheitlicher Grundlage. München: Piloty u. Loehle. 83 S. 8°.

R. Hessen. Die Philosophie der Kraft. (1.-3. Tausend.) Stuttgart: J. Hoffmann. XI + 367 S.

H. Kleinpeter. Der Phänomenalismus. Eine naturwissenschaftliche Weltanschauung. Leipzig: J. A. Barth. VII + 285 S. gr. 8°.

A. Kneser. Mathematik und Natur. Rektoratsrede. 2. Abdr. Breslau: Trewendt u. Granier. 18 S. 8° (F. d. M. **43**, 91, 1912).

I. Kozminsky. Numbers, their meaning and magic. Boston: Occult and Modern Thought Book Center. V + 100 S. 12mo.

C. A. Laisant. Mathematics. (A volume in the „Threshold of Science Series). London: Constable and Co., Ltd. VIII u. 158 S. 8°.

E. Lasker. Das Begreifen der Welt. Berlin: M. Joseph 491 S. 8°.

W. A. Lindsay. A note on induction. Edinb. M. S. Notes 1912/13, 153-156.

C. J. Lewis. A new algebra of implications. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 175.

R. Manno. Energetik, Mechanik und Freiheit. Dortmund: F. W. Ruhfus. 298 S. gr. 8°.

G. A. Miller. Some thoughts on modern mathematical research. Indian M. S. J. **5**, 162-175.

G. A. Miller. Modern mathematical research. Smithsonian Inst. Rep. 1912, 187-198.

Vgl. F. d. M. **43**, 88, 1912.

R. F. Muirhead. Notes on mathematical induction. Edinb. M. S. Proc. **31**, 47-53.

H. Poincaré. The foundations of science: science and hypothesis, the value of science, science and method. Authorized translation by G. B. Halsted, with a special preface by Poincaré, and an introduction by J. Royce. New York: Science Press. XI + 553 S. 8°. (Science and education.)

O. Pommer. Über das Wesen der Ordinalzahlen. Progr. Wien. 17 S. 8°.

Joh. Quandt. Kulturelle Bedeutung der Mathematik. Eine Festrede. Pirna: C. Diller u. Sohn. 16 S. 8°.

H. Rickert. Die Grenzen der naturwissenschaftlichen Begriffsbildung. Eine logische Einleitung in die historischen Wissenschaften. 2. neu bearbeitete Auflage. Tübingen: J. C. B. Mohr. XII + 644 S. Lex.-8°.

W. de Rippas. En confirmation du principe erroné en mathématique. Paris: Dunod et Pinat.

C. Ruceri. Curiosità e sofismi matematici. Milano: Sonzogno. 58 S. 16mo.

Fr. Rulf. Über die Grundlagen der Mathematik. Österr. Mittelschule **27**, Sonderheft, S. 32-44.

Axiome. Das Parallelenpostulat. Nichteuklidische Geometrie. Axiomatische Definitionen. Angewandte Mathematik. Algebra der Logik. Schr.

F. C. S. Schiller. The social value of logic teaching. Hibbert Journal, twelfth, 1912-1913.

A. R. Schweitzer. On the working hypothesis in the genetic logic of mathematics. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 460-461.

A. R. Schweitzer. A seeming contradiction in Poincaré's logical position. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 461.

A. R. Schweitzer. On a general category of definitions of betweenness. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 71.

H. M. Sheffer. A set of postulates for the Boolean algebra. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 283.

H. M. Sheffer. The generalized principle of duality in Boolean algebra. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 507.

H. S. Shelton. On metageometry and the sense of direction. Mind **22**, 539-543.

W. B. Smith. Push? or Pull? Contrasted views of the nature process. Monist **23**, 16-41.

L. v. Stamati. Das Problem, mit den vermeintlichen Marsbewohnern eine Verbindung herzustellen, erreicht. 2. Aufl. Zürich: Art. Institut Orell Füßli. XV + 31 S. 8°.

E. Stamm. Alessandro Padoa. La Logique déductive dans sa dernière phase de développement. Wiadom. matem. **17**, 339-346.

J. Stickers. Was ist Energie? Eine erkenntniskritische Untersuchung der Ostwaldschen Energetik. Berlin-Wilmersdorf: Reflektor-Verlag. 225 S. gr. 8°.

A. Trebitsch. Erkenntnis und Logik. Wien: W. Braumüller. 36 S. 8°.

V. Varićek. Bemerkungen von Bošković über die absolute und die relative Bewegung. Agram Ak. **190**, 30-43 (kroatisch, 1912).

A. W. Whitney. The representation upon a tetrahedron of the logical relations of two classes. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 175.

A. Zart. Bausteine des Weltalls, Atome und Moleküle. Stuttgart: Frank.

The algebra of logic. Authorized translation by L. G. Robinson. With a preface by Ph. E. B. Jourdain. Chicago: Open Court Co. XIV + 95 S.

B. Mengenlehre.

A. Schoenflies. Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen. Umarbeitung des im VIII. Bande der Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstatteten Berichts, gemeinsam mit Hans Hahn herausgegeben von Arthur Schoenflies.

Erste Hälfte. Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen und Theorie der Punktmengen von A. Schoenflies. Leipzig und Berlin: Teubner. XI + 389 S. 8°.

Dieses wertvolle Buch darf eher ein neues Werk als eine Umarbeitung des älteren Berichtes (über diesen vergl. F. d. M. **31**, 70, 1900) genannt werden; es mag dazu genügen, zu bemerken, daß die in der ersten Auflage der allgemeinen Mengenlehre und der Theorie der Punktmengen gewidmeten 111 Seiten auf 389 gewachsen sind. Der erste Abschnitt — allgemeine Theorie der unendlichen Mengen — besteht aus 12 Kapiteln. In Kap. 1 führt der Verf. den Begriff der Mächtigkeit oder Kardinalzahl und der Äquivalenz ein; er entwickelt die Arithmetik der transfiniten Kardinalzahlen, definiert die „Vereinigung" und den „Durchschnitt" von zwei Mengen und bemerkt, daß sich diese Begriffe auf unendlich viele Mengen ausdehnen lassen, wobei man freilich dem später zu besprechenden Zermeloschen Postulat begegnet. Kap. 2 ist den abzählbaren Mengen gewidmet; die Betrachtung einer Folge abzählbarer Mengen, deren jede Teilmenge der vorhergehenden ist, führt auf die „transfinite Induktion". Das Vergleichbarkeitsproblem und der Äquivalenzsatz bilden den Inhalt von Kap. 3. Mit den nicht abzählbaren Mengen, insbesondere mit den Mengen von der Mächtigkeit des Kontinuums, beschäftigt sich Kap. 4. Nunmehr tritt der Anordnungsbegriff auf, zuerst in seiner allgemeinsten Form (geordnete Mengen und Ordnungstypen, Kap. 5), dann in einer spezielleren Form (wohlgeordnete Mengen und Ordnungszahlen, Kap. 6); der Theorie der Ordnungszahlen sind die drei nachfolgenden Kapitel (Kap. 7, 8, 9) gewidmet. Der Wohlordnungssatz wird in Kap. 10 auf Grund des Auswahlpostulates nachgewiesen. In Kap. 11 setzt der Verf. einige neuere, die linearen geordneten Mengen betreffende Untersuchungen auseinander; in Kap. 12 entwickelt er einige vermischte Beispiele und Anwendungen.

Der zweite Abschnitt — Theorie der Punktmengen — besteht aus 6 Kapiteln. Von einigen Hülfssätzen über Grenzwerte und Stetigkeit ausgehend (Kap. 1), definiert der Verf. (Kap. 2) die Ableitungen einer Menge und stellt die darauf bezüglichen Sätze auf. Dann untersucht er die Struktur und die Mächtigkeit der Punktmengen im allgemeinen (Kap. 3) und insbesondere der abgeschlossenen und perfekten Mengen (Kap. 4). Kap. 5 ist der Erörterung der verschiedenen Definitionen des Inhalts einer Menge gewidmet; Kap. 6 bietet einige Beispiele und Anwendungen dar.

Einen ausführlichen Bericht findet man in Loria, Boll. bibl. Vi.

A. Schoenflies. Über einen Youngschen Beweis des verallgemeinerten Borelschen Intervalltheorems. Palermo Rend. **35**, 74-78.

Kritik und Vervollständigung eines Beweises von W. H. Young (Palermo Rend. **21**, 25-127; F. d. M. **37**, 70, 1906) für den verallgemeinerten Borelschen Satz. Die Diskussion über diesen Beweis schleppt sich schon einige Jahre hindurch; siehe W. H. Young, Messenger (2) **39**, 69-72 (F. d. M. **40**, 438, 1909); Palermo Rend. **30**, 27-32 (F. d. M. **41**, 434, 1910); Messenger (2) **42**, 89-94 (F. d. M. **43**, 112 u. 484, 1912); A. Schoenflies, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, 2. Teil, S. 80, Anm. 1 (F. d. M. **39**, 95, 1908); Messenger (2) **42**, 59-62, 95-96 (F. d. M. **43**, 111, 1912). Vi.

H. Dingler. Über die logischen Paradoxien der Mengenlehre und eine paradoxienfreie Mengendefinition. Deutsche Math.-Ver. **22**, 307-315.

Das Resultat eines einzelnen, getrennten, wirklich ausgeführten Aktes heißt ein „Einzelding“; jedes Einzelding ist also ein „Ding der Wirklichkeit“. Eine Menge ist „einfach“, wenn sie aus Einzeldingen besteht; es folgt hieraus, daß jede einfache Menge widerspruchsfrei ist. Dagegen muß jede weitere Menge durch synthetische Definition erhalten werden, und folglich bedarf sie eines Widerspruchslosigkeits- oder Existenzbeweises. Nach diesen Vorbereitungen verwandelt sich offenbar jede Paradoxie in einen Nichtexistenzbeweis einer gewissen Menge; so z. B. ergibt die Burali-Fortische Antinomie den Satz: Keine Menge von Ordnungszahlen enthält jemals alle Ordnungszahlen. Ob dies eine wirkliche Lösung der Paradoxien liefert, bleibe dahingestellt. Vi.

H. Dingler. Über zerstreute Mengen. Math. Ann. **74**, 579-584.

Der Verf. dehnt auf allgemeine zerstreute Mengen die Definition der Grenzelemente einer wohlgeordneten Menge aus und weist auf eine neue Art von zerstreuten Mengen hin, welche manche Analogien mit den wohlgeordneten Mengen darbieten. Vi.

A. B. Frizell. Axioms of ordinal magnitudes. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 327-336.

„Das Wort Axiom wird hier nicht gebraucht als Ersatz für die modernen Ausdrücke Annahme oder Postulat; es ist vielmehr in demselben Sinne zu nehmen wie bei Euklid.“ Nach diesem Einleitungssatze zählt der Verf. die Axiome auf als solche 1. der Größe, 2. der Anordnung, 3. der Gruppe, 4. des Zählens, 5. des Unendlichen, 6. transfinite Axiome. Es folgen in § 7 Bezeichnungen, in 8 Verknüpfungen der Axiome durch 8 Theoreme; in 9 und 10 wird der Übergang zu den natürlichen und den transfiniten Zahlen gemacht nebst den Axiomen für eine abzählbare Menge. Die Axiome der Ordnung (§ 11) und der transfiniten Zahlen (§ 12) sowie die des Postulierens (§ 13) leiten über zu den letzten Axiomen (§ 14). Endlich werden in § 15 und § 16 die Theoreme 9 und 10 aufgestellt, durch welche die Aufstellung der Theorie vervollständigt wird. Lp.

H. Hahn. Über einfach geordnete Mengen. Wien. Ber. **122**, 945-967.

Diese Abhandlung bildet gewissermaßen eine Fortsetzung der gleichbetitelten Schrift von A. Haar und D. König (J. für Math. **139**, 16-28; F. d. M. **41**, 101, 1910). Der Verf. stellt einen teilweise neuen Beweis für das Analogon des Cantor-Bendixsonschen Satzes auf und überträgt auf einfach geordnete Mengen die Theorie der Kohärenzen. Vi.

G. Pucciano. I principii dell' ordinamento naturale e della continuità. Batt. G. **51** [(3) **4**], 221-239.

Das offene, unbeschränkte Linearkontinuum wird durch die folgenden Grundsätze definiert:

1. Das Kontinuum enthält wenigstens ein Element.
2. A folgt nicht A.
3. Von zwei verschiedenen Elementen folgt das eine dem andern.
4. Wenn A dem B und B dem C folgt, so folgt A dem C.
5. 6. Es gibt zu jedem beliebigen Element ein nachfolgendes und ein vorhergehendes Element.
7. Wenn A dem B folgt, so gibt es wenigstens ein zwischen A und B liegendes Element.
8. Wenn zwei Klassen α, β den folgenden Bedingungen genügen:

a) Weder α noch β ist eine Vollklasse;
b) jedes Element des Kontinuums gehört entweder α oder β an;
c) jedes Element von β folgt jedem Element von α;

so hat entweder α ein letztes oder β ein erstes Element.

Die Verträglichkeit und die Unabhängigkeit dieser Sätze wird nachgewiesen, und die daraus fließenden Eigenschaften des Kontinuums werden ausführlich entwickelt. Vi.

E. Borel. Les ensembles de mesure nulle. S. M. F. Bull. **41**, 1-19.

Es sei $A_1, A_2, \ldots$ eine abzählbare ebene Punktmenge; es werde ferner jedem h eine Folge von Quadraten $C_1^{(h)}, C_2^{(h)}, \ldots$ unter den folgenden Bedingungen zugeordnet:

a) Die Inhalte der Quadrate bilden eine konvergente Reihe.

b) $C_n^{(h)}$ enthält $C_n^{(h+1)}$ und hat den Punkt A_n als Grenze für unbeschränkt wachsendes h.

Ist E_h der Inbegriff der inneren Punkte bei wenigstens einem der Quadrate $C_1^{(h)}, C_2^{(h)}, \ldots$, F der Inbegriff der sämtlichen E_h inneren Punkte, so heißt F eine „reguläre Menge" („ensemble régulier"). Ihr Inhalt ist offenbar Null. Jede Menge vom Inhalt Null ist Teilmenge einer regulären Menge.

Sind die zwei abzählbaren Punktmengen A, B innerhalb und auf der Begrenzung des Kreises C, bzw. C' überalldicht, und sind C, C' einander gleich, so kann man bei jeder vorgegebenen Zahl die Punkte von A und von B derart einander zuordnen, daß die auf den Begrenzungen liegenden Punkte einander entsprechen, und daß für jedes Zahlenpaar p, r die Relation

$$1-\varepsilon < \frac{\overline{A_p}\,\overline{A_q}}{\overline{B_p}\,\overline{B_q}} < 1+\varepsilon$$

stattfindet. Vi.

N. J. Lennes. Note on van Vleck's non measurable sets. Amer. M. S. Trans. **14**, 109-112.

Der Verf. nimmt die von E. B. van Vleck (American M. S. Trans. **9**, 237-244; F. d. M. **39**, 101, 1908) ersonnene Bildung einer nicht meßbaren Punktmenge wieder auf und weist nach, daß man dazu auf die Zermeloschen Axiome der Aussonderung, der Potenzmenge, der Vereinigung und der Auswahl Bezug nehmen muß (siehe E. Zermelo, Math. Ann. **65**, 261-281; F. d. M. **39**, 97, 1908). Vi.

M. Fréchet. Sur les classes V normales. American M. S. Trans. **14**, 320-324.

Fréchet hebt einen Zusammenhang zwischen seinen eigenen Resultaten (Palermo Rend. **22**, 1-74; F. d. M. **37**, 348, 1906) und denjenigen von E. R Hedrick (American M. S. Trans. **12**, 285-294; F. d. M. **42**, 90, 1911) hervor. Die Definition der anormalen V-Klassen findet sich S. 24 der oben angeführten Abhandlung von Fréchet. Vi.

J. Kürschák. Mengentheoretisches über die Potenzreihen. Nieuw Archief (2) **10**, 362-369.

Die Potenzreihen

$$A = a_a x^a + a_{a+1} x^{a+1} + \cdots,$$

wo a eine positive, Null oder eine negative ganze Zahl ist und die Koeffizienten einem beliebigen Zahlkörper angehören, werden hier als Elemente einer Menge K angesehen. Setzt man $\| A \| = e^{-a}$ („Bewertung" von A), so ist offenbar:

$$\| A + B \| \leqq A, \ \| A + B \| \leqq B.$$

Gibt es in einer Teilmenge T von K eine Potenzreihe A und eine Folge von Potenzreihen $A_1, A_2, \ldots$ derart, daß zu jeder positiven Zahl δ ein Index n existiert, von welchem an $\| A_n - A \| < \delta$ ist, so ist A eine „Verdichtungsstelle" von T. Man bezeichnet durch T' die Menge der Verdichtungsstellen von T, durch $\{T, T'\}$ die Vereinigungsmenge von T und T'. Die Mengen T_1, T_2 heißen „in bezug aufeinander isoliert", wenn $\{T_1, T_1'\}$ und $\{T_2, T_2'\}$ elementenfremd sind.

Die Menge K hat mit dem Zahlkontinuum manche Eigenschaften gemein; so z. B. ist jedes Element von K Verdichtungsstelle wenigstens einer Teilmenge von K. Die Abweichungen sind aber nicht unbeträchtlich; es mögen als Beleg dazu die folgenden Sätze dienen:

Jede Teilmenge von K läßt sich in zwei in bezug aufeinander isolierte Bestandteile zerlegen.

Ist A ein gegebenes Element von K, ϱ eine gegebene ganze Zahl, so heißt der Inbegriff der Elemente Z, welche der Relation

$$\| Z - A \| \leq e^{-\varrho}$$

genügen, der „um A mit dem Radius $e^{-\varrho}$ erzeugte Hof". Das Element A kann, ohne jede Änderung des Hofes, durch jedes andere Element des Hofes ersetzt werden; mit andern Worten, der Hof hat keine bestimmte Mitte. Der Hof und seine Komplementarmenge sind in bezug aufeinander isoliert. Sind ferner A und B zwei verschiedene Elemente, so gibt es immer einen Hof mit kleinstem Radius, der beide enthält. Haben zwei Höfe ein gemeinsames Element, so ist derjenige mit kleinerem Radius vollständig in dem andern enthalten. Vi.

E. Mazurkiewicz. Contribution à la théorie des ensembles. Krakau Anz. (A) 1913, 46-55.

Jede in einem n-dimensionalen euklidischen Raume liegende stetige Punktmenge läßt sich in zwei keinen stetigen Bestandteil enthaltende Teilmengen zerlegen. Vi.

W. Sierpiński. Sur la décomposition du plan en deux ensembles punctiformes. Krakau Anz. (A) 1913, 76-82.

Ein neuer Beweis eines von E. Mazurkiewicz (Krakau Anz. (A) 1913, 46-55; Bericht vorstehend) aufgestellten Satzes. Vi.

P. Mahlo. Zur Theorie und Anwendung der ϱ_v-Zahlen. II. Leipz. Ber. **65**, 268-282

Dieser Aufsatz, der eine Fortsetzung früherer Schriften des Verf. (Leipz. Ber. **63**, 187-225 u. **64**, 108-112; F. d. M. **42**, 90, 1911 u. **43**, 113, 1912) bildet, besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil behandelt solche Reihen von zunehmenden transfiniten Ordnungszahlen, die zu jeder gegebenen Zahl größere Zahlen enthalten; der Zusammenhang mit der Burali-Fortischen Antinomie ist ersichtlich. Im zweiten Teil wird die Mächtigkeit gewisser linearen Mengen bestimmt, die der Verf. als „α-Brachien" bezeichnet; die Mächtigkeit einer α-Brachie ist $\sum_{\nu<\alpha} 2^{N_\nu}$. Vi.

P. Mahlo. Über Teilmengen des Kontinuums von dessen Mächtigkeit. Leipz. Ber. **65**, 283-315.

Der Verf. nimmt an, die Kardinalzahl c sei eine Alephzahl (was übrigens bekanntlich eine Folge des Zermeloschen Wohlordnungssatzes ist), und betrachtet nur solche Teilmengen des linearen Kontinuums, die in jeder Strecke die Mächtigkeit c haben; diese Mengen bezeichnet er als C-Mengen. Unter diesen Voraussetzungen löst er 15 Aufgaben, von denen einige als Beispiel angeführt werden mögen:

Aufg. 1. Eine C-Menge ohne jede perfekte Teilmenge (eine „totalimperfekte" Menge) zu konstruieren.

Aufg. 3. Eine totalimperfekte C-Menge zu konstruieren, die in jeder nirgendsdichten Teilmenge des Kontinuums einen überalldichten Bestandteil besitzen möge.

Aufg. 7. Das Kontinuum in eine endliche oder abzählbare Menge von ineinanderdichten elementenfremden Mengen mit gleichem Typus zu zerlegen.

Aufg. 8. Das Kontinuum in zwei in ihm überalldichte C-Mengen dritter Kategorie zu zerlegen.

Die Definition von „dritter Kategorie" ist folgende: Von Baire abweichend, bezeichnet der Verf. als Menge zweiter Kategorie die Komplementarmenge einer Menge erster Kategorie; eine Menge dritter Kategorie ist eine solche, die in keinem Intervalle von erster oder von zweiter Kategorie ist. Vi.

E. Zermelo. Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 501-504.

Es handelt sich „lediglich um die Beantwortung der Frage: Kann der Wert einer beliebigen während des Spiels möglichen Position für eine der spielenden

Parteien, sowie der bestmögliche Zug mathematisch-objektiv bestimmt oder wenigstens definiert werden, ohne daß auf solche mehr subjektiv-psychologischen wie die des vollkommenen Spielers und dergleichen Bezug genommen zu werden braucht? . . . Die zur Lösung des Problems verwendete Methode ist der Mengenlehre und dem logischen Kalkül entnommen und erweist die Fruchtbarkeit dieser mathematischen Disziplinen in einem Falle, wo es sich fast ausschließlich um endliche Gesamtheiten handelt". Lp.

N. Wiener. On a method of rearranging the positive integers in a series of ordinal number greater than that of any given fundamental sequence of Ω. Messenger (2) **43**, 97-105.

Der Titel kennzeichnet den Inhalt hinreichend. „Das Interesse der Konstruktion von Umordnungen (der Reihe I der positiven ganzen Zahlen) liegt in der Tatsache, daß alle bisher gegebenen Beweise für die Existenz von Zahlen, die größer sind als die irgendeiner gegebenen Folge von Ω, das multiplikative Axiom einschließen. Indem wir wirklich I in eine Reihe von solcher Zahl umordnen, vermeiden wir dies." Lp.

E. K. Wakeford. An arrangement of the positive integers in the type ε_1. Messenger (2) **43**, 105-108.

Der von dem Verf. erdachte Gang, durch den eine Zahl für die Grenze irgend einer Folge von Zahlen gefunden wird, entspricht nach seiner Meinung dem von Wiener (vgl. das vorstehende Referat) gebrauchten Operator S. Lp.

A. R. Richardson. Sets of sequences of integers. Messenger (2) **42**, 141-144.

R. Baire hat eine Theorie der Systeme von Folgen (sequences) von ganzen Zahlen entwickelt, die in der Funktionentheorie sehr nützlich ist (F. d. M. **30**, 78, 1899). Die vorliegende Note weist eine Eigenschaft solcher Systeme nach, die von Baire nicht bemerkt ist und bei der Erörterung der Invarianten von Formen in einer abzählbaren Menge von Veränderlichen und in der Gruppentheorie gute Dienste leistet. Lp.

H. Bergmann. Das Unendliche und die Zahl. Halle a/S.: M. Niemeier. VII + 88 S. 8°.

Die Arbeit stellt einen Versuch von philosophischer Seite dar, den Begriff des Unendlichen und der Zahl kritisch unter die Lupe zu nehmen. Wie so oft benutzt der Philosoph eine andere Brille als der Mathematiker, und so darf es einen nicht wundern, wenn man im Inhaltsverzeichnis als Inhaltsangabe des 8. Abschnitts folgendes liest: „Die Mengenlehre verändert den Begriff der Zahl, um die Mächtigkeit des Unendlichen als Zahl fassen zu können. Dem so gebildeten Zahlbegriff ist zunächst vorzuwerfen, daß er gegen die Reinheit der arithmetischen Methoden verstößt, indem er von empirischen Mengen herzuleiten ist." Ich hebe noch folgende beiden Stellen (S. 34 und S. 73) hervor:

„Solange die Cantorschen Ordnungstypen nichts anderes sein sollen, als was dieser ihr Name besagt — Darstellungen gewisser Gesetzmäßigkeiten der Anordnung — kann nichts wider sie vorgebracht werden. Nur gegen die Identifizierung dieser Ordnungsformen mit Zahlen muß man sich wenden."

„Unsere Zahlenreihe ist — verglichen mit der von den Mengentheoretikern aufgestellten — wesentlich ärmer. Sie kennt nur die endlichen ganzen Zahlen."

E. J.

Weitere Literatur.

J. Radon. Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen. Wien. 144 S. 8°.

C. Sganzini. Mengen und Mächtigkeiten. Eine erkenntnistheoretische Studie. Diss. Bern. 139. S. 8°.

C. Pädagogik.

K. Doehlemann. Über den Bildungswert der reinen Mathematik. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 446-454.

„Im mathematischen Unterricht muß die Mathematik die Hauptsache bleiben, und danach sind die Anwendungen da. Man soll zeigen, daß sich die Mathematik auf praktische Gebiete anwenden läßt, aber der Mathematiker sollte nie den Standpunkt einnehmen, daß die Mathematik der Anwendungen wegen da ist. . . . Die Mathematik gründet sich bloß auf die uns angeborenen Gesetze der Anschauung und des logischen Denkens, und darauf beruht ihre absolute Unabhängigkeit und Selbständigkeit. . . . Bloß die Mathematik erschließt das volle Verständnis für die Gesetzmäßigkeit sowohl der Zahlen und Raumformen, als auch der Vorgänge in der Natur." Lp.

H. Le Chatelier. L'enseignement des mathématiques à l'usage des ingénieurs. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 574-577.

„Der dem künftigen Ingenieur nötige mathematische Unterricht muß ein Studiengebiet umfassen, das etwa doppelt so groß ist wie das, dessen er für die Ausübung seines Berufes bedarf. Dieser Unterricht muß sich von dem unterscheiden, bei dem die reine Wissenschaft abseits von jeder ausnutzbaren Tätigkeit um ihrer selbst willen studiert wird, und zwar durch die der darstellenden und der analytischen Geometrie zugewandte beträchtlichere Entwicklung sowie durch die Unterdrückung aller allgemeinen Theorien, aller abstrakten Formeln, die dazu dienen, die Entwicklung eines besonderen Beweises abzukürzen, dabei aber die Länge der Kette, welche die Schlüsse mit ihren Vordersätzen verknüpfen, beträchtlich vergrößern. Endlich muß der persönliche Fleiß der Studenten in dem Maße zur Entfaltung gebracht werden, wie die Umstände es gestatten."

Lp.

E. Czuber. Gedanken über eine Reform der Technischen Hochschulen. Wien: Verlag der k. k. Technischen Hochschule. 59 S. 8°.

Die Schrift bezieht sich besonders auf die österreichischen Technischen Hochschulen, vor allem auf die in Wien. I. Rückblick auf das zweite Halbjahrhundert der Wiener Technischen Hochschule. II. Gestaltung der Studienpläne und des Studienbetriebes. III. Das Prüfungswesen. IV. Die Gebühren. „Unsere Technischen Hochschulen vermochten aus inneren und äußeren Gründen nicht mit dem Aufschwunge ihrer Schwesteranstalten im Auslande Schritt zu halten. Sollen sie in dem stetig sich verschärfenden Kampfe im internationalen wirtschaftlichen Wettbewerb ihre Aufgaben gegenüber dem Vaterlande erfüllen können, so ist eine Reform dieser Anstalten unerläßlich.“ Lp.

Commission internationale de l'enseignement mathématique. Compte rendu des travaux des sous-commissions nationales. Ens. math. **15**, 71-91, 150-179, 419-435.

Zusammenstellung von Berichten der Unterausschüsse aus den verschiedenen Ländern über die im Sinne des allgemeinen Planes fertiggestellten Druckschriften und ihren Inhalt. Lp.

H. Fehr. La Commission internationale de l'enseignement mathématique de 1908 à 1912. Rapport présenté à la séance du vendredi 23 août 1912. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 591-597.

Vgl. F. d. M. **43**, 115, 1912.

Ph. Furtwängler und G. Ruhm. Die mathematische Ausbildung der deutschen Landmesser. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. VI u. 50 S. gr. 8°. (Abhdl. üb. d. math. Unterr. in Deutschland, veranlaßt durch die I. M. U. K. Bd. IV, Heft 8.)

Inhaltsübersicht. Vorwort. Einleitung: Landmessung und Landmesser. Fachzeitschriften.

I. Der allgemeine Ausbildungsgang in den einzelnen Bundesstaaten. Studienpläne. 1. Allgemeines. 2. Preußen. 3. Bayern. 4. Sachsen. 5. Württemberg. 6. Hessen-Darmstadt. 7. Baden. 8. Elsaß-Lothringen. 9. Die anderen deutschen Staaten. — Schlußübersicht.

II. Anordnung und Umfang des mathematischen Unterrichtsstoffes. Die Mathematik in den Prüfungsvorschriften. 1. Scheidung der Ausbildungswege in zwei Gruppen. A) Preußen. a) Die Vorbildung der Studierenden. b) Die Prüfungsbestimmungen. c) Gegenwärtiger Stand des mathematischen Unterrichts. 1. Algebra und niedere Analysis. 2. Stereometrie und darstellende Geometrie. 3. Trigonometrie. 4. Kartenentwurfslehre. 5. Analytische Geometrie. 6. Höhere Analysis. 7. Mathematische Übungen. 8. Fehler- und Ausgleichungslehre. 9. Mathematische Grundlagen der Landesvermessung. B) Die andern Vertreter der ersten Gruppe (Oldenburg, Württemberg, Elsaß-Lo-

thringen, Baden, Hessen, Sachsen). — 3. Ausbildung der Landmesser mit dem Reifezeugnis. A) Bayern. B) Sachsen. C) Mecklenburg-Schwerin. 4. Schlußbemerkungen zum 2. Kapitel.

III. Der Unterricht im geodätischen Rechnen. 1. Einleitung. 2. Allgemeine Festsetzungen für das numerische Rechnen. Bezeichnung der Winkel und Koordinatenachsen. 3. Formulare und Rechenproben. Rechenhülfsmittel. 4. Beziehungen des mathematischen Unterrichts zum geodätischen Rechnen.

IV. Geschichtlicher Überblick und Reformbestrebungen. 1. Entwicklung der Landmesserausbildung in Preußen. 2. Die Reformbestrebungen der preußischen Landmesser. 3. Geschichte der Ausbildung der Landmesser in Bayern.

Lp.

F. Möhle. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht an den preußischen Lyzeen, Oberlyzeen und Studienanstalten nach der Neuordnung von 1908. Leipzig: B. G. Teubner. IV + 48 S.

Die Antworten, die von Kollegen einer großen Anzahl von höheren Lehranstalten für die weibliche Jugend gegeben worden sind auf eine Reihe vom Verf. der vorliegenden Denkschrift gestellter Fragen, haben das Material zu dieser Schrift geliefert. Die Fragen betrafen die Zahl und Vorbildung der vorhandenen Lehrkräfte, die Titel der jetzt gebrauchten und Wünsche bezüglich der neu einzuführenden Lehrbücher, das Urteil über den Wert der Klassenarbeiten, die Erfahrungen mit der zurzeit gegebenen Stundenzahl und der Pensenverteilung und etwaige Abänderungsvorschläge, die Beachtung der Reformbestrebungen für den mathematischen Unterricht, die praktischen Übungen im naturwissenschaftlichen Unterricht, die Lehrmittelsammlungen und endlich die Beobachtungen über Interesse und Veranlagung der Mädchen für die Mathematik und die Naturwissenschaften. Als besonders beachtenswert und wichtig muß hervorgehoben werden, daß die Umfrage die allgemeine Klage über die unzureichende Stundenzahl für Rechnen und Mathematik (3 Stunden wöchentlich) ergeben und bestätigt hat, daß die mangelhafte Ausbildung im Rechnen die Ursache für die unbefriedigenden Leistungen in der Algebra ist. „Das Experiment, welches Preußen mit drei Stunden in den Lyzeen gemacht hat, muß als gescheitert angesehen werden.“ Es ist auch tatsächlich nicht einzusehen, wie die Mädchen in drei Wochenstunden das bewältigen sollen, was die Knaben in vier oder fünf Wochenstunden erledigen. Die im Lehrziel verlangte Sicherheit und Gewandtheit im Rechnen mit bestimmten Zahlen, besonders im Kopfrechnen, ist unter solchen Bedingungen überhaupt nicht zu erreichen. Ref. ist mit dem Verf. der Meinung, daß man „mit einer guten Rechengrundlage und mit einer durch die vierte Stunde in Klasse IV ermöglichten guten Einführung in die Mathematik die Pensen der Klassen III—I bei weiser Beschränkung des Stoffes auf das Notwendige schließlich in drei Wochenstunden erledigen kann.“ „Die vierte Wochenstunde in den Klassen X—IV einschließlich bleibt aber die Forderung, mit welcher der Wert und die Bedeutung des mathematischen Unterrichts im Lyzeum steht und fällt!“

Gd.

K. Ott. Die angewandte Mathematik an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie. Abh. über d. math. Unterr. in Deutschland 4. Heft 2, Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. 158 S. gr. 8°.

Ein sehr anschaulicher Bericht über Lehrstoff und Lehrmethode an den in Betracht kommenden Fachschulen. Der Stoff gliedert sich in vier Teile: I. Allgemeine Betrachtungen über Begrenzung, Stellung und Methode des Unterrichts. II. Die rechnerischen Methoden (Lehrpläne, Lehrbücher, Einzelprobleme). III. Die graphischen Methoden (ihre Verwertbarkeit, Behandlung der Einzelprobleme). IV. Die darstellende Geometrie (Lehrstoff und Methode, Zeichnungen, Modelle, Lehrbücher). Sk.

J. Schröder. Die neuzeitliche Entwicklung des mathematischen Unterrichts an den höheren Mädchenschulen Deutschlands, insbesondere Norddeutschlands. Leipzig: B. G. Teubner. XII u. 183 S.

Dieser auf Veranlassung der Internationalen Unterrichtskommission erstattete Bericht gibt im ersten, einleitenden Abschnitt einen Überblick über die Entwicklung des mathematischen Unterrichts an Mädchenschulen von seinen spärlichen Anfängen an, beschreibt sodann die Neuordnung, die in Preußen durch die Lehrpläne von 1908 eingetreten ist, und beleuchtet im dritten Teil die entsprechenden Verhältnisse in den übrigen deutschen Staaten. Auch in diesem Hefte der „Imuk“, das den ersten Band abschließt, ist eine Fülle wertvollen und nicht immer leicht zu beschaffenden Materials gesammelt. Sk.

W. Lietzmann, E. Geck, H. Cramer. Neue Erlasse in Bayern, Württemberg und Baden. Mit einem Schlußwort zu Band II von A. Thaer. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. X + 49 S. gr. 8⁰. (Abhdl. über den math. Unterr. in Deutschland, veranlaßt durch die I. M. U. K. Bd. II, Heft 8.)

Das Schlußwort von Thaer gedenkt der Verdienste von P. Treutlein um das Zustandekommen dieses Bandes, für den er das Vorwort geschrieben hatte. Das vorliegende Ergänzungsheft zum zweiten Bande enthält drei Berichte: 1. W. Lietzmann. Die neue Prüfungsordnung für das Lehramt an den höheren Lehranstalten Bayerns vom 4. September 1912. 2. E. Geck. Der Lehrerlaß für die höheren Knabenschulen des Königreichs Württemberg vom 27. August 1912. 3. H. Cramer. Die badischen Lehrpläne und Prüfungsordnungen für die Realgymnasien und Oberrealschulen vom 12. Juni 1912.

„Wenn man mit einem kurzen Worte die Bedeutung dieser drei neuen Erlasse für den mathematischen Unterricht kennzeichnen will, so wird man sagen dürfen: Alle diese Erlasse sind im Geiste der Reformbestrebungen abgefaßt.“

Das Inhaltsverzeichnis des zweiten Bandes (Die höheren Schulen in Süddeutschland und Mitteldeutschland), das dem diesem Hefte beigegebenen Titelblatt folgt, enthält die Namen: 1. H. Wieleitner (Bayern), 2. A. Witting (Sachsen), 3. E. Geck (Württemberg), 4. H. Cramer (Baden), 5. H. Schnell (Hessen), 6. C. Hoßfeld (Thüringen), 7. Wirz (Elsaß-Lothringen), 8. W. Lietzmann, E. Geck, H. Cramer (Schlußheft). Lp.

W. Lietzmann. Der internationale Mathematikerkongreß in Cambridge. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 24-77. Ber. u. Mitt. der I. M. U. K. 1913, 132-185.

1. Allgemeiner Bericht über den Kongreß. 2. Die Arbeiten der Deutschen Unterkommission. 3. Bericht über die Arbeiten in den außerdeutschen Ländern. 4. Der Bericht von C. Runge: Die mathematische Ausbildung des Physikers auf der Universität. 5. Die Diskussion über den Bericht von Runge. 6. Der Bericht von D. E. Smith: Anschauung und Experiment im mathematischen Unterricht der höheren Schulen. 7. Die Diskussion über den Bericht von Smith. Lp.

H. E. Slaught. Incentives to mathematical activity. American Math. Monthly **20**, 169-173.

Es wird ein geschichtlicher Überblick über die mathematischen Reformbestrebungen in Amerika während der letzten zehn Jahre gegeben. Gd.

P. Heegaard. „Zwischenschule" contra „Mittelschule". Nyt Tidsskr. for Mat. (A) **24**, S. 18.

Betrifft die Richtigkeit der Wiedergabe des dänischen Wortes „Mellemskole" mit Zwischenschule in dem IMUK-Bericht „Der Mathematikunterricht in Dänemark" (F. d. M. **43**, 120, 1912). P. H.

W. Killing und H. Hovestadt. Handbuch des mathematischen Unterrichts. Zweiter Band. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. X u. 472 S. gr. 8°.

Unter den zahlreichen wertvollen Neuerscheinungen der letzten Jahre, die sich die wissenschaftliche Vertiefung des mathematischen Lehrstoffs der höheren Schule zum Ziele setzen, nimmt die vorliegende Darstellung einen hervorragenden Platz ein. Alle Fragen und Bedenken, die dem Lehrer in seinem Unterricht aufstoßen, sei es z. B. die Grundlegung und Anwendung der Trigonometrie, sei es die Frage des Körpervolumens, kommen zur Behandlung und werden mit wissenschaftlicher Gründlichkeit erledigt. Dabei begnügen sich die Verf. nicht mit allgemeinen Darlegungen, sondern zeigen an den verschiedensten Beispielen, wie sie eine konkrete Aufgabe behandeln würden. So gibt das Buch dem Lehrer nicht nur eine wissenschaftliche Vertiefung, sondern auch eine wertvolle Anregung zur Ausgestaltung seines Unterrichts.

Der vorliegende zweite Band behandelt in den ersten Kapiteln (S. 1-123) die ebene Trigonometrie, sodann die Stereometrie mit Anwendungen (S. 124-341), endlich die sphärische Trigonometrie (S. 342-468). Auch von diesem Teile gilt der Ausspruch, mit dem der unterdes leider dahingeschiedene Ref. des ersten Bandes sein Urteil zusammenfaßte: Das Ganze ist eine schön ausgeführte, vertiefende Anleitung zu gründlichem und wissenschaftlichem Lehren (F. d. M. **41**, 108-109, 1910). Sk.

W. KILLING. Bemerkungen über die Ausbildung der Gymnasiallehrer. Deutsche Math.-Ver. 22, 20-34; Verhdl. Naturf. Münster 2, 12-16.

Nach kritischen Bemerkungen über die früheren Prüfungsordnungen und die gegenwärtig in Kraft stehende Prüfungsordnung für Oberlehrer in Preußen, wobei besonders die Fachprüfung in Mathematik und Physik näher beleuchtet wird, geht der Verf. zu einer Besprechung einzelner Fragen über, die das mathematische Studium betreffen. Als Beitrag zu der in Aussicht stehenden neuen Prüfungsordnung ist der Aufsatz der Beachtung wert, obschon manches in ihm persönliche Erfahrungen wohl etwas zu sehr verallgemeinert. Der verkürzten Wiedergabe des Vortrages in den Verhandlungen der Naturforschergesellschaft ist auch ein Bericht über die Ausführungen von P. Cauer zu dem Vortrage angehängt. Lp.

B. BRANFORD. Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität. Deutsche Bearbeitung von R. Schimmack und H. Weinreich. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. VIII u. 403 S. 8°. Mit 114 Fig. im Text, einer Titelfig. und einer Tafel.

„In diesem Buche habe ich darzulegen versucht, welche Aufgaben den beiden ergänzenden Seiten der Mathematik, der experimentellen und der demonstrativen, zufallen. Bei meiner langen persönlichen Erfahrung und experimentellen Durchprobung der hier verteidigten Grundsätze darf ich das Zugeständnis für mich in Anspruch nehmen, daß der Inhalt keine bloßen Phantastereien eines reinen Theoretikers, sondern das wohlerwogene Ergebnis einer fortgesetzten praktischen Betätigung und eines gründlichen Nachdenkens sind. .. Besonders der junge Lehrer ohne größere Erfahrung möge noch ausdrücklich darauf hingewiesen sein, daß die hier vorgetragenen Grundsätze mit einer gewissen Vorsicht aufzufassen sind. Alle pädagogischen Prinzipien sind tatsächlich Ideale, und der Grad, bis zu welchem sie zu verwirklichen sind, hängt von gegebenen Umständen ab: von der Begeisterung, dem Urteil, dem Geschick des Lehrers, von der Eigenart des Schülers, von den praktischen Grenzen seines Arbeitens. Nur Erfahrung kann dem Lehrer eine wahre Einsicht über die Anwendung eines Prinzips geben.“ Diese Sätze des Vorworts kennzeichnen die Richtung des Buches und geben dem Lehrer, der es benutzen will, einen energischen Hinweis darauf, daß nicht die bloße Nachahmung der gelehrten Methoden, sondern ein innerliches Verarbeiten und selbstständiges Hervorbringen bei neuen Schülern wesentlichstes Erfordernis ist. In der Frische der Darstellung, die an eigene Erlebnisse des Verf. anknüpft, und in der Anknüpfung an konkrete Erscheinungen, die allmählich zur Erfassung der abstrakten mathematischen Wahrheiten vergeistigt werden, liegen die Vorzüge des anregend geschriebenen Buches. Lp.

D. KATZ. Psychologie und mathematischer Unterricht. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. VI u. 120 S. gr. 8°. (Abhdl. über den math. Unterr. in Deutschland, veranlaßt durch die I. M. U. K. Bd. III, Heft 8.)

„Die vorliegende Arbeit hat nicht nur referierenden Charakter; es konnte bei dem lückenhaften Zustande der psychologischen Forschung die Andeutung

persönlicher Ansichten und neuer Fragestellungen nicht vermieden werden. Die psychologischen Betrachtungen mußten freilich bei der Enge des zur Verfügung stehenden Raumes in gedrängter Form gegeben werden; selbst die literarischen Hinweise waren auf das Notwendigste zu beschränken."

Inhaltsverzeichnis. Vorwort. Einleitung. Ziele der Untersuchung. 1. Kein pädagogischer Logizismus im mathematischen Unterricht. 2. Die experimentelle Pädagogik. Einteilung der Darstellung. 3. Psychologie im mathematischen Unterricht.

I. Teil. Zur Psychologie der Mathematik und des mathematischen Unterrichts. 1. Die Entwicklung der Zahlvorstellung beim Kinde. Anhang: Zahl und Zählen bei primitiven Völkern. 2. Die Entwicklung der Raumvorstellung beim Kinde. 3. Die differentielle Psychologie in ihrer Bedeutung für den mathematischen Unterricht. a) Die Bedeutung der Lehre von den Vorstellungstypen. b) Wahrnehmungssystem. c) Synopsien. d) Die mathematische Anlage und die Arbeitsweisen der Mathematiker. e) Die Begabungsdifferenzen für die Mathematik in sexueller Beziehung. f) Zur Psychologie der Zahlenvirtuosen und Rechenkünstler. 4. Die Mathematik in der Pädagogik der Mindersinnigen und Schwachsinnigen. a) Zur Psychologie der Mindersinnigen. A) Die Blinden. B) Die Taubstummen. C) Die Taubstummblinden. 5. Anhang: Die geistige Ermüdung und die Hygiene der geistigen Arbeit.

II. Teil. Zur Psychologie des mathematisch-technischen und des künstlerischen Zeichnens.

III. Teil. Zur Ausbildung der Lehrer in Psychologie und Pädagogik. 1. Die Ausbildung und Fortbildung der seminaristisch gebildeten Lehrer. a) Präparandenanstalt und Seminar. b) Private Veranstaltungen. c) Die Ausbildung der Seminarlehrer. 2. Die Ausbildung der akademisch gebildeten Lehrer.

Lp.

J. Jacob. Praktische Methodik des mathematischen Unterrichts. Mit einem Vorwort von E. Mach. Wien: A. Pichlers Ww. u. Sohn. VII u. 174 S. gr. 8⁰.

Das vorliegende Büchlein will dem jungen Lehrer einen Weg zeigen, wie er seinen Unterricht den Leitsätzen der Lehrpläne entsprechend gestalten kann, seine didaktischen Bestrebungen in feste Bahnen lenken und ihn vor nutzlosen Versuchen bewahren. Der Leitgedanke ist das Machsche Ökonomieprinzip, dem sich alle Ausführungen im einzelnen bewußt unterordnen. Es wird der ganze Stoff des mathematischen Unterrichts, von der ganzen Zahl bis zur Infinitesimalrechnung, von dem geometrischen Vorkursus bis zur analytischen Geometrie, sorgfältig durchgegangen, wobei sich manche Gelegenheit auch zu weiteren Ausblicken und Anregungen für den Lehrer bietet. Auch wenn man mit dem Verf. nicht einer Meinung sein kann (mit seiner geringen Einschätzung der analytischen Geometrie für den Schulunterricht werden sich wohl viele Fachgenossen nicht einverstanden erklären), regt er zu nochmaligem Durchdenken des Sachverhalts auf das wohltätigste an. Überall erkennt man aus den Ausführungen den erfahrenen Schulmann, der mit Bedacht das Alte, Bewährte prüft, ehe er es zugunsten neuer, moderner Ziele aufgibt, zu denen gangbare Wege noch nicht erkennbar sind, der aber andrerseits bestrebt ist, den Unterricht immer mehr in dem Sinne zu vervollkommnen, daß er der Befriedigung der geistigen Bedürfnisse des Schülers dient.

Inhalt. Arithmetik auf der Unterstufe, auf der Mittelstufe, auf der Oberstufe. Die Vorschule der Geometrie, Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie, analytische Geometrie. Sk.

G. St. L. Carson. Essays on mathematical education. With an introduction by D. E. Smith. London und Boston: Ginn and Co. V u. 123 S.

Dieser Band enthält Aufsätze, die hauptsächlich in verschiedenen Zeitschriften der Jahre 1912 und 1913 veröffentlicht sind. Inhalt: Einige Grundsätze mathematischer Erziehung. Anschaulichkeit. Das Nützliche und das Wirkliche. Einige nicht verwirklichte Möglichkeiten der mathematischen Erziehung. Der Unterricht in dem elementaren Rechnen. Der erzieherische Wert der Geometrie. Die Stelle der Deduktion in der elementaren Mechanik. Eine Vergleichung der Geometrie mit der Mechanik. J. (Lp.)

D. E. Smith. Intuition and experiment in mathematical teaching in the secondary schools. Proc. 5. Intern. Math. Congr. 2, 611-632.

Von Lietzmann war im Auftrage der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission über das Thema „Anschauung und Experiment im mathematischen Unterricht der höheren Schulen" ein Rundschreiben veranlaßt, in welchem über eine Reihe von Punkten Auskunft erbeten wurde. Der Bericht über die eingelaufenen Antworten ist von D. E. Smith abgefaßt, er zerfällt in die Teile: 1. Methode der Untersuchung. 2. Typen der betrachteten Schule. 3. Die Frage der elementaren und der höheren Schulen. 4. Die in diesem Bericht befolgte Methode. 5. Die allgemeine Lage. 6. Messen und Schätzen. 7. Zeichnen und Darstellen. 8. Graphische Methoden. 9. Rechnen und Berechnen. Das Material wurde eingeliefert für Österreich von E. Dintzl (Wien), für England von Ch. Godfrey (Osborne), für Frankreich von Ch. Bioche (Paris), für Deutschland von P. Treutlein (Karlsruhe) und W. Lietzmann (Barmen), für die Schweiz von H. Fehr (Genf), für die Vereinigten Staaten Amerikas von D. E. Smith (New York) und J. W. A. Young (Chicago). An den Vortrag schloß sich eine Besprechung an, aus der die Namen Laisant, Thaer, Dintzl, Bioche, Carson zu nennen sind. Lp.

D. E. Smith. Mathematical teaching in the secondary schools. Indian M. S. J. 5, 211-214.

Abdruck einer Stelle aus dem vorstehend angezeigten Bericht. Lp.

C. Godfrey. Methods of intuition and experiment in secondary schools. Proc. 5. Intern. Math. Congr. 2, 633-641.

Bericht über die Ergebnisse einer bezüglichen Umfrage (mit 21 Unterfragen), die an 551 Schulen in England, Schottland und Irland versandt war, auf die aber nur 369 Antworten einliefen, indem aus Schottland und Irland nur geringe Beteiligung sich ergab. Lp.

G. St. L. Carson. Intuition. Math. Gazette 7, 60-71.

Vortrag in der Jahresversammlung der Mathematical Association über die Wandlungen des Begriffs „Anschauung" und die Verschiedenheiten in der heutigen Auffassung, um zu dem Ziel zu gelangen, wie die Anschauung bei dem Unterricht in der Mathematik zu verwerten sei. An der sich anknüpfenden Besprechung beteiligten sich E. W. Hobson, E. M. Radford, G. F. Daniell, C. O. Tuckey, Katz, A. W. Siddons, denen der Vortragende in einem Schlußwort erwiderte. Lp.

H. Wiener. Über den Wert der Anschauungsmittel für die mathematische Ausbildung. Deutsche Math.-Ver. 22, 294-297.

H. Wiener. Neue mathematische Modelle aus B. G. Teubners Sammlung. Deutsche Math.-Ver. 22, 297-306.

Im ersten Artikel betont der Verf. die Wichtigkeit der anschaulichen Vorstellung nicht nur für den Unterricht, sondern auch für die Forschung, im zweiten charakterisiert er kurz die neuen Serien der Teubnerschen Sammlung (Raumkurven 3. Ordnung, Gelenkvierecke, Gelenkvielflache, Gelenkflächen, Treutleins Schulmodelle). Sk.

P. B. Fischer. Anschauungsmittel im mathematischen Unterricht. Eine Zusammenstellung der vorhandenen Lehrmittel in der reinen und angewandten Mathematik. Progr. (178) Ober-Realsch. Berlin-Lichterfelde. 40 S. 8°. Sonderausgabe, Leipzig: B. G. Teubner.

„Welche Lehr- und Lernmittel stehen uns zur Verfügung, um den Mathematikunterricht einerseits anschaulich zu gestalten und andrerseits dadurch bei den Schülern die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens zu erzielen?"

Einleitung. Allgemeine Bemerkungen. Rechnen und Arithmetik. Der geometrische Anfangsunterricht. Planimetrie, Trigonometrie und Astronometrie. Stereometrie und darstellende Geometrie. Schlußbemerkung. Firmenverzeichnis. Literaturangaben. Lp.

H. Dressler. Mathematische Lehrmittelsammlungen, insbesondere für höhere Schulen. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 44, 136-166; Berichte u. Mitt. der I. M. U. K. IX., S. 187-217. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner.

Übersicht über die Geschichte und den jetzigen Bestand an mathematischen Modellen, zum Schluß ein Normalverzeichnis notwendiger oder wünschenswerter Modelle nebst Kostenanschlag. Sk.

A. Gérardin. Sur quelques nouvelles machines algébriques. Proc. 5. Intern. Math. Congr. 2, 572-573.

Die „Maschinen" sind graphische Mittel zur Zerlegung von Zahlen in Primzahlen. Lp.

M. Luserke. Über die Methode des rein geometrischen Beweises, d. h. über die Möglichkeit, zur anschaulichen Evidenz geometrischer Beziehungen zu gelangen. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 193-201.

„Beginnt die Geometrie gleich als ein Gemisch von Logik und Anschauung, so ist sie leicht nur ein Lehren von Ergebnissen statt eine Schulung geistiger Fähigkeiten. Es soll nun die Methode der reinen Geometrie untersucht werden.“ a) Was ist die Eigenart der geometrischen Anschauung? b) Auf welche Art und aus welchen Elementen kann der Aufbau geometrischer Gebilde in der Anschauung so geschehen, daß Gewißheit innerhalb der Anschauung selbst erzeugt wird? c) Was bedeuten Körper, Fläche, Linie, Punkt als Elemente von geometrischen Vorgängen? d) Die Methode des Evidenzbeweises. e) Beispiel einer Kette von Anschauungen (Ziel die Ebene und ihre Eigenschaften). Lp.

R. Suppantschitsch. Le raisonnement logique dans l'enseignement mathématique secondaire et universitaire. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 455-458.

Schon die gewählte Sprache für den Vortrag läßt die Vorliebe des Österreichers für französisches Wesen und Nichtachtung des deutschen erkennen; in allgemeinen Phrasen werden den Franzosen alle möglichen Verdienste zuerkannt und wird zur Nachahmung aufgefordert. Ob der Verf. auch heute noch so denkt? Lp.

M. E. Barwell. The advisability of including some instruction in the school course on the history of mathematics. Math. Gazette **7**, 72-79.

Vortrag auf der Jahresversammlung der „Mathematical Association“. Die Vortragende hat als Lehrerin an dem „Training Department of Alexandra College“ in Dublin ihren Unterricht durch Einflechtung geschichtlicher Tatsachen belebt und berichtet über Einzelheiten aus ihrem Lehrgange sowie über den erfreulichen Erfolg, befürwortet daher ein solches Verfahren. Befremdend wirkt die Anführung der von ihr benutzten Quellen: Benchara Branford, A study of mathematical education, und D. E. Smith, Teaching of elementary mathematics. Hiernach scheint die Vortragende weder allgemeine Werke über die Geschichte der Mathematik, noch Schriften über die von ihr behandelte Frage kennen gelernt zu haben. Dasselbe trifft die Teilnehmer an der sich anknüpfenden Besprechung. Lp.

N. Hatzidakis. Systematische Rekreationsmathematik in den mittleren Schulen. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 569-571.

„Es wäre wünschenswert, 1. in den Betrachtungen, den Erörterungen und überhaupt in der ganzen Reformbewegung für die niederen und die mittleren Schulen den Faktor Kind nicht als mathematisches Unendlichkleines zu betrachten; 2. die Psychologie der Kinderwelt nach der mathematischen Seite hin durch geeignete Betrachtungen seitens der Lehrer mit mehr experimentalem Material zu bereichern; 3. die Frage, ob und wie und in welcher Ausdehnung

die Unterhaltungsmathematik in die Schulen eingeführt werden kann und soll, gründlich zu studieren; 4. dem Kinde das Recht einzuräumen, zuerst ein Kind und dann ein Schüler zu sein." Lp.

A. Bottari. Inchiesta sopra l'attitudine e la negativa per la matematica. Boll. Mathesis **5**, 52-53.

Leugnet die Unfähigkeit zur Erfassung der mathematischen Wahrheiten und schiebt das Vorurteil auf den mangelhaften Anfangsunterricht zurück. Lp.

F. L. Talamo. Inchiesta sopra l' attitudine e la negativa alla matematica. Boll. Mathesis **5**, 117-119.

Nach einer Umfrage bei den eigenen Schülern kann jeder, der gut geleiteten Unterricht genießt, dem Lehrer folgen. Der Einfluß mathematischer Ausbildung auf die Entfaltung geistiger Kräfte bleibt zu erforschen. Lp.

A. N. Whitehead. The principles of mathematics in relation to elementary teaching. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 449-454; Ens. math. **15**, 106-112.

Untersuchung der Stellung, die den neueren Forschungen betreffs der mathematischen Prinzipien in dem Unterricht an Mittelschulen einzuräumen ist. Lp.

W. P. Milne. The teaching of scholarship mathematics in secondary schools. Math. Gazette **7**, 80-86.

Vortrag in der Jahresversammlung der „Mathematical Association" über die nur für englische Verhältnisse bedeutsame Frage, wie auf Mittelschulen begabte Schüler gedrillt werden müssen, damit sie für ihr Studium in der Mathematik eine Freistelle ergattern können, nebst angeknüpfter Besprechung. Lp.

Fr. Palatini. Programmi e metodi d'insegnamento. Boll. Mathesis **5**, 41-44.

Befürwortet knappe Aufzählung der Teile des zu lehrenden Stoffes, Überlassung der Wahl der Methode an den Lehrer, damit dieser nach seiner Eigenart unterrichten könne. Lp.

A general mathematical syllabus for non-specialists in public schools. Math. Gazette **7**, 129-133.

Ein Bericht, enthaltend einen Plan, entworfen von dem Unterausschuß für die öffentlichen Schulen und gebilligt von dem allgemeinen Ausschuß für die Mathematische Assoziation. Lp.

Vorschläge zur Vereinheitlichung der mathematischen Bezeichnungen im Schulunterricht. Herausgegeben vom deutschen Ausschuß für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. IV u. 14 S. gr. 8°; Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 395-404.

„Weder von seiten der Mathematik, noch von denen der Pädagogik wird man die Zweckmäßigkeit einer Vereinheitlichung in Abrede stellen.... Eine allen gleich zusagende Lösung ist nicht möglich.... Es ist aber wichtiger, daß man sich überhaupt auf eine Bezeichnungsweise einigt, als welche Bezeichnungsweise man schließlich festlegt.“ (Timerding, als Vorsitzender des Ausschusses, im Vorwort.) Lp.

G. St. L. Carson. Some principles of mathematical education. Math. Gazette **7**, 30-34.

Der Verf. beschäftigt sich mit den Begriffen Axiom, Postulat, Beweis in bezug auf den mathematischen Unterricht. Lp.

D. E. Smith. The teaching of arithmetic. Boston, New York, Chicago, London: Ginn and Company. V u. 196 S.

Dieses Buch besteht aus 22 Kapiteln, die sich auf folgende Dinge erstrecken: Geschichte des Rechnens. Gründe für den Unterricht im Rechnen. Was soll das Rechnen umfassen? Natur der Aufgaben. Das Lehrbuch. Methode. Kopfrechnen oder mündliches Rechnen. Schriftliches Rechnen. Kindliche Lösungen. Verbesserungen in der Technik des Rechnens. Gewisse große Grundsätze für den Rechenunterricht. Versuchsgegenstände. Interesse und Anstrengung. Zahlspiele für Kinder. Arbeit für die Schuljahre vom ersten bis zum achten. J. (Lp.)

K. Wolletz. Die Behandlung der relativen Zahlen im Unterrichte. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 259-263.

Entgegen der Darstellung bei Borel-Stäckel wird die historisch gegebene Einführung der negativen Zahlen als „Ergebnis der ausnahmslos durchzuführenden Subtraktion“ verteidigt und befürwortet. Lp.

W. Jacobsthal. Zum Unterricht in der Arithmetik. Sonderdruck S. 137-142, 173-184.

„Eine im eigentlichen Sinn wissenschaftliche Begründung der Grundlagen der Geometrie ist im Schulunterricht unmöglich; dagegen ist eine Behandlung der Arithmetik möglich, die der wissenschaftlichen einigermaßen nahekommt. Der erste Teil dieser Behauptung soll hier nur in wenigen Worten begründet werden; zum zweiten möchte ich dann eine Reihe von Fragen zur Sprache bringen, die, wenn aus unserer Lehrbuchliteratur Schlüsse zu ziehen gestattet ist, einer sorgfältigeren Behandlung als der vielfach üblichen fähig ist.“ Lp.

M. J. M. Hill. On the teaching of the theory of proportion. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 545-568.

Der Verf. will die Theorie der Proportionen, wenn die in Betracht kommenden Größen inkommensurabel sind, in einfacher und direkter Art darstellen und die Stellung des Gegenstandes im Lehrgange der Mathematik erörtern. Lp.

H. Dressler. Die Betonung funktioneller Beziehungen in der Reihenlehre. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 208-218.

§ 1. Graphische Darstellungen der arithmetischen Reihe. § 2. Graphische Darstellung der geometrischen Reihe. § 3. Graphische Darstellung zu der Lehre vom Zinseszins. Lp.

W. Freyse. Behandlung der Reihen im Unterricht. Progr. (463) Kais. Wilh. II.-Oberrealsch. Göttingen. 108 S. 8° u. 1 Taf.

Den Gang und den Umfang ersieht man aus dem folgenden Inhaltsverzeichnis: I. Arithmetische Reihen erster Ordnung. II. Summation und Interpolation der mathematischen Reihen höherer Ordnung. III. Einfachste trigonometrische Reihen. IV. Geometrische Reihe. V. Binomischer Lehrsatz für positive ganzzahlige Exponenten. VI. Reihenkonvergenz. VII. Reihenentwicklung von Funktionen. VIII. Integralrechnung. Der Verf. strebt eine dem Standpunkte des Unterrichts angemessene Strenge an. Von der Differentialrechnung ist in bescheidenem Umfange Gebrauch gemacht. Lp.

W. P. Milne. The teaching of limits and convergence to scholarship candidates. Math. Gazette **7**, 1-3.

Schluß der Artikelreihe (F. d. M. **42**, 103, 1911 u. **43**, 141, 1912). „Diese arithmetische und direkte Art, den Gegenstand zu behandeln, räumt für den Anfänger mit dem Stein des Anstoßes in der höheren Algebra mühelos auf.“ Lp.

T. P. Nunn. The calculus as a subject of school instruction. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **5**, 582-590.

Der Verf. faßt das Ergebnis seiner Erörterungen über die Möglichkeit, Zweckmäßigkeit und Notwendigkeit des Unterrichts in der Infinitesimalrechnung auf der Stufe der Mittelschule am Schluß in dem folgenden „Glaubensbekenntnis“ zusammen: „Das Programm muß im großen und ganzen durch die Eigenart der Lehrgänge in der Physik usw. bestimmt werden, zu denen die mathematischen Leistungen in Beziehung stehen. Ich neige dazu, auf einer frühen Stufe eine umfassendere Reihe von Funktionen zu behandeln, als manche gewichtigen neueren Gewährsleute zulassen wollen. Der Sinus und der Kosinus würden früh auf meine Liste kommen, weil die Aufgaben, bei denen sie beteiligt sind, so bedeutungsvoll und interessant sind. Auch die logarithmische Funktion kann nicht ausgelassen werden trotz der Schwierigkeiten, die C. S. Jackson

in seinem jüngsten ausgezeichneten Bericht hervorgehoben hat. Die Infinitesimalrechnung muß auf die Bestimmung gewisser einfacher algsbraischer und trigonometrischer Reihenentwicklungen angewandt werden. Schließlich muß das Programm einen Beweis enthalten, daß diese Entwicklungen sämtlich besondere Fälle der Verallgemeinerungen sind, die als Theoreme von Taylor und Maclaurin bekannt sind.“ Danach bleibt die Integralrechnung ausgeschlossen! Lp.

C. S. Jackson. The calculus as an item in school mathematics. Math. Gazette **7**, 197-201.

Anfang eines Vortrags über die Zweckmäßigkeit und Möglichkeit eines Lehrganges der Infinitesimalrechnung auf Mittelschulen bei Schülern von 17 bis 18 Jahren. Lp.

W. Knowles. The teaching of easy calculus to boys. Math. Gazette **7**, 201-208.

Erster Teil der Darstellung des Lehrganges an dem „Technical Day School of the Borough Polytechnic Institute“, in welches die Schüler von etwa 13 Jahren ohne besondere mathematische Vorbildung eintreten, und wo sie im dritten Jahre in den Elementen der Infinitesimalrechnung Unterricht erhalten. Lp.

E. Kochen. Über die Schreibweise der Logarithmen. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 392-395.

E. Lós. Zur Schreibweise der Logarithmen. Ebenda, 593-594.

Der erste Verf. will die Bezeichnung log verbannen und nur Potenzen von 10 geschrieben wissen. Der zweite schlägt eine tabellarische Schreibweise vor. Lp.

C. F. B. Funk. Die Kleinsche Einführung des Logarithmus! Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 463-475.

Unter Hinweis auf den nachstehend angezeigten Artikel von Frenzel meint der Verf., „daß damit die alte, unvorteilhafte Einführung noch keineswegs aus der Welt geschafft ist“. Für die niedere Stufe versucht er, eine den zu stellenden Anforderungen genügende Darstellung zu geben. Die ganze Entwicklung stützt sich auf die Fundamentalgesetze der affinen Abbildung. Lp.

C. Frenzel. Zur Kleinschen Einführung in die Lehre von den Logarithmen. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 1-13.

Der Logarithmus soll nach dem Vorschlage von Klein als $\int_1^x \frac{d\xi}{\xi}$ definiert und als Fläche der gleichseitigen Hyperbel $\xi\eta = 1$ geometrisch erläutert werden. Der Verf. versucht zu zeigen, „wie sich dieser Kleinsche Vorschlag durch-

führen läßt, und wie man auf diese Weise auf der Oberstufe der höheren Schulen eine fundamentale Vertiefung des Verständnisses der Lehre von den Logarithmen und der Exponentialfunktion erreichen kann". Lp.

F. Gauger. Die geometrische Deutung der Reihen von Taylor und MacLaurin. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 364-369.

„F. Klein definiert durch sukzessives Zusammenfassen der ersten Glieder der eben genannten Reihen zu Funktionen seine Schmiegungsparabeln. Im folgenden soll für die Zwecke der höheren Lehranstalten der umgekehrte Weg eingeschlagen werden.... Aus geometrischen Definitionen werden sich schließlich beide Reihen ergeben." Lp.

A. Witting. Zum Unterricht in der Planimetrie. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 201-203.

Gedanken über die Frage, wie man namentlich den Anfangsunterricht in der Planimetrie dem kindlichen, auf naive Anschauung eingestellten Verstande gemäßer und damit förderlicher gestalten kann. Lp.

W. J. Dobbs. The teaching of geometry and trigonometry. Math. Gazette **7**, 139-146, 167-170.

Der Artikel enthält im Umriß den Inhalt der ersten Kapitel aus dem Buche A school course in geometry, der bei Longmans, Green & Co. erscheint. Es handelt sich um den Stoff des ersten Jahres vor etwa zwölfjährigen Schülern. I. Rotationsbewegung. II. Translationsbewegung. III. Kosinus von spitzen Winkeln. IV. Flächeninhalte. V. Symmetrie. VI. Allgemeine Betrachtungen. Lp.

J. W. Mercer. The teaching of numerical trigonometry. Math. Gazette **7**, 193-197.

Ein erster Artikel über frühen Unterricht der Trigonometrie, wie der Verf. ihn bei Knaben von 14 bis 15 Jahren seit 15 Jahren erteilt hat. Lp.

G. St. L. Carson. The place of deduction in elementary mechanics. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 578-581.

Der Verf. wünscht beim Unterricht eine Erörterung der Abhängigkeit der mechanischen Prinzipien voneinander und des Geltungsbereiches dieser Prinzipien. „Der erste Schritt des Lehrers sollte darin bestehen, einen umfassenden Sinn für Fragestellung zu wecken; der zweite darin, ein „göttliches Mißbehagen" mit den Unvollkommenheiten der sinnlichen Wahrnehmungen großzuziehen." Lp.

O. Offermann. Die staatsbürgerliche Erziehung und der Mathematikunterricht an höheren Schulen. Dresden - Blasewitz: Bleyl & Kaemmerer. 15 S. 8°. (Sonderdruck aus „Pädagogische Studien“ **33**.)

An Beispielen wird gezeigt, „daß die Mathematik durch ihre Denk- und Ausdrucksweise der staatsbürgerlichen Erziehung gute Dienste leistet“. Lp.

W. Lietzmann und O. Trier. Wo steckt der Fehler? Trugschlüsse und Schülerfehler. Leipzig: B. G. Teubner. IV + 57 S. kl. 8° (Math. Bibl. X).

Eine sehr hübsche Sammlung von mehr oder minder bekannten Trugschlüssen aus allen Gebieten der elementaren Mathematik. Sk.

O. Pommer. Philosophie im Mathematikunterricht. Zs. f. d. österr. Gymnasien **64**, 256-268, 350-362; österr. Mittelschule **27**, 115-116.

Vortrag in einer gemeinsamen Sitzung der Vereine „Mittelschule“ und „Die Realschule“ in Wien am 25. Januar 1913, mit hinzugefügten Literaturnachweisen. Der Verf. beschäftigt sich mit der Frage, wo die von den (österreichischen) Lehrplänen vorgeschriebenen „Rückblicke und Ausblicke nach geschichtlichen und philosophischen Gesichtspunkten“ Platz finden können. Logik: 1. Definitionen. 2. Umfangsbestimmungen. 3. Urteile und Schlußlehre. 4. Umkehrungen. 5. Evidenz bei Rechnungsproben. 6. Allgemeingültige Beweise an einzelnen Individuen. Psychologie: 1. Anschauung und Denken. 2. Indirekte Vorstellungen. 3. Unterschiedsschwelle. Methodenlehre und Erkenntnislehre: 1. Apriorische und empirische Erkenntnis. 2. Induktion und Deduktion. 3. Systematische Zusammenfassung. 4. Mathematische Symbolik. 5. Stellung der Mathematik im System der Wissenschaften. 6. Axiome. Schr.

O. Pommer. Bericht über die Verhandlungen der Abteilung XV (für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht) der 85. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Wien, 20. bis 28. September 1913. Zs. f. d. österr. Gymnasien **64**, 1128-1135.

I. Naturwissenschaftliche Schülerübungen. II. Philosophische Propädeutik. III. Verschiedene andere Themen: Die neue bayrische Prüfungsordnung. Methodische Freiheit des Lehrers. Geschichtliche Methode usw. Schr.

K. Ott. Der mathematische Unterrichtsstoff nach dem neuen Lehrplan. Referat erstattet im Verein „Die Realschule“ Wien am 17. Mai 1913. Österr. Mittelschule **27**, 261-268.

Vorschläge zur Beschränkung des Lehrstoffs. Schr.

H. JANUSCHKE. Der mathematische Arbeitsunterricht im Rahmen des Lehrplans. Vortrag im Verein „Die Realschule" in Wien am 19. April 1913. Österr. Mittelschule **27**, 238-256.

Die Reformen streben danach, die Lehrschule in eine Arbeitsschule umzuwandeln. Deren Kennzeichen ist die selbständige Arbeit der Schüler.

Das Zählen ist an vorhandenen Gegenständen vorzunehmen; die Rechnungen sind an praktischen Beispielen zu erläutern usw. Verschiedene Anregungen zum Stoff der einzelnen Jahrgänge.

Ergebnis von Versuchen über die Mitarbeit der Schüler. Schr.

L. TESAR. Arbeitsschule oder Abstraktion. Eine prinzipielle Auseinandersetzung. Österr. Mittelschule **27**, 257-260.

Verteidigung der Arbeitsschule gegen den von E. Müller erhobenen Vorwurf, daß sie die wissenschaftliche Strenge schädige. Schr.

O. DANZER. Der Unterricht in der darstellenden Geometrie nach dem neuen Lehrplan. Referat, erstattet im Verein „Die Realschule" in Wien am 22. Februar 1913. Österr. Mittelschule **27**, 235-237.

Alles Gedächtnismäßige und Mechanische ist aus der darstellenden Geometrie zu verbannen. Verteilung des Lehrstoffs auf die Jahrgänge. Schr.

Z. STRASZEWICZ. Szkic propedeutyki gieometryi. (Ein Entwurf der Propädeutik der Geometrie.) Wektor **1**, 514-524 (1912).

Im Unterrichte der Anfangsgründe der Geometrie müssen die Theoreme durch Anschauung und Experimentieren gewonnen werden. Daher ist der zeichnerischen Seite des Unterrichtes besonderes Gewicht beizulegen. Die geometrischen Konstruktionen müssen durch Probieren ausgeführt werden. Der Unterricht der Symmetrie, Ähnlichkeit, Homologie, Projektivität von Figuren muß an der Hand von Beispielen aus der nächsten Umgebung des Schülers geführt werden. Die Einführung abstrakter Begriffe, wie jenes des Winkels a priori wird dadurch vermieden und ergibt sich a posteriori. A. R.

L. ZARZECKI. Metoda monograficzna Grubego w świete krytyki. (Grube's monographische Methode im Lichte der Kritik.) Wektor **2**, 108-117.

Grubes Methode im Unterrichte der Anfangsgründe des Rechnens besteht darin, daß jede der ersten Zahlen der natürlichen Zahlenreihe für sich behandelt wird, und zwar werden alle vier Spezies zugleich eingeführt. Die Vertreter verschiedener Richtungen in der Methodik des Unterrichtes treten dagegen

und gegen die Ausdehnung der monographischen Methode auf die ersten hundert Zahlen der Zahlenreihe auf, dagegen billigen sie diese Methode beim Behandeln der ersten zehn Zahlen. Der Verf. unterzieht die Anschauungen einer Kritik, die schließlich zu dem Resultat führt, daß im Anfangsunterricht des Rechnens die Hauptrolle spielen: erstens die Bezugnahme auf konkrete Gegenstände, zweitens Abbildungen sowie Gruppenbildungen, drittens die mechanische Fertigkeit im Rechnen. Nur in letzterer Hinsicht ist Grubes monographische Methode von Nutzen. In experimenteller Hinsicht ist bisher wenig geleistet worden. A. R.

Weitere Literatur.

F. Bindemann. Zur Behandlung der Zinseszins- und Rentenrechnung. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 16-18.

Blencke. Zur einheitlichen Behandlung der quadratischen und kubischen Gleichungen. Progr. (538) Oberrealsch. Hamm, 16-18.

„Methodische Bemerkungen zum mathematischen Unterricht."

B. Buchruck .r. Ein kurzer Weg zur Einführung der Differentiale in den Unterricht der Prima. Progr. (678) Königl. Realgymn. Elberfeld. 12 S. 4⁰.

G. St. L. Carson. Essays on mathematical education. With an introduction by D. E. Smith. Boston: Ginn. IV + 139 S. 8⁰.

E. Chatelain. L'enseignement de la géométrie. Une reforme dans ses rapports avec nos circonstances locales. La Chaux-de-Fonds: Imprimerie coopérative. 24 S. 8⁰.

H. Dressler. Ein mathematischer Scherz und seine didaktische Verwertung. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 16.

Der bekannte, durch Zerschneidung eines Rechtecks herbeigeführte Trugschluß $64 = 65$, ausgedehnt auf $63 = 64$.

H. Dressler. Besprechung von Lehrmitteln. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 422-427.

O. Eckhardt. Stoff und Methode des mathematischen Unterrichts in Knabenmittelschulen. Münster: Aschendorff. VII + 170 S. 8⁰.

S. E. Epsteen. Minimal courses in engineering mathematics. Amer. Math. Monthly **20**, 47-52.

A. Flechsenhaar. Graphische Methoden im algebraischen Unterricht. Progr. (550) Lessing-Gymn. Frankfurt a. M. 27 S. 4⁰ u. 2 Taf.

A. Gutzmer. Die Internationale Mathematische Unterrichtskommission und die Berichte über den mathematischen Unterricht in Deutschland. Die Naturwissenschaften 1913, 23-25.

J. Hadamard. La méthode en géométrie. Paris: A. Hermann & Fils. 40 S. 8⁰.

C. Hamilton. Technical school organisation and teaching. With a preface by G. V. Yule. London: George Routledge and Sons, Ltd. XII u. 178 S. [Nature **91**, 109.]

J. Jarosch. Methodik des Unterrichts in der darstellenden Geometrie und im geometrischen Zeichnen. Wien: Pichler. 104 S. 8°.
Referat in Abschn. VIII, Kap. 4.

F. A. Jungbluth. Einführung der Ionentheorie im chemischen Unterricht der höheren Schulen. Verh. Naturf. Ges. Münster $\mathbf{2}_1$, 291—296.

Kochen. Über die Schreibweise der Logarithmen bei praktischen Rechnungen. Progr. (538) Oberrealsch. Hamm, 18-20.
„Methodische Bemerkungen zum mathematischen Unterricht."

Chr. Lenhardt. Aufgaben über Stellungen der Uhrzeiger. Eine Stunde in Obertertia. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 478-479.

W. Lietzmann. Bericht über die Tätigkeit des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht im Jahre 1912, erstattet von dem geschäftsführenden Sekretär. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. 28 S. gr. 8°; Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 265-270.

E. Loewenhardt. Die 22. Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in München vom 12.—15. Mai 1913. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 439-446.

J. A. McLellan and J. Dewey. The psychology of number and its application to methods of teaching arithmetic. New York. XV + 309 S.

Ph. Maennchen. Geheimnisse der Rechenkünstler. 13. Bd. Mathem. Bibliothek, hrsg. v. W. Lietzmann u. A. Witting. Leipzig: B. G. Teubner. IV + 48 S. 8°.
Referat in Abschnitt III, Kap. 1.

R. E. Manchester. The teaching of mathematics. Syracuse N. Y.: Bardeen. 75 S. 12mo.

D. Morduchai-Boltowskoj. Über die erste Versammlung der russischen Mathematiklehrer. Warschau Univ.-Ann. 1913.

A. Postelmann. Bericht über den 10. Ferienkursus für Lehrer höherer Schulen in Frankfurt a. M. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 108-110.

E. A. Price. Reform of mathematical teaching in Germany. Math. Gazette **7**, 7-10.

J. Richard. Sur l'enseignement des mathématiques. Ass. Franç. Tunis **42**, C. R. 68.

A. Richter. Ergebnis über den bisherigen Unterricht in der Differential- und Integralrechnung in Gymnasialprima. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 384-387.

C. Runge. The mathematical training of the physicist in the university. Report. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 598-607.
Vgl. F. d. M. **43**, 115, 1912.

Rud. Schimmack. Ein bewegliches Polareckenmodell. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 18-21.
Das Modell ist der Wiener-Treutleinschen Sammlung eingereiht (bei B. G. Teubner, Leipzig).

P. Stäckel. Die Internationale Mathematische Unterrichtskommission. Die Geisteswissenschaften **1**, 37-39.

H. Vollprecht. Das Rechnen eine Vorbereitung zur allgemeinen Arithmetik. 2. Auflage. Leipzig: B. G. Teubner IV u. 48 S. gr. 8°.

Walter Wolff. Die Verwendung der graphischen Darstellung bei dem Unterricht in der Algebra. Progr. (696) Realgymn. Ohligs. 49 S. 8°.

Ratschläge und Erläuterungen für die Studierenden der Mathematik und Physik an der Universität Göttingen. Herausgegeben von der Direktion des mathematisch-physikalischen Seminars. Neue Auflage Ostern 1913. Mit einem Anhang: Statuten des mathematischen Lesezimmers. Leipzig: B. G. Teubner. 38 S. 8°.

A general mathematical syllabus for non-specialists in public schools. A report drawn up by the public schools committee and approved by the general committee of the Mathematical Association. Math. Gazette **7**, 129-133.

Commission internationale de l'enseignement mathématique. Congrès de l'enseignement mathématique: Paris, 6-8 avril 1914. Travaux préparatoires. Ens. math. **15**, 394-412.

Liste des publications nationales du Comité central et des Sous-commissions nationales. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 642-657.

Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die Internat. mathemat. Unterrichtskommission. VIII. Leipzig: B. G. Teubner. 129-186 S. gr. 8°.

Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland. Herausg. von F. Klein.

I. Bd.: Die höheren Schulen in Norddeutschland. Mit Einführungs- und Schlußwort von F. Klein. (III, XII + 102; VII + 204; V + 118; VI + 93 u. XII + 183 S.)

II. Bd.: Die höheren Schulen in Süd- und Mitteldeutschland. Einführungswort von P. Treutlein, Schlußwort von A. Thaer. (XI, V + 85; XII + 78; IV + 104; IV + 48; VI + 51; IV + 18; VI + 58 u. VI + 49 S.) Leipzig: B. G. Teubner. Lex. 8°.

Zweiter Abschnitt.

Algebra.

Kapitel 1.

Gleichungen, universale Algebra und Vektoranalysis.

A. Gleichungen.

(Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transzendente Gleichungen.)

W. P. Milne. Higher algebra. London: Edward Arnold. XII u. 586 S.

Dieses Buch zerfällt in zehn Kapitel; sie handeln über: Rationale Zahlen. Irrationale Zahlen (Dedekinds Theorie). Grenzen und Konvergenz von Reihen. Summation einiger wichtigen Reihen. Der binomische Satz. Permutationen und Kombinationen. Exponentialreihe und logarithmische Reihe. Kettenbrüche. Theorie der Gleichungen. Komplexe Zahlen. Determinanten. Vermischte Sätze. J. (Lp.)

E. Netto. Elementare Algebra. Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester. Zweite Auflage. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. X u. 200 S. gr. 8°, 19 Figuren.

Die erste Auflage dieses Buches ist F. d. M. **35**, 108, 1904 angezeigt worden. Die neue Auflage deckt sich Seite für Seite mit der Urausgabe und weist nur Verbesserungen der meisten Druckfehler und kleinen Irrtümer auf, die bei dem ersten Druck übersehen waren. Noch ist S. 35 zu lesen „Entwicklung ganzer Zahlen in Kettenbrüche" statt „Entwicklung der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen in Kettenbrüche". S. 29 steht noch immer $3668 - 3444 = 1224$, und dergleichen mehr. Sonst aber ist das Werk den Studenten des ersten Studienjahres zur Einführung in die Algebra sehr nützlich. Lp.

Rosina Piscel. Sopra alcune questioni algebriche relative ai piccoli movimenti. Pisa: Stabilimento tipografico toscano. 181 S. 8°.

Die Verfasserin setzt sich als Zweck vor, die auf die Bestimmung des Zeichens der reellen Wurzeln oder der reellen Bestandteile der komplexen Wurzeln einer algebraischen Gleichung bezüglichen Untersuchungen in organischer Form zu entwickeln. Einer Einleitung, welche dazu bestimmt ist, die Wichtigkeit des Problems für manche Fragen der Mechanik nachzuweisen, folgen 7 Kapitel, deren Inhalt hier kurz angegeben werden möge.

Kap. 1: Die Newtonschen Formeln und deren Anwendung auf die Bildung der Lagrangeschen und der Tschirnhausschen Transformierten; die Sylvestersche Resultante. Kap. 2: Eine neue Methode zur Bildung der Halbsummengleichung. Kap. 3: Berechnung der Tschirnhausschen Transformierten unabhängig von den Newtonschen Formeln. Kap. 4: Grundlagen der Theorie der linearen Substitutionen und der quadratischen Formen. Anwendung der Theorie von der Reduktion einer quadratischen Form auf die Normalform für die Integration der Systeme von linearen Differentialgleichungen; der Fall von 4 Gleichungen wird ausführlich behandelt. Kap. 5: Das Problem von der Bestimmung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die reellen Bestandteile sämtlicher Wurzeln einer algebraischen Gleichung negativ sind. Die Auflösungen von Routh und von Hurwitz; Übereinstimmung der Resultate. Kap. 6: Die Auflösung von Weber. Kap. 7: Die Auflösung von Orlando. Vi.

A. Bottari. Somma delle potenze simili di due quantità in funzione della loro somma e del loro prodotto. Periodico di Mat. 28 [(3) 10], 104-120.

Die im Titel bezeichnete Aufgabe ist schon früher behandelt worden. So gibt M. A. Stern in seinem „Lehrbuch der algebraischen Analysis" (Leipzig und Heidelberg, 1860) S. 353 die auf zwei Seiten abgeleitete Formel:

$$x^n + y^n = (x+y)^n - nxy\,(x+y)^{n-2} + \frac{n\,(n-3)}{1\cdot 2}\,(xy)^2\,(n+y)^{n-4}$$
$$-\frac{n\,(n-4)\ (n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}\,(xy)^3\,(x+y)^{n-6} + \dots$$
$$\pm\frac{n\,(n-r-1)\,(n-r-2)\dots(n-2r+1)}{1\cdot 2\cdots r}\,(xy)^r\,(x+y)^{n-2r} \mp \dots;$$

hieraus zieht er viele allgemeine Folgerungen.

Der Verf. gibt gar keine Literatur an, knüpft seine Betrachtungen an die quadratische Gleichung $x^2 - sx + p$ an, aus der ja für $\sigma_k = x_1^k + x_2^k$ die bekannten Gleichungen $\sigma_1 - s = 0$, $\sigma_2 - s\sigma_1 + 2p$, $\sigma_n - \sigma_{n-1}s + \sigma_{n-2}p = 0$ $(n > 2)$ folgen, und leitet dann durch Betrachtung von Determinanten eine Reihe von Formeln ab, die nicht gerade leicht zu übersehen sind. Die Koeffizienten der Entwicklungen werden schließlich aus einem Koeffizientendreieck entnommen, ohne daß die oben abgedruckte allgemeine Formel gewonnen ist. Lp.

M. T. Naranieṅgar. On factors. Indian Math. Soc. 5, 220-221.

Ist $x = a + ib$ und $X = A + iB$ eine Funktion von x, so ist $(X - A)^2 + B^2$ durch $(x-a)^2 + b^2$ teilbar; usw. E. J.

W. GROSCH. Lösung zu 402 (R. Jentzsch). Arch. d. Math. u. Phys. (3) **21**, 368-369.

Stellt eine ganze ganzzahlige Funktion für jeden ganzzahligen Wert des Argumentes das Quadrat einer ganzen Zahl dar, so ist sie das Quadrat einer ganzen ganzzahligen Funktion. Schr.

J. C. FIELDS. Proofs of certain general theorems relating to orders of coincidence. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 218-235.

Verf. ergänzt die Untersuchungen, die er in seinem Vortrage auf dem fünften internationalen Mathematikerkongreß zu Cambridge vorgetragen hat. (Direct derivation of the complementary theorem from elementary properties of the rational functions. Referat in Abschn. VII, Kap. 1.) In jenem Vortrage hat Verf. von der Bestimmung gewisser Zahlen abgesehen. Sie werden jetzt explizit bestimmt und aus dieser Bestimmung werden dann Folgerungen gezogen. E. J.

P. MONTEL. Sur le théorème de d'Alembert et la continuité des fonctions algébriques. Nouv. Ann. (4) **13**, 481-492.

Verf. beweist einige bekannte Sätze aus der Theorie der algebraischen Funktionen mit Hülfe der Picardschen Methode der sukzessiven Approximation. Ausgangspunkt seiner Untersuchungen ist der einfache Nachweis des Satzes: Betrachtet man die Gleichung:

$$Z = \varphi(Z) = t + a_2 Z^2 + a_3 Z^3 + \cdots + a_m Z^m,$$

die für $t = 0$ die Wurzel $Z = 0$ hat, so hat sie für hinreichend kleines t ebenfalls eine Wurzel Z. Verf. gewinnt diese Wurzel als Grenzwert der Reihe Z_1, $Z_2, Z_3, \ldots$, in der $Z_1 = t$ und allgemein $Z_n = \varphi(Z_{n-1})$ ist. E. J.

L. ORLANDO. Un' osservazione sulla serie di potenze. Rom. Acc. L. Rend. **22**$_1$, 422-423.

Verf. leitet eine einfache und bekannte Eigenschaft der Potenzreihe ab, um daraus den Fundamentalsatz der Algebra und den Satz zu folgern, daß eine transzendente Funktion dem absoluten Werte nach jeden Wert überschreitet. E. J.

G. PÓLYA. Sur un théorème de Laguerre. C. R. **156**, 996-999.

Laguerre stellt (Oeuvres **1**, 28) den Satz auf: Ist das reelle Integral

$$f(x) = \int_0^\infty \varphi(\lambda)\, e^{-\lambda x}\, d\lambda$$

konvergent für $x > x_0$, und hat die Funktion $\varphi(\lambda)$ in $V+1$ Intervallen, die zusammen die positive Zahlenlinie erfüllen, immer veränderliches und abwechselndes Vorzeichen, so hat $f(x)$ höchstens V Nullstellen, die $> x_0$ sind. Der Beweis

bei Laguerre ist unzureichend; Pólya gibt einen andern, der sich auch auf Lagrangesche Gedanken stützt.

Hiervon wird eine Anwendung auf die Bestimmung der Anzahl der reellen Nullstellen einer Funktion, die durch äquidistante Funktionswerte festgelegt ist, gemacht. Schr.

D. R. Curtiss. An extension of Descartes' rule of signs. Math. Ann. **73**, 424-435.

Verf. knüpft an das von E. Meißner in Math. Ann. **70** (F. d. M. **42**, 459, 1911) diskutierte Theorem von Laguerre an. Dieses folgt, wie Verf. sagt (es findet sich nämlich nicht in den Werken Laguerres), aus jenem Laguerreschen Satz, der die Anzahl der positiven Wurzeln von $f(x) = 0$ im Zusammenhang mit den Zeichenwechseln der Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $e^{zx}f(x)$ nach steigenden Potenzen von x bringt, falls z genügend groß ist. Verf. beweist, daß es möglich ist, in diesem fundamentalen Laguerreschen Satz den transzendenten Faktor e^{zx} durch Polynome zu ersetzen. Über die Art dieser Polynome werden wichtige Untersuchungen angestellt, insbesondere über ihren Grad und über ihre Koeffizienten. E. J.

D. R. Curtiss. The degree of a Cartesian multiplier. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 19-26.

In diesem Aufsatze gibt der Verf. einen Beweis für die Existenz von kartesischen Multiplikatoren, der etwas einfacher ist als die bisher dafür gegebenen (vgl. das vorstehende Referat). Am Schluß wird zugestanden, daß die erhaltene Auswertung des Grades selbst in einfachen Fällen unsinnig hoch ist. „Es ist nicht anzunehmen, daß die hier gegebenen Methoden selbst nach ihrer Verbesserung für Zahlenrechnungen vielen Wert haben. Es verbleibt jedoch das einer formalen Lösung des unter Behandlung stehenden Problems anhaftende Interesse.“ Lp.

D. R. Curtiss. Proofs of certain formulas suggested by Laguerre's work in the theory of equations. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 298.

T. Astuti. Sulla trasformazione di Tschirnhausen. Torino Atti **48**, 43-46.

Verfasserin scheint mir nichts wesentlich Neues zu sagen. E. J.

R. Kurokawa. A theorem in Algebra. Tôhoku Math. J. **3**, 173-174.

Beweis eines Satzes von S. Kakeya (vgl. F. d. M. **43**, 147).

1. Sind in der Gleichung

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n = 0$$

die Koeffizienten reell und

$$1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n,$$

dann ist der absolute Betrag jeder Wurzel der Gleichung größer als 1.

2. Sind in der Gleichung die Koeffizienten reell und

$$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n,$$

dann hat die Gleichung keine Wurzel, deren absoluter Betrag kleiner oder gleich 1 ist. E. J.

T. HAYASHI. On the roots of an algebraic equation. Tôhoku Math. J. **3**, 110-115.

Verf. beweist einen Satz von S. Kakeya, den dieser auf geometrischem Wege bewiesen hat (F. d. M. **43**, 147, 1912), und der eine elementare Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen gibt, auf rein algebraischem Wege; daran schließt er noch einige weitere Bemerkungen. E. J.

CHIPART et LIÉNARD. Sur le signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique. C. R. **157**, 691-694, 835-840.

Den Verfassern scheint nur die nichtdeutsche Literatur über diesen Gegenstand bekannt zu sein, nicht aber die klassische Arbeit von Hurwitz in Math. Ann. **46** (F. d. M. **26**, 119, 1895). Die Verfasser beschäftigen sich mit der Frage, wann eine algebraische Gleichung $f(x) = 0$ nur Wurzeln mit negativ-reellem Teil besitzt. Sie ordnen der Gleichung auf einfachem Wege eine quadratische Form Θ zu und erkennen als notwendig und hinreichend dafür, daß $f(x) = 0$ nur solche Wurzeln besitzt, die Tatsache, daß Θ eine positiv-definite Form sei, und daß die geraden Potenzen von x in $f(x)$ sämtlich Koeffizienten besitzen, die im Vorzeichen mit dem höchsten Koeffizienten übereinstimmen. In dem zweiten Artikel wird gezeigt: Die Anzahl der positiven (negativen) Quadrate einer gewissen quadratischen Form ist gleich der Anzahl der Wurzeln von $f(x) = 0$ mit negativ-(positiv-)reellem Teil, falls noch gewisse Voraussetzungen erfüllt sind. E. J.

G. ANDREOLI. Sui limiti superiori dei moduli delle radici complesse di una data equazione algebrica. Napoli Rend. (3) **19**, 97-105.

Verf. wendet das Kriterium von Routh für das Hurwitzsche Problem der Bestimmung der Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit negativ-reellem Teil auf eine Gleichung an, die aus einer gegebenen Ausgangsgleichung durch eine gebrochene lineare Substitution gewonnen wird. Es ergibt sich daraus für die Wurzeln der Ausgangsgleichung eine obere Schranke. § 1 enthält die Substitution, § 2 die Anwendung des Kriteriums von Routh und die Formulierung der Ergebnisse; endlich gibt § 3 Zahlenbeispiele. E. J.

M. PÉTROVITCH. Équations algébriques et transcendantes dépourvues de racines réelles. S. M. F. Bull. **41**, 194-206.

Das Problem von Laguerre, eine Folge von Zahlen zu bestimmen, deren Multiplikation mit den einzelnen Gliedern einer algebraischen Gleichung mit nur reellen Wurzeln wieder eine algebraische Gleichung mit ebensolchen Wurzeln liefert, wandelt der Verf. in ein Problem für Gleichungen, algebraische und transzendente, mit nur imaginären Wurzeln um und löst es. E. J.

M. N. Gunther. Sur la forme canonique des équations algébriques. C. R. **157**, 577-580.

Verf. erweitert im wesentlichen einen von E. Delassus in Ann. de l'Éc. Normale **14** (F. d. M. **28**, 298, 1897) ausgesprochenen Satz über die Auflösung eines Systems homogener Gleichungen. E. J.

F. Enriques. Intorno alla risoluzione razionale di una classe di equazioni algebriche fra quattro variabili. Annali di Mat. (3) **20**, 109-111.

Verf. beweist auf geometrischem Wege folgenden Satz: Sei $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ eine algebraische Gleichung; sie sei irreduzibel und in bezug auf die Veränderlichen x_1, x_2 insgesamt vom zweiten Grade, in bezug auf x_3, x_4 aber von irgendeinem Grade n. Damit man die Gleichung $F = 0$ rational lösen kann, d. h. durch $x_i = f_i(u_1, u_2, u_3)$, wobei die rationalen Funktionen $x_i = f_i$ der drei Parameter u_i im allgemeinen nicht rational umkehrbar sind, genügt es, vier rationale Funktionen von zwei Veränderlichen v_1, v_2 bestimmen zu können:

$$x_1 = x_1(v_1, v_2), x_2 = x_2(v_1, v_2), x_3 = x_3(v_1, v_2), x_4 = x_4(v_1, v_2),$$

so daß diese der Gleichung $F = 0$ genügen und zwischen x_3, x_4 keine von v_1, v_2 unabhängige Relation besteht. E. J.

K. Person. Die Kroneckersche Charakteristikentheorie als Verallgemeinerung des Sturmschen Satzes. Progr. (869) Gymn. Donaueschingen. 16 S.

Nach einer kurzen historischen Einleitung gibt Verf. als Ziel seiner Arbeit an: „Es soll das Verhältnis der Kroneckerschen Theorie zu ihrem Vorbilde, dem Sturmschen Satz, dargetan werden unter Benutzung einer Ableitung des Sturmschen Theorems, die die Beziehung zwischen beiden deutlich hervortreten läßt." E. J.

G. Pólya. Sur la méthode de Gräffe. C. R. **156**, 1145-1147.

Überträgt man die Gräffesche Auflösungsmethode auf eine Potenzreihe $f(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, so hat man die Potenzreihen

$$f(x) f(e^{\frac{2\pi i}{k}} x) \ldots f(e^{(k-1)\frac{2\pi i}{k}} x) = 1 + a_{1,k} x^k + a_{2,k} x^{2k} + \cdots$$

zu bilden. Dann sind

$$\frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[k]{|a_{1,k}|}}, \frac{\overline{\lim} \sqrt[k]{|a_{1,k}|}}{\overline{\lim} \sqrt[k]{|a_{2,k}|}}, \frac{\overline{\lim} \sqrt[k]{|a_{2,k}|}}{\overline{\lim} \sqrt[k]{|a_{3,k}|}}, \ldots$$

die absoluten Werte der Nullstellen von $f(x)$, der Größe nach geordnet, und zwar, soweit sie in den Konvergenzkreis hineinfallen. Es wird noch auf die Beziehung zu gewissen Resultaten Hadamards hingewiesen. Schr.

M. Braggio. Sopra un metodo di approssimazione delle radici di un' equazione algebrica. Rom. Acc. L. Rend. **22**$_2$, 355-358.

Verfasserin beschäftigt sich mit der Gräffeschen Näherungsmethode, jedoch ohne den Namen Gräffe zu nennen, und untersucht die Genauigkeit des Verfahrens. E. J.

F. Giudice. Interpretazione geometrica del metodo di Lagrange. Torino Atti **48**, 375-384.

Der Übergang von einem Näherungswert eines Kettenbruchs zum nächsten wird in der komplexen Ebene verfolgt. Hiervon werden Anwendungen auf die Lagrangesche Methode der Auflösung von Gleichungen durch Kettenbrüche gemacht, insbesondere auf die Abkürzung der Rechnung unter gewissen Umständen. Schr.

J. J. Östergaard. Om Thieles Methode til numerisk Oplösning af algebraiske Ligninger. (Über Thieles Methode zur numerischen Auflösung algebraischer Gleichungen.) Nyt Tidsskr. for Matem. (B) **24**, 17-24.

Der Verf. prüft an numerischen Beispielen die beiden von Thiele in seiner „Interpolationsrechnung“ angegebenen Methoden zur numerischen Auflösung algebraischer Gleichungen und vergleicht ihre Anwendbarkeit mit andern bekannten Methoden (Newton, Horner, Gräffe). Als Beispiel wird unter anderem die Lagrangesche Gleichung

$$C(-3m^2+3m-1)+Bm^3(m^2-3m+2)-A(m-1)^2(1-m^3)=0$$

zur Bestimmung der Librationspunkte im Dreikörperproblem (Essai sur le problème des trois corps, Oeuvres **6**, 277) gewählt. Falls zwei Massen $=1$ sind und die dritte $=0$ ist, erhält man durch Permutation von A, B und C Resultate, die teils miteinander, teils mit dem sonst bekannten Resultate im Widerspruch sind. Die Herleitung der Lagrangeschen Gleichung setzt aber auch voraus, daß die Massen von 0 verschieden sind. Trotzdem benutzt unter anderem Gyldén (Öfvers. af Kongl. Vet. Ak. Förh., Stockholm 1884, „Om ett af Lagrange behandlat fall“) die Gleichung in diesem Falle. P. H.

C. Juel. Note om algebraiske Ligninger. (Note über algebraische Gleichungen). Nyt Tidsskr. for Mat. (B) **24**, 7-8.

Wenn die Wurzeln einer algebraischen Gleichung von gerader Ordnung paarweise der involutorischen Bedingung $x_1 x_2 - a(x_1 + x_2) + b = 0$ (a und b gegebene Zahlen) genügen (Spezialfall: symmetrische Gleichungen), kann der Grad um die Hälfte durch die Substitution $y = (x - \mu_1)/(x - \mu_2)$ reduziert werden, wo μ_1 und μ_2 die Wurzeln der Gleichung $x^2 - 2ax + b = 0$ sind.

P. H.

LEMAN. Über die reziproken Gleichungen. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 551-554.

Behandelt neben dem Fall, daß alle Wurzeln gepaart sind (w u. $1/w$), den andern, daß neben gepaarten Wurzeln auch ungepaarte vorkommen. Lp.

F. GIUDICE. Un' applicazione delle formule di Girard. Periodico di Mat. **29** [(3) **11**], 93-94.

Mit Hülfe der genannten Formel wird eine Gleichung höheren Grades gebildet, deren Wurzeln nicht angebbar sind. Lp.

O. PERSIANI. Somme delle potenze simili delle radici delle equazioni di 2º grado dedotte dalla formula del binomio di Newton. Rom. Acc. P. d. N. L. Atti **64**, 66-72.

Verf. leitet Formeln für $x_1^m + x_2^m$, wobei $x_1\, x_2$ Wurzeln von $x^2 + px + p = 0$ sind, rekursiv aus dem binomischen Satz her. E. J.

C. E. WHITE. Approximate solution of the irreducible case of cubics. Tôhoku Math. J. **4**, 47-53.

Verf. gibt für die Wurzel der kubischen Gleichung $x^3 - 3Hx - Q = 0$ eine explizite Näherungsformel: $x = a\frac{Q}{H} + b\sqrt{H}$. Hierin sind a und b Zahlen, deren Werte der Verf. mitteilt. Es sind dies aber keine völligen Konstanten, vielmehr gibt der Verf. die Werte von a und b als Funktionen des Quotienten $\frac{|Q|}{H\sqrt{H}}$. E. J.

T. HAYASHI. The quartic equation whose roots are concyclic. Tôhoku Math. J. **3**, 38-39.

Verf. knüpft an seine Arbeit aus dem Jahre 1903 und an eine von Takagi aus dem gleichen Jahre an (F. d. M. **34**, 108, 1903). Es handelt sich um das in der Überschrift gegebene Problem, das Verf. bereits früher erschöpfend für den Fall erledigt hat, in dem die betreffende Gleichung nur reelle Koeffizienten besitzt. Verf. gibt jetzt für den Fall komplexer Koeffizienten, der bereits von Takagi erledigt worden ist, einen neuen Beweis. E. J.

G. Fontené. Equation aux rapports anharmoniques des racines d'une équation du quatrième degré. Nouv. Ann. (4) **13**, 458-461.

Verf. gibt einfachere Formen der Gleichungen an als in seinen früheren Arbeiten. (Vgl. F. d. M. **43**, 155, 1912). E. J.

R. P. Baker. The method of monodromy with applications to three parameter quartic equations. Annals of Math. (2) **14**, 119-136.

Die Monodromiegruppe einer biquadratischen Gleichung mit drei Parametern wird im einzelnen studiert. Unter anderem wird zu gegebener spezieller Gruppe die Gleichung bestimmt. E. J.

H. Anér. Induktionslösung litteraler Gleichungen. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. **8**, Nr. 18, 14 S.

Gleichungen der ersten vier Grade. Bedingung für die Induktionslösung der Gleichung fünften Grades.

G. Rados. Sur la théorie des racines de l'unité. Palermo Rend. **36**, 299-304.

Verf. beweist folgenden Satz: Damit die quadratische Gleichung $x^2 + w_1 x + w_2 = 0$, deren Koeffizienten reell sind, nur Einheitswurzeln als Lösungen hat, sind folgende Bedingungen notwendig und hinreichend: 1. $w_2 = 1$, 2. w_1 ist eine ganze algebraische Zahl mit lauter reellen Konjugierten, die sämtlich im Intervall von -2 bis $+2$ liegen. (Die einzige Ausnahme bildet die Gleichung $x^2 - 1 = 0$). Verf. benutzt ganz wesentlich einen Kroneckerschen Satz aus dem Jahre 1857 (Journ. für Math. **53**), der in ähnlicher Richtung liegt. E. J.

J. Schumacher. Die Auflösung der Gleichung $x^{257} - 1 = 0$. Arch. der Math. u. Physik (3) **20**, 295-311.

Verf. knüpft an eine Arbeit Cayleys aus dem Jahre 1851 an, die sich mit dem gleichen Gegenstande beschäftigt. Die Rechnung wird für dieses Kreisteilungsproblem mit Hülfe von Numerus- und Indextabellen durchgeführt und der Weg angegeben, auf dem man einen schon bei Cayley im Problem auftretenden Faktor berechnen kann, während Cayley diese Größe offenbar rein induktiv erhielt. Die Durchführung zeigt, daß sich bei Cayley einige Irrtümer finden. E. J.

F. Giudice. Sulle sezioni angolari. Suppl. al Period. **16**, 129-131.

„In dieser kurzen Note geben wir die Hauptformel für die Teilung des Argumentes der Kreisfunktionen. Die Wurzeln der Gleichung

$$(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^n - (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^n = 0$$

werden durch die Formel $x = \cos(2k\pi/n)$ gegeben, wo $k = 0, 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(n-1)$ für ungerades n und gleich $0, 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}n$ für gerades n ist." Lp.

T. Hayashi. Two theorems on complex numbers. Tôhoku Math. J. **4**, 68-70.

Verf. beweist auf einfachem Wege, daß die Gleichung

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x, a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & , a_{22}+x, \ldots & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \end{vmatrix},$$

in der a_{rs} und a_{sr} konjugiert komplexe Zahlen sind, nur reelle Wurzeln hat. Außer diesem bekannten Satz beweist Verf. noch auf algebraischem Wege eine Relation zwischen Produkten von Strecken, die durch Verbinden von vier Punkten entstehen. E. J.

F. G. W. Brown. Question 17316. Ed. Times (2) **23**, 69-71.

Lösung der Gleichungen:

$$xy + zw = a, xz + wy = b, yz + xw = c, x^2 + y^2 - w^2 - z^2 = d$$

von T. Stuart, C. W. Adams und dem Aufgabensteller, der darauf hinweist, daß sich diese Gleichungen bei einem von ihm in „The Mathematical Gazette" 1912 behandelten Problem über das Kreisviereck ergeben. Beispiel: $a = 71$, $b = 61$, $c = 59$, $d = 79$. Gd.

M. F. Naraniengar. A set of simultaneous equations. Indian Math. Soc. **5**, 61-62.

Der Verf. behandelt die Lösung des folgenden Systems von $2n$ Gleichungen mit den $2n$ Unbekannten $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1, \\ &x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = a_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &x_1 y_1^{2n-1} + x_2 y_2^{2n-1} + \cdots + x_n y_2^{2n-1} = a_{2n} \end{aligned}$$

mittels eines Eliminationsverfahrens. Ba.

M. von Pirani. Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. Berlin u. Leipzig: G. J. Göschen. 126 S. kl. 8⁰. (Sammlung Göschen Nr. 728.)

Der Verf. hat es in dankenswerter Weise unternommen, auf geringem Raume die wichtigsten zeichnerischen Methoden, die in der Technik als Rechenhülfsmittel angewandt werden, zusammenzustellen. Die Herstellung von Funktionsskalen, von Rechentafeln, Nomogrammen u. ä. wird in passender Weise auseinandergesetzt und, was das Wichtigste ist, an mannigfachen Beispielen aus der Praxis geübt. Das Büchlein wird sich als eine kurze und leicht lesbare

Einführung in den Gegenstand bald Freunde erwerben. Inhalt: I. Darstellung von Größen mit unbekanntem theoretischen Zusammenhang. II. Darstellung von Größen mit bekanntem theoretischen Zusammenhang. III. Rechentafeln. (Methode der fluchtrechten Punkte, Tafeln mit mehreren gekreuzten oder parallelen Geraden als Index.) Sk.

A. Lodge. A graphic solution of the equation $z^n - pz + q = 0$. Math. Gazette **7**, 41-45.

Statt die Wurzeln durch die Schnittpunkte von $y = z^n$ und $y = pz - q$ zeichnerisch zu finden, schlägt der Verf. vor, die durch die Parameterdarstellung $p = nz^{n-1}$, $q = (n-1)z^n$ gekennzeichnete Kurve:

$$\left(\frac{p}{n}\right)^n = \left(\frac{q}{n-1}\right)^n$$

zu zeichnen und vom Punkte (p, q) an diese Kurve die Tangenten zu legen. Die Richtungskoeffizienten dieser Tangenten sind die gesuchten Wurzeln.

Der Note sind Bemerkungen hinzugefügt, die C. G. Jackson dem Verf. über diese Auflösung gemacht hat. Das Verfahren sei in dualistischer Auffassung schon von M. d'Ocagne ausgebildet worden. Lp.

M. d'Ocagne. Sur la résolution graphique d'un système de trois équations linéaires. Ens. math. **15**, 308-310.

Auflösung durch Anbringung von gewöhnlichen Skalen auf 5 parallelen Geraden und Aufsuchung der in einer Geraden liegenden Punkte gleicher Koten auf dreien von ihnen. Hierbei sind nur 7 gerade Linien zu ziehen. Schr.

M. d'Ocagne. Sur l'application générale de la méthode des points alignés aux problèmes, qui se ramènent à des résolutions de triangles sphériques. C. R. **156**, 1593-1596.

Zur vollständigen Auflösung sphärischer Dreiecke eignet sich, wie d'Ocagne schon vor langer Zeit gezeigt hat, ein Nomogramm der Formel $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ (s. z. B. Traité de Nomographie S. 131). Will man dagegen aus drei gegebenen Stücken nur eins der drei anderen berechnen, so können die Formeln $\sin a \sin B = \sin b \sin A$ und $\cos a \cos B = \sin a \cot c - \sin B \cot C$ günstiger sein. Man wird also am besten mit allen drei Nomogrammen arbeiten. Das erste und das dritte sind nur nach der Methode der fluchtrechten Punkte konstruierbar. Schr.

F. Boulad Bey. Sur la disjonction des variables dans les équations représentables par des nomogrammes à points alignés. C. R. **156**, 865-868.

Ist die Gleichung $F_{123} = 0$ durch ein Nomogramm mit fluchtrechten Punkten darstellbar, so muß sie sich auf die Form

$$\begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix} = 0$$

bringen lassen. Zu den vom Verf. schon früher angegebenen Methoden für diese Umformung (F. d. M. **41**, 1910, 138; **42**, 1911, 124; **43**, 1912, 160) wird eine neue gefügt, die sich der „kritischen Werte" d'Ocagnes (s. etwa F. d. M. **38**, 1907, 128) bedient. Sie ist durch die große Anzahl der willkürlichen Parameter ausgezeichnet. Schr.

F. Boulad. Sur la représentation de l'équation d'ordre nomographique 4 à quatre variables par double alignement. S. M. F. Bull. **41**, 366-370.

Mit Hülfe des Begriffs der kritischen Werte hat Soreau in C. R. (F. d. M. **38**, 128, 1907) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Möglichkeit einer Reduktion der Gleichung $F_{1234} = 0$ auf die Form:

$$\frac{f_1 \cdot f_2 + \gamma_{34}}{\delta_1 \cdot f_1 + \delta_2 \cdot f_2 + \varrho} = \frac{\delta_3 \cdot f_3 + \delta_4 \cdot f_4 + \varrho}{\varrho\,(f_3 \cdot f_4 + \gamma_{12})}$$

gegeben. B. zeigt, daß diese Resultate sich auch aus seiner Methode der Trennung der Variabeln ergeben, falls er sie auf Gleichungen der Form: $F_{123} = F_1 . F_{23} + G_1 . G_{23} + H_1 . H_{23} = 0$ anwendet, eine Methode, die gleichfalls in der Betrachtung der kritischen Werte wurzelt. E. J.

F. Boulad. Extension de la notion des valeurs critiques aux équations à quatre variables d'ordre nomographique supérieur. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 295-299.

In einer früheren Abhandlung (F. d. M. **42**, 124, 1911) hat der Verf. eine Methode auseinandergesetzt, welche unter Anwendung des von d'Ocagne eingeführten Begriffes der kritischen Werte die Scheidung der drei Variablen einer Gleichung $F_{123} = 0$ zum Zwecke der Konstruktion eines Nomogramms mit einfacher Linienführung gestattet, für den Fall, daß sich die Gleichung in der Form

$$F_1 \cdot F_{23} + G_1 \cdot G_{23} + H_1 \cdot H_{23} = 0$$

darstellt. Hier wird die Methode verallgemeinert, um die Scheidung der 4 Variabeln einer Gleichung $F_{1234} = 0$ zum Zwecke der Konstruktion eines Nomogramms mit doppelter Linienführung zu ermöglichen, für den Fall, daß sich die Gleichung in einer der folgenden, in der Praxis häufig vorkommenden Formen

$$F_{1234} \equiv F_1 . F_{234} + G_1 . G_{234} + H_1 . H_{234} = 0,$$
$$F_{1234} \equiv F_4 . F_{123} + G_4 . G_{123} + H_4 . H_{123} = 0$$

darstellt. A. K.

Chr. Lenhardt. Graphische Darstellung realer und komplexer Lösungen von Gleichungen. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 116-122.

Die bekannte graphische Auflösung kubischer und biquadratischer Gleichungen mittels einer ein- für allemal gezeichneten Parabel und eines passend bestimmten Kreises, die ja schon von Descartes in seiner Geometrie gelehrt worden ist, wird, ohne dieses Umstandes zu erwähnen, zu der Lösung der auf die Gleichungen vom zweiten, dritten und vierten Grade beschränkten (nicht etwa, wie der Titel vermuten läßt, allgemeinen) Aufgabe benutzt. Lp.

W. Effenberger. Zur graphischen Lösung kubischer Gleichungen. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 479-482.

Nachdem die kubische Gleichung zuerst auf die Form $x^3 = k$ transformiert ist, wird die Kubikwurzel aus k durch ein mechanisches Verfahren konstruiert. Lp.

W. Peddie. A mechanism for the solution of an equation of the nth degree. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 399-402.

Mit Hülfe eines Systems von Rollen, über welche Schnüre zu einer festen Rolle und zu einer Anzahl weiterer auf einem geraden, in seiner Richtung veränderlichen Stabe befestigten Rollen laufen, kann man erreichen, daß ein an dem freien Ende des Systems hängendes Gewicht um die Länge $ax^n + bx^{n-1} + \cdots$ gehoben oder gesenkt wird, wenn $a, b, \ldots$ gegebene Längen sind und x eine Zahl vorstellt, welche allein von der Richtung des Stabes abhängig ist. So ergibt sich im Prinzip die Möglichkeit, dadurch, daß man durch eine geeignete Richtung des Stabes dem Gewicht an dem freien Ende des Systems wieder die Anfangslage gibt, die Lösung x der Gleichung $ax^n + bx^{n-1} + \cdots = 0$ zu bestimmen. Die in der kurzen Abhandlung vorgeschlagene Anordnung ist aus praktischen Gründen theoretisch ein wenig komplizierter, beruht aber im wesentlichen auf dem kurz soeben skizzierten Grundprinzip. A. K.

H. Kaiser. Tafeln zur Ermittlung der Verbesserung an geneigt gemessenen Entfernungen. Österr. Zeitschr. f. Vermessungswesen **11**, 169-178.

Kurze Erläuterung des Prinzips der Nomogramme nach der Methode der fluchtrechten Punkte. Nomogramme für die Beziehungen $d = s(1 - \cos\omega) = s\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{10000}}}\right)$ und $d = s - \sqrt{s^2 - h^2}$, worin s die gemessene Länge, d die Verbesserung, ω den Steigungswinkel, z die Steigung im Prozenten, h den Höhenunterschied bedeutet. Schr.

T. Łazowski. O zbieżnośei pewnych ciągów liczbowych. Über die Konvergenz gewisser Zahlenfolgen. Wektor. I. Jahrg. 5. Heft, S. 277-292. Warschau 1912.

Es wird die transzendente Gleichung betrachtet:

$$(1) \quad a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a^x}}}}}\Big\}\, n \equiv a^{(n)x} = x,$$

vo a reell und positiv ist. Die (einzige) Wurzel der Gleichung

$$(2) \quad a^x = x$$

st offenbar eine Wurzel von (1). Umgekehrt wird gezeigt, daß wenn

$$a \geqq e^{\frac{1}{e}}$$

st, daß dann die Gleichung (1) diese einzige Wurzel besitzt. Diese Wurzel ist leich der Grenze der beiden konvergenten Folgen

$$(3) \quad a, a^{a^a}, \ldots . a^{(2n+1)}, \ldots .$$

ınd

$$(4) \quad a^a, a^{a^{a^a}}, \ldots . a^{(2n)}, \ldots .$$

Ist aber

$$a < e^{\frac{1}{e}},$$

dann hat (1) für ungerade n ebenfalls eine einzige Wurzel. Die beiden Folgen (3) und (4) konvergieren dann gegen die beiden voneinander verschiedenen Zahlen x_1 und x_3, $x_1 < x_3$. Ist n gerade, dann sind x_1, x_3 zwei Wurzeln der Gleichung (1), und zwischen ihnen liegt die Wurzel x_2, die der Gleichung (2) genügt. A. R.

Weitere Literatur.

J. V. Collins. Advanced algebra. New York: American Book Co. X + 342 S. 8⁰.

J. I. Corral. Nuevos métodos para resolver ecuaciones numéricas. Madrid: Romo. XXII + 304 S. 8⁰ (1912).

U. Fazzini. Complementi d'algebra. 2ª edizione riveduta. Livorno: Giusti. 72 S. 16mo.

W. F. Fite. College algebra. Boston: Heath. VI + 283 S. 8⁰.

H. E. Hawkes. Higher algebra. Boston: Ginn. V + 222 S. 8⁰.

A. Macé de Lépinay. Compléments d'algèbre et notions de géométrie analytique. 6ᵉ édition. Paris: Vuibert. 486 S. 8⁰.

P. Michelson. Die bestimmten algebraischen Gleichungen des ersten bis vierten Grades. Nebst einem Anhang: Unbestimmte Gleichungen. Dritte Auflage. Hannover: C. Meyer. VIII + 306 S. 8⁰.

W. Wells and W. W. Hart. New high school algebra. Boston: Heath. 431 S. 12mo.

Papers set in the mathematical tripos, part I., in the University of Cambridge, 1908-1912. Camb. Univ. Press. 70 S. [Nature **92**, 195.]

A. A. Bennett. Note on the solution of linear algebraic equations in positive numbers. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 173.

K. Bes. Uit de theorie der algebraische vergelijkingen. Haarlem: Visser (1912).

J. Dougall. On the solubility of linear algebraic equations. Edinb. M. S. Notes 1912/13, 125-129, 137-139.

J. Dougall. Proof of the sufficiency of the determinant condition for the consistency of a system of n homogeneous linear equations in n variables. Edinb. M. S. Notes 1912/13, 139-140.

C. F. Gauss. Die vier Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Funktionen in reelle Faktoren 1. oder 2. Grades (1799-1849). Hrsg. v. E. Netto. 3. Aufl. Leipzig: W. Engelmann. 82 S. (Ostwalds Klassiker Nr. 14.) 8°.

A. Jeřábek. Eine Anwendung der Methode unbestimmter Koeffizienten auf Berechnung der Resolventen. Časopis **42**, 65-97. (Böhmisch.)

O. D. Kellogg. Conditions for a certain nomographic representation of a function of three variables. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 459.

K. Kommerell. Über die Gleichung vom vierten Grad. Unterrichtsbl. f. Math. **19**, 56-57.

V. Láska. Über Nomographie. Časopis **42**, 209-217. (Böhmisch.)

F. M. MacRobert. On the sufficiency of the condition for a limit. Edinb. M. S. Notes 1912/13, 141-142.

E. Marchand. Sur les théorèmes de Sylvester et la règle de Newton dans la théorie des équations algébriques à coefficients réels. (Thèse, Zurich.) Neuchatel: Wulfrath et Sperle. 75 S. 16mo.

T. E. Mason. The general solution of a class of infinite systems of equations in an infinite number of variables. Amer. Math. Monthly **20**, 157-160.

G. Pólya. Die reellen Wurzeln von Polynomen, die durch äquidistante Ordinaten bestimmt sind. Math. és termész. ést. **31**, 438-447. (Ungarisch.)

D. Riabouchinsky. La fonction $|X|$. Essai d'un calcul des valeurs absolues. Moscou: I. N. Kouchnéreff et Cie. 28 S. 4°.

H. Spencer. To show that the equation $\begin{vmatrix} x-a & f & e \\ f & x-b & d \\ e & f & x-c \end{vmatrix} = 0$ has three real roots. Edinb. M. S. Notes 1912/13, 133-134.

C. E. White. Theory of the irreducible cases of equations and its applications in algebra, geometry and trigonometry. Part II. Buckhannon, W. Va.: White. IV + 90 S. 8°.

B. Universale Algebra und Vektoranalysis.

R. Mehmke. Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung. In zwei Bänden. 1. Band: Punktrechnung. 1. Teilband. Leipzig: B. G. Teubner. VIII + 394 S. 8°.

Mit diesem Bande beginnt der Verf. die Veröffentlichung von Vorlesungen, die er seit 31 Jahren zur Einführung in die Vektorenrechnung gehalten hat. Während der erste Band der Punktrechnung gewidmet ist, soll der zweite die Vektorenrechnung behandeln. Insbesondere bringt der vorliegende erste Teilband das Rechnen mit Punkten, Geraden und Ebenen (erste Hälfte), und zwar der erste Abschnitt die Addition und Subtraktion von Punkten, Geraden und Ebenen sowie ihre Multiplikation mit Zahlen, der zweite Abschnitt die äußere Multiplikation von Punkten, Geraden und Ebenen. Dabei schließt sich der Verf. in der Begründung der Punktrechnung den Ideengängen Peanos an. Der zweite Teil des ersten Teilbandes ist für Anwendungen bestimmt. Auf S. 154-344 werden mit Hülfe der Punktrechnung die Grundzüge der projektiven Geometrie entwickelt. „Der Studierende kann aus diesem Teil der Vorlesung, der mehr als die Hälfte des ganzen Raumes einnimmt, die projektive Geometrie auf bequeme Weise in einem Umfang kennen lernen, der für weitgehende Bedürfnisse hinreicht, da nicht nur die projektiven Grundgebilde mit ihren Erzeugnissen von den Kegelschnitten an bis zu den tetraedralen Komplexen eingehend behandelt sind, sondern im letzten Abschnitt noch das Rechnen mit projektiven Umbildungen, insbesondere Kollineationen, mit Einschluß der Lehre von den Elementarteilern von Weierstraß dargestellt ist.“ Angehängt ist ferner eine große Zahl von Aufgaben und Sätzen zur Einübung der neuen Rechenweise.

Bemerkenswert erscheinen mir die Betrachtungen des Verf. in Nr. 72 über die Dyaden und das algebraische Produkt. Während man bisher gewöhnt war, als Dyade das algebraische Produkt zweier Vektoren zu bezeichnen, verallgemeinert der Verf. den Dyadenbegriff und setzt fest, daß die Elemente einer Dyade auch ungleichartig sein, z. B. aus einem Punkt und einer Ebene oder aus einem Punkt und einer Geraden bestehen können. Die nächste Nummer bringt sofort einige Anwendungen dieses „unbestimmten“ Produktes. Jhk.

C. Burali-Forti et R. Marcolongo. Analyse vectorielle générale. II. Applications à la mécanique et à la physique. Pavie: Mattei & Cie. XII + 143 S. 8°.

Dem ersten Bande „Transformations linéaires“ ihrer Sammlung „Analyse vectorielle générale“ (F. d. M. **43**, 163, 1912) lassen die Verfasser hier den zweiten folgen, der an einer Reihe von Anwendungen auf Fragen der Mechanik und Physik die Einfachheit des Vektorsystems und der Bezeichnungen darlegen soll, die sie in den „Elementi di calcolo vettoriale etc.“ entwickelt haben. Das erste Kapitel handelt von der Bewegung eines starren Körpers um einen Punkt, das zweite von der Statik und Kinematik der deformierbaren Körper, das dritte von den ebenen Wellen in isotropen oder kristallinischen Medien, das vierte von der Hydrodynamik, das fünfte von der Ausbreitung der Wärme in isotropen Körpern oder Kristallen und das letzte von der Elektrodynamik. Die Verfasser wollen, wie diese Überschriften schon besagen, kein Lehrbuch der Mechanik,

auch keines der mathematischen Physik, sondern dem Leser hinreichenden Stoff bieten, um sich mit den Vektormethoden vertraut zu machen. Jedem Kapitel ist eine Bibliographie angehängt, um dem Leser Gelegenheit zu geben, sich durch Vergleich von den Vorzügen der hier eingeschlagenen Methoden zu überzeugen. Ob allerdings der Zweck, den die Verfasser mit anerkennenswerter Ausdauer verfolgen, ihrer Bezeichnung in weiteren Kreisen Eingang zu verschaffen, erreicht werden dürfte, erscheint auch nach diesem zweiten Bande ihres Sammelwerkes zweifelhaft, obwohl er verschiedene hübsche geometrische und physikalische Anwendungen bringt. Jhk.

A. Macfarlane. On vector-analysis as generalized algebra. Proc. 5. Intern. Congr. **1**, 267-282.

In konsequenter Entwicklung rechtfertigt der Verf. seine Auffassung und Ausbildung der Vektoranalysis, von der er glaubt, man werde finden, daß die hier skizzierte Vektoralgebra die Methoden von Descartes, Graßmann und Hamilton vereinigt und die Grundlagen einer Analysis bildet, die in vollkommener logischer Harmonie mit der Algebra steht. Lp.

E. B. Wilson. Vector analysis. Textbook for the use of students of mathematics and physics. Founded upon the lectures of J. W. Gibbs. New Haven, Conn.: Yale University. XVIII + 436 S. 8°.

E. B. Wilson. The unification of vectorial notations. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 524-530.

Nach einem Hinweis auf die jüngsten Bestrebungen zur Vereinheitlichung der Bezeichnungen in der Vektoranalysis wendet sich der Verf. zu der von Langevin in der französischen Ausgabe der mathematischen Enzyklopädie gebrauchten Bezeichnung, der deshalb ein hohes Ansehen zugeschrieben werden müsse, weil durch sie die Vektoranalysis in die französische Literatur eingeführt sei. Damit sei die Entscheidung gegeben — ein eigentümlicher Gedankengang. Bei der Beschreibung der von Langewin gewählten Bezeichnung, deren „Annahme von reifster Überlegung“ begleitet gewesen sein muß, werden denn auch einige Bemerkungen gemacht, die von dem hochgepriesenen französischen Muster schüchtern entschuldigte Abweichungen befürworten. Lp.

C. Burali-Forti. Sopra alcuni operatori lineari vettoriali. Ven. Ist. Atti **72** [(8) **15**], 265-276.

A. Pensa. Sopra alcuni operatori differenziali omografici. Torino Atti **48**, 149-154.

Die Verfasser beschäftigen sich mit der Bestimmung gewisser Differentialoperatoren, die in der Theorie der Vektorhomographien von Burali-Forti und Marcolongo eine Rolle spielen. Jhk.

H. Taber. On the scalar functions of hypercomplex numbers. Second paper. Am. Acad. Proc. **48**, 627-667.

In einer früheren Arbeit (vgl. **36**, 141, 1905) hatte der Verf. gezeigt, daß in einem System hyperkomplexer Zahlen $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ zwei Skalarfunktionen existieren, der erste und der zweite Skalar der Zahl $A = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_m e_m$ dieses Systems, die sich als Verallgemeinerungen der Skalarfunktion einer Quaternion auffassen lassen. In der vorliegenden Abhandlung benutzt der Verf. diese Funktionen, um ein einfaches Kennzeichen für die Existenz eines „invarianten" Untersystems zu $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ zu gewinnen von der Eigenschaft, daß $B^p = 0$ ist für jede positive ganze Zahl $p > 1$, wenn B eine Zahl dieses Untersystems bedeutet. Ein invariantes Untersystem $(B_1, B_2, \ldots, B_p)$ besitzt diese Eigenschaft, wenn sie seinen Einheiten von selber zukommt; und in diesem Falle spricht man von einem „maximalen invarianten" Untersystem, wenn es jedes invariante Untersystem zu $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ enthält. Der Verfasser entwickelt eine Methode, um dieses „maximale invariante" Untersystem, falls ein solches existiert, zu bestimmen. Jhk.

S. A. Toscano. L'algoritmo delle potenze e il binomio di Newton nel calcolo vettoriale. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 145-155.

In einer vorangehenden Note hat der Verf. auf die formale Rechnung der Vektoren den algebraischen Ausdruck ausgedehnt, der das Quadrat eines Polynoms gibt. Jetzt setzt er das Prinzip eines Algorithmus auseinander, der zwar, wie bewiesen wird, einige der elementaren Potenzsätze bestätigt, nicht aber die Newtonsche Binomialformel; das Verfahren führt vielmehr zu dem Schluß, daß eine solche Formel nur für Zahlenbinome gilt. Lp.

E. Cunningham. The theory of functions of a real vector. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 133-155.

Der Verf. will eine Theorie der Funktionen eines reellen Vektors entwickeln. Er legt Wert auf die Erkenntnis, daß an die Stelle des Differentialquotienten einer Funktion eines Skalars die beiden Differentialoperatoren, die Divergenz und der Rotor eines Vektors, treten, sowie daß die Sätze von Gauß, Green und Stokes eine Bedeutung unabhängig von jedem Koordinatensystem haben müssen. Um die Literatur kümmert sich der Verf. nicht, und so weiß er denn auch nicht, daß sich z. B. eine, von jeder Beziehung auf ein Koordinatensystem freie, Definition des Gradienten, der Divergenz und des Rotors bereits bei F. Jung und in dem Buch v. Ignatowsky, Die Vektoranalysis I, Leipzig 1909, B. G. Teubner, vorfindet. Jhk.

M. Bottasso. Omografie vettoriali del piano. Palermo Rend. **35**, 1-46.

Gegenstand der Arbeit bilden die Beziehungen und die Eigenschaften der Homographien von Vektoren, die einer und derselben Ebene parallel laufen, und ihr Zusammenhang mit den analytischen Funktionen eines Punktes dieser Ebene. Leider benutzt der Verf. die Bezeichnung von Burali-Forti und

Marcolongo, die jedem, der nicht gewillt ist, sich in diese Bezeichnung hineinzuarbeiten, das Studium dieser immerhin einfachen Dinge überflüssigerweise erschwert. Jhk.

H. Rothe. Die Reduktion von Stabsummen (Kräftesystemen) und die Klassifikation der linearen Strahlenkomplexe in Gebieten von beliebig hoher Stufenzahl. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **20**, 210-231.

Seit Graßmann weiß man, daß sich eine Komplexgröße $[A_1 B_1] + [A_2 B_2] + \cdots$ zweiter Stufe in einem Hauptgebiete vierter Stufe, wo $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$ Punkte und $[A_1 B_1], [A_2 B_2], \ldots$ Stäbe oder gebundene Vektoren bedeuten, im allgemeinen auf zwei Stäbe zurückführen läßt. Der Verf. stellt sich die entsprechende Aufgabe für die Komplexgröße zweiter Stufe in einem Hauptgebiete ν-ter Stufe und findet als Ergebnis, daß hier diese Komplexgröße im allgemeinen als Summe von $[\frac{\nu}{2}]$ Stäben dargestellt werden kann, wenn $[\frac{\nu}{2}]$ die größte ganze Zahl ist, die nicht größer als $\frac{\nu}{2}$ ist. Da jeder Stab $[AB]$ als Kraft, die auf einen starren Körper wirkt, gedeutet werden kann, ergibt sich hiermit auch die Reduktion von Kraftsystemen ebenso wie die Klassifikation der linearen Strahlenkomplexe in Räumen von beliebig vielen Dimensionen. Jhk.

G. Silván. Aplicaciones del calculo vectorial. Rev. Soc. Mat. Esp. **2**, 117-122.

Jeder Punkt des R_3 läßt sich in bekannter Weise durch vier Punkte oder durch einen Punkt und drei Vektoren darstellen. Jhk.

Weitere Literatur.

C. Burali-Forti. Questioni sulle forme geometriche di Graßmann-Peano. Il Pitagora **20**, 15-17.

B. Cabrera. Principios fundamentales de análisis vectorial en el espacio de tres dimensiones y en el universo de Minkowski. Madrid Rev. Real Ac. **11**, 326-344, 398-419, 490-509, 604-619, 670-685, 775-784, 874-887, 959-974.

M. Dominguez Hervella. Geometría analítica, incluyendo las tendencias o direcciones de las cantidades. Madrid Rev. Real Ac. **11**, 785-803, 888-910.

S. Catania. Prodotto vettoriale e prodotto scalare con applicazioni. Il Pitagora **19**, 99-105, 113-120.

S. Catania. Sui vettori. Il Pitagora **20**, 9-15.

N. J. Lennes. Finite sets and the foundations of arithmetic. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 393.

A. R. Schweitzer. The theory of linear vectors in Graßmann's extensive algebra. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 71-72.

J. B. Shaw. Integral invariants of general vector analysis. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 295.

J. B. Shaw. On non-linear algebras. Ebenda 296.

J. B. Shaw. Formal determination of Clifford algebras. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 450.

J. B. Shaw. On the transverse of a linear vector operator of n dimensions. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 75.

H. M. Sheffer. A set of six independent postulates for Boolean algebras. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 76.

L. Silberstein. Second memoir on quaternionic relativity. Phil. Mag. (6) **25**, 135-144 (F. d. M. **43**, 786, 1912).

K. Tamaki On a four-dimensional vector treatment of the electric field in a moving body. Kyôto Mem. Coll. Sc. **3**, 141-153.

H. S. Vandiver. Symmetric functions formed by certain systems of elements of a finite algebra, and their connection with Fermat's quotient and Bernoulli's numbers. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**.

J. W. Young. A new formulation for general algebra. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 514-515.

Kapitel 2.

Theorie der Formen (Invariantentheorie).

A. Theorie der algebraischen Formen.

R. Weitzenböck. Beweis des ersten Fundamentalsatzes der symbolischen Methode. Wien. Ber. **122**, 153-168.

R. Weitzenböck. Beweis des zweiten Fundamentalsatzes der symbolischen Methode. Wien. Ber. **122**, 379-416.

Der „erste“ Satz besagt, daß sich jede ganze rationale Invariante J (der allgemeinen projektiven Gruppe) eines Systems gegebener Grundformen symbolisch darstellen läßt mit Hülfe der Symbole, die zur Darstellung der Grundformen selbst verwendet werden. Clebsch bewies den Satz 1861 für symbolisch dargestellte Grundformen, die außer kogredienten Variabelnreihen (von „Punktkoordinaten“) $x, y, \dots$ nur noch zu ihnen kontragrediente $u', v', \dots$ enthalten. Jede J läßt sich dann symbolisch darstellen mit Hülfe von Faktoren der drei Typen (ab'), $(abc\dots m)$, $(a'b'c'\dots m')$, wo die $a, b, c, \dots$ und $a', b', c', \dots$ gewöhnliche Symbolreihen sind, die den Punktkoordinaten x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) und den kontragredienten Koordinaten u'_i von linearen R_{n-2} kogredient sind, wobei die letzteren stets gestrichelt werden. Dabei ist $(ab') = \sum a_i b'_i$ ein Faktor erster Art oder Linearfaktor, $(ab\dots m)$ ist, wie $(a'b'\dots m')$, die bezügliche n-reihige Determinante und heißt Faktor zweiter Art oder Klammerfaktor. Im n-ären Gebiet ($n > 3$) gibt es aber außer den x_i und u'_i noch die Koordinaten von linearen Zwischenräumen R_i und die allgemeineren der linearen R_i-Komplexe ($1 \leq i \leq n-3$). Für solche Koordinatenreihen wurde der obige Satz mittels symbolischer Darstellung durch Matrizenprodukte von Emmy Noether be-

wiesen (F. d. M. **41**, 149, 1910). Man kann aber die Koordinaten der R_i und R_i-Komplexe selbst symbolisch darstellen, wenn man mit dem Verf. außer den obigen gewöhnlichen Symbolen noch „Komplexsymbole" benutzt (F. d. M. **39**, 714, 1908). Es kann daraufhin der „erste" Satz auch im R_{n-1} in seiner bisherigen Fassung ausgesprochen werden, sobald man noch den Begriff der Determinanten so zu „orientierten" erweitert, daß auch Komplexsymbole als Elemente vorkommen können.

Eine Form ist ganz und homogen in jeder Koordinatenreihe ($i, k = 1, \ldots, n$)

$$x, y, \ldots; \pi_{ik}, \varrho_{ikl}, \ldots, u_i' \ldots$$

Man setzt dann in eindeutiger Darstellung:

$$(1)\quad F = F_x \ldots F_{\pi_{ik}} \ldots F_{u'} \ldots$$

Die Koeffizienten dieser Faktorformen sind gewöhnliche Symbole, deren Produkt den entsprechenden Koeffizienten von F gibt. Die symbolische Zerlegung (1) ist die „erste" mit F vorgenommene. Für jede der Faktorformen in (1) wird eine spezifische symbolische Darstellung eingeführt. Ist z. B. F_x vom Grade r_x in den x_i, so setzt man $F_x = (a'\,x)^{r_x}$, wo die a_i' gewöhnliche, r_x-fältige Symbole sind.

Verfährt man entsprechend mit den weiteren Faktorformen in (1), so gelangt man zur „zweiten" symbolischen Zerlegung (2) von F. Hierin werden die π_{ik}, $\varrho_{ikl}, \ldots$ nebst ihren Koeffizientensymbolen weiter in Komplexsymbole $\pi, \varrho, \ldots$ zerlegt, womit sich die „dritte" und letzte symbolische Zerlegung von F ergibt, die den Typus aufweist:

$$(3)\quad F = (a'\,x)^{r_x} \ldots (\alpha'\pi)^2 \ldots (\beta'\varrho)^3 \ldots (m'\sigma)^{n-1} \ldots$$

Bei Funktionen G, die in den Koeffizienten von F von höherem als erstem Grade sind, hat man in bekannter Weise noch äquivalente Symbole einzuführen.

Wird jetzt die Form F vermöge einer eigentlichen linearen Transformation S der x in $\overline{F}$ übergeführt, so wird gezeigt, wie sich die Symbole $\overline{a}_r, \overline{\alpha}, \ldots, \overline{m}, \ldots$ von $\overline{F}$ einfach darstellen lassen. Bei diesen Symboltransformationen gehen gewöhnliche Symbole und Komplexsymbole wieder in solche von gleicher Fältigkeit über.

Nunmehr wird bewiesen, daß sich jede ganze rationale Invariante J eines Formensystems symbolisch schreiben läßt. Analog zu dem früheren Prozesse bei einer Form F wird hierbei J einer ersten, zweiten und dritten symbolischen Zerlegung unterworfen.

Auf beide Seiten der Invariantendefinitionsgleichung $\overline{J} = \varepsilon^\varrho J$ wird dann ein Ω-Prozeß ϱ-mal ausgeübt. Daraufhin läßt sich der erste Fundamentalsatz der symbolischen Methode in Anlehnung an den seit Hilbert's Vorgange [F. d. M. **22**, 142, 1890] bekannten Gedankengang beweisen. Die Umkehrung des Satzes folgt aus der Invarianteneigenschaft der drei Faktorentypen (ab'), $(abc \ldots m)$, $(a'b'c' \ldots m')$.

In der zweiten Abhandlung handelt es sich um den Beweis des „zweiten" Fundamentalsatzes der symbolischen Methode (vgl. Study, F. d. M. **21**, 111, 1889]. Alle Invarianten werden in ihrer symbolischen Darstellung gegeben angenommen.

Eine „trivial-identische" Umformung von J ist eine solche, bei der nur

einfachste arithmetische Operationen, sowie insbesondere Vertauschung äquivalenter Symbole und Übergang von gestrichelten Symbolen zu ungestrichelten in Komplexsymbolen in Betracht kommen. Nimmt man derartige Umformungen in beiden Seiten einer gewöhnlichen Identität vor, so erzeugt sie eine „triviale Identität".

Dagegen heißt eine „Identität" $J \equiv 0$ schlechthin eine solche, wenn J symbolisch dargestellt ist, und einmal beim Übergange zur nichtsymbolischen Darstellung identisch verschwindet, andererseits aber nicht identisch verschwindet, wenn man für verschiedene symbolische Faktoren in J verschiedene unabhängige Veränderliche setzt.

Aus Determinantenumformungen entspringen fünf „Nullidentitäten", die noch verschiedenartiger Gestalten fähig sind. Entsteht J' aus J durch Anwendung von Nullidentitäten, so heißt es: „J' entsteht aus J durch identische Umformung".

Der zweite Fundamentalsatz läßt zwei verschiedene Fassungen zu, deren Übereinstimmung hinterher nachgewiesen wird:

(A) „Eine irreduzible Identität $J \equiv 0$ läßt sich verifizieren durch trivialidentische und identische Umformungen, ohne daß man zur nichtsymbolischen Darstellung von J zurückgeht".

(B) „Die Identität $J \equiv 0$ läßt sich durch trivial-identische Umformungen auf die Gestalt bringen:

$$J = \Phi_1 \Pi_1 + \cdots + \Phi_\varrho \Pi_\varrho,$$

wo die Π Nullidentitäten sind."

Zur Vorbereitung des Beweises des zweiten Hauptsatzes dienen folgende Prozesse.

Aus der linken Seite J von $J \equiv 0$ wird durch identische und trivialidentische Umformungen ein Ausdruck J_0 hergestellt, der Komplexsymbole auf eine besondere Weise enthält, so daß, wenn in einem Gliede von J_0 ein Komplexsymbol p ungestrichelt oder gestrichelt vorkommt, dies für alle Glieder von J_0 zutrifft.

Durch trivial-identische Umformung geht J_0 in eine gewisse Invariante M über, und diese wieder in M_1, wo

$$M_1 = M - \sum A_i \Pi_i.$$

Führt man alsdann die in den Komplexsymbolen enthaltenen Elemente als neue willkürliche Größenreihen ein, so gelangt man schließlich zu einer Identität $M' \equiv 0$ zwischen Invarianten von n-ären Linearformen.

Nunmehr läßt sich zeigen, daß, wenn der zweite Fundamentalsatz für M' richtig ist, er auch für J gilt.

Somit ist der Satz nur noch zu beweisen für eine Identität $M' \equiv 0$ zwischen Invarianten von n-ären Linearformen. Hier greifen aber die früheren Untersuchungen von Pascal ein [F. d. M. **20**, 114, 1888].

Der Verf. zieht es jedoch vor, den Pascalschen Beweis mit verschiedenen, das Verständnis erleichternden Abänderungen in extenso zu entwickeln. Auf die beiden grundlegenden Abhandlungen des Verfassers sei besonders hingewiesen; die Beweise lassen sich wohl noch mehr zusammenziehen. My.

R. Weitzenböck. Über Bewegungsinvarianten. I.—IV. Mitteilung. Wien. Ber. **122**, 1241-1258, 1565-1606.

Es handelt sich um die Anwendung der Symbolik auf elementargeometrische Untersuchungen. Die Hauptaufgabe bestand darin, die beiden ersten Fundamentalsätze der symbolischen Methode für den Fall der Bewegungsinvarianten nachzuweisen; aus dem ersteren ergibt sich dann insbesondere die Endlichkeit der Systeme von Bewegungsinvarianten.

In einem Gebiete n^{ter} Stufe R_{n-1} seien $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ kartesische rechtwinklige Koordinaten (mit dem Ursprung O) eines eigentlichen Punktes P, so setze man $\xi_i = X_i/X_n$, dann sind die X homogene rechtwinklige Koordinaten von P. Der uneigentliche R_{n-2} wird durch $X_n \equiv (l' X) = 0$ dargestellt.

Neben den X hat man die Koordinaten Π_{ik} von Geraden, Π_{ikl} von Ebenen usw., schließlich die Koordinaten U_i' von linearen R_{n-2}. Statt der $\Pi_{ik}, \Pi_{ikl}, \ldots$ kann man auch die allgemeineren Koordinaten von linearen R_{n-3}, $R_{n-4}, \ldots$-Komplexen nehmen.

Unter einer „Grundform" f ist eine ganzrationale Funktion der $X_i, \Pi_{ik}, \Pi_{ikl}, \ldots, U_i'$ zu verstehen, die in jeder der Koordinatenreihen homogen ist. Von solchen Grundformen liege ein System $f^{(r)} (r = 1, 2, \ldots, m)$ vor.

Eine „Invariante J der $f^{(r)}$ in bezug auf eine Kollineationsgruppe S" ist eine (nichtkonstante) ganzrationale allseitig homogene Funktion der Koeffizienten in den $f^{(r)}$, die nach Ausführung einer Operation T von S nur mit einem, lediglich von den Transformationskoeffizienten abhängenden Faktor φ behaftet erscheint. Ist $\varphi = 1$ für jede T von S, so heißt J absolut, sonst relativ.

Die Koeffizienten und Variabeln sind als gewöhnliche komplexe Größen gedacht.

Insbesondere wird nunmehr von einer gemischten, $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2)$-gliedrigen Gruppe Γ ausgegangen, deren T sich zusammensetzen aus den Drehungen um O und den Spiegelungen an den Koordinaten-Achsen, -Ebenen usw. Die Invarianten gegenüber Γ heißen „Drehungsinvarianten".

Man bezeichne mit $a, b, c, \ldots, p, q, \ldots$ die gestrichelten oder ungestrichelten Größen- und Symbolreihen innerhalb der Grundformen $f^{(r)}$; l' bedeute die Größenreihe $0 : 0 : \ldots 0 : 1$, so daß $(l' a) = a_n$.

Dann hat der Verf. vorher in den Wiener Denkschriften **89**, 709-732 „Über Drehungsinvarianten" (uns nicht zugegangen) den „ersten Fundamentalsatz" bewiesen: „Jede Drehungsinvariante der $f^{(r)}$ ist darstellbar durch die Faktoren (ab), (al'), $(ab \ldots pl')$."

Dieser Satz läßt sich aber wesentlich vereinfachen, wenn man die $f^{(r)}$ symbolisch derart darstellt, daß nur gestrichelte Größen- oder Symbolreihen $a', b', c', \ldots, p', q', \ldots$ zur Verwendung kommen. Dann gilt der Satz:

(I) „Jede Drehungsinvariante der $f^{(r)}$ ist darstellbar durch die Faktoren $(a' b')$, $(a' l')$, $(a' b' \ldots p' l')$.

Es wird sodann eine n-gliedrige Gruppe von Kollineationen betrachtet, die sich aus den Translationen und den perspektiven Ähnlichkeitstransformationen zusammensetzen. Mittels dieser Gruppe steigt man auf zu der $\frac{1}{2}(n^2 - n)$-gliedrigen gemischten Gruppe der Bewegungen und Umlegungen, andererseits durch Hinzunahme der Ähnlichkeitstransformationen zu der $\frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$-gliedrigen „Hauptgruppe" des R_{n-1}; die bezüglichen (ganzrationalen) Invarianten heißen „Bewegungsinvarianten B.-I." und „Hauptinvarianten H.-I.".

Zunächst erweist sich eine B.-I. oder H.-I. von Grundformen f_i als darstellbar einerseits durch die Faktoren (ab), (al'), $(ab \ldots pl')$, andererseits durch die Faktoren $(a'b')$, $(a' l')$, $(a' b' \ldots p' l')$.

Da weiter der Faktor (a'/b') eine H.-I. ist, so ist jedes realisierbare Produkt

von Faktoren (a'/b'), $(a' b' \dots p' l')$ und $(a' b' \dots p' q')$ eine B.-I. oder H.-I., und umgekehrt. Die Umkehrung wird erst für $v \leqq n$ Linearformen bewiesen und dann gezeigt, daß sie auch für $r > n$ Linearformen gilt.

Dann ergibt sich, daß die Invarianten eines vollständigen Systems von B.-I. (H.-I.) der Grundformen f_i so wählbar sind, daß sie Produkte von Faktoren (a'/b'), $(a' b' \dots p' l')$, $(a' b' \dots p' q')$ werden. Zieht man zuletzt den „ersten" Fundamentalsatz der symbolischen Methode für projektive Invarianten heran, so gelangt man in der Tat zur Endlichkeit eines vollständigen Invariantensystems von B.-I. und H.-I.

In der zweiten Mitteilung wird die im Eingange geforderte spezielle symbolische Darstellung der Grundformen f_i näher erläutert.

Enthält eine Grundform keine R_{n-2}-Koordinaten U'_i, so kommt man mit der üblichen Symbolik aus. Ist $f^{(1)}$ eine Grundform mit Punktkoordinaten X_i vom Grade α, so erscheint in $f^{(1)}$ der Ausdruck $(a' X)^{\alpha}$. Enthält sie außerdem Koordinaten von linearen Komplexen, so kommen symbolische Faktoren vom Typus $(b' \Pi)^d$ vor. Enthält die Grundform aber die U'_i vom Grade p, so tritt ein Faktor $(\alpha U')^p$ auf.

Hier werden nun p neue Symbolreihen eingeführt, indem man die p-te Potenz von $(\alpha U')$ durch p verschiedene, vertauschbare Linearfaktoren ersetzt und bei jedem solchen Faktor $(\alpha_{(i)} U')$ zu $(n-1)$-fältigen, gestrichelten Komplexsymbolen $\alpha'_{(i)}$ übergeht, so daß man die $(n-1)^{\text{te}}$ Potenz eines neuen Linearfaktors erhält.

Liegt nun bloß eine einzelne lineare Grundform $f^{(1)} = (a U')$ vor, so wird deren vollständiges System von B.-I. (H.-I.) gebildet durch $(l' a) = a_n$.

Das System für zwei Linearformen besteht aus drei Invarianten. Geometrisch führt das zu dem Satze, daß zwei Punkte mit der Entfernung r bezüglich der Gruppe der Bewegungen und Umlegungen sowie der Hauptgruppe nur eine Invariante $I = r^2$ besitzen, die im ersteren Falle absolut, im letzteren relativ ist.

In der dritten Mitteilung wird bei der gewählten symbolischen Darstellung der Grundformen, bei der nur gestrichelte (kontragrediente) Größenreihen vorkommen, der dem zweiten Fundamentalsatze der projektiv-symbolischen Methode entsprechende Satz entwickelt (vgl. das vorstehende Referat). Dieser Satz besagt hier, daß sich jede Identität zwischen B.-I. (H.-I.) verifizieren läßt nur durch trivialidentische und identische Umformungen, wobei die letzteren durch drei Nullidentitäten repräsentiert sind.

Es wird wiederum zuerst gezeigt, daß der Satz allgemein richtig ist, wenn er für Linearformen gilt, dann wird der spezifische Beweis für letztere geführt.

Im Falle des ternären Gebietes kann man auch ungestrichelte (den Punktkoordinaten entsprechende) Symbol- und Größenreihen zulassen, wodurch der zweite Hauptsatz eine modifizierte Fassung erhält.

In der vierten Mitteilung wird als Beispiel ein kleinstes vollständiges System von B.-I. (H.-I.) eines Kegelschnitts aufgestellt.

Man erhält eine Tabelle von 22 Invarianten, der zur Vergleichung Tabellen mit Systemen von projektiven Invarianten, von affinen und von Drehungsinvarianten gegenübergestellt werden.

Ist $f = (a' X)^2$ die ternäre quadratische Form, so bilde man aus f, $\varphi^{(1)} = (x U')$, $\varphi^{(2)} = (u' X)$ ein System Σ. Ein vollständiges Formensystem von f deckt sich dann mit einem vollständigen Invariantensystem von Σ. My.

R. Weitzenböck. Die Invarianten der affinen Gruppe. Deutsche Math.-Ver. **22**, 192-209.

Exakte Formeln für n Dimensionen. B.

L. E. Dickson. Proof of the finiteness of modular covariants. Amer. Math. Soc. Trans. **14**, 299-310; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 456.

Seien die f_i ($i = 1, 2, \ldots, l$) ein System von Grundformen in den m Variabeln x_k mit mod. p (p Primzahl) zu nehmenden ganzzahligen Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots$ und T eine lineare Substitution der x mit ganzzahligen Koeffizienten t_{rs} mod. p, die f_i in f'_i und die c in die c' überführt. Ferner sei $K(x/c)$ eine ganzrationale Funktion mit ganzzahligen Koeffizienten mod. p. Dann heißt K gegenüber der Gruppe G aller T eine Modularkovariante vom Index μ, wenn

(1) $K'(x'/c') = |t_{ik}|^\mu K(x/c)$ mod. p;

identisch in den x und c erfüllt ist.

Allgemeiner seien die c_i, t_{ik} und die Koeffizienten der Kovarianten K Galoissche Imaginäre:

$$r_0 + r_1 \varrho + \cdots + r_{n-1} \varrho^{n-1} \; (r_i = 0, 1, \ldots, p-1),$$

wo ϱ die Wurzel einer bestimmten mod. p irreduzibeln Kongruenz n-ten Grades sei.

Diese p^n Galoisschen Imaginären bilden einen Körper (oder ein Feld), das Galoissche Feld $GF[p^n]$ der Ordnung p^n.

Dann lautet der Endlichkeitssatz:

(I) „Die Reihe aller Modularkovarianten eines Systems von Grundformen in m Variabeln ist eine endliche, so daß sie sich als ganzrationale Funktionen mit Koeffizienten im Basisfelde einer endlichen Anzahl unter ihnen darstellen lassen.“

Der Beweis wird zunächst für den Fall binärer Grundformen ($m = 2$) geführt. Die zweireihige Determinante $L = \begin{vmatrix} x^{p^{kn}} & y^{p^{kn}} \\ x & y \end{vmatrix}$ ist eine Invariante vom Index 1 gegenüber G, und die Form

$$Q = \frac{x^{p^{2n}} y - x y^{p^{2n}}}{L} = x^P + \cdots \; (P = p^{2n} - p^n)$$

ist eine absolute Kovariante.

Es ist zu verlangen, daß, unter Π ein Produktzeichen verstanden,

(2) $L = g \Pi \, (x - ay)$,

wo a das Basisfeld durchläuft. Eine Kovariante K der Ordnung Ω eines Systems Σ von binären Formen heißt regulär oder irregulär, je nachdem ihr Leitglied von Null verschieden ist oder nicht. Im letzteren Falle besitzt sie den Faktor y, also auch den Faktor L.

Die Anzahl der Leitglieder S der regulären Kovarianten ist, wie leicht ersichtlich, eine endliche. Ist ω eine gegebene ganze Zahl und $\Omega \equiv \omega$ mod. P, so bilden alle regulären Kovarianten mit gegebenem Leitglied S und von Ordnungen Ω „die Reihe $[S, \omega]$“. Die Anzahl f dieser Reihen ist wiederum endlich. Sei $k = Sx^\omega + \cdots$ eine Kovariante der Reihe $[S, \omega]$ mit einer kleinsten Ordnung ω. Weitere Kovarianten der Reihe sind dann dargestellt durch $K = Sx^{\omega + tP} + \cdots$ (t ganzzahlig $\geqq 0$). Mithin besitzt die Kovariante $K - k\, Q^t$ den

Faktor y, ist also irregulär. Daher ist jede reguläre Kovariante von dem Typus

$$\varphi(k_1, \ldots, k_f, Q) + I,$$

wo φ eine Form mit ganzen Koeffizienten in Q bedeutet und I eine irreguläre Kovariante. An Stelle von I läßt sich wieder L einführen, und damit ist bewiesen, daß jede Kovariante des Systems Σ durch die $f+2$ Formen $k_1, \ldots, k_f, Q, L$ ganzrational darstellbar ist.

Es wird zu den ternären Formen übergegangen. An die Stelle von L treten jetzt drei analoge Bildungen L_3, L_3', L_3''. Zur Gruppe G gehören dann die universalen Kovarianten L_3, $Q_{31} = \frac{L_3'}{L_3}$, $Q_{32} = \frac{L_3''}{L_3}$. Es ist $Q_{32} = x_1^P + \cdots$, $Q_{31} = L^E + x_3()$, $P = p^{3n} - p^{2n}$, $E = p^{2n} - p^n$; $L = y_1^{p^n} x_2 - x_1 x_2^{p^n}$ (wie bei $n=2$).

Eine Kovariante K eines Systems Σ ternärer Formen f_i heißt irregulär oder regulär, je nachdem sie durch x_3 teilbar ist oder nicht; eine irreguläre K besitzt daher den Faktor L_3. Mit k werde die Summe der Glieder in einer regulären Kovariante K bezeichnet, die x_3 nicht enthalten. Übt man eine Transformation der x_1, x_2 aus, so erkennt man, daß, wenn k den Faktor x_2 besitzt, so auch den Faktor L, so daß

$$k = L^A \left(S x_1^B + S_1 x_1^{B-1} x_2 + \ldots\right)$$

wird. S heißt das Leitglied von K. Ist $A \equiv a$ mod. E, $B \equiv b$ mod. P, so bezeichne $[S, a, b]$ die Reihe aller regulären Kovarianten $K = SL^A x_1^B + \cdots$ mit gegebenen S, a, b. Aus dieser Reihe läßt sich eine endliche Anzahl von $K_i = SL^{A_i} x_1^{B_i} + \cdots$ absondern, wo $A_i \leqq A$, $B_i \leqq B$.

Sind l, m ganzzahlig $\geqq 0$, so erhält jedes K die Gestalt:

$$K = SL^{A_i + lE} x_1^{B_i + mP} + \cdots,$$

und damit auch $K = K_i Q_{31}^l Q_{32}^m + K'$, wo K' entweder irregulär ist oder regulär mit einem Exponenten $B' < B$. In letzterem Falle setze man das Verfahren fort.

Dann ist, bis auf eine irreguläre Kovariante, K ganzrational darstellbar durch eine endliche Anzahl von K_i, sowie Q_{31} und Q_{32}.

An Stelle von I läßt sich aber wieder L_3 einführen, womit die Endlichkeit bewiesen ist.

In analoger, nur entsprechend komplizierterer Weise wird der Beweis allgemein für m-äre Grundformen geführt. My.

M. Sanderson. Formal modular invariants with application to binary modular covariants. Amer. Math. Soc. Trans. 14, 489-500.

Seien in m Variabeln x die $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ ein System von Grundformen mit unbestimmten Koeffizienten $a_1, \ldots, a_r$. Vermöge einer Substitution T mit ganzzahligen Koeffizienten mögen die $a_1, \ldots, a_r$ übergehen in die $b_1, \ldots, b_r$.

Ist $F(a)$ eine Form der a mit ganzzahligen Koeffizienten, so bilde man die Differenz $D(a) = F(b) - F(a)$.

Nach dem Vorgange von Hurwitz (F. d. M. **34**, 223, 1903) für eine binäre Grundform f ist, wenn p eine Primzahl ist, $F(a)$ mod. p eine „Invariante“

der f_i gegenüber T, wenn identisch in den a die Kongruenz $D(a) \equiv 0$ mod. p erfüllt ist.

Allgemeiner mögen die Koeffizienten von T einem Galoisschen Felde $GF[p^n]$ angehören. Eine Form $F(a)$ des Feldes ist eine „formale" Invariante der f_i gegenüber T, wenn $D(a)$ im Felde identisch verschwindet. Sind F_0, $F_1, \ldots$ solche formalen Invarianten und ist j die dem Felde zugrunde liegende n-te Kongruenzwurzel, so ist auch $F_0 + F_1 j + F_2 j^2 + \cdots$ eine formale Invariante.

Durchaus verschieden von diesen Invarianten sind die von Dickson eingeführten „modularen". Die Koeffizienten a der Formen f_i sind jetzt unbestimmte Elemente des Feldes. Die Form $F(a)$, mit Feldkoeffizienten, ist eine modulare Invariante gegenüber einer Gruppe G von T, wenn $D(a)$ im Felde verschwindet.

Im folgenden wird die Beziehung zwischen den beiderlei Invarianten genauer untersucht. Der Hauptsatz sagt, daß jeder modularen Invariante i im Felde GF eine formale Invariante I derart korrespondiert, daß $I = i$ ist für alle Wertreihen im Felde der Koeffizienten der f_i.

Wie in der algebraischen Theorie lassen sich dann Kovarianten eines binären Systems $f_i(x, y)$ als Invarianten konstruieren, wenn man das System um eine Linearform erweitert. Dabei können aus gewissen Invarianten zwei oder mehr unabhängige Kovarianten entstehen.

Der Beweis des Hauptsatzes beruht auf einem dem Felde GF angepaßten Multiplikationssatze für gewisse Determinanten.

Des weiteren bedarf man des Begriffes der Klassen. Zwei Systeme S', S'' von Formen f_i gehören zu derselben „Klasse" C_i, wenn sie gegenüber der Gruppe G äquivalent sind.

Gehört S' zu den f'_i, und ist k eine Konstante, so bildet das System kf'_i das „Vielfache kS' von S'". Eine vollständige Reihe von Klassen C_{ik} läßt sich leicht aufstellen.

Eine Invariante i_{kl} heißt „charakteristisch", wenn sie für Systeme der Klasse C_{ik} den Wert Eins besitzt, dagegen für Systeme der übrigen Klassen verschwindet. Dann lassen sich alle Invarianten eines Systems S durch charakteristische ausdrücken.

Zum Beweise des Hauptsatzes genügt es, formale Invarianten I_{kl} zu konstruieren, die sich für Werte der Koeffizienten im Felde GF auf die charakteristischen Invarianten i_{kl} reduzieren.

Als Anwendung dient die Konstruktion binärer Kovarianten, und zwar im besonderen einer binären quadratischen Form f im Felde $GF[p^n]$ $(p > 2)$. Es werden zuerst die Seminvarianten von f aufgestellt und aus ihnen die Kovarianten abgeleitet. Alle Seminvarianten lassen sich durch vier unter ihnen, die eine „Fundamentalreihe" bilden, ausdrücken. My.

B. J. Miller. The derivation of a syzygy between the hessian and jacobian of a binary n-ic. Johns Hopkins Univ. Circ. 1913, Nr. 7, 56-58.

Bei einer f_3 und f_4 existiert nach Cayley eine Syzygie zwischen den irreduzibeln Konkomitanten.

Eine analoge Syzygie läßt sich aufstellen für eine $f_n = a_y^n = b_y^n = \cdots$, die in der kanonischen Form eines elliptischen Differentiales:

$$\frac{x_1\, d\, x_2 - x_2\, dx_1}{\sqrt{a_x^3\, a_y^{n-3}\,(y_1 x_2 - y_2 x_1)}}$$

vorkommt.

Der Radikand q ist eine f_4 in x; deren Invarianten g_2, g_3 sind vom Grade $2(n-2)$ und $3(n-2)$ in y.

Andererseits besitzt eine f_n in ihrer Hesseschen Form eine Kovariante vom Grade $2(n-2)$ und in ihrer Jacobischen Form eine Kovariante vom Grade $3(n-2)$. In der Tat läßt sich zeigen, daß diese den obigen g_2, g_3 korrespondieren.

Es werden g_2 und g_3 für die Form q berechnet. Ist die Hessesche Form $H = (f, f)^2$ von f bestimmt durch $H = (ab)^2\, a_y^{n-2}\, b_y^{n-2}$, so ergibt sich $g_2 = -\frac{3}{8}H$. Ist weiter (f, H) die Jacobische Form Q von f, so wird $g_3 = -\frac{1}{16}\, Q$.

Außer den Formen H und Q braucht man noch die Kovarianten $i = (f, f)^4$, $\varepsilon = (f, f)^6$ sowie eine weitere j. Hier ist Q^2 reduzibel. Indem noch $(f, H)^2$ und $(H, H)^2$ reduziert werden, ergibt sich für $\varDelta = \frac{g_2^3}{g_3^2}, I = \frac{H^3}{\varDelta}$ die gesuchte Syzygie in der Form:

(I) $I : I - 1 : 1 = 6\, H^3 : -12\, Q^2 : f^2\ (3iH - 2jf)$.

Bei gegebenem I stellt (I) eine Gleichung vom Grade $6(n-2)$ in I dar. Die hierzu gehörige Riemannsche Fläche vom Geschlecht Null wird hinsichtlich ihrer Verzweigungspunkte näher diskutiert. My.

H. T. H. Piaggio. Some non-primary perpetuant syzygies of the second kind. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 377-392.

In einer früheren Arbeit (F. d. M. **41**, 155, 1910) zeigte der Verf., daß Syzygien der n-ten Art zwischen Typen von Perpetuanten existieren, sobald der Grad $> n + 1$ wird. War der Grad überdies $< 2n + 2$, so konnten alle diese „primären" Syzygien erhalten werden durch symbolische Multiplikation der einzigen Syzygie vom Grade $2n + 2$ mit perpetuanten Produkten. Außer diesen Syzygien gibt es „nicht-primäre", die sicher für den Grad $2n + 2$ existieren. Im Falle der ersten „Art" $(n = 1)$ ist $2n + 2 = 4$; das sind die bekannten, von Stroh aufgestellten Syzygien [F. d. M. **22**, 142, 1890]. Der Verf. beschäftigt sich hier mit dem Falle der zweiten Art, wo $2n + 2 = 6$; die Syzygien zeigen dann drei verschiedene Typen. Alle Syzygien der zweiten Art lassen sich dann linear durch jene drei Typen und gewisse besondere primäre ausdrücken.

Um aus den irreduzibeln Syzygien der ersten Art durch Zusammensetzung Syzygien der zweiten Art abzuleiten, hätte man zuvor die ersteren in eine kanonische Form zu bringen, so daß durch eine gewisse Anzahl von ihnen die übrigen linear darstellbar sind. Bei der praktischen Ausführung hingegen empfiehlt es sich, mit den unkanonischen Formen zu operieren und erst hinterher die kanonischen einzuführen.

Es werden darauf zunächst die Syzygien zweiter Art von Graden < 6 aufgestellt. Für die Grade < 4 existiert keine, für den Grad 4 eine einzige, während

für den Grad 5 alle durch die erzeugende Funktion $\frac{4x + 10x^2}{1 - x}$ geliefert werden; aus ihnen lassen sich die irreduzibeln ausscheiden.

Was jetzt den Grad 6 anbelangt, so lassen sich wieder erzeugende Funktionen für linear unabhängige Syzygien konstruieren. Von der Gesamtanzahl der zusammengesetzten Syzygien von gegebenem Gradgewicht ziehe man ab die Zahl der linear unabhängigen, so erhält man die Anzahl der linear unabhängigen Relationen, d. i. der Syzygien zweiter Art.

Darauf werden die primären Syzygien gebildet durch symbolische Multiplikation der einzigen Syzygie vom Grade $n + 2$ mit perpetuanten Produkten. Von nichtprimären Syzygien lassen sich drei verschiedene Typen aufstellen. So entsteht der erste Typus aus zwei Syzygien A, B der ersten Art, wenn a, b die entsprechenden Summen perpetuanter Produkte bedeuten, durch die Bildung $bA - aB$.

Alle weiteren zusammengesetzten Syzygien lassen sich mittels der Syzygien der zweiten Art auflösen, oder, mit andern Worten, alle linear unabhängigen Syzygien zweiter Art vom Grade 6 sind durch die drei obigen Typen erschöpft. Zum Beweise werden die für alle erhaltenen Formen aufgestellten erzeugenden Funktionen durch Addition zu einer einzigen zusammengezogen, und diese läßt sich so umformen, daß der Nenner $(1 - x)^2$ ist, während der Zähler bis zum elften Grade in x aufsteigt.

Trotz des umständlichen Rechenapparates ist das Endergebnis ein sehr einfaches: man hat nur zwei primäre und drei nichtprimäre Syzygien. My.

E. K. Wakeford. A canonical form of the binary sextic. Messenger (2) **43**, 25-28.

„Die natürliche kanonische Form für die binäre Sextik würde $x^6 + y^6 + z^6 + 30x\, x^2 y^2 z^2$ sein, wo x, y, z lineare Formen sind, welche eine Identität $lx + my + nz = 0$ befriedigen; dem Anschein nach ist die allgemeine binäre Sextik vordem nicht auf diese Form gebracht worden (vgl. Elliott, Theory of quantics § 224). Das Ziel der Arbeit, bei dessen Abfassung ich von P. W. Wood unterstützt wurde, ist der Beweis der Möglichkeit einer solchen Reduktion der allgemeinen Sextik und die Bestimmung der Anzahl (8) von Arten, wie die Reduktion möglich ist.“ Die obige Form scheint sich zur Bildung von Invarianten und Kovarianten nicht zu eignen. Lp.

A. Hurwitz. Über die Trägheitsformen eines algebraischen Moduls. Annali di Mat. (3) **20**, 113-151.

Im Anschluß an zwei Arbeiten von Mertens (F. d. M. **18**, 105, 1886; **30**, 158, 1899) über die Resultante werden „Trägheitsformen“ untersucht, das sind Formen, die für einen algebraischen Modul in gewisser Weise charakteristisch sind.

Es seien die x_i n unabhängige Variabeln, die $\alpha_i (\geqq 0)$ ganzzahlig, so heißt $\mu = \sum \alpha_i$ der Grad des Potenzproduktes $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$.

Die k Potenzprodukte μ^{ten} Grades seien in irgendeiner Reihenfolge $X_\mu^{(1)}$,

$X_\mu^{(2)}, \ldots, X_\mu^{(k)}$. Neben den x_i treten noch weitere, von ihnen und voneinander unabhängige Veränderliche oder „Unbestimmte“ u_r auf.

Die ganzen rationalen Funktionen G der a_i — deren Koeffizienten einem bestimmten Rationalitätsbereich angehören — bilden einen „Bereich B“ und bilden dessen „Elemente“.

Eine „Form“ F ist eine homogene ganzrationale Funktion der x_i, deren Koeffizienten Elemente von B sind.

Ist F vom Grade μ, so ist:

(1) $F = C_1 X_\mu^{(1)} + C_2 X_\mu^{(2)} + \cdots + C_k X_\mu^{(k)} = \sum C X_\mu$,

wo die C Elemente von B sind.

Sind die $v_1, \ldots, v_r$ irgendwelche der x_i und u_r, so ist F auch darstellbar als ganzrationale Funktion der v:

(2) $F = \sum K_{\varrho_1 \ldots \varrho_r} v_1^{\varrho_1} \ldots v_r^{\varrho_r}$.

Betrachtet man in F zwei Glieder, die durch einen und zwei Akzente unterschieden werden, so heißt nach Gauß das erstere Glied „höher“ oder „niedriger“ als das letztere, je nachdem die erste nicht verschwindende der Differenzen $\varrho_s' - \varrho_s''$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$ positiv oder negativ ist. Für zwei Formen F und F_1 vom Typus (2) gilt der Gaußsche Satz, daß das höchste Glied von $F . F_1$ das Produkt der höchsten Glieder von F und F_1 ist. Zugleich gilt: Ist die Summe von mehreren Formen $F, F_1, \ldots, F_k$ identisch Null, so ist auch die Summe der höchsten unter den höchsten Gliedern dieser Formen identisch Null.

Sind F und f_k $(k = 1, \ldots, r)$ Formen, so bedeutet die Kongruenz

(3) $F \equiv 0 \ (\{f_k\})$,

daß sich F in die Gestalt setzen läßt:

(4) $F = \sum A_k f_k$,

wo die A wieder Formen sind. Bei gegebenen f_k bildet die Gesamtheit der Formen F (3) den „Modul“ $M = (\{f_k\})$.

Eine Form T heißt „Trägheitsform“ des Moduls M, wenn dieser und der um T erweiterte Modul $M' = (\{f_k\}, T)$ in allen Formen, deren Grade eine gewisse Grenze übersteigen, übereinstimmen. Das Kriterium dafür, daß T eine Trägheitsform des Moduls M ist, lautet, daß eine Zahl μ, die „Stufe“ von T, existiert, so daß für jedes Potenzprodukt X_μ die Kongruenz $X_\mu \ T \equiv 0(M)$ erfüllt ist. Die T nullter Stufe, das sind die Formen des Moduls selbst, heißen „uneigentliche“ Trägheitsformen. Nach Hilbert (F. d. M. 22, 133, 1890) lassen sich alle T in der Form

$$T = \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{A}_i T_i$$

darstellen, unter den T_i geeignet gewählte Trägheitsformen verstanden. Soll T eigentlich sein, so dürfen die Grade der $\mathfrak{A}$, und damit der von T, eine gewisse Grenze nicht überschreiten.

Es sei nun T eine eigentliche Form von der Stufe $\mu \geqq r \geqq 0$. Dann sind alle $X_r . T$ Trägheitsformen von einer Stufe $\leqq \mu - r$ und mindestens eine von der Stufe $\mu - r$. Für $\mu - r = 1$ ergibt sich daher, daß, wenn ein Modul M überhaupt eigentliche Trägheitsformen besitzt, so auch eine solche von der ersten Stufe.

Ein Modul ohne eigentliche Trägheitsformen heißt „abgeschlossen“.

Im zweiten Abschnitt werden aus „allgemeinen“ Formen $f_i \, (i = 1, \ldots, r)$

gebildete Moduln untersucht. Dabei heißt eine Form allgemein, wenn ihre Koeffizienten zu den Unbestimmten (des Bereiches B) gehören. Sei m_i der Grad von f_i, a_{ik} der Koeffizient von $x_k^{m_i}$ und es werde $f_i = a_{ik}\, x_k^{m_i} - f_{ik}$ gesetzt.

Die Form T kann, bei festem k, als eine ganzrationale Funktion der $a_{1k}, \ldots a_{rk}$ betrachtet werden. Ersetzt man hier a_{ik} durch $\frac{f_{ik}}{x_k^{m_i}}$, so geht T in eine Form $[T]_k$ über.

Die Form T ist dann und nur dann Trägheitsform des Moduls $M = (f_i)$, wenn für irgendeinen Index k die Form $[T]_k$ identisch verschwindet.

Hieraus folgt, daß das Produkt TT' zweier Formen dann und nur dann Trägheitsform eines Moduls ist, wenn dies wenigstens von einem der Faktoren gilt.

Unter den weiteren Sätzen erwähnen wir noch:

Sind die $f_i (i = 1, \ldots, n)$ allgemeine Formen der x_i mit den positiven Gradzahlen m_i, so ist jede Trägheitsform erster Stufe des Moduls $M = (f_i)$ vom Grade $\varrho = \sum m_i - n$. Ist allgemeiner T eine eigentliche Trägheitsform σ^{ter} Stufe und ϱ^{ten} Grades, so gilt die Relation $\varrho + \sigma = \sum m_i - n + 1$.

Im dritten Abschnitt werden im besonderen die Trägheitsformen eines aus n allgemeinen Formen f_i der x_i gebildeten Moduls M weiter untersucht. Zunächst ergibt sich, daß die Funktionaldeterminante I der f_i eine Trägheitsform erster Stufe von M ist. Allgemeiner läßt sich jede Trägheitsform T erster Stufe von M aus I ableiten, d. h. es ist:

$$T = AI + \sum A_i f_i,$$

wo A und die A_i passend gewählte Formen sind.

In bezug auf die Abhängigkeit der Trägheitsformen von den Koeffizienten c_{ik} der f_i gilt zuvörderst, daß jede eigentliche Trägheitsform von $M(f_i)$ in jedem c_{ik} mindestens vom ersten Grade ist.

Ferner sei σ eine positive ganze Zahl, so daß $1 \leqq \sigma \leqq m_1$, dann gibt es $s = \frac{(\sigma + n - 2)!}{(\sigma - 1)!\ (n-1)!}$ Trägheitsformen σ^{ter} Stufe T_k von M, die in den c_{ik} linear sind, derart, daß der linear aus den T_k und f_i zusammengesetzte Ausdruck:

$$T = \sum A'_k\, T_k + \sum A_i\, f_i,$$

wo die A'_k Formen nullten Grades, die A_i irgendwelche Formen sind, nur dann verschwinden kann, wenn alle A'_k verschwinden. Jede Trägheitsform σ^{ter} Stufe von M läßt sich in der obigen Form darstellen.

Von besonderem Interesse sind unter den Trägheitsformen von M die von Mertens eingehend behandelten vom Grade Null, die also von den Variabeln x nicht abhängen.

Ist $p = m_1\, m_2 \ldots m_n$ und $p_i = \frac{m}{m_i}$, so gibt es eine ganze ganzzahlige Funktion R der c_{ik}, die in den Koeffizienten von f_i homogen vom Grade p_i und Trägheitsform von M ist. R heißt die Resultante der f_i. Jede Trägheitsform vom Grade Null ist durch R teilbar, so daß durch $T = AR$ diese Trägheitsformen allgemein angegeben werden.

Die Beweise hierfür werden vom Verf. im Anschluß an die obigen Sätze leicht erbracht.

My.

F. HOČEVAR. Über den Zusammenhang zwischen den irreduziblen Teilern einer Form und einem linearen System ihrer Nullstellen. Deutsche Math.-Ver. **22**, 350-356.

In früheren Arbeiten (F. d. M. **35**, 133, 1904; **38**, 162, 1907) hat der Verf. gezeigt, wie sich die linearen und quadratischen Teiler einer Form $F(x_1, x_2)$ mit Hülfe gewisser Nullstellen von F berechnen lassen.

Dies deutet darauf hin, daß auch bei Formen mit mehr als zwei Variabeln zwischen den — im Rationalitätsbereiche $1, i$ — irreduzibeln Teilern und einer passend gewählten endlichen Anzahl von Nullstellen ein ähnlicher Zusammenhang besteht.

Sei $F(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ eine Form p^{ten} Grades, wo $n > 2$, $p > 1$. Man verbinde die Gleichung $F = 0$ mit den Gleichungen $x_i = a_i + \lambda b_i$, d. h. geometrisch, man schneide das Gebilde F mit einer Geraden g. Man erhält durch Elimination der x_i die „Schnittpunktegleichung": $F(a_i + \lambda b_i) = 0$, deren Wurzeln mit λ_k $(k = 1, \ldots, p)$ bezeichnet seien. Jedem dieser p Werte entspricht eine Nullstelle (Punkt) (λ_k) von F_i; sie heißen ein „lineares System von Nullstellen" der Form F. Diese Nullstellen sollen „einfache" sein, d. h. von einander verschieden. Dies würde nicht zutreffen, wenn F mehrfache Teiler besitzt: in diesem Falle wird $F = u_1^{a_1} \ldots u_r^{a_r}$ ersetzt durch die „Reduzierte": $f = u_1 u_2 \ldots u_r$, die sich ergibt, wenn man F mit dem gr. gem. Teiler von F und $\frac{\partial F}{\partial X_i}$ dividiert. Hierbei muß x_i in allen Teilern von F vorkommen, was sich durch eine lineare Substitution stets erreichen läßt. Man kann weiter die Gerade g stets so wählen, daß die Schnittpunktegleichung $f(a_i + \lambda b_i) = 0$ nur einfache Wurzeln besitzt. Insbesondere nehme man $x_1 = \lambda, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$, so daß die Schnittpunktegleichung wird:

$$f(\lambda, a_2, a_3, \ldots, a_n) = 0.$$

Alsdann kann man aber schließen, daß die gegebene Form aus lauter einfachen Faktoren besteht.

Entspricht also einer Form ein lineares System einfacher Nullstellen, so besteht sie aus lauter einfachen Faktoren. War nun der Teiler u_i von f vom Grade ν_i, so entsprechen ihm genau ν_i Nullstellen λ.

Es kommt nun darauf an, den Teiler zu berechnen, der einer Nullstelle entspricht. Dies geschieht mit Hülfe der Polaren von f. Entspricht z. B. der Nullstelle (λ_i) ein linearer Teiler, so ist u_i direkt die Polare von f in bezug auf den Pol (λ_i).

Mittels der ersten und zweiten Polaren lassen sich die quadratischen Teiler von f bestimmen, usf. My.

M. FUJIWARA. Über die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen. Tôhoku Sc. Rep. **2**, 55-62.

Eine mit Binomialkoeffizienten geschriebene binäre Form n-ter Ordnung $f = f(x, y) = a_0 x^n + \cdots + a_n y^n$ läßt sich nach Sylvester im allgemeinen als eine Summe von m n-ten Potenzen darstellen, wo $m = \frac{n}{2} + 1$ oder $\frac{n+1}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Dies ändert sich aber, wenn der Rationali-

tätsbereich der Koeffizienten der ursprünglichen und transformierten Form beschränkt wird.

Es wird der Satz nachgewiesen, daß jede Form f mit rationalen Koeffizienten a_i als eine Summe von n, aber nicht immer einer geringeren Anzahl von n-ten Potenzen mit rationalen Koeffizienten darstellbar ist.

Es wird zunächst gezeigt, daß sich bei rationalen a_i die rationalen Zahlen λ_i, α_i so bestimmen lassen, daß die Identität besteht:

$$\text{(I)} \qquad f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x + \alpha_i y)^n,$$

sodann, daß sich die Anzahl n solcher Potenzen im allgemeinen nicht erniedrigen läßt.

Durch Koeffizientenvergleichung in (I) ergibt sich sofort

$$\text{(1)} \qquad a_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^k \quad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

und die Elimination der λ_i liefert eine verschwindende Determinante. Sondert man hier das Differenzenprodukt D der α_i ab und bezeichnet die elementarsymmetrischen Verbindungen der α_i mit σ_r $(r = 1, \ldots, n)$, so erhält man die bekannte Bedingung:

$$\text{(2)} \qquad a_0 \sigma_n - a_1 \sigma_{n-1} + a_2 \sigma_{n-2} - + \cdots + (-1)^n a_n = 0,$$

oder auch, nach α_n geordnet:

$$\text{(2')} \qquad \begin{aligned} &\alpha_n (a_0 \tau_{n-1} - a_1 \tau_{n-2} + - \cdots) \\ &- (a_1 \tau_{n-1} - a_2 \tau_{n-2} + - \cdots) = 0, \end{aligned}$$

wo die τ die elementarsymmetrischen Verbindungen der $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ bedeuten.

Sind also die $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ rational, so auch a_n und wegen (1) die λ_i, womit die Darstellbarkeit von f als Summe von n n-ten Potenzen mit rationalen Koeffizienten bewiesen ist.

Soll umgekehrt gezeigt werden, daß die Anzahl n der Potenzsummen im allgemeinen nicht herabgedrückt werden kann, so kommt das auf den Nachweis hinaus, daß das Gleichungssystem:

$$\text{(3)} \qquad a_i = \lambda_1 \alpha_1^i + \lambda_2 \alpha_2^i + \cdots + \lambda_{n-1} \alpha_{n-1}^i \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

bei vorgegebenen rationalen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nicht immer die rationalen Lösungen λ_i, α_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ hat. Nach Elimination der λ gelangt man zu der quadratischen Gleichung

$$\text{(4)} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

(unter den b gewisse Hülfsgrößen verstanden), der α_i genügen müßte. Man kann aber die a so wählen, daß (4) keine rationalen Wurzeln besitzen kann.

My.

L. Autonne. Sur les matrices hypohermitiennes et les unitaires. C. R. **156**, 858-860.

Man vergleiche zwei frühere Arbeiten des Verf. (F. d. M. 33, 133, 1902; **34**, 127, 1903). Sei $A = (a_{ik})$ eine n-äre Matrix, $A' = (a_{ki})$ ihre Transponierte, $\bar{A} = (\bar{a}_{ik})$ ihre Konjugierte. A heißt eine „hypohermitesche" Matrix, wenn 1) $A' = A$ und 2) die reelle Form $\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, \bar{x}_k$ niemals negativ wird. Andererseits heißt A unitär, wenn $A\bar{A}' = E_n$, wo E_n eine n-äre Einheit bedeutet.

Im ersteren Falle sind die charakteristischen Wurzeln reell und nicht negativ, im letzteren haben sie den Modul Eins. In beiden Fällen ist die Matrix kanonisierbar.

Ist jetzt B eine beliebige Matrix, so existiert stets eine eindeutig bestimmte kanonische hypohermitesche Matrix F und ein Paar (L, M) von zwei Unitären, so daß $A = LFM$. Ist (L, M) ein solches Paar, so ergeben sich alle andern derselben Art durch $(LT, T^{-1}M)$, wo T irgendeine mit F vertauschbare Unitäre ist (Satz I). Dieser Satz gilt auch bei Beschränkung auf das Reelle: L, M, T sind dann orthogonal (Satz I′).

Ferner sei A eine komplexe orthogonale Matrix. Sind dann Φ und Ψ zwei gewisse reelle Matrizen, so bilde man $A = \Phi + i\Psi$. Dann existieren wieder Paare (U, V) von reellen, orthogonalen Matrizen U, V, so daß $A = UAV$ (Satz II).

Hiervon wird eine Anwendung gemacht.

In Erweiterung der bekannten quaternären „Lorentz-Transformation L" der Relativitätstheorie verstehe man unter einer L im n-ären Gebiet eine lineare reelle Substitution der x_i, die zur absoluten Invariante den Ausdruck $X = \Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k$ besitzt, wo die Matrix $|\, a_{ik}\,|$ reell und umkehrbar ist.

Führt man dann eine gewisse zweite Lorentz-Transformation F ein, so gibt es stets ein Paar (L', M') von trivialen Lorentz-Transformationen, so daß $L = L'\, F'\, M'$.

Endlich wird noch ein analoger Satz für Unitäre aufgestellt. Ist A eine solche und F die kanonische Unitäre $|\, x_r, x_r\, e^{i\alpha_r}\,|$, so existieren wiederum Paare reeller, orthogonaler Matrizen U, V, so daß $A = UFV$.

So interessant diese Sätze an sich sind, so ist doch aus den Darlegungen des Verfassers nicht zu ersehen, wozu die Sätze weiterhin dienen können. My.

W. Burnside. On groups of linear substitutions of finite order which possess quadratic invariants. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 89-93.

Bekanntlich besitzt eine Gruppe $\Gamma = G_m$ endlicher Ordnung m linearer Substitutionen S von n Variabeln x_i mit reellen Koeffizienten mindestens eine quadratische Invariante. Denn geht $\sigma = \Sigma_i\, x_i^2$ vermöge einer S über in σ_s, so ist die definite quadratische Form $\Sigma_s\, \sigma_s$ eine solche Invariante.

Der Verf. beweist die Umkehrung:

(I) „Eine $\Gamma = G_m$, für die eine quadratische Form (mit nicht verschwindender Determinante) eine Invariante ist, läßt sich in eine Gruppe reeller S transformieren."

Zunächst überzeugt man sich, daß für eine Gruppe unendlicher Ordnung der Satz (I) im allgemeinen nicht mehr zutrifft.

Bedeutet $\overline{\Gamma}$ die zu Γ konjugierte Gruppe, so existiert nach Loewy (F. d. M. 27, 87, 1896) eine definite Hermitesche Form $H = \Sigma a_{ij} x_i \overline{x}_j$, die invariant bleibt, wenn die x irgendeiner S von Γ unterliegen und die $\overline{x}$ der korrespondierenden Substitution $\overline{S}$ von $\overline{\Gamma}$.

Der Satz (I) wird bewiesen vermöge der simultanen Reduktion einer definiten Hermiteschen Form und einer beliebigen quadratischen Form, wenn die Determinanten beider von Null verschieden sind.

Zunächst wird der Hülfssatz bewiesen: „Ist $\Sigma a_{ik} x_i \overline{x}_k$ eine definite Hermitesche Form mit nicht verschwindender Determinante, so lassen die n Gleichungen

$$\sum_k a_{ik} x_k + \lambda \overline{x}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

stets eine Lösung zu.

Es besitze jetzt eine endliche Gruppe von S in den x_i eine quadratische Invariante f. Für eine solche Gruppe und ihre Konjugierte existiert eine invariante definite Hermitesche Form $\varphi = \Sigma a_{ik} x_i \overline{x}_k$. Hierbei kann man sich bereits f auf die kanonische Form Σx_i^2 gebracht denken. Mit Hülfe einer geeigneten Substitution C der Variabeln und der Konjugierten $\overline{C}$ wird man zu einem Gleichungssystem geführt, auf das der obige Hülfssatz anwendbar ist, das also lösbar ist.

Daraus folgt, daß C so wählbar ist, daß f und φ die einfachen Gestalten annehmen: $f = \Sigma x_i^2$, $\varphi = \Sigma \beta_i x_i \overline{x}_i$, wo die β reell und positiv sind. Und hieraus wieder läßt sich folgern, daß in der Tat die vorgelegte Gruppe reelle Koeffizienten besitzen muß.

Es wird dann noch der weitere Satz abgeleitet, daß für die in Rede stehende Gruppe auch die charakteristischen Wurzeln aller ihrer Substitutionen reell sein müssen, und umgekehrt. My.

G. Rabinovitch. Les invariants dans la théorie des homographies vectorielles. Palermo Rend. **36**, 99-110.

Der Hauptzweck der Arbeit ist die Aufstellung vollständiger Systeme von In- und Kovarianten für die vektoriellen Homographien.

Von Hamilton rührt eine grundlegende Vektorenidentität dritter Ordnung her:

$$(1) \qquad \alpha^3 - I_1 \alpha \cdot \alpha^2 + I_2 \alpha \cdot \alpha - I_3 \alpha = 0.$$

Hier bedeuten $I_1 \alpha, I_2 \alpha, I_3 \alpha$ drei Invarianten, die sich durch drei gewisse Identitäten definieren lassen, in denen drei willkürliche Vektoren u, v, w auftreten. Ersetzt man u in der ersten der drei Identitäten durch $\alpha^2 u$ und in der zweiten durch $-\alpha u$ und addiert alsdann, so ergibt sich infolge der Willkür der u, v, w die Hamiltonsche Identität (1).

Es wird sodann der Begriff „kongruenter“ Systeme von Vektoren eingeführt. Zwei solche Systeme (x_i) und (y_i) heißen kongruent, wenn eine (vektorielle) Isomerie σ existiert, so daß $y_i = \sigma x_i$ für alle i ist. Das Kriterium hierfür besteht in dem Erfülltsein aller Bedingungen $x_i \times x_k = y_i \times y_k$.

Ähnlich heißen zwei Homographien α, β kongruent, wenn eine Isomerie σ derart existiert, daß $\sigma\alpha = \beta\sigma$ ist.

Kann man jeder Homographie α eine reelle Zahl $A\alpha$ derart zuordnen, daß kongruenten Homographien dieselbe Zahl entspricht, so heißt $A\alpha$ eine „Invariante" von α. Ein System von Invarianten $A_1, \ldots, A_n$ heißt „vollständig", wenn die Gleichheiten $A_i\alpha = A_i\beta$ die Kongruenz der Homographien α, β nach sich ziehen.

Es lassen sich sofort drei Invarianten $I_1\alpha, I_2\alpha, I_3\alpha$ aufstellen. Sie sind lineare alternierende skalare Ausdrücke (in drei willkürlichen Vektoren u, v, w) bei Ausübung der Addition, der Multiplikation und der Operation α.

Es läßt sich nun umgekehrt nachweisen, daß jeder nicht verschwindende Ausdruck der angegebenen Art eine Invariante der Homographie α ist.

Man kann sich dabei auf solche Isomerien („Rotationen") σ beschränken, die der Bedingung $I_3\sigma = 1$ genügen.

Die alternierenden Ausdrücke liefern aber nicht nur Zahlen, sondern auch Vektoren. Diese ergeben die „Kovarianten" der Homographie α: sie sind charakterisiert durch dieselbe Isomerie wie die Änderung von α.

Außer den drei obigen Invarianten findet man noch drei weitere von dem Typus: $I_4\alpha = a^2$, $I_5\alpha = axa_1$, $I_6\alpha = a_1^2$. Diese sechs Invarianten bilden dann ein vollständiges System.

Eine weitere Invariante a_2^2 ist eine Wurzel einer quadratischen Gleichung, deren Koeffizienten sich in den sechs I rational ausdrücken.

Die zweite Wurzel ist eine Invariante b_2^2.

Die sechs Invarianten I besitzen dieselben Werte für die konjugierte Homographie. Es ist dann entweder eine Homographie kongruent ihrer Konjugierten oder nicht; jeder der beiden Fälle läßt sich durch Invariantenkriterien festlegen. Im ersten Falle fallen a_2^2 und b_2^2 zusammen und lassen sich durch die sechs I rational ausdrücken, im zweiten Falle sind a_2^2 und b_2^2 verschieden, lassen sich nicht rational durch die sechs I darstellen, sind aber Wurzeln einer quadratischen Gleichung von dem obigen Charakter.

Am Schlusse wird noch ein Beispiel für Invarianten und Kovarianten eines Systems von mehreren Homographien $\alpha, \beta, \ldots$ angegeben. My.

K. Rohn. Invariantentheoretisches zum erweiterten Schließungsproblem des Poncelet. Leipzig. Ber. **65**, 185-194.

Man vergleiche die beiden früheren Abhandlungen des Verf.: F. d. M. **39**, 654, 1908; **40**, 717, 1909. Liegen in der Ebene zwei einteilige Kegelschnitte vor, von denen der eine als Ordnungsgebilde C, der andere als Klassengebilde K aufgefaßt wird, so wird vermöge der Schnittpunkte einer Tangente von K mit C eine (2, 2)-deutige Parameterbeziehung hergestellt; durch Zusammensetzen solcher gelangt man zur allgemeinsten Form des Schließungsproblems dieser Art. Man darf sich jedoch auf das Schließungsproblem beim Dreieck beschränken.

Die Gleichungen von C und K werden in ihrer allgemeinen Form zugrunde gelegt.

Es existiert dann eine Invariante von C und K, die „Schließungsinvariante", deren Verschwinden notwendig und hinreichend dafür ist, daß ein und damit zugleich ∞^1 eigentliche Dreiecke $\triangle$ existieren, die K um- und C einbeschrieben sind. Im folgenden wird eine Verallgemeinerung vorgenommen.

Der durch C und K gebildete Büschel B sei gegeben durch $f_{xx} - \lambda g_{xx} = 0$.

Das aus den drei Punkten (x), (y), (z) gebildete Dreieck $\triangle$ sei dem Kegelschnitt $f - \varkappa g = 0$ einbeschrieben; andererseits mögen die Seiten von $\triangle$ bzw. drei Kegelschnitte des Büschels B mit den Parametern $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ berühren. Es handelt sich um die Elimination der sechs Verhältnisgrößen x_i, y_i, z_i aus den sechs Bedingungsgleichungen des Ansatzes. Es tritt aber hier die Besonderheit auf, daß nach Elimination von fünf der genannten sechs Größen auch die letzte herausfällt, so daß die vier Parameter $\varkappa, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ an eine Beziehung gebunden sind. Ist die letztere erfüllt, dann existieren unendlich viele Dreiecke $\triangle$.

Für ein Dreieck $(x), (y), (z)$, das dem Kegelschnitt $f - \varkappa g = 0$ einbeschrieben ist, und dessen Seiten die drei Kegelschnitte $f - \sigma_1 g = 0, f - \sigma_2 g = 0$, $f - \sigma_3 g = 0$ berühren, gelten die 2×3 Bedingungen:

$$(1) \qquad f_{xx} - \varkappa g_{xx} = 0, \quad \text{usf.},$$

$$(2) \qquad (f_{yy} - \sigma_1 g_{yy})(f_{zz} - \sigma_1 g_{zz}) - (f_{yz} - \sigma_1 g_{yz})^2 = 0, \quad \text{usf.}$$

Dann erhalten die Berührungspunkte auf den Dreiecksseiten resp. die Koordinaten:

$$y_i \sqrt{g_{zz}} \pm z_i \sqrt{g_{yy}}, \quad z_i \sqrt{g_{xx}} \pm x_i \sqrt{g_{zz}}, \quad x_i \sqrt{g_{yy}} \pm y_i \sqrt{g_{xx}}.$$

Hier treten hinsichtlich der Vorzeichen zwei wesentlich verschiedene Fälle ein. Wählt man die drei negativen Zeichen, oder ein negatives und zwei positive, so liegen die drei Berührungspunkte auf einer Geraden; entsprechend den 4 Vorzeichenkombinationen entstehen so 4 Gerade.

Wählt man dagegen ein positives und zwei negative Zeichen, so schneiden sich die Verbindungslinien der Berührungspunkte mit den Gegenecken des Dreiecks in einem Punkte; es gibt wiederum 4 solcher Punkte.

Nunmehr wird die Elimination der $(x), (y), (z)$ aus (1) und (2) vorgenommen. Die letzteren Gleichungen lassen sich umformen in

$$(3) \qquad \frac{1}{\sigma_1 - \varkappa} = \frac{g_{yz} + \sqrt{g_{yy}}\sqrt{g_{zz}}}{f_{yz} - \varkappa g_{yz}}, \quad \text{usf.}$$

Die Vorzeichen der Wurzeln sind beliebig, aber fest zu wählen. Man ziehe sodann die Zerlegungsformel heran:

$$(4) \qquad \begin{aligned} &| f_{xx} - \lambda g_{xx}, f_{xy} - \lambda g_{xy}, f_{xz} - \lambda g_{xz} | \\ &= (xyz)^2 (D_3 - 3\lambda D_2 + 3\lambda^2 D_1 - \lambda^3 D_0) \\ &= (xyz)^2 \triangle(\lambda), \end{aligned}$$

wo die D die bekannten einfachsten Invarianten von f und g sind.

Aus (4) gehen die weiteren Beziehungen hervor:

$$(5) \quad (xyz)^2 \triangle(\varkappa) = 2(f_{xy} - \varkappa g_{xy})(f_{yz} - \varkappa g_{yz})(f_{zx} - \varkappa g_{zx}),$$

$$(6) \quad (xyz)^2 \triangle'(\varkappa) = g_{xx}(f_{yz} - \varkappa g_{yz})^2 + \cdots - 2 g_{xy}(f_{yz} - \varkappa g_{yz})(f_{zx} - \varkappa g_{zx}) \ldots,$$

$$(7) \quad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}(xyz)^2 \triangle''(\varkappa) &= | f_{xx} - \varkappa g_{xx}, g_{xy}\, g_{xz} | + \cdots + \\ &= 2(f_{xy} - \varkappa g_{xy})(g_{yz}\, g_{zx} - g_{xy}\, g_{zz}) + \cdots + , \end{aligned}$$

$$(8) \qquad (xyz)^2 D_0 = | g_{xx}\, g_{xy}\, g_{xz} |.$$

In (5), (6), (7) befinden sich die drei Ausdrücke $f_{yz} - \varkappa g_{yz}$ usf., für die man aber gemäß (3) die $g_{xx}, g_{xy}, \ldots$ einführen kann. Dann tritt aber in (5), (6), (7) auf den rechten Seiten nur noch der zweite Kegelschnitt mit seinen

Polarenbildungen auf. Behufs Ausführung ziehe man neben der kubischen Form $\triangle(\varkappa)$ noch die kubische Form

$$(9) \qquad \Sigma(\varkappa) = (\sigma_1 - \varkappa)(\sigma_2 - \varkappa)(\sigma_3 - \varkappa) = S_3 - 3\varkappa S_2 + 3\varkappa^2 S_1 - \varkappa^3$$

heran. Dann nimmt das Eliminationsergebnis die Gestalt an:

$$(10) \qquad 8[\triangle(\varkappa)\Sigma'(\varkappa) - \Sigma(\varkappa)\triangle'(\varkappa)][\triangle(\varkappa)\Sigma'''(\varkappa) - \Sigma(\varkappa)\triangle'''(\varkappa)] \\ - 3[\varkappa\triangle(\varkappa)\Sigma''(\varkappa) - \Sigma(\varkappa)\triangle''(\varkappa)]^2 = 0,$$

die bezüglich $\triangle$ und Σ symmetrisch ist. Hierbei liefert $\triangle = 0$ die Parameter der drei Geradenpaare des Büschels und $\Sigma = 0$ die Parameter der drei von den Dreiecksseiten berührten Kegelschnitte des Büschels.

Ist nun für vier Parameter $\varkappa, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die in bezug auf jedes der σ_i quadratische invariante Relation (10) erfüllt, so gibt es ∞^1 Dreiecke, die dem Kegelschnitt $(\varkappa)$ einbeschrieben sind, und deren Seiten die Kegelschnitte (σ_1), (σ_2), (σ_3) berühren.

Hinsichtlich des Parameters $\varkappa$ ist die Relation (10) vom vierten Grade.

Jeder Wert ϱ des Büschels $\triangle(\lambda) - \varrho\,\Sigma(\lambda) = 0$ liefert die Parameter dreier Kegelschnitte; insbesondere gibt es ein Tripel von letzteren, dem der Kegelschnitt $(\varkappa)$ zugehört, d. h. der den Dreiecken umbeschriebene Kegelschnitt; die zugehörige Gleichung ist:

$$(11) \qquad \triangle(\varkappa)\Sigma(\lambda) - \Sigma(\varkappa)\triangle(\lambda) = 0.$$

Sie besitzt mit Rücksicht auf (10) außer $\lambda = \varkappa$ noch eine Doppelwurzel, was zu einem geometrisch interessanten Satze führt. Das Hauptergebnis ist folgendes:

Schreibt man irgendeinem Kegelschnitte $(\varkappa)$ des Büschels $f - \lambda g = 0$ ein Dreieck ein, so werden dessen Seiten von drei Paar Kegelschnitten des Büschels berührt. Bildet man aus ihnen die 8 Tripel, so befinden sich darunter 4, so daß die Parameter eines jeden solchen Tripels mit $\varkappa$ durch die von der Wahl des Dreiecks unabhängige Relation (10) verknüpft sind.

Die 4 andern Tripel genügen dagegen einer solchen Beziehung nicht. My.

A. Rosenblatt. Sur les invariants des variétés algébriques à trois dimensions. C. R. **157**, 1514-1516.

Man verstehe unter V_3 ein algebraisches, dreifach ausgedehntes Gebilde, mit einem geometrischen Geschlecht $P_g \geqq 3$. Es bedeuten weiter P_a das arithmetische Geschlecht von V_3, p_g und p_a die beiden Geschlechter einer kanonischen Fläche F von V_3, $d = p_g - p_a$ die Flächenirregularität, A_0, A_1 Grad und Geschlecht einer charakteristischen Kurve C des kanonischen linearen Systems $|F|$ von V_3, endlich $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ Geschlecht und Grad einer kanonischen Kurve von V_3.

Es bestehen die Relationen:

$$(1) \qquad p^{(1)} = 2A_1 + A_0 - 1, \quad p^{(2)} = 4A_0.$$

Auf den charakteristischen Kurven C wird durch die kanonischen Flächen F eine lineare Spezialreihe ausgeschnitten. Daraus folgen die Ungleichungen:

$$A_0 \geqq 2(P_g - 3), \quad A_1 - 1 \geqq 3(P_g - 3).$$

Ferner führen wir noch die Ungleichungen an:

$$p^{(1)} \geqq 2p_g - 3,\ p_g \geqq p_a,\ p_g \leqq 2p_a + 4,\ p^{(1)} \leqq 8p_a + 4p_g + 8.$$

Daraus folgt weiter, daß

$$2A_0 \geqq p_a - 2,\ A_0 \leqq 2p_a + p_g + 1.$$

Zieht man noch die Severische Formel:

$$2P_a = A_0 - A_1 + p_a + 4$$

heran, so bestehen auch die Ungleichungen:

$$P_a \leqq \frac{p_a}{2} - \frac{p_g}{8} + \frac{7}{4},\ P_a \geqq -\frac{p_g - 5}{4},\ P_g - P_a \leqq \frac{5}{2}p_a + 5,$$

$$P_g \leqq 2p_a + 6,\ P_a \leqq \frac{3}{8}p_a + \frac{7}{4},\ P_a \geqq -\frac{p_a}{2}.$$

Vermöge eingehender Untersuchung der linearen charakteristischen Reihe der Kurven C lassen sich obige Formeln noch weiter verschärfen. Auf die Existenzbedingungen irrationaler Flächenbüschel und irregulärer Kurvenkongruenzen auf den V_3 lassen sich bemerkenswerte Anwendungen machen. My.

G. Z. Giambelli. Estensione del „Fundamentalsatz" di Noether ad alcune questioni di contatto. Lomb. Ist. Rend. (2) **45**, 1016-1026.

Vgl. eine frühere Abhandlung des Verfassers (F. d. M. **37**, 129, 1906).

Die Ausdehnung des Noetherschen Fundamentalsatzes auf Mannigfaltigkeiten, die nicht vollständige Schnitte von Überflächen sind, bietet ein weites, bisher noch wenig untersuchtes Feld. Der in Rede stehende Satz soll hier dazu dienen, Überflächen mit gewissen speziellen Charakteren in geeignete Klassen einzuteilen. Diese Charaktere sind besondere Singularitäten, wie z. B. im R_3 für die F_4, einen Doppelkegelschnitt und zwei Doppelpunkte zu besitzen, u. a.

Es bedeute im R_d $\triangle_{yz}$ den Polarenprozeß $\sum_{i=0}^{d} y_i \frac{\partial}{\partial z_i}$, und $\nabla_s^{(yz)}$ das Symbol $\frac{1}{s!}\triangle_{yz}^s$; ferner S das lineare System von Überflächen F der Ordnung l, die einen gewissen Modul bilden, und $V_s(0, 1, \ldots, r)$ die Wronskische Alephfunktion der Ordnung s in den $x_0, \ldots, x_r$, d. h. die Bildung, die aus $(x_0 + x_1 + \cdots + x_r)^s$ hervorgeht, wenn man jeden Polynomialkoeffizienten durch die Einheit ersetzt. Nach Einführung derartiger Anzahlsymbole läßt sich folgender allgemeiner Satz beweisen. Im Raume R_d seien $F_1, F_2, \ldots, F_r$ $(r \leqq d)$ Formen der Punktkoordinaten z, derart, daß sich die Überflächen $F_i = 0$ in einer $(d-r)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit W_r schneiden. Andererseits sei W_t $(t = 1, 2, \ldots, r-1)$ der Schnitt der t Überflächen $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \ldots, F_t = 0$. Damit dann eine Überfläche $F = 0$ des R_d s-mal durch W_r hindurchgeht und zugleich längs dieser die W_t berührt, ist notwendig und hinreichend, daß F dem Modul $(F_{i_1}, \ldots, F_{i_s}, F_{j_1}, \ldots, F_{j_{s+1}})$ angehört. Hier bedeuten die $i_1 \ldots i_s$ eine Variation (mit Wiederholungen) der s-ten Klasse von s der Zahlen $1, 2, \ldots, r$ und die

$j_1 \ldots j_{s+1}$ eine Variation der $(s+1)$-ten Klasse von $s+1$ der Zahlen $t+1$, $t+2, \ldots, r$. Zugleich läßt sich die Anzahl der unabhängigen Bedingungen für die gestellte Forderung angeben.

Die erste, der Form F auferlegte Bedingung verlangt, wie der Verf. früher bewiesen hat (F. d. M. 34, 199, 1903), daß F dem Modul $(F_{i_1} \ldots F_{i_s})$ angehört, so daß $F = \Sigma A F_{i_1} \ldots F_{i_s}$. Ist Z ein Punkt von W_r, so ist die Gleichung des Tangentenkegels in Z an die Fläche $F=0$: $\nabla_s^{(yz)} F = 0$, wo für F der obige Summenausdruck einzusetzen ist. Soll die Fläche $F=0$ überdies W_t in Z berühren, so muß $\nabla_s^{(yz)} F$ dem Modul $\{\triangle_{(yz)} F_k\}$ $(k=1, 2, \ldots, t)$, unabhängig von den y, angehören. Daraus folgt, daß die Tangentenüberebenen von $F_1 = 0, \ldots, F_r = 0$ einen $[d-r]$ gemein haben, und die Flächen $A=0$ durch Z hindurchgehen, also auch durch die W_r. Das besagt aber, daß die Formen A dem Modul $(F_1, \ldots, F_t)$ angehören. Hieraus folgt der aufgestellte Satz. My.

G. Z. Giambelli. Introduzione ad una teoria simbolica dei moduli di forme algebriche. Lomb. Ist. Rend. (2) **46**, 797-810, 981-996.

Der Verf. stellt für die Theorie der Moduln algebraischer Formen einen symbolischen Kalkül auf, der nicht nur die Beweise vereinfacht, sondern auch leicht zu neuen Eigenschaften führt und damit der Geometrie ein neues Feld eröffnet.

Seien A, B die Symbole für zwei Moduln algebraischer Formen in denselben homogenen Variabeln x_i $(i = 0, 1, \ldots, r)$, so bezeichne die „Summe" $A+B$ den größten gemeinsamen Modul (gr. g. M.) von A und B. Sind $\boldsymbol{\Phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\Phi}_t$ die Elemente eines Moduls $A(\boldsymbol{\Phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\Phi}_t)$ und $\boldsymbol{\Phi}$ eine beliebige Form, so bezeichne das „Produkt" $\boldsymbol{\Phi} A$ einer „Form mit einem Modul" den Modul $(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}_t)$.

Ersetzt man in einer ganzrationalen Funktion P der x_i jedes Potenzprodukt $x_0^{k_0} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}$ durch den Binomialkoeffizienten von $l - \Sigma k_i m_i + d$ über d, wo die l, d, m_i positiv ganzzahlig sind, so gelangt man zum „symbolischen Wert" der Funktion P. Die Formen eines Moduls A seien von der Ordnung l in den x_i, und die charakteristische Funktion von A sei gleich dem symbolischen Werte von P, so heißt P das „Bild" von A.

Der erste Satz bezieht sich auf drei Moduln A, B, C derart, daß — unter F_1 eine Form der Ordnung m_1 verstanden — $F_1 C$ der kleinste enthaltende Modul (kl. e. M.) von A und $F_1 B$ ist. Sind dann P_a, P_b, P_c die Bilder von A, B, C, so ist $P_a + x_1(P_b - P_c)$ das Bild des Moduls $A + F_1 B$.

Sind andererseits A, B solche Moduln, daß $F_1 A$ der kl. e. M. von A und $F_1 B$ ist, so ist $(x_0 - x_1) P_a + x_1 P_b$ das Bild des Moduls $A + F_1 B$.

Hier ist der Sonderfall $B = 1$, $P_b = 0$ von Wichtigkeit.

Auf dem Begriff des Bildes eines Moduls beruht die symbolische Darstellung desselben. Liegt der Modul $M = (\boldsymbol{\Phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\Phi}_t)$ vor, wo $\boldsymbol{\Phi}_u$ von dem Typus ist:

$$\boldsymbol{\Phi}_u = F_1^{i_1(u)} F_2^{i_2(u)} \ldots F_r^{i_r(u)} \quad (u = 1, 2, \ldots, t),$$

so ist M symbolisch darstellbar durch die ganzrationale Funktion:

$$\sum_{u=1}^{t} x_1^{i_1(u)} x_2^{i_2(u)} \dots x_r^{i_r(u)}.$$

Diese Darstellung wird verbunden mit den bekannten Eigenschaften des Polarensymbols $\nabla_s^{(yz)} = \frac{1}{r!}[\triangle_{yz}]^s$, wo $\triangle_{yz} = \Sigma y_i \frac{\partial}{\partial z_i}$; sowie mit denen der Wronskischen Funktion Aleph der Ordnung u, d. i. dem Ausdrucke, der aus $(x_0 + x_1 + \cdots + x_r)^u$ entsteht, wenn man jeden Polynomialkoeffizienten durch die Einheit ersetzt.

Eine Anwendung seiner Symbolik macht der Verf. auf gewisse, an anderer Stelle (vgl. das vorstehende Referat) entwickelte Berührungsbedingungen für die Flächen $F_1 = 0, \dots, F_r = 0$ $(r \leqq d)$ in einem R_d. Er ist dadurch imstande, eine Reihe weiterer bemerkenswerter Ergebnisse abzuleiten, deren Beweis auf gewöhnlichem, nicht symbolischem Wege auf erhebliche Schwierigkeiten stoßen würde. Als Beispiel erwähnen wir das Kriterium für die Existenz einer Fläche $F = 0$ der Ordnung l, die s-mal die den Flächen $F_i = 0$ gemeinsame Mannigfaltigkeit W_r enthält und überdies einer Reihe von Berührungsbedingungen genügen soll.

Die Einfachheit des in symbolischer Form aufgestellten Kriteriums geht, wie der Verf. sagt, beim Übergange zur nichtsymbolischen Ausdrucksweise völlig verloren, so daß sich die Symbolik nicht nur als nützlich, sondern als durchaus notwendig erweist.

My.

E. Waelsch. Quaternionen und binäre Formen zu den Minkowskischen Grundgleichungen der Elektrodynamik. I. und II. Mitteilung. Wien. Ber. **122**, 505-513, 1095-1106.

In seiner Vorlesung „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus" (1907) (F. d. M. **39**, 107, 1908) gibt F. Klein die Cayleysche Darstellung der orthogonalen Transformationen des R_4 durch Quaternionenprodukte. Er spricht dann von einer Weiterentwicklung der Physik und Mechanik in der Richtung der Minkowskischen Untersuchungen, in der diese Darstellung direkt anwendbar werde, und stellt hierauf die Lorentz-Transformationen L in einfacher Weise durch Quaternionen dar (vgl. auch F. d. M. **41**, 535, 1910).

Mit Hülfe der Kleinschen Darstellung leitet der Verf. unter Zugrundelegung des Minkowskischen Gedankenganges die Minkowskischen Grundgleichungen ab. Bedeutet ∇ den Hamiltonschen symbolischen Vektor, so wird der Differentialoperator $\nabla_1 = \nabla - i\frac{\partial}{\partial t}$ gebildet, sowie die Quaternion eines reellen Raumzeitpunktes $x = it + x_1 \mathfrak{i}_1 + x_2 \mathfrak{i}_2 + x_3 \mathfrak{i}_3 = it + \mathfrak{x}$. Nun lauten die vier Grundgleichungen für den Äther:

$$\text{(I)}\ \nabla \times \mathfrak{m} - \mathfrak{e}\frac{\partial}{\partial t} = \varrho\mathfrak{w},\ \text{(II)}\ \nabla \cdot \mathfrak{e} = \varrho,$$

$$\text{(III)}\ \nabla \times \mathfrak{e} + \mathfrak{m}\frac{\partial}{\partial t} = 0,\quad \text{(IV)}\ \nabla \cdot \mathfrak{m} = 0.$$

Diese lassen sich dann auf Grund des Multiplikationstheorems in die einzige Grundgleichung zusammenfassen:

(V) $\nabla_1 \overline{(\mathfrak{m} + i\mathfrak{e})} = r$, oder auch $(\nabla')(\mathfrak{m} + i\mathfrak{e})\nabla_1 = -r$,

wo r die Quaternion $i\varrho + \varrho\mathfrak{w}$ ist, und der horizontale Strich das Konjugiert-imaginäre angibt.

Daraufhin lassen sich die Differentialgleichungen für ruhende Körper in einfacher Gestalt hinschreiben.

Sodann werden die Lorentz-Transformationen L, die reellen Drehungen des R_4 und im besonderen die „speziellen" L durch Quaternionen dargestellt. Die letzteren werden charakterisiert durch einen reellen Raumzeitvektor ia, für den $Na = 1$ ist. Hieraus wird eine Reihe von mit speziellen L zusammenhängenden Grundgleichungen abgeleitet.

Weiter werden die Raumzeitvektoren zweiter Art f mit Koordinaten von der Form $m_k, -ie_k$ $(k = 1, 2, 3)$ untersucht.

In der zweiten Abhandlung wird die zur Minkowskischen Matrix S gehörige Maxwellsche Affinität A des R_3 durch Quaternionen dargestellt. Mit Hülfe des „Zweibeins" von S (F. d. M. **40**, 494, 1909) ergibt sich A als Superposition ihres rein elektrischen und ihres rein magnetischen Teiles. Der antisymmetrische Teil von S, ein Raumzeitvektor zweiter Art, ist bestimmt durch zwei Vektoren $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{t}$, deren skalares Produkt verschwindet, und für die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ gilt: $\mathfrak{w} \times \mathfrak{t} = \mathfrak{R}$.

Ferner wird die zu S gehörige quadratische Form unter Berücksichtigung der Abrahamschen Zusatzglieder untersucht (F. d. M. **41**, 950, 1910).

Diese Form ist eine vierdimensionale Kugelfunktion zweiter Ordnung, die zu einer aus den Vektoren $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{M}$ einfach gebildeten binären doppeltquadratischen Form gehört.

Am Schlusse wird noch gezeigt, daß sich die Affinität für das Vakuum ersetzen läßt durch eine gewisse spezielle L und eine gewisse darauf folgende Wendestreckung des R_3.

Im übrigen muß wegen der zahlreichen Kunstbezeichnungen auf die Abhandlungen selbst verwiesen werden. My.

Weitere Literatur.

L. P. Copeland. Concerning the theory of invariants of plane n-lines. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 391-392.

L. E. Dickson. The projective geometry and covariant theory of a ternary quadratic form modulo 2. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 456-457.

L. E. Dickson. Certain aspects of a general theory of invariants, with special consideration of modular invariants and modular geometry. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 116-119.

J. Dougall. On the necessary and sufficient condition for the degeneracy of a quadratic function of a number of variables. Edinb. M. S. Notes 1912/13, 140-141.

E. B. Elliott. An introduction to algebra of quantics. 2nd edition. London: Clarendon Press. XVI + 168 S. 8°.

N. Günther. Über die kanonische Form der Systeme kanonischer homogener Gleichungen. Samml. des Inst. der Verkehrswege **82**, 22 S. (Russisch.)

N. GÜNTHER. Über einige Zusammenhänge zwischen den homogenen Gleichungen. Ebenda, 20 S.

W. RAETZ. Projektive Gruppen des Raumes, ihre Invarianten und geometrische Charakterisierung. Nebst dem Anhang: Charakterisierung einiger Scharen von Transformationen, die keine Gruppen bilden, durch Invarianten. Diss. Königsberg i. Pr. 107 S. 8°.

M. L. SANDERSON. A fundamental theorem in the theory of modular invariants. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 448.

M. L. SANDERSON. A method of constructing binary modular covariants. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 76.

B. Differentialinvarianten.

J. B. SHAW. On differential invariants. Amer. Journ. **35**, 395-406.

Es werden gewisse Differential-Operatoren und Parameter in Vektorgestalt dargestellt. Dabei wird der Hamiltonsche Operator ∇ auf einen ebenen oder gekrümmten R_n ausgedehnt.

Es handelt sich um eine Vektoralgebra, in der die Einheiten selbst variabel sind; im übrigen ist diese Algebra vom einfachsten Typus, insofern nur innere Produkte verwendet werden. Die Arbeit schließt sich an verwandte von Ricci, Ricci und Levi-Cività, Maschke und Ingold an (F. d. M. **24**, 371, 1892; **31**, 297, 1900; **35**, 154, 1904; **41**, 168, 1910).

Der Vektor ist von der Form:

$$\varrho = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = \sum x_i e_i$$

mit den Einheiten e_i und den Variabeln x_i.

Das innere Produkt $I \cdot \varrho\sigma$ wird definiert durch $I \cdot \varrho\sigma = \Sigma x_i y_i$; verschwindet dasselbe, so heißen ϱ und σ orthogonal. Sodann wird ein linearer Vektoroperator eingeführt durch die zweireihige Determinante:

$$(1) \qquad A \cdot (\,)\, A \cdot \alpha\beta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ I \cdot \alpha(\,), & I \cdot \beta(\,) \end{vmatrix},$$

so daß im besonderen:

$$(1') \qquad A \cdot \varrho A \cdot \alpha\beta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ I \cdot \alpha\varrho, & I \cdot \beta\varrho \end{vmatrix}.$$

Der Vektor (1) wird mit Hülfe von m Vektoren β_i auf eine n-reihige Determinante ausgedehnt:

$$(2) \quad A \cdot (\,) \ldots (\,)\, A \cdot \beta_1 \ldots \beta_m = |\,\beta_i, I \cdot \beta_i(\,), I \cdot \beta_i(\,), \ldots\,|,$$

wo in den Klammern $m-1$ andere Vektoren stehen, so daß

$$(2') \quad A \cdot \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1} A \cdot \beta_1 \ldots \beta_m = |\,\beta_i, I \cdot \beta_i \alpha_k\,|\ (k = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Die Eigenschaften dieses in den β_i linearen Vektors σ lassen sich leicht ablesen.

Ist ein Vektor linear ausdrückbar durch andere linear unabhängige Vektoren, so heißt er „konregional" mit den letzteren. Es ist also der Ausdruck σ (2′) konregional mit den β.

Der Operator σ wird wiederum auf den Operator $I \cdot \alpha()$ angewendet, dann ergeben sich weitere, im folgenden gebrauchte Operatoren. Im besonderen entsteht so der lineare Operator $\varphi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i I \beta_i$. Ist φ' dessen Umkehrung, so bilde man weiter die drei Operatoren $\chi_1 = \varphi' - m_1$, $\chi_2 = \varphi' \chi_1 - m_2$, $\chi_3 = \varphi' \chi_2 - m_2$, wo $m_1 = \Sigma I \alpha_i \beta_i$, $m_2 = \frac{m_1(\varphi' \chi_1)}{2!}$, $m_3 = \frac{m_1(\varphi' \chi_2)}{3!}$. Die drei Größen m sind drei skalare Invarianten von φ und den χ, und die weiteren lassen sich in ähnlicher Weise bilden.

Im folgenden Abschnitt wird angenommen, daß ein Vektor $\varrho = \varrho(u_1, \ldots, u_{n-1})$ von $n-1$ unabhängigen Parametern u abhängt. Ist ϱ differenzierbar, so wird $d\varrho = \Sigma \varrho_k du_k$, wo $\varrho_k = \frac{\partial \varrho}{\partial u_k}$. Geht man von $n-1$ gewissen Vektoren $\varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}$ aus, so werden die Größen $I \varrho_i \varrho_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n-1)$ als die „fundamentalen Größen a_{ik} erster Ordnung" eingeführt, sowie der Ausdruck $I\, d\varrho\, d\varrho$ als die „erste Fundamentalform".

Weiter werden noch die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung gebildet. Hier ordnet sich das Christoffelsche Symbol $(ijrs)$ sowie die Christoffelsche quadrilineare Kovariante G_4 ein, ferner die Riemannsche und Kronecker-Gaußsche Krümmung, u. a. m.

Eine wichtige Rolle spielt weiterhin, als Verallgemeinerung der Quaternion ∇, der Operator $\triangle = \Sigma \varrho_i' \frac{\partial}{\partial u_i}$. Es ist $I\, d\varrho \triangle = d$, d. i. die totale Differentiation.

Auf diesem Wege gelangt man zu den verschiedenen mittleren Krümmungen.

Am Schlusse wird noch gezeigt, wie man auf dem angegebenen Wege auch zu allen von Maschke aufgestellten symbolischen Invarianten gelangt. My.

F. P. Cappabianca. La teoria delle forme differenziali dissimetriche di 2° ordine. Batt. G. **51** [(4) **3**], 273-314.

Pascal (F. d. M. **42**, 312, 1911) hat die Grundlagen einer Theorie der vollständigen Differentialformen von beliebiger Ordnung und beliebigem Grade entworfen. Die von ihm insbesondere untersuchten Formen zweiter Ordnung sind von dem Typus

$$\sum_i X_i d^2 x_i + \sum_{i,k} X_{ik} dx_i dx_k \quad (X_{ik} = X_{ki}).$$

Darüber hinaus betrachtet er aber auch die mittels zweier Differentiationsoperationen d und δ konstruierten Formen:

$$\sum_i X_i d\delta x_i + \sum_{i,k} X_{ik} dx_i \delta x_k \quad (X_{ik} \neq X_{ki}).$$

Die Verfasserin entwickelt für diese unsymmetrischen Formen eine vollständige Theorie, in der dann umgekehrt die Theorie der symmetrischen Formen als besonderer Fall enthalten ist. Um die Hauptergebnisse anzuführen, so werden zunächst diejenigen Systeme fundamentaler Bildungen eingeführt, die nach dem Vorgange von Pascal als Kovarianten der Differentialform zu bezeichnen sind. Hierzu werden gewisse Symbole definiert und aus diesen weiter-

hin gewisse „Hauptsymbole“ zusammengesetzt. Zwischen den Symbolen der verschiedenen Systeme mit der gleichen Anzahl von Indexen bestehen Relationen, die aufgestellt werden. Die Symbole mit drei Indexen lassen sich daraufhin auf die mit zwei Indexen zurückführen.

Sodann werden die Transformationen untersucht, die die Symbole erleiden, wenn auf die Variabeln irgendwelche Transformationen ausgeübt werden. Ferner kommt, wie im Falle der symmetrischen Formen, gewissen aus Symbolen konstruierten Matrizen die invariante Eigenschaft der Charakteristik zu.

Ein Hauptziel der Arbeit ist die Reduktion der Form auf einige besondere Typen; es lassen sich jeweils die notwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür in invarianter Gestalt aufstellen.

So ist die Form $X^{(1,1)}$ unter gewissen Bedingungen auf den Typus $d\delta f$ reduzierbar, wo f eine Funktion der x_i ist. Diese Bedingungen bestehen in dem Verschwinden einer Anzahl invarianter Charaktere. Diese Bedingungen lassen sich dahin zusammenfassen, daß der Rang einer gewissen Matrix den Wert 1 erhält. Für eine andere einfache Reduktion von $X^{(1,1)}$ erweist sich als notwendig und hinreichend, daß die Rangzahlen zweier Matrizen gleich 2 sind, u. a. m.

My.

A. Cecconi. Sistemi doppi covarianti a sistema derivato nullo associati ad una forma differenziale binaria. Ven. Ist. Atti **72** [(8) **15**], 1435-1439.

Ist die positive binäre Grundform $f = \sum_1^2 a_{rs}\, dx_r\, dx_s$ von der Klasse Eins, so existieren keine einfachen Kovarianten der genannten Eigenschaft; ist aber f von der Klasse Null, so existieren nur solche, die beim Übergang von f in die kanonische Gestalt $dy_1^2 + dy_2^2$ sich in Systeme mit konstanten Elementen verwandeln.

Von doppelt kovarianten Systemen existieren, wie bekannt, die folgenden: A) das „erste“ Fundamentalsystem, bestehend aus den a_{rs} selbst; B) das „zweite“ Fundamentalsystem der ε_{rs}, wo $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$, $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \sqrt{a}$, und a die Diskriminante von f bedeutet. C) Ist f von der Klasse Null, so ergeben sich Systeme analog zu den oben angegebenen.

Der Verf. fragt, ob hiermit die in Betracht kommenden Systeme erschöpft sind, und zeigt, daß dies in der Tat der Fall ist. Es lassen sich Größen λ_r, λ_s angeben, so daß

$$a_{rs} = \lambda_r \lambda_s + \bar{\lambda}_r \bar{\lambda}_s,\ \varepsilon_{rs} = \bar{\lambda}_r \lambda_s - \lambda_r \bar{\lambda}_s.$$

Ein doppeltkovariantes System habe die Elemente b_{rs}, so kann man setzen:

$$b_{rs} = \alpha a_{rs} + \mu \varepsilon_{rs} + \nu \lambda_r \bar{\lambda}_s + \beta \lambda_r \lambda_s.$$

Hier läßt sich das System λ_r so wählen, daß $\nu = 0$, so daß die reduzierte Darstellung entsteht:

$$b_{rs} = \alpha a_{rs} + \mu \varepsilon_{rs} + \beta \lambda_r \lambda_s.$$

Nunmehr suche man das Kriterium dafür, daß das aus dem Systeme (b_{rs}) abgeleitete System identisch Null ist. Es ergeben sich zunächst als notwendige Bedingungen $\mu =$ konst., sodann $\beta = 0$, sowie auch $\alpha =$ konst., also:

$$b_{rs} = \alpha a_{rs} + \beta \varepsilon_{rs} \qquad (\alpha, \mu \text{ willkürliche Konstanten}).$$

Da aber die notwendigen Bedingungen für das Verschwinden des abgeleiteten Systems auch hinreichend sind, so ist damit der gewünschte Beweis erbracht. My.

E. B. Elliott. Some uses in the theory of forms of the fundamental partial fraction identity. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 344-351.

Die der Zerlegung in Partialbrüche zugrunde liegende Formel

$$1 = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{F'(a_s)} \frac{F(\Phi)}{\Phi - a_s}$$

für

$$F(\Phi) = (\Phi - a_1)(\Phi - a_2) \dots (\Phi - a_s)$$

wird auf den Fall verallgemeinert, daß Φ ein Operationszeichen, z. B. eine Differentiationsoperation $\Phi\left(x, y, z, \dots, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \dots\right)$, an Funktionen einer beliebigen Zahl von Argumenten $x, y, z, \dots$ vorstellen soll. A. K.

A. Kaiser. Weiteres zur Invariantentheorie der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Diss. Greifswald 1913, 30 S.

Die Arbeit knüpft an eine Dissertation von Koppisch an (F. d. M. **36**, 1905, 391). Zu jeder Differentialgleichung 2. O. $y'' = \omega(x, y, y')$ mit der allgemeinen Lösung: $y = Y(x, a, b)$ gehört in den Konstanten a, b eine andre Differentialgleichung 2. O.: $b'' = \Delta(a, b, b')$. Der Verf. fragt, welchen Bedingungen die Funktion ω genügen muß, damit die Gleichung $b'' = \Delta$ ein Integral von der Form:

$$\frac{\alpha(a, b)\,da + \beta(a, b)\,db}{\bar{\alpha}(a, b)\,da + \bar{\beta}(a, b)\,db} = \text{Konst.}$$

besitzt. Außer dem Falle $\omega_{y'y'y'y'} = 0$, dessen Auftreten schon aus der Arbeit von Koppisch zu erkennen ist, ergibt sich noch eine Anzahl andrer Möglichkeiten, bei denen gewisse algebraische Bedingungen erfüllt sein müssen, die aufgestellt werden. Es bleibt freilich dahingestellt, ob jede einzelne der sich ergebenden Möglichkeiten wirklich eintreten kann.

Der Verf. ist am 10. 5. 1915 im Lazarett zu Freiburg i. B. gestorben, und zwar an den Folgen einer im April in Frankreich erlittenen schweren Verwundung. El.

Kapitel 3.

Substitutionen und Gruppentheorie, Determinanten, Elimination und symmetrische Funktionen.

A. Substitutionen und Gruppentheorie.

M. Pasch. Über die binäre und die ternäre orthogonale Substitution. Math. Ann. **73**, 413-423.

Die drei Parameter einer ternären orthogonalen Substitution S werden durch vier homogene ersetzt. Die entsprechenden Betrachtungen für binäre S werden vorausgeschickt.

Sei S eine ternäre orthogonale Substitution zwischen Variabeln x_i und y_i, mit den Koeffizienten $a, a', a''; b, b', b''; c, c', c''$, von einer Determinante $P \neq 0$, so daß $\Sigma y_i^2 = \Sigma x_i^2$ wird.

Für vier homogene Parameter $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ und $B = \varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$ läßt sich eine eigentliche S in die bekannte Form bringen:

$$(1) \quad aB = \varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2,\ bB = 2(\lambda\mu - \varkappa\nu),\ cB = 2(\lambda\nu + \varkappa\mu)$$

usf., die sich auch umkehren läßt, so daß

$$(1') \qquad 4\varkappa^2 = (a + b' + c'' + 1)B,\ 4\varkappa\lambda = (b'' - c')B \text{ usf.}$$

Es werden jetzt vier neue Parameter $t_i\,(i = 1, \ldots, 4)$ eingeführt und eine gewisse quadratische Form $T(t_i) = T$ gebildet. Vermöge geeigneter Umformung des Quadrates von $\varkappa t_1 + \lambda t_2 + \mu t_3 + \nu t_0$ erkennt man die Identität:

$$(2) \qquad 4(\varkappa t_1 + \lambda t_2 + \mu t_3 + \nu t_4)^2 = BT,$$

so daß T vom Range 1 ist. Man kann daher die $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ aus den Koeffizienten von T berechnen. Man wähle T beliebig und setze für $T_i = \frac{1}{2}\dfrac{\partial T}{\partial t_i}$:

$$(3) \qquad \varkappa = T_1, \lambda = T_2, \mu = T_3, \nu = T_4.$$

Es wird nun die Umkehrung bewiesen: Sind $a, \ldots, c''$ die Koeffizienten einer eigentlichen S, so ist T vom Range 1.

Betrachtet man die x_i, y_i als homogene Koordinaten von Punkten (x), (y) einer Ebene E, so stellt S für E eine Kollineation dar, die den Kegelschnitt $K : \Sigma x_i^2 = 0$ in sich überführt.

Mit Hülfe von K kann man das Entsprechen zwischen den eigentlichen ternären S und den binären Kollineationen begründen, nämlich vermöge der Projektivität, die auf K vermöge S induziert wird. Für dieses Entsprechen werden die erforderlichen Formeln aufgestellt. My.

E. Jahnke. Das Orthogonalsystem der Lorentz-Transformation. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **12**, 109-112.

Nach Euler wird eine Orthogonaltransformation des R_3 in vier homogenen Parametern α_i rational dargestellt. Nimmt man noch vier weitere homogene

Parameter β_i hinzu, so lassen sich nach Cayley die Drehungen des R_4 um den Anfangspunkt O homogen durch die α_i, β_i ausdrücken, so daß sich jeder Drehung T des R_4 zwei Drehungen im R_3 zuordnen lassen. Setzt man $a_{00} = \Sigma\alpha_i^2$, $b_{00} = \Sigma\beta_i^2$, so wird die Determinante von T gleich $a_{00} \cdot b_{00}$. Will man dafür lieber den Wert Eins haben, so tritt noch die Bedingung $\Sigma\alpha_i^2 \cdot \Sigma\beta_i^2 = 1$ hinzu; es geht dann vermöge T die Summe Σx_i^2 genau in die entsprechende Summe Σy_i^2 über.

Dies wird in Zusammenhang gebracht mit der Relativitätstheorie von Lorentz und Einstein in der mathematischen Gestalt, die ihr Minkowski gegeben hat. In der Raumzeitwelt R_4 bedeuten drei der Koordinaten die Raumkoordinaten des R_3 und die vierte die mit i multiplizierte Zeit it. Zwei Koordinatensysteme (x, y, z, it), (x', y', z', it') werden bei gemeinsamem Ursprunge derart gleichförmig gegeneinander bewegt, daß eine Orthogonalsubstitution T mit

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2$$

entsteht. Die Koeffizienten $c_{ik}\,(i, k = 0, 1, 2, 3)$ von T befolgen die Realitätsregel, daß alle c ohne den Index Null nebst c_{00} reell sind, dagegen die sechs Randkoeffizienten $c_{10}, \ldots, c_{01}, \ldots, c_{03}$ rein imaginär werden. Die Determinante von T ist Eins.

Minkowski nennt T „das Orthogonalsystem der Lorentz-Transformation“.

Um aus der Euler-Cayleyschen Darstellung das Orthogonalsystem der Lorentz-Transformation abzuleiten, hat man nur die Parameter α und β konjugiert-komplex anzunehmen, wobei aber die Determinante der so sich ergebenden Raum-Zeit-Transformation noch von Eins verschieden ist, was sich aber leicht durch geeignete spezielle Normierung erreichen läßt.

Die 16 Koeffizienten werden explizit aufgestellt.

Eine andere Spezialisierung führt zur „speziellen Lorentz-Transformation“. Hier tritt ein Parameter k auf, wo für die Minkowskische Welt $k^2 > 1$, für die Welt der Newtonschen Mechanik $k^2 = 1$ ist.

Im allgemeinen Falle wie in den beiden besonderen Fällen wird noch eine einfache geometrische Abbildung angegeben. Dagegen läßt sich jede Lorentz-Transformation auf zwei Vierersysteme von Vektoren der Ebene abbilden. Wählt man die Vektoren gleichlang, so hat man einfach eine Zusammenfassung der Relationen zwischen den Richtungskosinus der Seiten eines ebenen Vierecks.

My.

H. Hilton. Some properties of symmetric and orthogonal substitutions. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 94-99.

Sei A eine lineare Substitution der m Variabeln x_i. Durch geeignete Wahl neuer Variabeln x_i' läßt sich A nach dem Verf. (F. d. M. **40**, 187, 1909) auf unendlich viele Weisen auf die kanonische Gestalt bringen:

$$(\alpha) \qquad x_i' = \lambda_i x_i + \beta_i x_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

wo $\beta_i = 0$ oder 1, und zwar sicher 0 bei $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$. Die Forderung (α) wird jetzt verbunden mit der andern, die aus Σx_i^2 vermöge A hervorgehende Form $\Sigma c_{ik} x_i x_k$ möglichst zu vereinfachen, vorausgesetzt, daß A im besonderen symmetrisch oder orthogonal ist.

Sei erstens A symmetrisch, und ihre kanonische Gestalt N setze sich zusammen aus Substitutionen von dem Typus:

$$x'_1 = \alpha x_1 + x_2, \ldots, x'_{s-1} = \alpha x_{s-1} + x_s,\ x'_s = \alpha x_s,$$

dann läßt sich α so wählen, daß Σx_i^2 eine Summe von Formen des Typus $x_1 x_s + x_2 x_{s-1} + \cdots + x_s x_1$ wird.

Sei andererseits A orthogonal, so ist N das Produkt von Substitutionen der Form:

$$x'_1 = \alpha x_1 + x_2, \ldots, x'_{s-1} = \alpha x_{s-1} + x_s,\ x'_s = \alpha x_s,$$
$$y'_1 = \alpha^{-1} y_1 + y_2, \ldots, y'_{s-1} = \alpha^{-1} y_{s-1} + y_s,\ y'_s = \alpha^{-1} y_s$$

($\alpha^2 \neq 1$, oder auch $\alpha^2 = 1$, s gerade) und

$$X'_1 = \alpha X_1 + X_2, \ldots, X'_{s-1} = \alpha X_{s-1} + X_s,\ X'_s = \alpha X_s,$$

($\alpha^2 = 1$, s ungerade).

Dann lassen sich die Variabeln x, y, X so wählen, daß A in N übergeht, und Σx_i^2 eine Summe von Formen des Typus $f_1(x, y)$ oder $f_1(X, X)$ wird (F. d. M. **43**, 175, 1912).

Dieser Satz läßt sich noch verallgemeinern, indem α^{-1} durch eine beliebige Größe β ersetzt wird.

Der Beweis beruht darauf, daß neue Variabeln derart eingeführt werden, daß $\Sigma c_{ik} x_i x_k$ eine Summe von quadratischen Formen mit vereinfachten Determinanten wird, wo die Nebendiagonale aus Einern besteht, während alle links davon befindlichen Elemente Nullen sind. My.

G. Vivanti. Sui gruppi finiti di sostituzioni lineari. Palermo Rend. **35**, 160-164.

Der Verf. beweist hier auf elementarem Wege, aber immerhin durch längere Rechnung, daß alle endlichen Gruppen von linearen Substitutionen einer komplexen Variable durch eine geeignete stereographische Projektion in Gruppen von Kugeldrehungen übergeführt werden können. Er benutzt dabei die vollzogene Aufzählung aller endlichen Gruppen einer komplexen Variable, um für jede einzeln nachzuweisen, daß die 2 Paare von Fixpunkten irgend zweier Operationen einer solchen Gruppe, die, wie der Verf. vorher erkannt hat, auf einem Kreise liegen, sich dort gegenseitig trennen. Die dazu vom Verf. angestellte längere Rechnung läßt sich jedoch durch eine ganz kurze geometrische Überlegung ersetzen, bei der man überdies nur die Endlichkeit der betreffenden Gruppe, sonst keine ihrer Eigenschaften zu kennen braucht. Da es leicht ist, die Gruppen von Kugeldrehungen alle anzugeben, so kann man, wie Ref. andernorts zeigen will, auf die skizzierte Weise den Ansatz des Verf. zu einer vollen Theorie der endlichen Gruppen linearer Substitutionen einer komplexen Variable ausbauen. Bi.

M. Potron. Quelques propriétés des substitutions linéaires à coefficients $\geqq 0$ et leur application aux problèmes de la production et des salaires. Ann. de l'Ec. Norm. (3) **30**, 53-76.

Einen Teil deutschen Lesern aus den Arbeiten von Frobenius und Perron schon bekannter Resultate über Matrizen mit nicht negativen Elementen leitet der Verf. hier zunächst ab. Sie beziehen sich wesentlich auf die Wurzeln der charakteristi-

schen Gleichung vom größten absoluten Betrag und auf die positiven linearen Funktionen, die sich bei Ausübung der zur Matrix gehörigen Substitution mit einem positiven Faktor multiplizieren; dieser positive Faktor ist eine Wurzel vom größten absoluten Betrage. Unter den Wurzeln vom größten absoluten Betrage ist immer eine positive enthalten, die einfach ist, wenn die Koeffizienten der Matrix wesentlich positiv sind, die aber im Falle zum Teil verschwindender Koeffizienten auch mehrfach sein kann. Dann ist aber die Matrix zerlegbar. Bei unzerlegbaren Matrizen gibt es dann auch nur eine lineare Funktion mit positiven Koeffizienten, die sich mit einem positiven Faktor multipliziert; bei zerlegbaren Matrizen gibt es mehrere derartige lineare Funktionen, die der Verf. alle bestimmt.

Von einem Teil dieser und noch einiger weiteren Sätze gibt der Verf. eine Anwendung auf die Möglichkeit einer vollen Bilanz aller auf der Welt sich abwickelnden Geschäfte. Der Verf. kommt zu dem nicht überraschenden Resultat, daß es in der Tat möglich ist, die Gehälter, die Löhne, die Preise aller Artikel so zu fixieren, daß jeder das erhält, was er zum Leben braucht, und daß kein Geschäftsmann Verluste erleidet. Das alles unter der Voraussetzung, daß die Ansprüche der einzelnen, die technischen Hülfsmittel und die Verwaltungseinrichtungen richtig gewählt sind. Die Frage, ob das bei dem augenblicklichen Stande unserer Technik usw. möglich wäre, bleibt natürlich offen, da darüber die Theorie allein keinen Aufschluß gibt. Bi.

D. G. Taylor. On a certain class of linear substitutions with common invariants and an associated substitution. Edinb. M. S. Proc. **31**, 54-70.

In einem früheren Aufsatz (F. d. M. **43**, 178, 1912) hat der Verf. die Ergebnisse einiger Untersuchungen über lineare Substitutionen und ihre Invarianten gegeben. Gegenwärtig betrachtet er Substitutionen, deren Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1\, a_2 \, \ldots \, a_{n-1}\, a_n \\ a_n\, a_1 \, \ldots \, a_{n-2}\, a_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_2\, a_3 \, \ldots \, a_n \quad a_1 \end{vmatrix}$$

die Eigenschaft hat, daß jede Zeile dieselben n Elemente in der nämlichen zyklischen Ordnung mit a_1 in der Hauptdiagonale hat. Für $n = 3$ wird eine geometrische Deutung in betreff von Dreiecken in vielfach perspektiver Lage gegeben (Rev. sem. $\mathbf{22}_1$, 69). Lp.

E. Bortolotti. Un teorema di Paolo Ruffini sulla „Teoria delle sostituzioni“. Rom. Acc. L. Rend. $\mathbf{22}_1$, 679-683.

Ruffini hatte vermutet, daß, wenn eine Permutationsgruppe vom Primzahlgrad p neben irgendeiner Substitution ihre sämtlichen transformierten durch den Zykel $(1, 2, \ldots, p)$ und seine Potenzen enthält, auch der Zykel selbst in der Gruppe vorkommt. Hier wird diese Vermutung bewiesen. Bi.

W. A. Hurwitz. Postulate sets for abelian groups and fields. Annal of Math. (2) **15**, 93-100; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 513-514.

Eingehendes Studium der gegenseitigen Abhängigkeit und Unabhängigkei der Axiome, welche für die Operationen einer Abelschen Gruppe oder eine Abelschen Körpers bestehen. Bi.

W. Burnside. On some properties of groups whose orders are power of primes. (Second paper.) Lond. M. S. Proc. (2) **13**, 6-12.

Burnside gibt die sämtlichen Systeme von unabhängigen erzeugende Operationen einer Gruppe von Primzahlpotenzordnung an. Die Anzahl de Operationen eines solchen Systemes ist gleich dem Index der Kommutator gruppe. Man gewinnt irgendein solches erzeugendes System, indem man au jeder der Nebengruppen der Kommutatorgruppe ein Element nimmt.

Alsdann betrachtet Burnside die Reihe der Kommutatorgruppen un macht Angaben über ihre Minimalordnung.

Betrachtungen über die größten ausgezeichneten Abelschen Untergruppe beschließen die Arbeit.

Eine jede ausgezeichnete Untergruppe einer Gruppe von Primzahlpotenz ordnung enthält eine ausgezeichnete maximale Abelsche Untergruppe, di zugleich eine ausgezeichnete Untergruppe der Gesamtgruppe ist. Bi.

R. Remak. Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren. Sitzungsber. Phys.-mathem. Ges. a. d. Univ. Kiew 1913, 9 S.

Unter Benutzung eines Gedankens von O. Schmidt baut Remak de ursprünglichen Gedankengang von Maclagan Wedderburn zu einem volle Beweis aus. Dieser hatte zuerst erkannt, daß eine jede Gruppe im wesentliche nur auf eine Weise als das direkte Produkt unzerlegbarer Faktoren dargestell werden kann (F. d. M. **40**, 192, 1909). Der so gefundene Beweis ist etwa kürzer als der erste von Remak (F. d. M. **42**, 156, 1911). Vgl. indessen da folgende Referat über eine Arbeit von O. Schmidt. Bi.

O. Schmidt. Sur les produits directs. S. M. F. Bull. **41**, 161-164.

O. Schmidt gibt hier einen sehr einfachen und durchsichtigen Beweis dafür, daß jede Gruppe im wesentlichen nur auf eine Weise als direktes Produkt unzerlegbarer Gruppen dargestellt werden kann. Bi.

J. A. de Séguier. Sur les produits directs et sur la structure de leurs diviseurs maximums. S. M. F. Bull. **41**, 164-169.

Gegen den von de Séguier gegebenen Beweis (F. d. M. **43**, 198, 1912)

haben Remak und Schmidt in einem Punkte Einwendungen erhoben. Der Verf. sucht sein Versehen hier zu berichtigen. Bi.

J. A. DE SÉGUIER. Sur les groupes quadratiques et hermitiens dans un champ de Galois. C. R. **157**, 430-432.

Es werden diejenigen Gruppen eines Kongruenzkörpers untersucht, welche eine quadratische oder Hermitesche Form dieses Körpers invariant lassen. Bi.

F. LEVI. Arithmetische Gesetze im Gebiete diskreter Gruppen. Palermo Rend. **35**, 225-236.

Bereits Dedekind hat gelegentlich die Axiome der Teilbarkeit und des größten gemeinsamen Teilers in einer Form ausgesprochen, die die Übertragung der Fragestellung von der Abelschen Gruppe der gewöhnlichen ganzen Zahlen auf beliebige Abelsche Gruppen erlaubt. Der Verf. greift diese Ansätze auf. Er untersucht namentlich Abelsche Gruppen, gibt aber auch nicht-Abelsche Gruppen an, in welchen sich der größte gemeinsame Teiler definieren läßt. Bi.

J. ANDERSSON. Über eine Klasse von Untergruppen einer Abelschen G_n^m. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. 8, Nr. 37, 70 S.

$\Sigma_0(1^{(0)}\,2^{(0)}\ldots n^{(0)}),\ \Sigma_1(1^{(1)}\,2^{(1)}\ldots n^{(1)}),\ldots,\ \Sigma_{m-1}(1^{(m-1)}\,2^{(m-1)}\ldots n^{(m-1)})$ seien m Operationen der Ordnung n, die eine Abelsche $G_n^m=[\Sigma_0,\Sigma_1,\ldots,\Sigma_{m-1}]$ erzeugen. Untersuchung derjenigen Untergruppen von G_n^m, welche bei zyklischer Vertauschung der Σ-Indexe invariant sind. Der Verf. nennt sie H-Gruppen. Lp.

G. A. MILLER. On the representation groups of given abstract groups. American M. S. Trans. **14**, 444-452; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 447-448.

Die Theorie der Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen hat I. Schur auf die Betrachtung einer speziellen Klasse von Gruppen gegründet, die er Darstellungsgruppen der gegebenen genannt hat. Sie sind die größten Gruppen, welche ausgezeichnete Untergruppen aus invarianten Elementen ihres Kommutators besitzen, deren Faktorgruppen mit der gegebenen Gruppe einstufig isomorph sind. Der Verf. geht mit elementaren Hülfsmitteln an diese Gruppen heran und leitet einige ihrer Eigenschaften ab, um so die von Schur mit Hülfe der Gruppencharaktere gewonnenen Resultate zu ergänzen. Freilich scheinen die tieferen und wichtigeren Eigenschaften dieser Gruppen seiner Methode zu entgehen. Bi.

G. A. MILLER. Groups containing a given number of operators whose orders are powers of the same prime number. American J. **35**, 1-9.

Der Verf. teilt die Gruppen, deren Ordnung durch p^m, aber keine höhere

Potenz der Primzahl p teilbar ist, ein nach der Zahl ihrer Untergruppen der Ordnung p^m. Nach dem Sylowschen Satz ist diese $kp+1$. Weiter ist nach einem Satz von Frobenius die Zahl der Elemente der Gruppe, deren Ordnung eine Potenz von p ist, ein Vielfaches von p^m. Die Zahl dieser Elemente ist nun offenbar gleich p^m, wenn es nur eine Untergruppe der Ordnung p^m gibt. Falls aber deren $p+1$ vorhanden sind, so zählt Miller ab, daß es dann immer genau p^{m+1} Elemente der Ordnung p^a gibt. Gibt es $2p+1$ Untergruppen, so ist die Zahl ihrer verschiedenen Elemente $p^m(2p-1)$. Gibt es noch mehr Untergruppen, so ist die Zahl noch größer. Sie kann also nie einem beliebigen Vielfachen von p^m gleich sein. Bi.

G. A. Miller. Second note on the groups generated by operators transforming each other into their inverses. (A correction.) Quart. J. **44**, 142-146.

Miller berichtigt hier einen Fehler, auf den ihn I. Schur zweimal nacheinander hingewiesen hat (siehe F. d. M. **37**, 170, 1906 und **40**, 189, 1909). Sein Resultat ist dieses: Alle Gruppen, die sich aus m Operatoren erzeugen lassen, deren jeder jeden anderen in seinen reziproken transformiert, sind endlich, und ihre Ordnungen haben die Werte 2^n. Zu jedem $n>1$ gehört eine und nur eine Gruppe, deren Angabe dem Verf. nach dreimaligem Anlauf nun wirklich gelingt. Bi.

G. A. Miller. A non-abelian group whose group of isomorphism is abelian. Messenger (2) **43**, 124-125.

Einfaches Beispiel einer solchen Gruppe, deren Existenz bisher zweifelhaft war. Die Gruppe ist von der Ordnung 64 und besitzt eine Abelsche Gruppe von Isomorphismen von der Ordnung 128. Lp.

G. A. Milleh. A group of order p^m whose group of isomorphisms is of order p^a. Messenger (2) **43**, 126-128.

Beantwortung einer Frage aus Hilton, An introduction to the theory of groups of finite order (F. d. M. **39**, 193, 1908). Die gefundene Gruppe ist von der Ordnung p^9, wo p eine beliebige ungerade Primzahl ist. Lp.

G. A. Miller. A theorem in number theory proved by isomorphisms of special abelian groups. Tôhoku Math. J. **4**, 105-106.

Für jede Primzahl p ist $(p^m-1)(p^m-p)(p^m-p^2)\dots(p^m\pm p^{m-1})$ durch $m+1$ teilbar. Das erscheint als eine Folgerung daraus, daß die erstgenannte Zahl der Grad der Isomorphismengruppe einer Abelschen Gruppe der Ordnung p^m vom Typus $(1, 1, \dots, 1)$ ist, und daß diese eine Untergruppe besitzt, die mit der symmetrischen Gruppe von $m+1$ Elementen isomorph ist. Bi.

G. A. Miller. Some properties of the commutators arising from an operator of a given order. Quart. J. **44**, 326-330.

G. A. Miller. Maximal order of the multiplying group corresponding to a p-isomorphism of an abelian group of order p^m. Deutsche Math. Ver. **22**, 291-294.

G. A. Miller. Groups which contain an abelian subgroup of prime index. Annals of Math. (2) **14**, 95-100.

Es werden spezielle Resultate über spezielle Fragen gewonnen. Bi.

G. A. Miller. The product of two or more groups. Amer. Math.-Soc. Bull. (2) **19**, 303-310.

Wenn H_1 und H_2 irgend zwei Gruppen sind, so bezeichnet das Symbol $H_1 \cdot H_2$ die Gesamtheit der Produkte, die durch die Multiplikation jedes Operators von H_1 zur Rechten mit jedem Operator von H_2 entstehen. Eine notwendige und hinreichende Bedingung, daß diese Gesamtheit eine Gruppe bildet, ist: $H_1 \cdot H_2 = H_2 \cdot H_1$. Da $H_1 \cdot H_2$ stets aus den Inversen aller Operatoren von $H_2 \cdot H_1$ besteht, ohne Rücksicht darauf, ob dieses Produkt eine Gruppe bildet oder nicht, so darf man sagen, eine notwendige und hinreichende Bedingung, daß $H_1 \cdot H_2$ eine Gruppe ist, sei die, daß es den inversen Operator jedes einzelnen Operators umfaßt. Nach dieser Bestimmung werden in § 2 Substitutionen behandelt, die ein Produkt von Gruppen in sich selbst umwandeln, indem zunächst an einem Beispiel gezeigt wird, daß der in etwas unbestimmter Form ausgesprochene Satz falsch ist: Alle Substitutionen an n Buchstaben, die eine gegebene Funktion dieser Buchstaben in sich selbst verwandeln, bilden eine Gruppe. Danach wird zu Gruppen übergegangen, die Produkte Sylowscher Untergruppen sind. Hierbei ergibt sich unter anderm der Satz: Jede auflösbare Gruppe ist das Produkt nichtkonjugierter Sylowscher Untergruppen, und die Ordnung der Faktoren in diesem Produkt ist willkürlich. Lp.

G. A. Miller. Some properties of the group of isomorphisms of an abelian group. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 179; 364—368.

Da die Gruppe der Isomorphismen jeder Abelschen Gruppe das direkte Produkt der Isomorphismengruppen ihrer Sylowschen Untergruppen ist, so wird die Betrachtung auf die Isomorphismengruppe I einer Abelschen Gruppe G von der Ordnung p^m beschränkt, wo eine Primzahl ist. Nachdem die Anzahl der Sylowschen Untergruppen von der Ordnung p^m bestimmt ist, wird bewiesen, daß jede dieser Sylowschen Untergruppen in sich selbst unter I transformiert wird durch eine Gruppe von der Ordnung $p^m\,(p-1)^\lambda$, wo λ gleich der Gesamtzahl der Invarianten von G ist. Die Gruppe von der Ordnung $p^m\,(p-1)^\lambda$ enthält eine Abelsche Untergruppe von der Ordnung $(p-1)^\lambda$, die das direkte Produkt von λ zyklischen Untergruppen von der Ordnung $p-1$ ist. Eine notwendige und hinreichende Bedingung, daß I nur eine Untergruppe von der Ordnung p^m enthält, ist die, daß keine zwei de

Invarianten von G einander gleich sind. Wenn die Sylowschen Untergruppen von der Ordnung p^m Abelsche sind, so muß entweder G zyklisch sein, oder m kleiner als 3. Lp.

H. H. Mitchell. Determination of the finite quaternary linear groups. American M. S. Trans. **14**, 123-142.

Bagnera hat (F. d. M. **36**, 218, 1905) auf rein geometrischem Wege die endlichen Kollineationsgruppen des dreidimensionalen Raumes bestimmt, welche, auf ein geeignetes Koordinatentetraeder bezogen, Ähnlichkeitstransformationen enthalten. Mitchell unternimmt es in dieser Arbeit ebenfalls, auf rein geometrischem Wege die noch übrigen Gruppen zu bestimmen. Die über diese Gruppen seither bekannten Resultate finden sich dabei bestätigt. Bi.

H. H. Mitchell. On some systems of collineation groups. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 511; (2) **20**, 134-138.

„Jordan (Traité des substitutions p. 420 ff.) und Dickson (Amer. Math. Soc. Trans. **1**, 30-38) haben ein System linearer Gruppen in p^m Variabeln (p Primzahl) untersucht, die invariante Untergruppen von der Ordnung p^{2m+1} und p^{2m+2} enthalten. Als Kollineationsgruppe angesehen, enthält jede Gruppe dieses Systems eine invariante Untergruppe von der Ordnung p^{2m}, und die Quotientengruppe ist isomorph mit der speziellen Abelschen linearen Gruppe zu $2m$ Indexen. Aus der Existenz dieses Systems erschließt der Verf. für die ungeraden p die Existenz zweier Systeme von Kollineationsgruppen in $\frac{1}{2}(p^m \pm 1)$ Variabeln, die mit ihren Quotientengruppen isomorph sind. Alle drei Systeme sind für $m = 1$ von Klein und Hurwitz, für $m = 2$ von Klein, Witting und Burkhardt untersucht worden, besonders in Anbetracht ihrer Beziehung zu elliptischen und hyperelliptischen Funktionen.“ Lp.

H. W. Chapman. A note on the elementary theory of groups of finite order. Messenger (2) **42**, 132-134; **43**, 85.

In dem ersten Aufsatz wird bewiesen, daß, wenn H eine beliebige Untergruppe einer Gruppe G ist, man ein einziges System solcher zur Gruppe G gehörigen Operationen $S_1, S_2, \ldots, S_m$ finden kann, daß die Gruppe in einer der beiden Formen $S_1 H, S_2 H, \ldots, S_m H$ oder $HS_1, HS_2, \ldots, HS_m$ geschrieben werden kann. Dieses Ergebnis ist aber, wie in der zweiten Note angegeben wird, bereits von G. A. Miller in Quarterly J. **41**, 382-384 neben anderen abgeleitet (F. d. M. **41**, 174, 1910). Doch sei der Beweis des ersten Aufsatzes ein direkt aus den ersten Prinzipien folgender, während der Beweis von Miller die Theorie der Darstellung einer Gruppe als transitiv erfordere. Lp.

H. Bryon Heywood. On finite Abelian groups of substitutions, especially of orthogonal substitutions. Messenger (2) **43**, 14-21.

„Die Arbeit wurde auf Anregung von Harold Hinton ausgeführt, der die Verantwortung für § 2 übernimmt. Ihr Hauptziel ist die Klassifizierung endlicher Abelscher Gruppen orthogonaler Substitutionen; dies befindet sich in § 4. Vorangeht in § 1 ein Überblick über einige allgemeine, endliche Abelsche Gruppen betreffende Ergebnisse, die für die späteren Artikel notwendig sind, in § 2 die simultane Zurückführung solcher Substitutionsgruppen auf eine besondere kanonische Form, in § 3 einige auf §§ 1 und 2 sich stützende Resultate über diese Gruppen.“ Lp.

W. A. Manning. The primitive groups of class twelve. American J. **35**, 229-260.

Der Verf. bestimmt alle primitiven Permutationsgruppen der Klasse 12, die höchstens den Grad 21 haben. Bi.

M. Sono. On some groups of order p^m, which contain operators of order p^{m-a}. Kyôto Imp. Univ. Mem. **5**, 33-82.

Die Gruppen von der Ordnung p^m (p eine ungerade Primzahl), die Operatoren von der Ordnung p^{m-a} und keinen von höherer Ordnung enthalten. Besondere Fälle, bei denen $a = 1, 2, 3$ ist, sind früher von Burnside, Miller und Neikirk erörtert worden. Hier werden die Gruppen bestimmt, von denen jede einzelne mindestens einen Operator enthält, dessen p^{a-1}-te Potenz nicht irgendeiner ihrer zyklischen Untergruppen von der Ordnung p^{m-a} angehört (Rev. sem. **22**$_2$, 12). Lp.

M. Sono. On groups defined by quaternions. Tôhoku Math. J. **4**, 114-119.

Der Verf. betrachtet Gruppen, deren Elemente Quaternionen sind, und deren Elemente nach den Regeln der Quaternionenmultiplikation zusammengesetzt werden. Bi.

L. E. Dickson. On binary modular groups and their invariants. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 132-134.

„Jede binäre modulare Transformation T multipliziert eine lineare Funktion von x mit einer Konstante. Diese Konstante ist 1, wenn T von der Periode p ist. Mithin kann man nach einer passenden Wahl der Variabeln annehmen, unsere Gruppe G enthalte $T: x' \equiv x + y, y' \equiv y \pmod{p}$. Satz: Entweder ist G die Gruppe aller binären Transformationen mit ganzzahligen Koeffizienten von der Determinante 1 modulo p, oder sonst ist jede Transformation von G von der Form $x' \equiv tx + ly, y' \equiv t^{-1}y \pmod{p}$. Lp.

Th. Got. Sur les domaines fondamentaux de certains groupes fuchsiens. S. M. F. C. R. 1913, 47-48.

„Unter den Fuchsschen arithmetischen Gruppen von Poincaré gehören die auf die Formen vom Typus $f = x^2 - \varphi(y, z)$ bezüglichen, wo φ eine definite positive quadratische Form ist, zu den interessantesten. Diese Formen spielen nämlich in der Theorie der doppelt singulären Abelschen Funktionen von Humbert eine wichtige Rolle. Neben den Methoden der kontinuierlichen Reduktion (Hermite-Selling) und der Erweiterung der Gruppe durch Symmetrien (Klein) gestattet die Strahlungsmethode von Fricke, ihren normalen Grundbereich und somit ihre erzeugenden Substitutionen zu bestimmen.“ Dies wird an einigen Beispielen gezeigt. Lp.

E. Cartan. Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane. S. M. F. Bull. **41**, 53-96.

Um die Bestimmung aller primitiven Gruppen von Punkttransformationen mit Erfolg in Angriff nehmen zu können, muß man alle projektiven Gruppen kennen, die nichts Ebenes invariant lassen. Kowalewski und seine Schüler haben die letztere Aufgabe für die Räume von 4, 5 und 6 Dimensionen gelöst (F. d. M. **30**, 1899, 335; **38**, 1907, 688; **39**, 1908, 209), aber die dabei benutzte Methode ist nicht geeignet, zur allgemeinen Lösung der Aufgabe zu führen. Cartan gibt hier die allgemeine Lösung, indem er sich auf die von Killing und von ihm selbst herrührende Theorie der einfachen und der halbeinfachen Gruppen stützt. Sein Ergebnis ist folgendes: Jede projektive Gruppe, die nichts Ebenes invariant läßt, ist entweder einfach oder halbeinfach. Zu jeder Zusammensetzung, die eine r-gliedrige einfache Gruppe vom Range l haben kann, gehören l fundamentale lineare homogene Gruppen $g_1, \dots, g_l$ von dieser Zusammensetzung. Man schreibt die Transformationsgleichungen von $g_1, \dots, g_l$ nebeneinander in l verschiedenen Reihen von Veränderlichen $x_i', x_i'', \dots, x_i^{(l)}$ und erhält so eine Gruppe g. Sodann wählt man nach einer bestimmten Regel unter den Veränderlichen jeder Gruppe g_k eine gewisse aus, die $x_1^{(k)}$ heißen möge, und transformiert den Ausdruck

$$(x_1')^{p_1} (x_1'')^{p_2} \dots (x_1^{(l)})^{p_l},$$

wo $p_1, \dots, p_l$ ganze Zahlen $\geqq 0$ bedeuten, vermöge der Gruppe g. Man erhält so eine bestimmte Anzahl linear unabhängiger Ausdrücke, und die Gruppe, die angibt, wie diese Ausdrücke bei g transformiert werden, ist eine Gruppe von der betreffenden Zusammensetzung, die nichts Ebenes invariant läßt. Auf die angegebene Weise erhält man alle Gruppen dieser Art. Aus diesen Gruppen wiederum erhält man die halbeinfachen Gruppen, die nichts Ebenes invariant lassen, durch eine Art Multiplikation. Sind nämlich z. B. g in den Veränderlichen $x_1, \dots, x_m$ und g' in den Veränderlichen $y_1, \dots, y_n$ zwei einfache Gruppen, die nichts Ebenes invariant lassen, so stellt man die Gruppe auf, durch die die mn Produkte $x_i y_k$ bei g und g' transformiert werden, und erhält so eine halbeinfache Gruppe, die nichts Ebenes invariant läßt. In ähnlicher Weise kommt man immer zum Ziele. Der Verf. stellt für alle Typen von Zusammensetzungen einfacher Gruppen die zugehörigen fundamentalen linearen homogenen Gruppen auf. Für die allgemeine projektive Gruppe des R_l

findet man z. B. als fundamentale Gruppen die spezielle lineare homogene Gruppe in $l+1$ Veränderlichen und die Gruppen, durch die bei dieser die Plückerschen Koordinaten der k-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeiten ($k=1, 2, \ldots, l-2$) des R_l transformiert werden. In den anderen Fällen ist das Ergebnis weniger einfach zu beschreiben. Bemerkt sei noch, daß der Verf. nur die Gruppen im Gebiete komplexer Veränderlicher betrachtet. Die entsprechende Untersuchung im reellen Gebiete, bei der natürlich zu den hier gefundenen Gruppen noch eine ganze Anzahl von neuen hinzukommt, behält er sich für später vor. El.

Weitere Literatur.

L. Autonne. Sur les groupes commutatifs et pseudo-nuls de quantités hypercomplexes. Ann. Univ. Lyon (2) **31**, IV + 92 S. 8°. Lyon: A. Rey; Paris: Gauthier-Villars (1912). Anzeige in Bull. des sc. math. (2) **36**, 301-303 von Le Vavasseur.

R. P. Baker. The genus of a group. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 79.

E. R. Bennett. Transitive groups of degree 107. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 221.

E. R. Bennett. The order of the product of two substitutions. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 221.

H. F. Blichfeldt. On the order of linear homogeneous groups. (Fifth paper.) Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 78-79.

J. E. Burns. The abstract definitions of the groups of degree eight. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 62.

W. B. Fite. Some theorems concerning groups whose orders are powers of a prime. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 301.

G. A. Miller. Errors in the literature on groups of finite order. Amer. Math. Monthly **20**, 14-20.

J. M. Schottenfels. Proof that there is but one simple group of order $\frac{1}{2}\cdot 7!$ Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 296-297.

J. M. Schottenfels. A set of generators for quaternary linear groups. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 452-453.

J. Suták. Zur Theorie der linearen Gruppen. Math. és phys. lapok **22**, 1-22.

B. Determinanten.

C. E. Cullis. Matrices and determinoids. Vol. I. Cambridge: University Press XII u. 430 S. 8°. (University of Calcutta readership lectures).

Dieses Buch enthält die Vergrößerung eines Kursus von Vorlesungen, die an der Universität von Calcutta im Winter 1909/10 gehalten sind. Sein Grundzug besteht darin, daß es rechtwinklige Matrizen und Determinoiden behandelt als

unterschieden von quadratischen Matrizen und Determinanten; die Determinoide einer rechtwinkligen Matrize steht zu der letzteren auf dieselbe Weise in Beziehung wie eine Determinante zu einer quadratischen Matrize. Die Definition der Determinoide der Matrize A ist die algebraische Summe aller ihrer vollständigen abgeleiteten Produkte, wenn jedes Produkt mit positivem oder negativem Vorzeichen versehen wird gemäß einer gewissen Zeichenregel. Dieser Band enthält die fundamentalsten Teile der Theorie; er schließt mit der Lösung eines beliebigen Systems linearer algebraischer Gleichungen, die als ein besonderer Fall der Lösung einer Matrizengleichung ersten Grades behandelt wird. Das erste Kapitel enthält eine einleitende Übersicht über rechtwinklige Matrizen und Determinoiden und eine Beschreibung mancher abgekürzten Bezeichnungen, die im Zusammenhang mit ihnen gebraucht werden sollen. Im zweiten Kapitel werden die „Affekte" der Elemente und abgeleiteten Produkte einer Matrize oder Determinoide definiert und mehrere Wege zu ihrer Gewinnung beschrieben; auch werden mannigfache Folgerungen aus Wechseln in den Reihen einer Matrize oder Determinoide untersucht. Das dritte Kapitel handelt von Sequenzen und den Affekten abgeleiteter Sequenzen, das vierte über die Affekte abgeleiteter Matrizen und abgeleiteter Determinoiden, das fünfte über die Entwicklungen einer Determinoide in Gliedern aus verschiedenartigen Elementen. In dem sechsten Kapitel werden nach der Gleichheit von Matrizen die Addition und Subtraktion von Matrizen und die Multiplikation einer Matrize mit einer skalaren Zahl betrachtet; das Produkt zweier Matrizen wird definiert, und die Haupteigenschaften eines solchen Produktes werden erörtert, ebenso die Eigenschaften eines durch eine Vertauschung von Matrizenfaktoren gebildeten Produktes. In dem siebenten Kapitel werden die Determinoiden eines Produktes aus zwei gegebenen Matrizen behandelt, die Determinoide eines durch eine Kette von Matrizenfaktoren gebildeten Produktes und eine Verallgemeinerung, wobei genau entsprechende Ergebnisse erlangt werden für die algebraische Summe der betroffenen Minoren von einer beliebigen gegebenen Ordnung k aus einem Produkt gegebener Matrizen. Im Kapitel VIII werden die Matrizen aus Minoren betrachtet, und Kapitel IX handelt von dem Range einer Matrize und von Zusammenhängen zwischen den Reihen einer Matrize. Im Kapitel X werden Matrizengleichungen ersten Grades definiert und betrachtet, und das letzte Kapitel beschäftigt sich mit der Lösung eines beliebigen Systems linearer algebraischer Gleichungen, behandelt als spezieller Fall der Lösung einer Matrizengleichung ersten Grades. Ein zweiter, nahezu fertiger Band wird weitere Entwicklungen über die allgemeine Theorie bringen mit Einschluß einer Erörterung über Matrizengleichungen zweiten Grades. Er wird auch zahlreiche Anwendungen auf die Algebra und auf die analytische Geometrie von 2, 3 und n Dimensionen enthalten. Noch ein dritter Band ist geplant; er werde vornehmlich sich mit Anwendungen auf die Vektoranalysis und die Invariantentheorie beschäftigen. Im Hinblick auf diese zuletzt genannten Anwendungen ist besonders diese Darstellung unternommen worden. Der etwas lang gewordene Bericht ist gegeben, weil das Buch recht wichtig erscheint. (Vgl. Nature **91**, 579-580.)

J. (Lp.)

Th. Muir. The theory of axisymmetric determinants from 1857 to 1880. Edinb. Roy. Soc. Proc. **33**, 49-63.

In Edinb. Roy. Soc. Proc. **27**, 135-166 (F. d. M. 38, 196, 1907) beschäftigte

sich Muir mit der Theorie achsensymmetrischer Determinanten von 1841 bis 1857. Hier wird nach einem Bericht über einen Beitrag von d'Arrest (1857) die Geschichte von 1859 an weitergeführt mit Berichten über die Leistungen von N. M. Ferrers (1861), G. Boole (1862), F. H. Siebeck (1862), P. Freuchen (1863), M. Roberts (1864), J. J. Walker (1865), F. Caldarera (1871), E. Schultze (1871), E. Hunyady (1872), B. Williamson (1872), E. Buchwald (1872), E. Ritsert (1872), A. Cayley (1874), A. Cunningham (1874), S. Roberts (1874), H. Seeliger (1875), J. W. L. Glaisher (1874-78), J. W. L. Glaisher (1876), W. Trzaska (1876), V. Jamet (1877), G. de Longchamps (1877), C. Le Paige (1879), J. Wolstenholme (1879).
J.

M. Lecat. Les déterminants à plusieurs dimensions. Exposé succinct de leurs principales propriétés (suite et fin). Tôhoku Math. J. **3**, 1-8.

Die Darstellung der Haupteigenschaften der mehrdimensionalen Determinanten wird fortgesetzt.
Jhk.

R. Weitzenböck. Über eine Erweiterung des Determinantenbegriffes. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **21**, 111-128.

Der Verf. betrachtet quadratische Matrizen, deren Elemente nicht mehr gewöhnliche komplexe Größen sind, sondern Größen, für die die gewöhnlichen Rechenregeln nicht gelten. Denken wir uns z. B. Punkte als Elemente und für das Multiplizieren die Regeln der äußeren Multiplikation vorgeschrieben, so wird die Determinante $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = [A_1 B_2] + [B_1 A_2]$, insbesondere also wird die Determinante $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}$ nicht verschwinden, sondern den Wert $2\,[A_1 A_2]$ annehmen. Entsprechend wird die Determinante $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = 3!\,[A_1 A_2 A_3]$.

Wie man sieht, treten hier Verbindungen auf, wie z. B. im R_3 die Plückerschen Linienkoordinaten p_{ik} einer Geraden. Allgemein führt nun der Verf. n Zeichen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ein, die er Komplexsymbole nennt, und für die das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht mehr gelten soll: $p_1 p_2 = - p_2 p_1$. Für diese „orientierten" Determinanten werden die Rechenregeln abgeleitet. Hieran anschließend, werden als Anwendung zwei für die projektive Invariantentheorie fundamentale Identitäten entwickelt.
Jhk.

R. Weitzenböck. Bemerkungen zu meiner Arbeit: Über eine Erweiterung des Determinantenbegriffes. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **21**, 301-303.

Der Verf. hatte in seiner Archivarbeit einen Satz mitgeteilt, der sich auf das Verschwinden einer orientierten Determinante bezieht. Dieser Satz bedarf einer ausführlicheren Fassung und wird in der vorliegenden Notiz durch eine Reihe weiterer Sätze ergänzt.
Jhk.

C. Stéphanos. Sur une propriété caractéristique des déterminants. Annali di Mat. (3) **21**, 233-236.

Bekanntlich ist die Determinante des Systems $c_{ij} = \Sigma a_{ik} b_{kj}$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, m)$ gleich dem Produkt der Determinanten der beiden Systeme a_{ij} und b_{ij}. Der Verf. stellt die Frage, ob eine entsprechende Eigenschaft noch anderen Funktionen $f(x)$ der m^2 Variablen x_{ij} zukommt, die so beschaffen sind, daß $f(x)\,f(y) = f(z)$ wird für $z_{ij} = \Sigma x_{ik} y_{kj}$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, m)$ für alle Werte von x_{ij} und y_{ij}. Die Antwort lautet, daß alle Funktionen $f(x)$ von der verlangten Eigenschaft die Form haben $f(x) = |\, x_{ij} \,|^n$. Dabei wird nur vorausgesetzt, daß sich $f(x)$ nach den Variablen x_{ij} einmal differenzieren lasse. Jhk.

V. Simandl. Über eine besondere Art der Determinanten. Časopis **42**, 534-545. (Böhmisch.)

Der Verf. betrachtet gewisse spezielle Determinanten, deren spezieller Fall die Determinanten von Puchla-Noether und die Determinanten von Cayley und Sylvester (Quart. Journ. **2**, 163; Nouv. Ann. de Math. **13**, 305) sind, und die er ebenfalls als Produkt von linearen Faktoren darstellt. Pe.

Th. Muir. Product-determinants of the same form of their factors. Messenger (2) **43**, 1-9.

Wird die Determinante vierter Ordnung

$$\begin{vmatrix} x & bcy & caz & abw \\ -y & x & -aw & az \\ -z & bw & x & -by \\ -w & -cz & cy & x \end{vmatrix} = R(x, y, z, w)$$

gesetzt, so findet der Verf., daß

$$R(x, y, z, w) \cdot R(\xi, \eta, \zeta, \omega) = R(X, Y, Z, W),$$

wo X, Y, Z, W lineare Formen von x, y, z, w und ξ, η, ζ, ω bedeuten. Da nun $R(x, y, z, w) = (x^2 + bcy^2 + caz^2 + abw^2)$, so ergibt sich die Identität

$$(x^2 + bcy^2 + caz^2 + abw^2)(\xi^2 + bc\eta^2 + ca\,\zeta^2 + ab\omega^2) \\ = X^2 + bcY^2 + caZ^2 + abW^2,$$

die eine bekannte Eulersche Identität als Spezialfall umfaßt. Eine entsprechende Überlegung wird für eine Determinante achter Ordnung angestellt. Jhk.

Th. Muir. Note on double alternants. South Africa R. S. Trans. **3**, 177-185.

Es werden Determinanten der Form $|\,(\alpha_i + \beta_k)^p\,|$ $(i, k = 1, 2, 3, 4, 5)$ untersucht. Am Schluß findet sich der interessante Satz, daß, wenn alle Elemente einer nullachsialen schiefen Determinante um 1 vermehrt werden, die ent-

stehende Determinante ein vollständiges Quadrat wird, ganz unabhängig von der Ordnung der Determinante. Jhk.

Th. Muir. Note on an overlooked theorem regarding the product of two determinants of different orders. South Africa R. S. Trans. 3, 271-273.

Es wird auf einen Determinantensatz hingewiesen, der sich in C. R. 138 findet und so lautet: Führt man die n ersten Glieder der k-ten Reihe der Determinante $| a_{ik} |$ $(i, k = 1, 2, \ldots, m)$ in die s-te Reihe der Determinante $| b_{ik} |$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ $(m > n)$ ein und bezeichnet das Ergebnis der Substitution mit B_{ks}, so ist

$$\alpha_{1r} B_{1k} + \alpha_{2r} B_{2k} + \cdots + \alpha_{mr} B_{mk} = A\beta_{kr},$$

wo α_{ir}, β_{kr} die zum r-ten Element der i-ten und k-ten Reihe in A, bzw. B gehörigen Unterdeterminanten bedeuten. Der Satz kommt darauf hinaus, das Produkt zweier Determinanten p-ter und q-ter Ordnung $(p > q)$ als Summe von Produkten zweier Determinanten $(p-1)$-ter und $(q+1)$-ter Ordnung darzustellen. Jhk.

Th. Muir. Note on Clebsch's theorem regarding the second set of jacobians derived from $n+1$ homogeneous integral functions of n variables. South Africa R. S. Trans. 3, 393—397.

Der Verf. beweist auf einem einfachen und unmittelbaren Wege den von Clebsch gefundenen Satz: Bedeuten u_1, u_2, u_3, u_4 homogene Funktionen m-ten Grades in x, y, z und v_1, v_2, v_3, v_4 die zugehörigen, aus den u gebildeten Funktionaldeterminanten:

$$v_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_4}{\partial x} & \frac{\partial u_4}{\partial y} & \frac{\partial u_4}{\partial z} \end{vmatrix} = I(u_2, u_2, u_4), \ldots, v_4 = - \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{vmatrix} = - I(u_1 u_2 u_3),$$

so sind die u_1, u_2, u_3, u_4 proportional bzw. zu $I(v_2 v_3, v_4)$, $-I(v_1, v_3, v_4)$, $I(v_1, v_2, v_4)$, $-I(v_1, v_2, v_3)$. Jhk.

O. Dziobek. Über allgemeine Determinantentransformationen. Sitzungsb. Berl. Math. Ges. 12, 76-82.

Eine dieser Transformationen, die noch nicht bemerkt worden zu sein scheinen, ist die folgende: Man betrachte außer den n^2 Elementen einer Determinante ihre sämtlichen Unterdeterminanten und bezeichne alle diese Größen mit A_μ, von denen immer je zwei einander zugehören, etwa A_p und A_q. Nun dividiere man die A_μ durch eine von ihnen, etwa A_p, und schreibe $\frac{A_\mu}{A_p} = A'_\mu$. Alsdann läßt sich A'_q als eine Determinante von n^2 anderen der Größen A'_μ darstellen; die übrigbleibenden unter den A'_μ werden zu Unterdeterminanten aller

Grade. So geht die Determinante dritter Ordnung $\varDelta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ mit den Unterdeterminanten $\alpha_1, \ldots, \beta_1, \ldots, \gamma_1, \ldots, \gamma_3$ und der Einheit als Unterdeterminante nullter Ordnung über in:

$$c_3' = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & -\beta_3' \\ b_1' & b_2' & \alpha_3' \\ \gamma_2' & -\gamma_1' & \varDelta' \end{vmatrix}, \text{ woraus } \gamma_3^2 c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & -\beta_3 \\ b_1 & b_2 & \alpha_3 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & \varDelta \end{vmatrix}.$$

Jhk.

W. Blaschke. Ein Beweis für den Determinantensatz Hadamards. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **20**, 277-279.

Der Verf. gibt für den schon auf so mannigfache Art bewiesenen Hadamardschen Satz einen neuen, rein algebraischen Beweis durch ein schrittweises Verfahren. Wird der Beweisgang für den Fall einer Determinante dritter Ordnung vektoranalytisch gedeutet, so kommt er darauf hinaus, daß man drei Vektoren $a_{11}\,\mathfrak{e}_1 + a_{12}\,\mathfrak{e}_2 + a_{13}\,\mathfrak{e}_3$, $a_{21}\,\mathfrak{e}_1 + a_{22}\,\mathfrak{e}_2 + a_{23}\,\mathfrak{e}_3$, $a_{31}\,\mathfrak{e}_1 + a_{32}\,\mathfrak{e}_2 + a_{33}\,\mathfrak{e}_3$ hat, deren Determinante $D = |\,a_{ik}\,|$ nicht verschwindet. Diese Determinante stellt aber das Volumen des aus den drei Vektoren gebildeten Quaders dar, das bekanntlich am größten wird, wenn die Vektoren aufeinander senkrecht stehen. Dieser Maximalwert ist dann gleich dem Produkt der Vektorlängen. Jhk.

O. Szász. Ein elementarer Beweis des Hadamardschen Determinantensatzes. Ung. Ber. **27**, 172-180.

Der Aufsatz ist die Übersetzung einer in ungarischer Sprache erschienenen Note aus dem Jahre 1910, die erst jetzt weiteren Kreisen bekannt wird, mit Hinzufügung eines neuen Abschnittes § 3. Die vom Verf. benutzte Beweismethode unterscheidet sich nur wenig von derjenigen, die T. Boggio in einer 1911 erschienenen Arbeit mitgeteilt hat (vgl. F. d. M. **42**, 175, 1911). In § 2 wird eine von E. Fischer gegebene Verallgemeinerung des Hadamardschen Satzes mit Benutzung eines Weierstraßschen Satzes abgeleitet, der sich auf die stetigen Funktionen bezieht. § 3 bringt noch einen Beweis des Fischerschen Satzes, der eine Beweisführung verallgemeinert, die Nanson (1901) beim Beweis des Hadamardschen Satzes verwendet hat. Jhk.

A. C. Dixon. On the greatest value of a determinant whose constituents are limited. (Proof of Hadamard's theorem.) Camb. Phil. Soc. Proc. **17**, 242-243.

Ein durch vollständige Induktion geführter Beweis, daß eine gewisse Determinante nicht ihr Leitglied übertreffen kann. Das Ergebnis liefert den Hadamardschen Satz, der von Fredholm in der Theorie der Integralgleichungen gebraucht ist. J. (Lp.)

A. M. Molinari. Sul teorema di Hadamard. Rom. Acc. L. Rend. **22**₂, 11-12.

Einfacher geometrischer Beweis des bekannten Hadamardschen Determinantensatzes für den Fall reeller Elemente. Jhk.

L. Tocchi. Generalizzazione d'un teorema sui determinanti. Periodico di Mat. **29** [(3) **11**], 53-56.

In der Sprache des Verf. lautet der Satz: „Wenn eine Determinante von der Ordnung n Null ist und die Charakteristik $p \leqq n-1$ hat, dann sind die Minoren p-ter Ordnung einer Matrix von p Spalten den entsprechenden Minoren p-ter Ordnung jeder anderen Matrix von p Spalten gleich." Lp.

L. E. Dickson. On the rank of a symmetrical matrix. Annals of Math. (2) **15**, 27-28; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 456.

J. H. M. Wedderburn. Note on the rank of a symmetrical matrix. Annals of Math. (2) **15**, 29.

Eine Matrix (a_{ij}) hat den Rang r, wenn irgendeine Unterdeterminante M_r r-ten Grades nicht verschwindet, während jede Unterdeterminante $M_{r+1}(r+1)$-ten Grades Null ist. Enthält M_r genau r Elemente a_{ii} der Hauptdiagonale einer quadratischen Matrix (a_{ij}), so spricht man von einer Hauptunterdeterminante. Nun hat Kronecker den Satz gefunden, daß in einer symmetrischen Matrix vom Range r mindestens eine Hauptunterdeterminante r-ten Grades nicht verschwindet. Für diesen Satz werden neue Beweise gegeben. Der Beweis von Dickson benutzt die Tatsache, daß die Determinante eines Systems von n linearen homogenen Gleichungen mit n Variablen verschwinden muß, wenn es eine Lösung zuläßt, wo nicht alle Variablen gleich Null sind. Der Beweis von Wedderburn will die algebraische Natur des Satzes schärfer hervortreten assen. Jhk.

M. Bottasso. Sui sistemi di equazioni ottenuti da un determinante simmetrico di forme in più serie di variabili. Lomb. Ist. Rend. (2) **46**, 88-103.

Die vom Verf. entwickelten Sätze beziehen sich auf das Verschwinden einer Matrix $||a_{ik}||$ $(i=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,n)$ in Verbindung mit dem Verschwinden der Matrix $||a_{ik}||(i=1,\ldots,m-1;k=1,\ldots,n-1)$. Jhk.

G. Scorza. Sui determinanti emisimmetrici d'ordine pari e sui relativi pfaffiani. Palermo Rend. **36**, 171-176.

Neuer Beweis des Satzes, daß die schiefsymmetrische Determinante der Ordnung $2n$ sich als Quadrat einer ganzen rationalen Funktion ihrer Elemente,

der sogenannten Pfaffschen Funktion n-ter Ordnung, darstellen läßt. Außerdem wird eine einfache Formel zur Entwicklung dieser Pfaffschen Funktion mitgeteilt.
Jhk.

M. Lecat. **Unisignants à plusieurs dimensions.** Palermo Rend. **36**, 317-326.

Der Verf. untersucht die Unisignanten, das sind Determinanten, die in ihrer schließlichen Entwicklung nur Glieder mit positiven Vorzeichen aufweisen, im Gebiete von mehr als zwei Dimensionen.
Jhk.

O. Hölder. **Über einige Determinanten.** Leipz. Ber. **65**, 110-120.

Es wird bewiesen, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & a & a & \dots & a \\ b & \sigma_2 & a & \dots & a \\ b & b & \sigma_3 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & \sigma_n \end{vmatrix}$$

den Wert hat

$$\frac{1}{a-b}\left\{a\prod_{\nu=1}^{n}(\sigma_\nu - b) - b\prod_{\nu=1}^{n}(\sigma_\nu - a)\right\}.$$

Insbesondere wenn $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n = \sigma$ und $b = a = 1$, hat die Determinante den Wert $(\sigma-1)^{n-1}\{\sigma+n-1\}$, und wenn $b = -a = i$, hat sie den Wert $\frac{1}{2}\{(\sigma+i)^n + (\sigma-i)^n\}$.
Jhk.

G. Usai. **Una generalizzazione di determinanti tipo Lauricella.** Palermo Rend. **35**, 245-252.

Lauricella hatte die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \end{vmatrix}$$

berechnet für den Fall, daß die Elemente

$$a_i = 1.3\dots(2r-2i+1)\,1.3\dots(2s+2i-1)$$

sind und die ganzen Zahlen r, s den Bedingungen genügen $r \geqq 2n-1$, $s \geqq 0$. Der Verf. nimmt die a_i allgemeiner an in der Form

$$a_i = \prod_{k=0}^{r-i}(b+kd)\prod_{k=0}^{s+i-1}(c+kd),$$

mit b, c, d, r, s als positiven ganzen Zahlen, wo wieder $r \geqq 2n-1$, $s \geqq 0$, und bestimmt den Wert der zugehörigen Determinante.
Jhk.

G. ANDREOLI. Nuova generalizzazione di un teorema sui determinanti di Cauchy. Batt. G. **51** [(4) **3**], 264-270.

In Rom. Acc. L. Mem. **14** (1882-83) hatte Besso den folgenden Satz mitgeteilt: Die Determinante $2n$-ter Ordnung

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & \dots x_n & 1 & \dots & 1 \\ x_1^2 & \dots x_n^2 & 2x_1 & \dots & 2x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{2n-1} & \dots x_n^{2n-1} & (2n-1)\,x_1^{2n-2} & \dots & (2n-1)\,x_n^{2n-2} \end{vmatrix}$$

ist gleich der mit $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ multiplizierten vierten Potenz der Cauchyschen Determinante, die sich aus den $x_1, \dots, x_n$ zusammensetzt. Der Verf. verallgemeinert diese Determinante, indem er die Potenzen durch Polynome ersetzt und nicht bloß, wie Besso, die ersten, sondern auch höhere Ableitungen einführt.
Jhk.

F. SIBIRANI. Un teorema sui determinanti. Lomb. Ist. Rend. (2) **46**, 822-830.

Ein Determinantensatz, den Vivanti in derselben Zeitschrift **45**, 556-559 mitgeteilt hat (F. d. M. **43**, 210, 1912), wird verallgemeinert. Jhk.

C. M. ROSS. Question 17 366. Ed. Times, (2) **23**, 103.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} & \dots & \frac{\partial}{\partial u_n} \\ \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} & \frac{\partial^2}{\partial u_3^2} & \dots & \frac{\partial^2}{\partial u_n^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^{n-1}}{\partial u_1^{n-1}} & \frac{\partial^{n-1}}{\partial u_2^{n-1}} & \frac{\partial^{n-1}}{\partial u_3^{n-1}} & \dots & \frac{\partial^{n-1}}{\partial u_n^{n-1}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ u_1 & u_2 & u_3 & \dots u_n \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & \dots u_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{n-1} & u_2^{n-1} & u_3^{n-1} & \dots u_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= 1!\ 2!\ 3!\ 4!\ \dots\ (n-2)!\ n!\ n^{n-1}.$$

Beweise von C. E. Wright und vom Aufgabensteller. Gd.

C. B. BIEZENO. Vraagstuk CXV. Wisk. Opgaven **11**, 302.

Der Wert der Determinante

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a & \dots & a \\ -a & a & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^{n-2} \\ -a & -a & a & c_n & \dots & c_n^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a & -a & -a & -a & \dots a & c_n \\ -a & -a & -a & \dots & -a & a \end{vmatrix}$$

ist gleich $2^{n-1} a^n$. Schn.

P. Martinotti. Sul Wronskiano. Lomb. Ist. Rend. (2) **46**, 133-136.

Die Wronskische Determinante eines Systems von n Funktionen $f_1, \dots, f_n$ sei

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

und die algebraischen Ergänzungen der Elemente der r-ten Horizontalreihe seien $D_{r1}, \dots, D_{rn}$, dann besteht für ihre Ableitungen der Satz:

$$D'_{r1} : D'_{r2} : \dots : D'_{rn} = D'_{s1} : D'_{s2} : \dots : D'_{sn}.$$ Jhk.

P. Martinotti. Il Wronskiano e la dipendenza lineare di n funzioni di una variabile reale. Palermo Rend. **35**, 384-393.

Soll zwischen n Funktionen $f_1, \dots, f_n$ eine lineare homogene Relation im Intervall (a, b) bestehen, so ist nicht immer, wie Peano bemerkt hat, das Verschwinden der zugehörigen Wronskischen Determinante die notwendige und hinreichende Bedingung dafür. Wie weiterhin Peano und Vivanti bemerkt haben, muß als hinreichende Bedingung noch hinzugenommen werden, daß die algebraischen Ergänzungen der Elemente der letzten Horizontalreihe in der Wronskischen Determinante nicht sämtlich in einem und demselben Punkte des Intervalls (a, b) verschwinden dürfen. Der Verf. hatte bereits in einer früheren Notiz (vgl. das vorstehende Referat) hinzugefügt, daß es genügt, an Stelle der letzten Horizontalreihe eine beliebige Horizontalreihe zu nehmen. Die vorliegende Arbeit bringt den weiteren Zusatz, daß in den Punkten des Intervalls, wo die algebraischen Ergänzungen der Elemente einer beliebigen Horizontalen der Wronskischen Determinante gleichzeitig verschwinden, die Verhältnisse dieser Ergänzungen stetige Funktionen sein müssen. Jhk.

G. Scorza. Sopra una certa classe di determinanti e sulle forme hermitiane. Batt. G. **51** [(4) **3**], 335-342.

Gegenstand der Arbeit ist die Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine Hermitesche Form $\Sigma(\alpha_{rs} + i\beta_{rs})(\xi_r + i\eta_r)(\xi_s - i\eta_s)$, für $\alpha_{rs} = \alpha_{sr}$, $\beta_{rs} + \beta_{sr} = 0$ $(r, s = 1, 2, \dots, p)$ definit sei. Der Verf. erreicht sein Ziel durch Verwendung der Eigenschaften einer gewissen Klasse von Determinanten, zu denen er kommt, ausgehend von der bekannten Determinante $\begin{vmatrix} |a_{ik}|, & -|b_{ik}| \\ |b_{ik}|, & |a_{ik}| \end{vmatrix} = |a_{ik} + i\beta_{ik}| \cdot |a_{ik} - i\beta_{ik}|$.

Jhk.

R. Mehmke. Graphische Berechnung von Determinanten beliebiger Ordnung. Zs. f. Math. u. Phys. **62**, 209-218.

Den Ausgangspunkt bildet die Bemerkung, daß $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ den doppelten Inhalt des Dreiecks $(0, 0)$, (a_1, b_1), (a_2, b_2) angibt. Dieses Dreieck wird in ein

rechtwinkliges verwandelt. Ebenso kann man im Raum vorgehen, wenn eine Determinante dritter Ordnung vorliegt, und in höheren Räumen, wenn die Ordnungszahl größer als drei ist. Die Konstruktion ist an den Projektionen durchzuführen. Schr.

Weitere Literatur.

F. Caldarera. Trattato dei determinanti. Palermo: Virzi. 255 S. 8⁰.

Lit. R. R. Beginselen van de leer der determinanten. (Anfangsgründe der Theorie der Determinanten.) 2. Auflage. A. Versluys, Amsterdam. 80 S. gr. 8⁰.

A. B. Frizell. Some terms in the expansion of the infinite determinant. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 298.

L. Faterson. O warunku koniecznym i ostatecznym, by wyznacznik równa się zeru. (Notwendige und hinreichende Bedingungen des Verschwindens einer Determinante.) Wektor **3**, 116—119.

O. Hartnuss. Anwendung der Pfaffschen Aggregate auf die orthogonale Determinante B. Diss. Gießen. 53 S. 8⁰.

R. F. Muirhead. Two theorems on determinants and their application to the proof of the volume-formula for tetrahedra. Edinb. M. S. Notes 1912/13, 151-153.

R. Palmqvist. Sur les conditions pour qu'un déterminant infini soit de genre un. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. **8**, Nr. 32, 4 S.

Einschränkung einer Bedingung der Konvergenz von H. v. Koch (F. d. M. **25**, 521, 1893). Lp.

C. Elimination und symmetrische Funktionen.

L. L. Dines. The highest common factor of a system of polynomials in one variable. Amer. Journ. **35**, 129-150.

Liegen zwei Formen einer Variable x vor: $F_1(x) = c_{10}\, x^{m_1} + \cdots + c_{1\,m_1}$, $F_2(x) = c_{20}\, x^{m_2} + \cdots + c_{2\,m_2}$, so ist das Verschwinden der Resultante notwendig und hinreichend, damit F_1 und F_2 einen gemeinsamen Faktor mindestens vom ersten Grade in x besitzen.

Entsprechend handelt es sich hier um die Bedingungen eines gemeinsamen Faktors für ein System von n Formen $F_i(x)$ mit Koeffizienten c_{ij}.

Durch eine Ausdehnung des euklidischen Algorithmus zeigte W. Fr. Meyer (F. d. M. **38**, 202, 1907), daß $n-1$ ganze Funktionen R_k der c existieren, deren Verschwinden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines gemeinsamen Faktors der F_i liefern. Diese R_k stellen sich dar als die letzten Reste des Algorithmus.

Durch W. Fr. Meyer veranlaßt, hat Foethke (F. d. M. **39**, 220, 1908) den Prozeß unter gewissen Beschränkungen der F_i genauer verfolgt und gelangt so zu $n-1$ aus den R_k sich linear zusammensetzenden Determinanten P_k, die einfacher sind als die R_k und diese für die vorliegende Frage vollkommen zu ersetzen imstande sind.

Der Verf. konstruiert nach einfacher Regel aus den Koeffizienten c_{ik} eine Matrix M, die sich für $n = 2$ auf die Sylvestersche Resultantenmatrix reduziert. Unter dem „Verschwinden einer Matrix“ ist zu verstehen, daß alle ihre Teildeterminanten verschwinden.

Dann ersetzt die Bedingung $M = 0$ die obigen $n - 1$ Bedingungen (Satz I); ihr Rang bestimmt den Grad des gr. gem. Faktors δ der F_i (Satz II), und die Koeffizienten von δ sind gewisse Determinanten von M (Satz III).

Zwei Matrizen K, K' heißen äquivalent, wenn die eine aus der andern durch eine den Rang nicht ändernde Transformation hervorgeht. Solche Transformationen sind zunächst die drei elementarbekannten:

(1) Vertauschung zweier Reihen (Kolonnen),

(2) Multiplikation aller Elemente einer Reihe (Kolonne) mit derselben Größe,

(3) Addition der Elemente einer Reihe (Kolonne) zu denen einer andern Reihe (Kolonne).

Vermöge wiederholter Anwendung von (2) und (3) wird unter Verwendung von h Konstanten α_i eine gewisse Transformation T_a gebildet; man hat dann symbolisch: $T_a K = K'$. Umgekehrt, sind zwei Matrizen M, M' so verbunden, daß eine Folge (α) von h Größen α_i existiert derart, daß $T_a M = M'$, so sind die Matrizen äquivalent.

Diese Transformation T_a wird im besonderen angewendet auf eine — wie bei der Sylvesterschen Resultante — treppenförmig aufgebaute Matrix M, deren Elemente aus m Größen c_i und Nullen bestehen. Geht dann für eine Folge (α) vermöge T_a die Matrix M über in M', und verschwindet die Determinante, deren Elemente den letzten h Reihen und Kolonnen von M' gemeinsam sind, so verschwindet die aus den letzten h Reihen von M' bestehende Matrix.

Liegen nun n den Graden m_i nach geordnete $(m_i \geqq m_{i-1})$ Formen F_i mit den Koeffizienten c_{ik} und nichtverschwindenden Leitgliedern vor, so wird eine gewisse treppenförmige Matrix $M_N(F_i)$ gebildet, wo N eine ganze Zahl ist, für die $N \geqq m_i + m_k$ $(i \neq k)$ gilt; die Matrix hat N Reihen und $\sum_{k=1}^{n} (N - m_k)$ Kolonnen. Dann gilt zunächst der Satz:

(I) „Das Verschwinden der Matrix M_N ist notwendig und hinreichend für die Existenz eines gemeinsamen Faktors der Formen F_i.“

Es kommt weiter darauf an, falls M_N verschwindet, den Grad des größten gemeinsamen Faktors der F_i durch den Rang der Matrix auszudrücken. Zu dem Behuf wird durch Streichung gewisser i Reihen und Kolonnen aus M_N die Submatrix $M_N^{(i)}$ gebildet.

Wenn dann $M_N = 0$, $M_N^{(i)} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, h-1)$, dagegen $M_N^{(h)} \neq 0$, so ist der größte gemeinsame Teiler D_h der Formen F vom Grade h.

Sei $D_h = x^h + \alpha_1 x^{h-1} + \cdots + \alpha_h$, $F_i = D_h F_i^{(h)}$, so stelle man mittels der Folge $(\alpha_1, \ldots, \alpha_h)$ die Transformation T_a her. Dann hat die Matrix $T_a M_N$ in den letzten h Reihen nur Nullen als Elemente, und die Submatrix $M_N^{(h)}(F_i)$ ist äquivalent mit der Matrix $M_{N-2h}(F_i^{(h)})$.

Der obige Satz über den Grad h des größten gemeinsamen Teilers D_h der F_i wird wesentlich dadurch ergänzt, daß $N - h$ der Rang von M_N ist; dieser Rang kann nicht kleiner sein als $N - m_n$, wo m_n der kleinste der Grade m_i ist.

Aber der Teiler D_h läßt sich auch wirklich aufstellen. Man bilde aus den ersten $N - 2h$ Reihen von M die Determinante Δ_0; dabei entsteht M aus M_N durch Streichung der ersten h Reihen von Nullelementen.

Weiter geht aus M eine Determinante Δ_i hervor, deren erste $N - 2h - 1$ Reihen übereinstimmen mit den ersten $N - 2h - 1$ Reihen von M, und deren letzte Reihe die $(N - 2h + i)^{\text{te}}$ Reihe von M ist $(i = 1, 2, \ldots, h)$.

Dann sind die Δ die Koeffizienten von D_h, so daß man hat:

$$D_h = \Delta_0 x^h + \Delta_1 x^{h-1} + \cdots + \Delta_h.$$

Der nächste Abschnitt ist den „Resultantendeterminanten" gewidmet. Das Verschwinden von M_N, d.i. das Verschwinden aller Determinanten von M_N, liefert eine viel zu große Anzahl von Bedingungsgleichungen, die bekanntermaßen nicht unabhängig voneinander sind. Nun bestand der wesentliche Vorzug des Meyerschen Ergebnisses darin, daß seine $n - 1$ Bedingungsgleichungen für die Existenz eines gem. Teilers der F_i notwendig und hinreichend und zugleich voneinander unabhängig sind. Man könnte jetzt vermuten, daß sich auch aus den Determinanten von M eine Anzahl von $n - 1$ ausgezeichneten herausgreifen lasse, deren Verschwinden mit dem Verschwinden von M gleichwertig wäre. Dies scheint indessen im allgemeinen formal nicht ausführbar zu sein.

Indessen wird, wie der Verf. zeigt, in jedem numerischen Falle eine derartige Ausführung möglich. Überdies ist sie allgemein stets möglich in den untersten Fällen $n = 2$ und $n = 3$.

Für $n = 2$ ist $N = m_1 + m_2$, M_N wird die Sylvestersche Resultante $R(F_1, F_2)$, und die Submatrizen $M_N^{(i)}$ sind die Matrizen der Determinanten $R^{(i)}(F_1, F_2)$. Man kommt dann auf bekannte Sätze zurück.

Für $n = 3$ sei $R^{(i)}(F_1, F_2) = 0 (i = 1, 2, \ldots, h-1)$, aber $R^{(h)}(F_1, F_2) \neq 0$; dann wird das Verschwinden von M_N gleichwertig mit den beiden Bedingungen:

$$R(F_1, F_2) = 0, \; R^{(h)}(F_1, F_2/F_3) = 0.$$

My.

L. Orlando. Un problema di eliminazione. Rom. Acc. L. Rend. **22**$_1$, 367-368.

Der Begriff der algebraischen Resultante wird erweitert, wie folgt. Sind (1) $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ zwei in einem Intervall (t_0, T) stetige Funktionen der Variable t, so wird unter der Elimination von t die Aufstellung einer Resultantengleichung (2) $F(x, y) = 0$ verstanden, die für jedes (1) genügende Paar x, y gültig ist.

Die Gesamtheit der (1) genügenden Punkte (x, y) ist eine abgeschlossene Menge. Ist (ξ, η) ein willkürlicher Punkt der Ebene, so bilde man die Abstandsfunktion $R(\xi, \eta) = \sqrt{(\xi - \varphi)^2 + (\eta - \psi)^2}$, die für jeden gegebenen Punkt (ξ, η) ein absolutes Minimum $f(\xi, \eta)$ besitzt, den „Abstand" des Punktes von der Kurve (1).

Man erkennt sofort, daß die Funktion $f(x, y)$ eine der gesuchten Resultanten (2) ist, wobei das Vorzeichen des Radikals in geeigneter Weise festzulegen ist.

Eine zweite Art der Elimination ist folgende. Unter gewissen Beschränkungen für die Funktionen φ, ψ gehört jedem Punkte (ξ, η) ein Sehwinkel α zu. Man setze dann, bei positivem R:

$$f(\xi, \eta) = R(\xi, \eta)[\alpha(\xi, \eta) - \pi].$$

Für $f > 0$ erhält man die „inneren“ Punkte, für $f < 0$ die „äußeren“. Im Falle von Doppelpunkten sind „innere Punkte der Ordnung ν“ solche, für die $\alpha - \pi > 2(\nu - 1)\pi$ ist.

Unter gewissen Bedingungen lassen sich die obigen Ansätze auch auf nichtstetige Kurven ausdehnen. My.

F. Cecioni. Sulla risultante di due polinomi in una variabile. Palermo Rend. **36**, 296-298.

Bezeichnen $f(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n$ und $g(x) = b_0 x^m + \cdots + b_m$ zwei ganze rationale Funktionen von x und $x_1, \ldots, x_n$ die n Wurzeln von $f(x) = 0$, so wird bekanntlich die Resultante von $f(x)$ und $g(x)$ gegeben durch die Sylvestersche Determinante $(m+n)$ter Ordnung

$$R_{f,g} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-1} & b_n & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . & \ldots & . \end{vmatrix}.$$

Der Verf. gibt einen neuen Beweis für die Identität

$$R_{f,g} = a_0^m\, g(x_1)\, g(x_2) \ldots g(x_n).$$

Jhk.

A. M. Nesbitt. Question 17065. Ed. Times (2) **23**, 107-108.

Wenn $x + y + z = 0$, $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ und $xyz \neq 0$ ist, so ist zu beweisen, daß erstens

$$\frac{f_n(by - cz, cz - ax, ax - by)}{f_n(x, y, z)},$$

wo $f_n(x, y, z)$ irgendeine homogene symmetrische Funktion n-ten Grades bezeichnet, unabhängig von x, y, z ist, und zwar gleich $(-\Sigma bc)^{\frac{1}{2}n}$, zweitens

$$(\Sigma ax)^3 + 2\Sigma ax \cdot \Sigma bc \cdot \Sigma x^2 = 3xyz\{6abc - \Sigma[a^2(b+c)]\}.$$

Lösungen von W. F. Beard, J. C. Swaminarayan und vom Aufgabensteller.

Gd.

C. M. Ross. Question 17405. Ed. Times (2) **24**, 40-41.

Das Eliminationsresultat von x, y, z aus den Gleichungen

$$y^2 + yz + z^2 = a^2,\ z^2 + zx + x^2 = b^2,\ x^2 + xy + y^2 = c^2,\ xy + yz + zx = 0$$

ist

$$(a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) = 0.$$

Algebraische Lösungen von C. W. Adams und A. Cunningham, geometrische Lösungen von P. T. Stephenson und H. D. Drury. Gd.

W. S. Baer. Beiträge zum Waringschen Problem. Diss. Göttingen.

Ref. S. 210.

M. Meuli. Untersuchungen über die Darstellung der Mertensschen Resultante in Determinantenform. Diss. Bern. 53 S. 8⁰ (1912).

E. N. Barisien. (4217) Rendre rationnelle l'équation $\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}+\sqrt[n]{C}=0$. Interméd. des math. **20**, 251—254, 280—283.

Die von Barisien gestellte Frage ist an der ersten Stelle beantwortet von Welsch, durchgeführt in Determinantenform für $n=5$ und $n=7$; ferner beantwortet und steckengeblieben bei $n=7$ von F. d'Arcais. An der zweiten Stelle führt P. Fay die Aufgabe auf Eliminationsfragen zurück, erläutert am Falle $n=7$. Lp.

Dritter Abschnitt.
Niedere und höhere Arithmetik.

Kapitel 1.
Niedere Arithmetik.

A. G. Cracknell. The school algebra. London: W. B. Clive, University Tutorial Press, Ltd., VIII u. 420 u. LXV S.

Das Buch zerfällt in 34 Kapitel; sie behandeln: Gleichungen. Klammern. Einfache Brüche. Negative Größen. Formeln. Eingliedrige Ausdrücke. Klammern. Die vier Regeln. Leichte Brüche. Gleichungen und Identitäten. Aufgaben. Gebrochene Werte und Bruchkoeffizienten. Zeichnerisches. Zeichnerische Darstellung negativer Werte. Geradlinige Zeichnungen. Simultane Gleichungen. Aufgaben mit simultanen Gleichungen. Gleichungen in Buchstaben. Negative Größen und Null. Produkte und Faktoren. Größter gemeinschaftlicher Teiler und kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches. Brüche. Über den Gebrauch von Formeln. Einschachtelung und Auflösung. Quadratische Gleichungen. Arithmetische und geometrische Progressionen. Schwierigere Zeichnungen. Ungleichheiten. Maxima und Minima. Verhältnis und Proportion. Irrationale Wurzeln. Schwierigere Faktoren. Schwieriger größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches. Quadratwurzel. Schwierigere Gleichungen. Schwierigere quadratische Gleichungen. Simultane quadratische Gleichungen. Zwei Unbekannte. Schwierigere Progressionen (arithmetische und harmonische). Schwierigere geometrische Progressionen.

J. (Lp.)

K. Kraus. Grundriß der Arithmetik für Lehrer und Lehrerinnen-Bildungsanstalten. Sechste, umgearbeitete Auflage. Wien: A. Pichlers Witwe und Sohn. IV u. 342 S. 8°, 48 Abbildungen.

Das für seine besonderen Zwecke mehr auf die praktischen Bedürfnisse als auf streng wissenschaftliche Theorien zugeschnittene Lehrbuch ist in der neuen Auflage den Forderungen nach zeichnerischer Veranschaulichung arithmetischer Sätze darin nachgekommen, daß der Funktionsbegriff eingeführt und mittels der Koordinaten bildlich versinnlicht wird. Dadurch sollen diese Dinge also auch in die Volksschulen hineingetragen werden. Lp.

H. Bork, P. Crantz, E. Haentzschel. Mathematischer Leitfaden für Realschulen Erster Teil.: Planimetrie und Arithmetik. 7. Auflage. Zweiter Teil: Trigonometrie und Stereometrie. 5. Auflage. Leipzig: O. R. Reisland. 204, 128 S. 8°.

In den vorliegenden Auflagen sind keine Veränderungen vorgenommen worden. Ba.

J. Fitz-Patrick. Exercices d'arithmétique. Énoncés et solutions. Avec une préface de J. Tannery. Troisième édition entièrement refondue et considérablement augmentée. Paris: A. Hermann et Fils. VIII + 710 S. gr. 8°.

Der bescheidene Titel dieses Buches läßt nicht seinen reichen und interessanten Inhalt vermuten. Es ist nicht eine von den zahllosen Aufgabensammlungen zur Einübung der Regeln der Buchstabenrechnung, sondern eine mit großem Fleiße aus vielen Zeitschriften zusammengebrachte Sammlung von Aufgaben aus der niederen Zahlentheorie, an der jeder Lehrer der Mathematik seine Freude haben wird; sogar mancher forschende Mathematiker wird auf die vielen Ansätze zu Untersuchungen in der niederen Zahlentheorie hingewiesen werden, die zu verschiedenen Zeiten von vielen Mathematikern gemacht sind, sowie auf die in den französischen Prüfungsaufgaben von den Prüfern scharfsinnig ersonnenen Fragestellungen.

Der Inhalt ist in 18 Kapitel geteilt: 1. Einleitendes. Zählung. Addition und Subtraktion. 2. Multiplikation. 3. Division. 4. Grundlegende Sätze über Teilbarkeit. Teilbarkeitskennzeichen. 5. Größter gemeinsamer Teiler. Kleinstes Vielfaches. 6. Primzahlen. 7. Gewöhnliche Brüche. 8. Verhältnisse und Proportionen. 9. Dezimalbrüche. 10. Quadrate und Quadratwurzeln. 11. Kuben und Kubikwurzeln. 12. Angenäherte Rechnungen. Irrationale Zahlen. Grenzen. 13. Aufgaben. 14. Arithmetische Reihen. Arithmetische, geometrische und harmonische Progressionen. 15. Übungen zu den Summationsformeln. 16. Von den verschiedenen Zahlsystemen. 17. Metrisches System. Verschieden benannte Zahlen. 18. Anwendungen: Regeldetri. Gesellschaftsrechnung. — Note über die von E. Lebon beigebrachte Tafel von Primfaktoren der Zahlen.

1037 Aufgaben entfallen auf die ersten 16 Kapitel, 106 auf Kapitel 17 und 186 auf das letzte Kapitel. Die Texte der Aufgaben nehmen die ersten 203 Seiten des Werkes ein, die meistens ausführlich entwickelten Lösungen reichen bis Seite 702. Aus den zu vielen Aufgaben und ihren Lösungen hinzugefügten Literaturangaben ist ersichtlich, daß fast nur französische Quellen benutzt sind. Trotzdem ist eine reichhaltige Sammlung mannigfaltiger Aufgaben zustande gekommen. Eine Ergänzung aus nichtfranzösischen Zeitschriften und Büchern würde das Buch noch wertvoller gemacht und manche Fragen in einen besseren Zusammenhang unter sich und mit allgemeineren Gesichtspunkten gebracht haben. So sind unter anderem die Fragen über die Summen gleich hoher Potenzen der natürlichen Zahlen nicht bis zu ihren tieferen Wurzeln vorgedrungen. Die Fragen über die Zerlegungen der Zahlen in ihre Primfaktoren hätten durch Berücksichtigung der vielen bezüglichen englischen Arbeiten der neueren Zeit einen weiter reichenden Ausblick in die bisherigen Leistungen gewähren können. Aber auch in der vorliegenden Gestalt wird das Buch zur

Belebung des Interesses an den Gesetzen der Zahlen beitragen und ist allen Lehrern zu empfehlen, die ihren Schülern Gelegenheit geben wollen, den Scharfsinn an einem seine Anziehungskraft stets bewährenden Gegenstande zu üben. Es werde beispielsweise das Kapitel über die Regeln der Teilbarkeit einer Zahl oder das andere über die Perioden der Dezimalbrüche zu diesem Zwecke hervorgehoben.

Lp.

P. Stäckel und H. Beck. Lösungen der Aufgaben aus Borel-Stäckel, Elemente der Mathematik. Erstes Heft: Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. Zweites Heft: Aufgaben aus der Geometrie. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. IV + 44, II + 39 S. 8°.

In den „Elementen der Mathematik" von Borel-Stäckel (vgl. F. d. M. **39**, 225, 1908 u. **40**, 540, 1909) sind fortlaufende Übungsaufgaben dem Leser gestellt worden. Den Wünschen von Autodidakten nachgebend, von denen jene „Elemente" benutzt sind, haben sich Stäckel und Beck vereinigt, um die dort fehlenden Lösungen bekannt zu machen, bei den schwierigeren Aufgaben auch den Gang der Lösung anzudeuten.

Lp.

E. Bardey. Aufgabensammlung für bayrische Mittelschulen. Bearb. von J. Lengauer. Leipzig: B. G. Teubner. 206 S. 8°.

Das altbewährte Bardeysche Buch hat eine dem Lehrprogramm der bayrischen Mittelschulen entsprechende Umarbeitung erfahren. Es unterscheidet sich diese Ausgabe von Bardeys Sammlung vor allem dadurch, daß diejenigen Abschnitte weggelassen wurden, die an den Gymnasien und Realschulen Bayerns nicht behandelt werden: Kettenbrüche, diophantische Gleichungen, Maxima und Minima, arithmetische Reihen höherer Ordnung, Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, u. a. m. Auch in den übrigen Abschnitten wurden Kürzungen vorgenommen; gestrichen wurden insbesondere solche Aufgaben, die nur geringe praktische Bedeutung besitzen (man denke an die in dieser Hinsicht wertlosen eingekleideten Gleichungen anderer Lehrbücher!), oder deren Lösung unverhältnismäßig viel Zeit beansprucht. Graphische Darstellungen werden schon frühzeitig eingeführt und dienen in allen Abschnitten zur Veranschaulichung der arithmetischen Gesetze, was übrigens nicht überall notwendig gewesen wäre. Mit Recht warnt der Verfasser davor, dem Zeichnen von Kurven einen zu großen Platz im Unterricht einzuräumen, da sonst leicht die vor allem notwendige Übung im Rechnen vernachlässigt wird; in der Tat ist dieses Kurvenzeichnen in manchen neueren Lehrbüchern stark übertrieben worden. Das Bardeysche Buch wird auch in der vorliegenden Gestalt seinen Zweck vollauf erfüllen.

Gd.

E. Vogel. Lösungen der Aufgaben in Močnik-Zahradničeks Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. V.-VIII. Klasse der Gymnasien und Realgymnasien und V.-VII. Klasse der Realschulen. Wien: F. Tempsky. 141 S. 8°.

Dieses Buch ist für die Hand des Schülers bestimmt. Es enthält für etwa 2000 Aufgaben die Resultate, oft auch eine Angabe der Lösung.

Ba.

E. Vogel. Lösungen der Aufgaben in Močnik-Zahradničeks Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik. III. u. IV. Klasse der Mittelschulen. Wien: F. Tempsky. 88 S. 8°.

Auch dies Buch ist für die Hand des Schülers bestimmt. Ba.

P. Maennchen. Geheimnisse der Rechenkünstler. (Math. Bibliothek XIII.) Leipzig: B. G. Teubner. 48 S. kl. 8°.

Eine instruktive Zusammenstellung von elementaren Sätzen der Zahlentheorie, die die meisten der von den Rechenkünstlern vorgeführten Aufgaben über vielstellige Zahlen durch einfache Rechnungen zu lösen gestatten. Das Buch ist ganz elementar und allgemeinverständlich gehalten. Sk.

E. Dumont. Arithmétique générale. Ens. math. **15**, 130-143.

Seinem im Jahre 1911 erschienenen Buche gleichen Titels (kurzes Referat in F. d. M. **42**, 1911, 235) schickt Dumont diesen Aufsatz nach, in dem er seine pädagogischen Grundsätze entwickelt: die moderne theoretische Arithmetik ist ganz ungeeignet für den Unterricht; er geht von den direkt meßbaren geometrischen Größen aus, das sind solche, die „durch ein geometrisches Element, das eine Translations-, Rotations- oder Schraubenbewegung ausführt, beschrieben werden können". Weiter wird das Verhältnis zweier (geometrischer) Größen definiert: „La manière d'être de G_2 relativement à G_1"; das Maß einer Größe — genauer gesagt, es heißt: „mesurer une grandeur, c'est la déterminer avec précision et à divers points de vue, relativement à une grandeur de sa classe, connue ou spécifiée, que l'on appelle étalon", und daraufhin wird von „mesure" gesprochen. Weiter folgen: Zahl und ihre Symbole, Summe, Produkt, Verhältnis von Zahlen. Schr.

S. Zaremba. Les propriétés typiques des nombres réels et quelques-unes des relations les plus intéressantes qui subsistent entre elles. Krakau Anz. (A) 1913, 161-218.

„Die Arbeit hat hauptsächlich den Zweck, denen, die mit der polnischen Sprache nicht vertraut sind, die Gedanken zu vermitteln, die ich im letzten Kapitel meines von der Krakauer Akademie der Wissenschaften in der zweiten Hälfte des Jahres 1912 herausgegebenen Lehrbuchs der theoretischen Arithmetik auseinandergesetzt habe; doch, wohl verstanden, sie ist keine bloße Übersetzung; ich habe nicht umhin gekonnt, verschiedene Fragen aus andern Teilen meines Lehrbuchs zu entwickeln; ferner habe ich ein neues Resultat vorzuführen, und überdies, dank einer liebenswürdigen Mitteilung von T. Levi-Civita, habe ich einen Punkt der Geschichte der nicht-archimedischen Zahlensysteme berichtigen können."

Übersicht: Der Zahlbegriff vom allgemeinsten Gesichtspunkt aus; Isomorphismus zweier Mengen; typische Eigenschaften eines Zahlensystems. — Allgemeine Untersuchungen über die Aufstellung eines Systems typischer

Eigenschaften eines gegebenen Systems von Zahlen. — Ein System typischer Eigenschaften der reellen Zahlen. — Über die Relationen, die zwischen den typischen Eigenschaften der reellen Zahlen bestehen. Nicht-archimedische Zahlen.

Schr.

A. Natucci. Teorie intrinseche dei numeri relativi. Periodico di Mat. **29** [(3) **11**], 83-93.

Der Verf. unterscheidet drei Hauptgruppen von Theorien für die rationalen Zahlen:

a) Formale Theorien. Sie führen die Brüche als Dinge ein, die notwendig sind, um die Subtraktion in jedem Falle ausführbar zu machen (1. Theorie), oder als Paare ganzer Zahlen (2) [Stolz-Tannery].

b) Genetisch-analytische Theorien. Sie geben eine Nominaldefinition der Brüche, ohne auf Begriffe, die der Logik und der Arithmetik fremd sind, zurückzugreifen; sie verzichten auf die mangelhafte Theorie, welche die Brüche als Summen aliquoter Teile von 1 betrachtet (3). Dabei ergeben sich folgende Theorien: (4) Die Brüche als Operatoren an den Zahlen (Méray-Peano). (5) Die Brüche als Beziehungen zwischen Zahlenpaaren (Russell-Mineo). (6) Die Brüche als Klassen von Paaren (Padoa). (7) Die Brüche als Klassen von Operationen (Bindoni).

c) Genetisch-synthetische Theorien. Sie geben eine Nominaldefinition der Brüche, gehen aber auf Begriffe zurück, die der Arithmetik fremd sind, im allgemeinen auf den Begriff der Größe. Hier gibt es die Theorien: (8) Die Brüche als Operatoren an Größen (Burali-Forti). (9) Die Brüche als System von Symbolen, das zweieindeutig einer rationalen Klasse von Größen entspricht (Bettazzi). (10) Die Brüche als Symbole, welche geeignet sind, den Wert der Aggregate auszudrücken (Capelli).

Besondere Beachtung verdienen von diesen 10 Theorien unter dem logischen Gesichtspunkte die natürlichen („intrinseche") Theorien, d. h. solche, die dem Zeichen = die logische Bedeutung der Identität wahren. Das sind drei: a) Jene, die die Brüche als Beziehungen zwischen ganzen Zahlen betrachtet. Diese Theorie ist in wenigen Zeilen gekennzeichnet von Russell (The principles of mathematics S. 149-150) und von Couturat (Les principes des mathématiques, S. 79-80); entwickelt von Mineo im Periodico **25** [(3) **7**], 229-236 (F. d. M. **41**, 206, 1910). b) Die Theorie, die die Brüche als Klassen von Paaren betrachtet, auseinandergesetzt von A. Padoa in dem Preisvortrag bei der zweiten Versammlung der „Mathesis". c) Die Theorie, die die Brüche als Klassen von Operationen betrachtet. Diese Theorie entspringt aus der der Operatoren von Peano, indem sie die Definition durch Postulate in Nominaldefinition umwandelt, und ist von Bindoni in dem Artikel „Sui numeri razionali" des Bollettino matematico **9** veröffentlicht.

Für die Relativzahlen kann man, entsprechend den vorgenannten Theorien, ebenso viele Theorien aufstellen, mit Ausnahme der Theorie, welche die Brüche als aliquote Teile der Einheit betrachtet. Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist eben, zu zeigen, wie sich auch für die relativen Zahlen natürliche Theorien, ähnlich den erwähnten, aufstellen lassen.

Am Schluß wird ausdrücklich hervorgehoben, daß alle solche Überlegungen nicht in den Schulunterricht gehören.

Lp.

C. Rossi. Il concetto di numero reale. Periodico di Mat. **29** [(3) **11**], 33-43.

Der Begriff der reellen Zahl wird aus den Prinzipien der Mengenlehre abgeleitet. Zuletzt heißt es: „Die Zahl ist ein Name oder ein Zeichen, um eine bestimmte Gesamtheit zu bezeichnen, deren Elemente alle Verhältnisse zu einem von ihnen sind. Unter diesen Begriff fallen die rationalen Verhältnisse und folglich auch die natürlichen Zahlen, welche zusammen die rationalen Zahlen bilden. Die Zahlen, deren Verhältnisse nicht rational sind, bilden die irrationalen Zahlen.“ Lp.

V. Basssani. Traduzione del capitolo „teoria analitica dei numeri complessi a due unità“ dell' Aritmetica teorica di Stolz e Gmeiner. Boll. Mathesis. **5**, 56-84.

Der Inhalt ist durch den Titel charakterisiert. Sk.

A. Hoborski. Z teoryi liczeb niewymiernych. (Zur Theorie der irrationalen Zahlen.) Wektor. II. Jahrgang. Warschau 1913. 10. Heft. S. 464-467.

Wird im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse mit ϱ_1, die Kathete mit ϱ_2 bezeichnet, dann erhält man in bekannter Weise eine Folge von abnehmenden Segmenten: $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$. Das Meßproblem der Hypotenuse mit der Kathete als Maßeinheit definiert rein geometrisch einen Schnitt der rationalen Zahlen. Es wird gezeigt, daß dieser Schnitt mit dem rein arithmetisch definierten Schnitte identisch ist, der der Wurzel aus 2 entspricht. Der Satz des Pythagoras darf natürlich nicht benutzt werden, wenn man nur die rationalen Zahlen als gegeben annimmt. A. R.

T. Łazowski. O klasyfikacyi ciągów liczbowych. (Klassifikation der Zahlenfolgen.) Wektor. I. Jahrgang, 10. Heft, S. 559-573. Warschau 1912.

Elementare Darstellung der Eigenschaften einfacher Punktfolgen reeller Zahlen. A. R.

A. Gérardin. Note on finding prime numbers. Math. Gazette **7**, 192-193.

Kunstgriffe, unter Benutzung von quadratisch geteiltem Papier, zur schnellen Auffindung von Primzahlen nach dem Siebe des Eratosthenes. Lp.

J. G. Galé. Divisibilidad por siete. Rev. Soc. Mat. Esp. **3**, 46-47.

Eine Zahl ist durch 7 teilbar, wenn, nach Teilung der Zahl in Gruppen von je 2 Ziffern, von den Einern an, die Reste der Division durch 7 der einzelnen

Gruppen, der Reihe nach mit 1, 2, 4, 1, 2, 4 ... multipliziert, als Summe ein Vielfaches von 7 ergeben. Zch.

P. de Sanctis. Estensione di un antico teorema. Rom. Acc. P. d. N. L. Atti **64**, 43-45.

Ein Satz des Jamblichus besagt: Nimmt man drei ganze Zahlen $3n+1$, $3n+2$, $3n+3$, bildet ihre Summe, dann die Quersumme der Ziffern dieser Summe, danach die Quersumme der Ziffern der so erhaltenen Zahl und fährt mit der Bildung der Quersumme fort, so erhält man zuletzt die Zahl 6. Von diesem Satze hatten der Verf. und Egidi 1893 in derselben Zeitschrift Verallgemeinerungen gegeben (F. d. M. **25**, 274). Die jetzige Verallgemeinerung lautet: Die Basis eines Zahlensystems sei die ganze Zahl $k+1$. Man bringe eine beliebige ganze Zahl N, die kein Vielfaches von k ist, auf die Form $N = mk + r$, wo m und r ($< k$) ganze Zahlen (0 ausgeschlossen) sind. Nun bilde man die Quersumme N_1 der Ziffern von N, dann die der Ziffern von N_1 usw. Zuletzt kommt man auf die einziffrige Zahl r. Lp.

N. Gennimatás. Ein mathematisches Kuriosum. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **43**, 612-613.

Tachauer. Beweis der Tabellen von Gennimatás. Ebenda **44**, 455.

Heinr. Simon. Bemerkung zu den Zahlentafeln $1\cdot 9+2=11$, $12\cdot 9+3=111$ usw. Ebenda **44**, 595.

Gennimatás und Tachauer geben Beweise für die beiden ersten Zahlenpyramiden, Simon fügt die beiden folgenden hinzu.

$$\begin{array}{rcl} 1\cdot 8+1=9 & \quad & 1\cdot 9+2=11 \\ 12\cdot 8+2=98 & & 12\cdot 9+3=111 \\ 123\cdot 8+3=987 & & 123\cdot 9+4=1111 \\ 1234\cdot 8+4=9876 & & 1234\cdot 9+5=11111 \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\ 123456789\cdot 8+9=987654321 & & 123456789\cdot 9+10=1111111111 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1\cdot 7+1=8 & \quad & 1\cdot 11+2=13 \\ 12\cdot 7+2=86 & & 12\cdot 11+3=135 \\ 123\cdot 7+3=864 & & 123\cdot 11+4=1357 \\ 1234\cdot 7+4=8642 & & 1234\cdot 11+5=13579. \\ 12345\cdot 7+5=86420 & & \end{array}$$

Lp.

C. Alasia. Quistione 1207. Suppl. al Period. **16**, 123-124.

In einem beliebigen Zahlensystem solche Zahlenpaare zu finden, die als Produkt eine Zahl ergeben, welche mit einer und derselben Ziffer geschrieben wird.

Ist a die Basis des Systems, $b < a$ die Ziffer, welche n-mal wiederholt das Produkt P darstellt, so ist

$$P = b(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}) = b\,\frac{a^n-1}{a-1}.$$

Zerlegt man $b\frac{a^n-1}{a-1}$ in zwei Faktoren P_1 und P_2, so sind dies die gesuchten Zahlen.

Beispiel $a = 10, n = 30, b = 5$,

$$P_1 = 11223333332211,\ P_2 = 9900009900999901 \times 5,$$
$$P_1\,P_2 = 55555\ 55555\ 55555\ 55555\ 55555\ 55555.$$

Lp.

A. Cunningham. (4084) Nombres symétriques. Interméd. des math. **20**, 42-43.

A. Cunninhgam. (4085) Sur certains nombres entiers. Ebenda 44.

Es gibt 63 Paare dreistelliger Zahlen, so daß das Produkt der beiden Zahlen eines Zahlenpaares eine symmetrische Zahl ist, z. B. 131 . 303 = 39693. Die zweite Frage bezüglich solcher Zahlen, deren p-te Potenz symmetrische Zahlen gibt, beantwortet der Verf. für $p = 3$ und $p = 5$ durch Entnahme dieser Zahlen aus Tafeln für die dritte und fünfte Potenz. Lp.

L. Aubry. Un théorème d'arithmétique. Mathesis (4) **3**, 33-35.

Es sei A teilerfremd zu N und $B/\sqrt{N}$ nicht ganz; dann kann man $Ax - Nz = By$ immer lösen, x und $y \gtreqless 0$ und $< \sqrt{N}$ im absoluten Betrage. (Rev. sem. **21**$_2$, 19.) Lp.

R. Ayza. Demostración original de la igualdad $(\Sigma a)^2 = \Sigma a^3$ $(a = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Rev. Soc. Mat. Esp. **2**, 330-332.

Man schreibe die Zahlen $a, 2a, 3a, \ldots, a^2, \ldots, na$ für $a = 1, 2, 3, \ldots, a, \ldots, n$ je in eine Zeile untereinander; so besteht die Hauptdiagonale dieser Matrize aus den Zahlen $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, a^2, \ldots, n^2$. Aus dieser Matrize kann durch Addition der passend gruppierten Zahlen der bekannte Satz gewonnen werden. Lp.

F. Mariares. Curiosidades aritmeticas. Rev. Soc. Mat. Esp. **2**, 333-335.

Ein Quadrat, das durch Parallelen zu den Seiten in n^2 kleine Quadrate zerlegt ist, gibt durch passende Gruppierung der Quadrate einfache Veranschaulichungen von Summen ganzer Zahlen oder ihrer Quadrate. Lp.

Ch. Halphen. Sur un problème d'énumération. Assoc. Franç. Av. Sc. (Tunis) **42**, 63.

Im Raume sind n Punkte gegeben; man legt durch je drei von ihnen eine Ebene. Diese Ebenen schneiden sich paarweise in Geraden. Die Anzahl der durch keinen der gegebenen Punkte gehenden Schnittgeraden ist $10\,C_n^6$. Lp.

P. Delens. Extraction rapide de certaines racines exactes d'indice quelconque. Nouv. Ann. (4) **13**, 289-300.

Es handelt sich darum, beliebig hohe Wurzeln zu ziehen, unter der Annahme, daß das Ergebnis höchstens dreistellig ist, und daß die Wurzel eine ganze Zahl ist. Zur Bestimmung der Einer werden bekannte Eigenschaften der Potenzen benutzt; zur Bestimmung der Zehner und Hunderter dient die Neuner- und Elferprobe. Ba.

S. Lupton. Notes on the radix method of calculating logarithms. Math. Gazette **7**, 147-150, 170-173.

Das von dem Verf. als „Wurzelmethode" bezeichnete Verfahren zur Berechnung von Logarithmen auf eine große Anzahl von Dezimalstellen ist in größerer Ausführlichkeit von R. Hoppe in seinen „Tafeln zur dreißigstelligen logarithmischen Rechnung" (Leipzig: C. A. Koch; F. d. M. 8, 760, 1876) beschrieben und benutzt worden. Es beruht, wie in dem angezogenen Referate von Hoppe selbst ausgeführt ist, auf der Zerlegung einer Zahl nach vorgängiger Abscheidung eines mehrziffrigen Faktors (der „Wurzel") in Faktoren von der Form $1 + k \,.\, 10^{-n}$.

Wie der Verf. des vorliegenden Aufsatzes angibt, findet sich dieses Verfahren schon in der Arithmetica Logarithmica von Briggs Cap. XIV (1624) beschrieben. „Es ist häufig wieder entdeckt worden, oft mit ungeeigneten Abwandlungen, beansprucht von Mathematikern, die mit den Arbeiten ihrer Vorgänger nicht bekannt waren." Aus jener Arithmetica Logarithmica werden einige Beispiele in abgekürzter Fassung wiedergegeben; dann werden solche Schriften angeführt, in denen das Verfahren weiter benutzt und ausgebildet wurde. Unter ihnen wird als bedeutsamste Vereinfachung der Methode bezeichnet die von Robert Flower erreichte in der Schrift „The Radix a new way of making Logarithms" (London: J. Beecroft. 1771). Als Wiederentdecker des Verfahrens von Flower und Umformer in der Art, wie Hoppe es später durchführte, wird George Atwood genannt in der Schrift „An Essay on the Arithmetic of Factors" (London, 1786). Vgl. die Referate über Ellis F. d. M. **13**, 864, 1881. Lp.

Z. Arlitewicz. O zasadzie logarytmów naturalnych. (Die Basis der natürlichen Logarithmen.) Wektor. I. Jahrg. Warschau. 2. Heft, S. 109-117; 5. Heft, S. 293-298. (1912.)

Elementarer, für den Schulgebrauch geeigneter Vortrag, dem die Betrachtung der Bewegung eines Punktes längs einer Linie, dessen Geschwindigkeit der Entfernung von einem festen Punkte proportional ist, zugrunde liegt. A. R.

J. J. BARNIVILLE. Question 17 313. Ed. Times (2) **23**, 94-95; **24**, 64.

Es bestehen folgende rationale Zerlegungen:

$$x^{20} - 123x^{10} + 1 = [x^2 - 1 + x]\,[x^2 - 1 - x]\,[x^4 + 4x^2 + 1 + (2x^3 + 3x)] \\ .\,[x^4 + 4x^2 + 1 - (2x^3 + 3x)]\,[x^4 + 4x^2 + 1 + (3x^2 + 2x)] \\ .\,[x^4 + 4x^2 + 1 - (3x^2 + 2x)]$$

und

$$x^{10} + 661\,x^5 - 11^5 = (x^2 + x - 11)\,(x^4 - 8x^3 + 34x^2 - 77x + 121) \\ .\,(x^4 + 7x^3 + 34x^2 + 88x + 121).$$

Lösung von W. F. Beard und T. Stuart. Gd.

R. F. DAVIS. Question 17 334. Ed. Times (2) **23**, 95-96.

Man drücke die Größen U, V durch a, b, c aus, wenn jede der drei Differenzen $U - a\,V$, $U - b\,V$, $U - c\,V$ vollständige Kuben sind. — Lösung von F. Phillips:

$$U = (a + b + c)^3 - 27\,abc,\; V = 9(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

Gd.

J. J. BARNIVILLE. Question 17 353. Ed. Times (2) **24**, 25-26.

Wenn $\sum(a^2 + bc) = 0$, so ist

$$(\sum a)^{17} - \sum a^{17} = 34(abc)^2(a + b + c)^2(a + b)^3(b + c)^3(c + a)^3.$$

Lösungen von A. M. Nesbitt und Pulinbihari Das. Gd.

J. J. BARNIVILLE. Question 17 444. Ed. Times (2) **24**, 110-111.

Setzt man

$$p = \sum(a^2 + bc),\; q = (a + b)(b + c)(c + a),\; r = abc(a + b + c),$$

so ist

$$(\sum a)^7 - \sum a^7 = 7q(p^2 + r),\; (\sum a)^9 - \sum a^9 = 3q^3 + 9pq(p^2 + 2r), \\ (\sum a)^{11} - \sum a^{11} = 11q(p^4 + r^2 + 3p^2r + pq^2), \\ (\sum a)^{13} - \sum a^{13} = 13q\{p(p^2 + r)(p^2 + 3r) + q^2(2p^2 + r)\}.$$

Lösungen von G. W. Border, T. R. Terry und W. N. Bailey. Gd.

J. J. BARNIVILLE. Questions 17 172 and 17 369. Ed. Times (2) **23**, 72-73, 86-87; **24**, 34-36.

17 172. — (1) Es ist

$$a^5 + b^5 + c^5 - 5abc(a^2 - bc) = (a + b + c)[(\sum a^2 - \tfrac{1}{2}\sum bc)^2 - \tfrac{5}{4}(ab - bc + ca)^2];$$

(2) $$\frac{x^{14} - 13\,x^7 + 2^7}{x^2 + x + 2}$$

auf die Form $A^2 + 7B^2 = C^2 + 7D^2$ zu bringen.

Lösungen vom Aufgabensteller und W. F. Beard.

17369. — (1) $$\frac{x^{14}+x^7+1}{x^2+x+1}$$
auf die Form $A^2+3B^2=C^2+7D^2$ zu bringen;

(2) $(x^6-x^5+2x^3-4x^2+4x)^2+(x^5-2x^4+2x^3-4x+8)^2$ und
$(x^6-x^5-x^4+5x^3-7x^2-x+23)^2+2(x^5-2x^4+x^3+4x^2-11x+10)^2$
auf die Form A^2+7B^2 zu bringen. — Lösungen von R. F. Davis, A. Cunningham und T. Stuart.

Gd.

E. J. Nanson. Question 17263. Ed. Times (2), **23**, 28-29.

Wenn σ_r das arithmetische Mittel aus den r-ten Potenzen von n positiven Größen, welche nicht alle gleich Null sind, ist und ω_r das arithmetische Mittel der Produkte zu je r dieser Größen, so ist

$$(n-1)\sigma_r+\omega_r>n\,\sigma_1\,\sigma_{r-1}.$$

Gd.

I. J. Schwatt. A problem in partial fractions. — To separate $\frac{\sum m_k x^{n-k}}{(x+a)^p}$ $(n<p, k=0,1,\ldots,n)$ into partial fractions. Quart. Journ. **44**, 166-169.

Durch folgenweises Abspalten der Brüche mit den Nennern $(x+a)^p$, $(x+a)^{p-1},\ldots$ gelingt die Bestimmung der Zähler der Teilbrüche durch elementare Rechnungsarten. Das Resultat ist

$$\frac{\sum m_k x^{n-k}}{(x+a)^p}=\sum_\beta \frac{\sum_\varkappa m_{n-\varkappa-\beta}\binom{\varkappa+\beta}{\beta}(-a)^\varkappa}{(x+a)^{p-\beta}}$$
$$(k=0,1,\ldots,n)\qquad(\beta=0,1,\ldots,;\varkappa=0,1,\ldots,n-\beta).$$

Dieses Ergebnis wird zuletzt auch durch ein Differentiationsverfahren bestätigt.

Lp.

I. J. Schwatt. A general case in partial fractions. Quart. Journ. **44**, 234-236.

Das vorstehend angedeutete Verfahren wird auf den Fall ausgedehnt, bei welchem der Zähler ein Polynom in x ist. Das Resultat wird in Determinantenform gegeben.

Lp.

L. v. Schrutka. Über einige besondere Verwendungsarten der Rechenmaschine. Zs. f. Math. u. Phys. **61**, 320-325.

Anwendung der Rechenmaschine auf das Operieren mit ganzen Funktionen mit kleinen ganzzahligen Koeffizienten, auf die Kettenbruchentwicklung und auf die Bestimmung der quadratischen Reste für einen Modul.

Schr.

Weitere Literatur.

E. Bardey. Aufgabensammlung für Arithmetik, Algebra und Analysis. Reformausgabe A: für Gymnasien. 1. Tl. Unterstufe, hrsg. v. W. Lietzmann. Leipzig: B. G. Teubner. VI + 201 S. gr. 8°.

E. Bardey. Aufgabensammlung für Arithmetik, Algebra und Analysis. Reformausgabe B: für Realanstalten. Leipzig: B. G. Teubner. VI + 219 S. gr. 8°.

S. Blumer. Methodisches Lehr- und Übungsbuch für den ersten Unterricht in der Algebra. Zweiter Teil. Zürich: Schultheß. V + 64 S. 8°.

E. Börner. Arithmetik für Mädchenlyzeen. 1.—3. Heft. Wien: F. Tempsky. 72, 70, 115 S. 8°.

W. Busemann, H. Hesse und H. Walsemann. Mathem. für Lyzeen u. höh. Mädchenschulen. (Geometrie und Arithmetik.) I. Heft, Kl. 4 u. 3. Hannover: C. Meyer. 27 S. 8°.

Frz. Bussler. Elemente der Mathematik für Realschulen. 2. Aufl. bearb. v. Th. Wimmenauer. Dresden: L. Ehlermann. XIV + 233 S. gr. 8°.

Frz. Bussler. Elemente der Mathematik für Realschulen für Quarta bis Untersekunda der real. Vollanstalten. 2. erweit. Aufl. v. Th. Wimmenauer. Dresden: L. Ehlermann. VIII + 149 S. gr. 8°.

P. Crantz. Lehrbuch der Mathematik für höhere Mädchen-Bildungsanstalten. 1. Teil: Für Lyzeen und höhere Mädchenschulen. 5. unveränd. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner. VI + 204 S. gr. 8°.

P. Crantz. Lehrbuch der Mathematik für höhere Mädchen-Bildungsanstalten. 2. Teil: Für Ober-Lyzeen. 2. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner. V + 221 S. gr. 8°.

A. Deckert. Algebra und Planimetrie. Breslau: Goerlich. III + 208 S. 8°.

J. Dronke und Ph. Lötzbeyer. Lehrb. d. Mathem. f. die Oberst. d. Realanst. I u. II. 1. Pensum d. Obersekunda. 2. Pensum d. Prima. Dresden: L. Ehlermann X + 222 S.; III + 272 S. gr. 8°.

J. Druxes. Ausführl. Lehrgang der Arithmetik u. Algebra nach modernen Grundsätzen. Bearb. unter Mitwirkung von G. Hoffmann. 2 Bde. Cöln: M. Du Mont-Schauberg. VIII + 648 S. gr. 8°.

J. B. Duport. Lehrbuch d. Arithmetik f. Mädchen-Lyzeen u. verwandte Anstalten. 3., nach d. neuen Lehrplane v. 1912 umgearb. Aufl. I. Teil: Für die 1. und 2. Klasse, III. Teil: Für die 5. und 6. Klasse. Wien: F. Deuticke. IV + 116 S.; IV + 130 S. 8°.

H. Fenkner. Arithmetische Aufgaben. Ausg. A. Tl. II a. 5. umgearb. Aufl. Berlin: O. Salle. IV + 234 S. gr. 8°.

H. Fenkner. Arithmetische Aufgaben. Ein Lehr- und Übungsbuch d. Mathematik. Ausgabe A. Teil II b, 1. Hälfte. 4. Aufl. Berlin: O. Salle. IV + 170 S. gr. 8°.

H. Fenkner. Arithmetische Aufgaben. Teil II b, 2. Hälfte (Prima). 3. Aufl. Berlin: O. Salle. V + 206 S. gr. 8°.

H. Fenkner u. C. E. Hessenbruch. Lehr- und Übungsbuch der Mathematik für Lyzeen u. höhere Mädchenschulen. In 2 Teilen. 1. Teil. 3. Aufl. 2. Teil 2. Aufl. Berlin: O. Salle. VIII + 168, VI + 178 S.

Das Ferrolsche neue Rechnungsverfahren. 5. verb. Aufl. Bonn: F. J. Huthmacher. VII + 440 S. 8⁰.

J. Gajdeczka. Lehrbuch der Arithmetik u. Algebra für die Mittel- u. Oberstufe d. Gymnasien, Realgymnasien u. Realschulen. 8. Aufl. Wien: F. Tempsky. 202 S. 8⁰.

G. Geipel u. G. Wegemann. Lehrbuch d. Mathem. u. Aufgabensammlg. für Oberlyzeen. 2. Teil: Klasse II. Bielefeld: Velhagen u. Klasing. V + 160 S. 8⁰.

F. Haller v. Hallerstein. Lehrb. d. Elementar-Mathem., bearb. v. B. Hülsen u. H. Hassenkamp. 2. Teil: Pensum der Obertertia. 5. Aufl. Berlin: A. Nauck u. Co. VIII + 192 S. gr. 8⁰.

Hellermann, Landgreve und Weider. Arithmetik und Algebra für Mittelschulen. Berlin: Oehmigke. 172 S. 8⁰.

E. Helly. Lösung der Aufgaben in Suppantschitsch' Lehrbuch der Arithmetik für die VI.—VIII. Klasse der Gymnasien u. Realgymnasien sowie für die V.—VII. Klasse der Realschulen. Wien: F. Tempsky. 100 S. 8⁰.

J. Jacob. Lehrb. d. Arithmetik f. Gymnas., Realgymnas. u. Realsch. Schlüssel. 1. Teil. Für die 1.—3. Klasse. Wien: F. Deuticke. III + 81 S. 8⁰.

J. Jacob. Lehrbuch d. Arithmetik f. Mädchenlyzeen u. verwandte Anstalten. II. Teil: Lehrstoff der 3. u. 4. Klasse. Wien: F. Deuticke. III + 159 S. 8⁰.

J. Jacob u. Frz. Schiffner. Lehrbuch d. Arithmetik u. Geometrie f. Realschulen. I. Teil: Für die 1.—3. Klasse. 3. Aufl. Wien: F. Deuticke. 171 S. 8⁰.

J. Jacob, Frz. Schiffner u. J. Travniček. Lehrbuch d. Arithmetik u. Geometrie f. Gymnasien u. Realgymnasien. I. Teil: Unterstufe. 3. Aufl. Wien: F. Deuticke. 171 S. 8⁰.

J. Jacob, Frz. Schiffner u. J. Travniček. Lehrbuch d. Arithmetik u. Geometrie f. Gymnasien u. Realgymnasien. Für die 1., 2. u. 3. Klasse. 2. umgearbeitete Auflage. Wien: F. Deuticke. III + 146 S. 8⁰.

F. Junker. Lehr- und Übungsbuch zur Arithmetik u. Algebra. Ausg. A. 2. (Schluß-) Teil. Für die oberen Klassen der Gymnasien (VIII u. IX) zusammengest. unter Mitwirkung von K. Kern. Stuttgart: E. Ulmer. VIII + 169 S. 8⁰.

F. Junker. Lehr- u. Übungsbuch z. Arithmetik u. Algebra. Ausg. B. 2. (Schluß-) Teil. Analysis f. die Klassen VIII u. IX der Realgymn. u. Oberrealsch. Stuttgart: E. Ulmer. VIII + 216 S. 8⁰.

W. Koch und A. Chambré. Graphische Algebra. Stuttgart: Grub. 24 S. 8⁰.

Lackemann. Elemente der Arithmetik. Für höh. Lehranst. bearb. v. R. Kreuschmer. Breslau: F. Hirt. 80 S. 8⁰.

W. Leick. Leitfaden der Mathematik. Leipzig: B. G. Teubner. VI + 171 S. 8⁰.

W. Lichtblau u. B. Wiese. Mathem. Unterrichtswerk f. Lehrerbildungsanstalten. Neu bearb. v. B. Wiese, K. Muhs u. O. Teichmann. (In 2 Abteilungen.) I. Abt. in 4 Bd. Breslau: F. Hirt. 157, 170, 352 S. gr. 8⁰.

G. Noodt. Mathem. Unterrichtsbücher f. den Unterr. an den höheren Bildungsanst. f. die weibliche Jugend nach den Bestimmungen v. 12. 12. 08. Mathe-

matik. Ausg. B. II. Heft. (Klasse 3 u. Studienanst. Klasse 6.) 2. Aufl. Bielefeld: Velhagen u. Klasing. III + 96 S. 8⁰.

K. Ott. Die angewandte Mathematik an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie. (Abhandlungen über den math. Unterricht in Deutschland, Bd. IV, Heft 2.) Leipzig: B. G. Teubner. VI + 128 S. 8⁰.

Pyrkosch. Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe höherer Lehranstalten. Bielefeld: Velhagen u. Klasing. XII + 512 S.

W. Reinhardt, N. Mannheimer, M. Zeisberg. Lehr- u. Übungsbuch für den mathematischen Unterricht. Ausg. A. 2 Teile. Frankfurt a. M.: M. Diesterweg. V + 122 S.; VI + 150 S. gr. 8⁰.

Repertorium des mathematischen und sprachlichen Unterrichtsstoffes der Gymnasien. 5. Band. 2. Teil: Algebra. 3. Teil: Algebra. Langensalza: Schulbuchhandlung. III + 122, III + 100 S. 8⁰.

D. Ribi. Aufgaben für die Elemente der Algebra. Auflösungen. Herausgegeben von G. Wernly. Erstes Heft. 6. Aufl. Bern: Francke. 63 S. 8⁰.

M. Richter und H. Oehler. Algebra. Erster Teil. Klasse V. Stuttgart: Bonz. 140 S. 8⁰.

J. Schröder. Lehr- u. Übungsbuch f. den mathem. Unterr. an höh. Lehranst. Rechenbuch f. Lyzeen u. höh. Mädchenschulen in 6 Heften. Bearb. v. O. Bretzke. 4. Heft. Klasse VII. Ausg. für Hamburger Schulen. Frankfurt a. M.: M. Diesterweg. 80 S. 8⁰.

K. Schwab u. O. Lesser. Mathem. Unterrichtswerk. 1. Teil für d. mittl. Klassen sämtl. höh. Lehranst. Bearb. v. G. Wolff. Leipzig: G. Freytag. 90 S. 8⁰.

H. Schwarz. Algebra. 9. Aufl. neu bearb. v. A. Lynowski. Strelitz: H. Hittenkofer. I. = 74, II. = 29 S. Lex.-8⁰.

R. Suppantschitsch. Mathem. Unterrichtswerk. Für Mädchenlyzeen bearb. v. E. Börner. II. Heft. Wien: F. Tempsky. 50 S. 8⁰.

R. Suppantschitsch. Mathem. Unterrichtswerk. Für Mädchenlyzeen bearb. v. E. Börner. Geometrie für Mädchenlyzeen. III. Heft, für die 3. Klasse. Wien: F. Tempsky. 82 S. 8⁰.

R. Suppantschitsch. Lehrbuch d. Arithmetik u. Algebra für die V.—VII. Klasse der Realschulen. Wien: F. Tempsky. 331 S. 8⁰.

H. Thieme. Leitfaden der Mathem. für Gymnasien. 2. Teil. Die Oberstufe. 3. Aufl. Leipzig: G. Freytag. 116 S. 8⁰.

K. Wolletz. Arithmetik u. Algebra für die 4. Klasse der Realschulen. Wien: A. Pichlers Witwe u. Sohn. IV + 121 S. gr. 8⁰.

M. Vollkommer. Algebra. Klasse 4—6. Nürnberg: Korn. V + 227 S. 8⁰.

A. Wilbret. Algebra. Nürnberg: Koch. XI + 340 S. 8⁰.

E. Wrobel. Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra. Erster Teil.: Pensum der Tertia und Untersekunda. 22. Aufl. Rostock: Koch. XII + 356 S. 8⁰.

M. Zwicky. Algebra. Erstes Heft. 10. verbesserte Auflage. Bern: Francke. 48 S. 8⁰.

P. Abbot. Exercises in arithmetic and mensuration. With diagrams. Part. I. London: Longmans, Green and Co. IX + 524 S. (Longmans' Modern Mathematical Series).

W. M. Baker and A. A. Bourne. A shorter algebra. With answers. London: Bell. 388 S. 8°.

S. Barnard and J. M. Child. Exercises from „a new algebra". Parts 1—4. London: Macmillan. 280 S. 8°.

S. Barnard and J. M. Child. Key to a new algebra. Volume 2, containing parts 4, 5, 6. London: Macmillan. 8°.

W. G. Borchardt. Junior practical arithmetic. London: Rivingtons. VI + 250 + XLIII S. (Math. Gaz. **7**, 159.)

W. Briggs and G. H. Bryan. The tutorial algebra or radhakrishnan. Fourth edition. Eighth impression. London: Clive. VIII + 647 S. 8°.

J. Davidson. Arithmetic and algebra. New York: Doran. XI + 235 S. (Self-educator series.)

T. Dennis. An algebra for preparatory schools. Students' edition. Teacher's edition, with interleaved answers. Cambridge: University Press.

L. E. Dickson. College algebra. Second edition. New York: Wiley. VII + 214 S. (1912).

H. C. Dunlop and C. S. Jackson. Slide-rule notes. With diagrams. London: Longmans, Green and Co. 127 S. (Longmans' Modern Mathematical Series.)

W. B. Fite. First course in algebra. Boston: Heath. VII + 285 S. 12mo.

C. Godfrey and A. W. Siddons. Elementary algebra. Cambridge: University Press. XI u. 227-530 u. XLIV S. [Math. Gaz. **7**, 157-158; Nature **92**, 195.]

H. S. Jones. A junior course of arithmetic. Being exercises selected from „A modern arithmetic". Part I. London: Macmillan. IX u. 224 S. [Math. Gaz. **7**, 159.]

H. S. Hall and S. R. Knight. Algebra for colleges and schools, revised and enlarged for the use of American schools by F. L. Sevenoak. New York: Macmillan. XV + 572 S. 12mo.

H. S. Hall. Examples in algebra, taken from Part I of School Algebra. With answers. London: Macmillan. VIII + 198 + 37 S. 8°.

G. B. Halsted. On the foundation and technic of arithmetic. Chicago: Open Court Publishing Co. 133 S.

F. C. Kent. A first course in algebra. New York: Longmans. VII + 249 + 13 S. 8°.

F. O. Lane and J. A. C. Lane. A school algebra. 333 S. London: Arnold. [Math. Gaz. **7**, 156-157.]

H. W. Marsh. Industrial mathematics. New York: John Wiley and Sons. London: Chapman and Hall. VIII + 477 S.

E. Long and W. C. Brenke. Algebra, first course. New York: Century Co. VIII + 283 S. 12mo. (Correlated mathematics for secondary schools.)

D. B. Mair. Exercises in mathematics, with answers. London: Macmillan. 482 S. 8°.

H. W. Marsh. Constructive text-book of practical mathematics. Volume 2: Technical algebra. Part I. New York: Wiley. XVII + 428 S. 8⁰.

C. W. Morey. Advanced arithmetic. New York: Scribner. X + 470 S. 12mo.

T. P. Nunn. Exercises in algebra including trigonometry. Part I. London: Longmans, Green and Co. X + 421 S. (Longmans' Modern Mathematical series.)

C. J. Palmer. Practical mathematics. In 4 parts. Part III: Algebra with applications. Part IV: Trigonometry and logarithms. New York: McGraw-Hill. 189 u. 160 S. 12mo.

J. Perry. Elementary practical mathematics. London: Macmillan and Co. Ltd. XIV + 335 S. [Nature **91**, 551-553.]

F. H. Somerville. Elementary algebra, revised. New York: American Book Co. 447 S. 12mo.

A. W. Stamper. A text book on the teaching of arithmetic. New York: American Book Co. 284 S. 12mo.

W. J. Walker. Examples and text papers in algebra. Part I. London: Mills and Boon. 8⁰.

W. Wells and W. W. Hart. Second course in algebra. Boston: Heath. V + 285 S. 12mo.

G. Wentworth and D. E. Smith. Academic algebra. Boston: Ginn. V + 442 S. 8⁰.

D. W. Werremeyer. Arithmetic by practice. New York: Century Co. 80 S.

W. H. Williams and W. B. Kampthorne. First course in algebra. Chicago: Lyons and Carnaham. IV + 346 S. 12mo.

S. de Cast. Beknopt leerboek der wiskunde. (Kurzgefaßtes Lehrbuch der Mathematik.) 2 Teile. 4. Aufl. Joh. Ykema. 118 u. 159 S. 8⁰.

H. C. Schamhardt. Leerboek der algebra (Lehrbuch der Algebra). W. Versluys, Amsterdam. Teil I. 54 S. Einleitender Kursus für den Schulgebrauch.

Föyn og Juel. Praktisk regnebog for middelskolen. 3 Hefte. 3. Aufl. Trondhjem: Brun.

C. Bourlet. Algèbre. Paris: Hachette. 226 S. 16mo.

C. Bourlet. Éléments d'algèbre. 1er et 2e cycles. 9e édition revisée. Paris: Hachette. 324 S. 16mo.

P. Camman et C. Fassbinder. Algèbre et géométrie. Classe de 2e A et B. 2e édition. Paris: Gigord. 156 S. 12mo.

P. Camman et A. Grignon. Algèbre. Cours de 3e B, 2e et 1re C et D. 3e édition. Paris: Gigord. VI + 228 S. 8⁰.

E. Crombez. Notions d'algèbre. 2e partie. Anvers: Van Ishoven. 208 S.

E. Dumont. Cours d'arithmétique théorique et pratique, suivi d'une note sur les théories logiques des nombres. Bruxelles: De Boeck. XVI + 501 S. 8⁰.

Fourrey. Cours d'algèbre. 8e édition. Paris: École spéciale des travaux publics. 259 S. 8⁰.

A. Grévy. Éléments d'algèbre. Classes de 3e A à 1re A et B. 8e édition. Paris: Vuibert. 323 S. 16mo.

E. Guitton. Cours d'algèbre. Classes de mathématiques A et B. Paris: Hachette. XI + 446 S. 16mo.

M. Haccour. Introduction au cours d'algèbre. 3e édition, augmentée. Namur: Wesmael-Charlier. 75 S. (1912.)

M. Haccour. Cours élémentaire d'algèbre théorique et pratique. Namur: Wesmael-Charlier. 253 S.

G. Nampon. Cent problèmes de géométrie et algèbre, avec solutions. Paris: Hachette. 195 S. 16mo.

L. Naud et G. Hamelin. Cours résumé de mathématiques. Nouvelle édition. Paris: Courrier des examens. 224 S. 8°.

L. Poriniot. Cours pratique d'algèbre appliquée. 4e édition. Namur: Wesmael-Charlier 126 S.

A. Sainte-Laguë. Introduction au cours de mathématiques. Paris: Dunod et Pinat. VIII + 512 S. 8°.

A. Salomon. Leçons d'algèbre. 8e édition. Paris: Vuibert. 267 S. 16mo.

H. Vuibert. Problèmes de baccalauréat (mathématiques). Paris: Vuibert. 531 S. 8°.

V. Wolossevitch. Problèmes d'algèbre, de géométrie, avec solutions complètes. Liége: Livron. 59 S.

C. Arzelà. Trattato di algebra elementare. 3a edizione, 7a impressione. Firenze: Le Monnier. XI + 503 S. 16mo.

C. Burali-Forti e A. Ramorino. Elementi di algebra. 4a edizione. Torino: Gallizio. VII + 142 S. 8°.

S. Catania. Algebra elementare. Parte I. 3a edizione, rifatta. Catania: Giannotta. VIII + 170 S. 16mo.

E. Crepas. Corso di matematica. Parte VI, per la terza classe normale. Roma: A. Manzoni. 107 S. 8°.

G. Frattini. Lezioni di algebra, geometria e trigonometria. Volume II, per la 4a classe. 2a edizione. Torino: Paravia. VII + 217 S. 8°.

A. Martini Zuccagni. Guida pratica per la risoluzione delle equazioni di 1° e 2° grado. 4a edizione. X + 142 S. 16mo (1914).

A. Martini Zuccagni. Trattato d'algebra. 4a edizione, interamente rifatta. Livorno: Giusti. XII + 350 S. 8°.

F. Palatini. Aritmetica ed algebra. 2a edizione. Torino: Gallizio. 330 S. 8°.

C. Pagliani. Sunti di algebra. Rocca S. Casciano: Capelli. 85 S. 8°.

F. Sibirani. Elementi di algebra. 3a edizione. Firenze: Le Monnier. 115 S. 8°.

F. Sigismondo. Lezioni d'algebra elementare. Rimini: Capelli. 120 S. 16mo.

G. M. Testi. Elementi di matematica. Fascicolo 3°. 5a edizione. Livorno: Giusti. VIII + 110 S. 16mo.

S. Genelin. Die vier Grundoperationen mit abgekürzten Dezimalzahlen. Progr. Krems. 43 S. 8⁰.

E. H. Barker. Computing tables and mathematical formulas. Boston: Ginn. V + 88 S. 16mo.

B. A. Bernstein. A set of postulates for the algebra of positive rational numbers with zero. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **9**, 517.

Chanticlaire. Ce qu'il faut savoir pour calculer rapidement de tête. Paris: Dunod et Pinat. 16mo.

R. E. Cicero. Reglas sencillisimas para averiguar la divisibilidad por cualquier número. Mexico Soc. cient. „Antonio Alzate" **32**, 317-331.

A. Genau. Mathematische Überraschungen für Lehrer und Rechenfreunde. Arnsberg: Stahl. 80 S. 8⁰.

T. Hylgers. Une découverte en calcul mental. Liége: Bovy. 8 S. 8⁰.

E. Jaccard. Procédé de calcul rapide pour l'extraction des racines cubiques. Arch. sc. phys. et nat. **36**, 571-572.

R. F. Muirhead. Notes on algebraic inequalities. Edinb. M. S. Notes 1912/13, 129-132.

O. Müller. Graphisches Rechnen und die graphische Darstellung. Glauchau: Streit. 64 S. 8⁰.

O. Neuhaus. Geheimnisse des Schnellrechnens usw. 6. Auflage. Papiermühle: Vogt. III + 56 + 7 S. 8⁰.

E. B. Norris and R. J. Craig. Shop mathematics. Part 2. Prepared in the extension division of the University of Wisconsin. New York: McGraw-Hill. 226 S. 8⁰.

J. Svoboda. (Questions 3861, 3862 par G. Russo) Ens. math. **15**, 80—81. Zahlen gleich einer Potenz ihrer Quersumme; Zahlenpaare, von denen das eine eine Potenz der Quersumme der anderen ist. Lp.

V. Ventosa. Método para la extracción de raíces de los números sin el auxilio de logaritmos. Madrid Rev. Real Ac. **11**, 292-325.

Kapitel 2.
Zahlentheorie.
A. Allgemeines.

K. Hensel. Zahlentheorie. Berlin u. Leipzig: G. J. Göschen. XII + 356 S. 8⁰.

Dieses Buch, eine vorzügliche, klare und einfache Einführung in die seit Jahren vom Verf. ausgebildete und weiter entwickelte Zahlentheorie, beginnt im 1. Kapitel mit der Aufstellung der Zahlbereiche mittels der elementaren Rechenoperationen. Die Teilbarkeit der Zahlen und die Zerlegung in Primzahlen bringt das 2. Kapitel. Erst im 3. fängt die eigentliche Henselsche Theorie an. Die Betrachtung der Zahlen in bezug auf eine festgewählte positive

Zahl g führt zu den Kongruenzen; letztere werden gleich für gebrochene Zahlen, die „ganzen Zahlen", definiert, deren Nenner zu g teilerfremd ist. Ist es auch der Zähler, so heißt die Zahl „Einheit". Aus der Kongruenz ergibt sich die g-adische Entwicklung der Zahlen. Das nächste Kapitel behandelt die allgemeine reduzierte und nicht reduzierte g-adische Zahl, ihre Näherungswerte und ihre Rechnungsregeln, vor allem die Definition des Begriffes „gleich". Im 5. Kapitel wird der Ring der g-adischen Zahlen zusammengesetzt aus den Ringen, die den Primteilern von g entsprechen. Daraus ergibt sich einfach die Einteilung in Klassen (mod. g) und der kleine Fermatsche Satz. Es genügt also, die p-adischen Zahlen zu betrachten, wo p eine Primzahl ist. Dies geschieht im 6. Kapitel. Speziell wird hier die Grundlage der Theorie von unendlichen Reihen entwickelt, deren Koeffizienten p-adische Zahlen sind. Das 7. Kapitel führt zur Funktionentheorie der Variablen im Bereiche der p-adischen Zahlen. Von besonderer Bedeutung ist die Exponentialfunktion und der Logarithmus, welch letzterer jeder Haupteinheit zugeordnet werden kann. Die Theorie der algebraischen Gleichungen mit p-adischen Koeffizienten wird speziell auf den Fall der Gleichung

$$x^m - 1 = 0$$

angewandt. Jetzt kann mit der eigentlichen Zahlentheorie im p-adischen Körper begonnen werden. Zunächst hat die Gleichung

$$x^{p-1} - 1 = 0 \quad (p)$$

$p - 1$ p-adische Wurzeln, die Einheitswurzeln w. Mit Hülfe derselben kann jede p-adische Zahl A in der Form

$$A = p^\alpha w^\beta e^\gamma$$

dargestellt werden. (α, β, γ) ist der Logarithmus von A. Diese Darstellung erlaubt, jede p-adische Zahl A (mod. p^k) zu betrachten: primitive Wurzeln (mod. p^k), Theorie der Indizes und lineare Kongruenz nach einem beliebigen p-adischen Modul. Das 9. Kapitel löst dieselben Aufgaben für die allgemeinen g-adischen Zahlen, indem der Ring der g-adischen Zahlen aus den Ringen seiner Primzahlpotenzen zusammengesetzt wird. Damit kann im 10. Kapitel die reine Gleichung

$$x^\mu = A(g)$$

aufgelöst werden. Speziell betrachtet der Verf. den Fall $\mu = 2$. Die Kongruenz und, von $\mu = 2$, das verallgemeinerte Legendresche Symbol für den Bereich der g-adischen Zahlen, werden ebenso behandelt. Es ergibt sich schließlich sehr einfach ein anderer Beweis des Wilsonschen Satzes. Das 11. Kapitel nimmt A als Einheit E an und setzt $\mu = 2$. Das Legendresche Symbol von E nach jeder Primzahl wird bestimmt und ergibt das gewöhnliche Eulersche Kriterium. Daraus folgt die Theorie der quadratischen Reste, das Gaußsche Lemma, die Ergänzungssätze und das quadratische Reziprozitätsgesetz.

Das letzte, 12. Kapitel bespricht die Auflösung der quadratischen Form

$$a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + \ldots + a_{nn} x_n^2 = 0 \ (p)$$

im Bereich der p-adischen Zahlen, falls $n = 2$ oder 3 ist. Die Gleichung im Bereich der p-adischen Zahlen

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 = 0 \ (p)$$

gibt Anlaß, das Hilbertsche Normenrestsymbol einzuführen und die Beziehungen desselben, speziell die Gleichung

$$\Pi_{(p)}\left(\frac{d,e}{p}\right)=+1$$

zu beweisen. Dabei ist der wesentliche Gedanke, daß die Form als gegeben, die Primzahl p als veränderlich angesehen wird. Obige Formel hat dann folgenden Inhalt: Jede ternäre quadratische Form hat nur für endlich viele Primzahlen p keine 0-Darstellung im Bereich der p-adischen Zahlen. Die Anzahl derselben ist stets gerade. Die Formen gegebener Diskriminanten können daher in Geschlechter eingeteilt werden. Dieses Kapitel behandelt als gleichberechtigt auch den Körper $R(p_\infty)$ aller reellen Zahlen.

Das ganze Buch ist mit zahlreichen, überaus anschaulichen Zahlenbeispielen versehen.
Fu.

E. Cahen. Théorie des nombres. Tome Premier: Le premier degré. Paris: A. Hermann u. Fils. XII + 408 S. 8°.

Dieses Lehrbuch unterscheidet sich gegenüber demjenigen von Châtelet (S. 207) durch ganz bedeutend größere Breite in der Darstellung. So verlangt die zahlentheoretische Darstellung der Gleichungen 1. Grades allein schon den ganzen Band von über 400 Seiten. Allerdings sind, wie die folgende Inhaltsübersicht ergeben wird, in glücklicher Weise manche Dinge mit aufgenommen worden, die sonst in den Darstellungen der elementaren Zahlentheorie fehlen. Dazu rechne ich allerdings nicht die Grundlagen der Arithmetik, ihre Axiome und Rechnungsregeln, die in den ersten Kapiteln behandelt werden. Denn diese Entwicklungen können nur in einem völlig lückenlosen Aufbau entwickelt werden und fordern dazu einen größeren Raum, als ihn ein Lehrbuch der Zahlentheorie bietet. Dagegen geben die Fragen des praktischen Rechnens, auch in verschiedenen Zahlsystemen, vor allem aber die Theorie der linearen Substitutionen, Anlaß zu vielen schönen zahlentheoretischen Betrachtungen.

Während das 1. Kapitel die Addition, das 2. Kapitel die Multiplikation von ganzen Zahlen in nicht einwandfreier Art behandelt, wendet sich das 3. Kapitel zu den Zahlzeichen, den verschiedenen Zahlsystemen und dem Addieren und Multiplizieren von Zahlen, die in einem solchen System gegeben sind. Zugleich wird hervorgehoben, wie erst durch das Positionssystem die Zahlen in strengem Sinne definiert sind, da erst jetzt durch eine endliche Anzahl von Zeichen jede Zahl auch aufgestellt ist.

Das 4. Kapitel definiert die Subtraktion und erlaubt so, im 5. Kapitel die negativen Zahlen einzuführen. Entsprechend enthält das 6. Kapitel die Division und beweist die verschiedenen Regeln, wann eine Zahl durch 2, 3, 5, 9, 11 teilbar ist. Im 7. Kapitel werden die Begriffe des größten gemeinsamen Teilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen aufgestellt und die Berechnungsweise angegeben. Erst das 8. Kapitel führt die Brüche ein und beweist deren Rechnungsregeln.

So führt das 9. Kapitel in die eigentliche Zahlentheorie durch Lösung des Problems, die diophantische Gleichung 1. Grades mit zwei Unbekannten zu lösen. In sehr hübscher Weise wird hier die „Geometrie der Zahlen" eingeführt und mit Hülfe der Zahlengitter zuerst die homogene und dann die allgemeine diophantische Gleichung 1. Grades mit zwei Unbekannten gelöst. Kapitel 10 führt mit denselben Mitteln die zahlentheoretische Lösung der diophantischen Gleichung 1. Grades mit beliebig vielen Unbekannten durch.

Das 11. Kapitel ist ein Abriß der elementaren Algebra; die behandelten Abschnitte seien durch folgende Schlagwörter charakterisiert: Permutationen, Kombinationen, Binomial- und Polynomialkoeffizienten, Determinanten, Auflösung eines Systems linearer Gleichungen, Matrizenrechnung. Diese Theorie erlaubt, im 12. Kapitel nochmals auf die Auflösung der diophantischen Gleichung 1. Grades mit n Unbekannten zurückzukommen. Es wird bewiesen, wann ein System von n speziellen Lösungen alle Lösungen ergeben könne. Daran schließt sich die Lösung eines Systems von p Gleichungen mit n Unbekannten. Die Bedingungen für die Möglichkeit eines Lösungssystems und die Aufstellung der allgemeinen Lösung, im Falle die erstere Bedingung erfüllt ist, werden angegeben. Im Falle von drei Unbekannten wird die geometrische Lösung besprochen.

Das 13. Kapitel handelt von den linearen homogenen Substitutionen von n Veränderlichen, ihrer Gruppe und den sich hieran anschließenden Begriffen der Gruppentheorie. Speziell werden die Substitutionen mit natürlichen Zahlkoeffizienten und mit der Determinante 1 herausgegriffen.

Während das 14. Kapitel die Invariantentheorie der linearen Formen und ihrer Systeme, aber rein algebraisch, ohne Berücksichtigung der zahlentheoretischen Natur der auftretenden Koeffizienten, bringt, werden im 15. Kapitel die Koeffizienten als natürliche Zahlen angenommen und der jetzige Begriff der Äquivalenz festgelegt. Das Äquivalenzproblem wird nicht nur für eine, sondern auch für Systeme linearer Gleichungen gelöst. Kapitel 16 verallgemeinert das Problem durch Behandlung der bilinearen Form von n Variablen x und p Variablen y. Auch hier folgt auf die algebraische die zahlentheoretische Lösung des Äquivalenzproblems mittels Einführung der Reduzierten. Eine solche hat die Gestalt

$$e_1 x_1 y_1 + e_2 x_2 y_2 + \cdots + e_r x_r y_r,$$

wo zudem die e so gewählt werden dürfen, daß jede die folgende teilt (vollkommene Reduzierte). Diese Theorie ist sehr reizvoll und erleichtert in schönster Weise später bei den quadratischen Formen das Verständnis. Sie beruht im wesentlichen auf Arbeiten von Frobenius.

Das 17. Kapitel bringt die klassische Gaußsche Theorie der Kongruenz und die Auflösung der linearen Kongruenz mit einer und mehr Veränderlichen sowie eines Systems solcher Kongruenzen.

Das 18. Kapitel enthält die formale, das 19. Kapitel die eigentliche Zahlentheorie der Matrizen unter Annahme, die Koeffizienten seien ganze Zahlen. Im 20. Kapitel werden Anwendungen des Rechnens mit Matrizen gebracht, indem nach der Aufstellung solcher von gegebenen Eigenschaften gefragt wird; z. B.: Der Wert einer Determinante sei $\equiv 1 \pmod{m}$; bestimme die Determinante, deren Wert $= 1$ ist, und deren Glieder den entsprechenden Gliedern der erstgenannten (mod. m) kongruent sind.

Erst das 21. Kapitel legt den Begriff der Primzahl fest und beweist den Satz der eindeutigen Zerlegbarkeit der ganzen Zahlen in Primfaktoren. Sämtliche Teiler einer Zahl werden aufgestellt, ihre Anzahl berechnet und der kleinste Teiler aller Zahlen von 1 bis 10 000 in einer Tabelle angegeben. Die Funktion $\varphi(m)$ und die mit ihr in Zusammenhang stehenden Theoreme werden in Kapitel 22 aufgestellt, während im 23. Kapitel kurz einige Momente der Kongruenz für Primzahlmoduln hervorgehoben sind.

Das sehr leicht lesbare, schön geschriebene Buch bringt von allen Sätzen

und Entwicklungen Zahlenbeispiele. Es ist auch wertvoll durch die historischen Notizen und Literaturhinweise, die sich auch auf weniger bekannte Arbeiten beziehen. Fu.

A. Châtelet. Leçons sur la théorie des nombres: Modules, entiers algébriques, réduction continuelle. Paris: Gauthier-Villars. X + 156 S. 8°.

Das Buch enthält die Vorlesungen, die der Verf. 1911/12 am Collège de France gehalten hat. Es zeigt, daß für Zahlentheorie in letzter Zeit in Frankreich mehr Interesse ist, und bringt dadurch, daß es ausgiebig französische Arbeiten benutzt, manches Neuartige oder wenigstens manches in neuer Form. Allerdings erscheint dadurch, daß des Verf. Theorie der „tableaux" (F. d. M. **43**, 270, 1912) zugrunde gelegt wird, das Gebäude der Zahlentheorie dem Anfänger in recht formalem Gewande und teilweise fast als Unterabteilung der Invariantentheorie. Auch werden durch diesen Formalismus die Schwierigkeiten in der Auffassung für den Leser ganz bedeutend gesteigert.

Kapitel I bringt die Begriffsbildung und das Rechnen mit „Tableaux" (vgl. Steinitz' „rechteckige Systeme" und Du Pasquiers Tetarionen). Anschließend deutet der Verf. kurz die Bedeutung des vorhergehenden für die Hermitesche Formenlehre an. Ebenso kurz wird auf die Minkowskische geometrische Veranschaulichung in der Geometrie der Zahlen und den Begriff der Strahldistanz eingegangen. Kapitel II bringt unter Benutzung dieser geometrischen Vorstellungen den Dedekindschen Modulbegriff und die Bedingung für die Existenz einer Basis des Moduls. Moduln mit Basen heißen Modultypen. Jedem Modultyp ist ein „Tableau" zugeordnet. Kapitel III studiert Moduln von ganzen rationalen Zahlen und zugehörigen Formen. Das diophantische Problem der Auflösung von n linearen Gleichungen mit m Unbekannten ($m \geqq n$) mit ganzzahligen Koeffizienten in ganzen Zahlen wird mittels des Modulbegriffes gelöst; damit können zwei Sätze von Hermite über Aufstellung von Matrizen mit gegebenen Eigenschaften erledigt werden.

Kapitel IV bringt die Ausdehnung des Bisherigen auf den Fall der algebraischen Zahlen. Definition des Körpers und seiner Konjugierten; bestimmende Zahl und Basis eines Körpers. Norm, Spur und Diskriminante seiner Zahlen. Nimmt man die Basis des Körpers fest an, so wird jede andere Zahl mit ihren konjugierten durch ein rationales „Tableau" festgelegt und umgekehrt. Dasselbe gilt für die ganzen Zahlen. Die Diskriminante des Tableaus der Basis ist die Körperdiskriminante. Kapitel V führt das Ideal nach dem Vorgange Dedekinds ein und beweist die eindeutige Zerlegung der Ideale in Primideale mittels der Kroneckerschen Verallgemeinerung des Gaußschen Satzes. Im Kapitel VI bespricht der Verf. die Reduktion der Tableaux und bringt zwei Minkowskische Sätze über Formenminima. Kapitel VII wendet diese Resultate auf die Theorie der Einheiten, die Körperdiskriminante und die Klassenzahl an.

Drei Noten ergänzen den Text. Fu.

D. Gravé. Elementares Lehrbuch der Zahlentheorie. (Russisch.) 2. Aufl. Kiew 1913. 315 S. gr. 8°.

Die erste Ausgabe (Kiew 1909) ist F. d. M. **40**, 1909, 234 ausführlich besprochen. Die jetzt vorliegende zweite ist umgearbeitet; die wichtigsten

Änderungen sind folgende: In Kap. IV wird das Verfahren von Korkin auseinandergesetzt, zweigliedrige Gleichungen mit Hülfe einer eigens dazu konstruierten Tafel aufzulösen. Der allgemeine Begriff der Gruppe und der damit zusammenhängende des Körpers wird entwickelt und besonders (in Kap. VIII u. IX) der endliche Körper mit seinen Anwendungen behandelt. Die Theorie der quadratischen Formen ist vollständig umgearbeitet. In Kap. XIII n. XIV wird die Bedeutung der Matrizenrechnung für die Zahlentheorie ins Licht gesetzt. Endlich ist die Anzahl der am Ende des Buches hinzugefügten numerischen Tafeln vermehrt. El.

E. Landau. Une série de réponses. Interméd. des math. **20**, 151-155, 175-181, 201, 206.

Landau beantwortet hier eine Reihe von Anfragen, die sich zumeist auf die Zahlentheorie beziehen. Literarische Quellen werden angegeben, Irrtümer berichtigt, auch Ableitungen entwickelt. Obgleich vieles recht wichtig ist, so muß doch auf die Wiedergabe verzichtet werden. Lp.

E. Landau. Sur les conditions de divisibilité d'un produit de factorielles par un autre. Nouv. Ann. (4) **13**, 353-355.

Berichtigung einer Ungenauigkeit im Beweise für einen Satz, den der Verf. Nouv. Ann. (3) **19**, 344 (F. d. M. **31**, 183, 1900, wo indessen der betreffende Satz nicht erwähnt ist) mitgeteilt hat. Sk.

J. W. L. Glaisher. A reciprocal transformation of a class of tables of integers. Messenger (2) **42**, 129-131.

Die in Kürze nicht gut wiederzugebenden, etwas künstlichen Schiebungen sind der Abhandlung entnommen: „On certain transformations of Lejeune-Dirichlet's in the theory of numbers and similar theorems" (Quart. J. **43**, 123-142; F. d. M. **43**, 259, 1912). Lp.

G. Scorza. Osservazioni varie sulla teoria delle sostituzioni e sulle partizioni dei numeri interi in numeri interi. Palermo Rend. **36**, 163-170.

Der Verf. leitet einige Formeln der additiven Zahlentheorie ab, von welchen wir nur eine hier anführen wollen. Es gilt, für jede ganze Zahl τ

$$\frac{1}{\tau} + \Sigma \frac{1}{j_1 j_2 \delta_{j_1 j_2}} + \cdots + \Sigma \frac{1}{j_1 j_2 \dots j_k \delta_{j_1 \dots j_k}} + \cdots = 1.$$

Dabei bezieht sich die $(k-1)$-te Summation auf die Zerlegung der Zahl τ in k positive Summanden $\tau = j_1 + j_2 + \cdots + j_k$. Dabei möge j_1 α-mal, j_2 β-mal usw. vorkommen. Dann sei zur Abkürzung gesetzt $\delta_{j_1 \dots j_k} = \alpha!\,\beta!\,\dots$.

Bi.

M. Fekete. Über die additive Darstellung einiger zahlentheoretischer Funktionen. Ung. Ber. **26**, 196-211.

Der Verf. will eine Darstellung gewisser elementarer zahlentheoretischer Funktionen geben, die die Zerlegung des Argumentes in Primfaktoren nicht erfordert. Ist z. B. $\varphi(n)$ die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen $\leqq n$, $\psi(n)$ die Summe dieser Zahlen, $S(n)$ die Anzahl der Teiler von n, $\Sigma(n)$ die Summe derselben, so wird

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} a_n(k), \qquad \psi(n) = \sum_{k=1}^{n} k\, a_n(k),$$

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} b_n(k), \qquad \Sigma(n) = \sum_{k=1}^{n} k\, b_n(k).$$

Dabei ist $a_n(k) = 1$, wenn $(k, n) = 1$; $a_n(k) = 0$, wenn $(k, n) > 1$; $b_n(k) = 1$, wenn $(n, k) = k$; $b_n(k) = 0$, wenn $(n, k) < k$ $(k < n)$. Es müssen also bloß $a_n(k)$, $b_n(k)$ explizit berechnet werden, ohne die Primzahlzerlegung von n zu kennen. Ist $R_{\alpha,\beta}$ die Sylvestersche Resultante der Binome $(x^\alpha - 1)$ und $(x^\beta - 1)$ und $R_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}$ ihr Hauptminor nach Abtrennung der letzten γ Zeilen und letzten γ Spalten, so findet der Verf.

$$a_n(k) = \left|R_{k,n}^{(1)}\right|, \; b_n(k) = 1 - \left|R_{k,n}^{(k-1)}\right|,$$

wo $|\;|$ den absoluten Betrag bedeutet. Fu.

R. v. Sterneck. Neue empirische Daten über die zahlentheoretische Funktion $\sigma(n)$. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 341-343.

Es sei $\sigma(n)$ die zahlentheoretische Funktion, welche mit Hülfe der Möbiusschen Funktion $\mu(\lambda)$ durch die Gleichung $\sigma(n) = \sum_{\lambda=1}^{n}\mu(\lambda)$ definiert wird. Von Mertens wurde die Ungleichheit $|\sigma(n)| \overline{\overline{<}} \sqrt{n}$ bis zur Grenze $n = 10\,000$ nachgewiesen und gezeigt, daß mit dem allgemeinen Beweise dieser Ungleichheit auch die Riemannsche Vermutung bewiesen wäre, daß die komplexen Nullstellen der Zetafunktion sämtlich den reellen Bestandteil $\frac{1}{2}$ haben. Verf. hat in früherer Zeit durch Herstellung einer bis 500 000 reichenden Tabelle den Nachweis geführt, daß bis zu dieser Grenze, abgesehen von einigen in der Umgebung von $n = 200$ liegenden Stellen, sogar die Ungleichheit $|\sigma(n)| < \frac{1}{2}\sqrt{n}$ gilt. Er vermutet, daß auch für größere n die Ungleichheit allgemein gilt, und hat, unterstützt durch die Wiener Akademie der Wissenschaften, die eine Beihülfe zur Entlohnung von Rechnern gewährte, 16 neue Funktionswerte $\sigma(n)$ ermittelt, deren Argumente bis zur Grenze 5 000 000 hinaufreichen. Stets ergab sich die Ungleichheit bestätigt, und zwar in einer Weise, daß man mit großer Wahrscheinlichkeit auf die allgemeine Richtigkeit derselben schließen kann. (Man vgl. F. d. M. **43**, 249, 1912.) A. K.

E. Landau. Über die Zerlegung der Zahlen in zwei Quadrate. Annali di Mat. (3) **20**, 1-28.

Die Anzahl $A(x)$ der Lösungen von

$$u^2 + v^2 \leqq x,$$

d. h. die Anzahl der Gitterpunkte im Kreise mit dem Radius $\sqrt{x}$ genügt der Relation

$$A(x) = \pi(x) + O(\sqrt{x}).$$

Sierpiński hat 1906 die tiefergehende Beziehung

$$A(x) = \pi(x) + O(\sqrt[3]{x})$$

bewiesen. Der Verf. gibt hierfür einen neuen Beweis, der sich auf die von ihm verbesserte Pfeiffersche Methode (siehe F. d. M. **43**, 268, 1912) stützt. Fu.

E. Landau. Über einen Satz des Herrn Sierpiński. Batt. G. **51**, [(4) **3**], 73-81.

Siehe die vorstehend angezeigte Arbeit des Verf. Hier wird die fast so scharfe Relation

$$A(x) = \pi(x) + O(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon})$$

für jedes $\varepsilon > 0$ bewiesen. Der Beweis spezialisiert denjenigen eines viel allgemeineren Theorems (F. d. M. **43**, 266, 1912) auf den vorliegenden Fall, daß der Bereich ein Kreis ist. Fu.

R. Bricard. Sur un théorème connu d'arithmétique. Nouv. Ann. (4) **13**, 558-562.

Beweis des Satzes, daß jede Primzahl von der Form $4n + 1$ die Summe zweier Quadrate ist, durch Benutzung der „geometrischen Betrachtungen, die manche Autoren und besonders Minkowski erfolgreich eingeführt haben". Lp.

W. S. Baer. Beiträge zum Waringschen Problem. Diss. Göttingen 1913. 74 S.

Es sei $h(n)$ die kleinste Anzahl, so daß jede ganze positive Zahl sich als Summe von $h(n)$ n-ten Potenzen darstellen läßt. Ferner sei $C_\nu(x)$ (x eine reelle positive Variable) die Anzahl der ganzen positiven Zahlen $\leqq x$, die in ν oder weniger Kuben zerlegbar sind. Der Verf. bringt, im Anschluß an Maillet (F. d. M. **27**, 148, 1896), Wieferich (F. d. M. **40**, 236, 1909), Landau (F. d. M. **38**, 227, 1907) folgende Resultate: Es ist

$$\frac{1}{6} < \liminf_{x=\infty} \frac{C_7(x)}{x} \leqq \limsup_{x=\infty} \frac{C_7(x)}{x} \leqq 1.$$

$$h(6) \leqq 478.$$
$$h(4) \leqq 37.$$
$$h(5) \leqq 58.$$

Fu.

W. S. Baer. Über die Zerlegung der ganzen Zahlen in sieben Kuben. Math. Ann. **74**, 511-514.

Beweis des Satzes: Die Zahlen $4096\,u$, wo $u > 0$ ungerade ist, lassen sich in sieben Kuben zerlegen, deren sämtliche sieben Basen eine beliebig vorgegebene positive Zahl g von einer Stelle an, d. h. für alle $u > u_0$ übersteigen. Die Anzahl $C_7(x)$ aller ganzen positiven Zahlen $\leqq x$, die in 7 Kuben zerlegbar sind, hat demnach die Größenordnung x. Fu.

E. Schmidt. Zum Hilbertschen Beweise des Waringschen Theorems. Math. Ann. **74**, 271-274.

Vgl. F. d. M. **43**, 238, 1912; **40**, 236, 1909. Der Verf. gibt mit Hülfe einiger geometrischen Vorstellungen im q-dimensionalen Raum einen durchsichtigen Beweis der Formel:

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2)^{2n} = \sum_{\nu=1}^{p} c_\nu (t_{\nu 1}\, x_1 + \cdots + t_{\nu 5} x_5)^{2n}, \left.\begin{matrix} c_\nu \\ c \end{matrix}\right\} > 0,\ p \leqq q+1$$

(t_ν reell, q die Anzahl der Koeffizienten der reellen allgemeinen Form $2n$-ten Grades). Der Beweis ist dem ursprünglichen von Hilbert nachgebildet. Fu.

M. Brierley. Question 12 731. Ed. Times (2) **24**, 107.

Drei Quadratzahlen in arithmetischer Progression so zu bestimmen, daß jede der drei Summen aus je zwei ihrer Wurzeln eine Quadratzahl ist. — Lösungen von A. Cunningham und F. Phillips. Gd.

S. Tebay. Question 12 437. Ed. Times (2) **24**, 81-82.

Vier Quadratzahlen x^2, y^2, z^2, u^2 derart zu finden, daß die Summe von je drei derselben eine Quadratzahl ist. — Nach Richtigstellung einiger Irrtümer in der Lösung des Aufgabenstellers (**48**, 1898, 103-104) findet der Verf. der vorliegenden Lösung, A. Martin, unter Benutzung der Methode von S. Tebay folgende Formeln für die Wurzeln der verlangten Quadratzahlen:

$$\begin{aligned} x &= (m^2 - n^2)(m^2 + 3n^2)(m^2 - 9n^2), \\ y &= 4mn(m - n)(m + 3n)(m^2 + 3n^2), \\ z &= 4mn(m + n)(m - 3n)(m^2 + 3n^2), \\ u &= 2mn(m^2 - n^2)(m^2 - 9n^2), \end{aligned}$$

die sich schon ohne Beweis in Eulers „Commentationes Arithmeticae Collectae“ vol. I, 472, finden. Die kleinsten Zahlen, die sich für $m = 2, n = 1$ ergeben, sind: $x = 105$, $y = 280$, $z = 168$, $u = 60$. Gd.

A. Martin. On powers of numbers whose sum is the same power of some number. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 431-437.

Im Jahre 1887 veröffentlichte der Verf. zwei einfache Methoden zur Konstruktion von m (> 2) ganzen Zahlen, für welche die Summe der n-ten Potenzen wieder die n-te Potenz einer ganzen Zahl ist (F. d. M. **19**, 436, 1887), Methoden, welche ihm von seinem Landsmanne David S. Hart mitgeteilt worden waren. Verf. hat auf Grundlage dieser Methoden bereits früher eine größere Anzahl von Beispielen gegeben (z. B. für $n = 4, 5, 6$) und veröffentlicht in der vorliegenden Notiz ebenfalls solche Beispiele. Die von Barbette (im Jahre 1910) gegebenen Beispiele

$$4^4 + 6^4 + 8^4 + 9^4 + 14^4 = 15^4$$

und

$$4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5 = 12^5$$

wurden vom Verf. bereits 1887 gefunden. A. K.

G. Métrod, J. Swoboda. Équation indéterminée $\sum x_i^2 - \sum y_i^2 = \sum u_i^3$ ($i = 1, 2, \ldots, m$). Nr. 4209. Interméd. des math. **20**, 239-240; 190.

Verfahren, um unendlich viele Lösungen zu erhalten. Auf S. 190 desselben Bandes hat J. Swoboda, an die vorher gegebene Lösung von L. Aubry anknüpfend, einen anderen Weg zur Lösung gewiesen. Lp.

R. Niewiadomski. Przyczynek do Analizy liczb wielokątnych. (Ein Beitrag zur Analyse der polygonalen Zahlen). Wiad. mat. **17**, 91-98.

Die Polygonalzahlen besitzen interessante Eigenschaften. Der Verf. gibt einige neue, von ihm nirgends in der Literatur angetroffene Eigenschaften an, von denen wir zwei anführen. Bezeichnet N_n^m die n-te m-gonale Zahl, dann hat man

$$8(m-2)N_n^m + (m-4)^2 = [2(m-2)(n-2)+m]^2,$$

also ein Quadrat, und

$$8\left[(N_n^m)^2 + (N_{n+1}^m)^2 + \frac{m-3}{2}\right] + (m-2)^2 = [2(m-2)n^2 + 4n + m]^2,$$

gleichfalls ein Quadrat. A. R.

R. Niewiadomski. (1741) Sur la série de Lamé. Interméd. des math. **20**, 54-56.

An die von Escott gestellte Frage bezüglich der Glieder der Reihe 1, 3, 7, 47, 4 880 847, ..., die aus der Reihe von Fibonacci 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ... (R) hervorgeht anknüpfend, betrachtet der Verf. in dieser Reihe nur die Glieder, deren Ordnungszahl eine Primzahl ist, und teilt die Resultate seiner Untersuchung ihrer Zerlegbarkeit mit: 1, 4, 11, 29, 199, 521, 3571, 9349, ... sind, mit Ausnahme von 4, Primzahlen; spätere Glieder erweisen sich aber zerlegbar. Über die Arten der Faktoren werden einige Hinweise gegeben. Lp.

S. Minetola. Sul problema di ripartizione. Periodico di Mat. **29** [(3) **11**], 67-82.

In zwei früheren Arbeiten (F. d. M. **38**, 228, 1907 u. **40**, 238, 1909) war der Verf. auf gewisse Zahlen gestoßen, die, wie ihm jetzt erst zur Kenntnis gekommen ist, in erschöpfender Weise von M. d'Ocagne in der Abhandlung „Sur une classe de nombres remarquables" untersucht sind (American J. **9**, 353-380; F. d. M. **19**, 241, 1887). Derselbe Gegenstand wurde, ebenfalls ohne Kenntnis der vorangegangenen Arbeiten, von Melfi-Molè (F. d. M. **41**, 300, 1910 u. **42**, 297, 1911) und Galvani (F. d. M. **43**, 335, 1912) behandelt.

„In der vorliegenden Abhandlung beabsichtige ich, meine Untersuchungen (die unter anderem eine auch von d'Ocagne gestellte Aufgabe lösen) mit den vorangehenden über diesen Gegenstand der Analysis zu verbinden. Dann nehme ich auch wieder die Betrachtung des Problems der Verteilung mit Elementen auf, die nicht alle verschieden sind, und ich vervollkommne die auf solche Verteilungen bezüglichen Berechnungen ihrer Werte, bestimme einige Gesetze, welche deren Änderungen beherrschen, und stelle einige bemerkenswerte Fälle der Verteilung vor die Augen. Diese Untersuchungen scheinen mir nicht uninteressant zu sein; sie führen, wie auch aus den in dieser Arbeit vorgelegten Ergebnissen zu sehen ist, sowohl zu einer Verallgemeinerung schon bekannter Formeln, als auch zum Nachweise der einheitlichen kombinatorischen Entstehung von Tatsachen, die man bislang als zerstreut und durch kein gemeinsames Band verknüpft sich merken mußte." Lp.

G. Tarry. Suite de nombres (4100). — Égalités à plusieurs degrés (4108). Interméd. des math. **20**, 64-65, 68-70, 85, 182.

Die Glieder einer arithmetischen Progression in zwei Teile von gleicher Anzahl so zu ordnen, daß die Summen der k-ten Potenzen der Glieder beider Teile einander gleich werden. Lösungen von E. Barbette, Welsch, Brocard, Tarry, Miot, Birck. Lp.

S. Ramanujan. Irregular numbers. Indian Math. Soc. **5**, 105-106.

Es bezeichnen $a_2, a_3, a_5, a_7 \dots$ Zahlen kleiner als 1, wo die Indexe 2, 3, 5, 7, ... die Primzahlen sind. Dann ist

$$\frac{1}{1-a_2}\cdot\frac{1}{1-a_3}\cdot\frac{1}{1-a_5}\cdots = 1 + a_2 + a_3 + a_2\cdot a_2 + a_5 + a_3 a_2 + a_7 + a_2\cdot a_2\cdot a_2 + a_3\cdot a_3 + \cdots,$$

$$\frac{1}{1+a_2}\cdot\frac{1}{1+a_3}\cdot\frac{1}{1+a_5}\cdots = 1 - a_2 - a_3 + a_2\cdot a_2 - a_5 + a_2\cdot a_3 - a_7 - a_2\cdot a_2\cdot a_2 + a_3\cdot a_3\cdot + \cdots,$$

$$(1+a_2)(1+a_3)(1+a_5)(1+a_7)\cdots = 1 + a_2 + a_3 + a_5 + a_2\cdot a_3 + a_7 + a_2 a_5 + a_{11} + a_{13} + \cdots$$

$$(1-a_2)(1-a_3)(1-a_5)(1-a_7)\cdots = 1 - a_2 - a_3 - a_5 + a_2\cdot a_3 - a_7\cdots$$

Hieraus werden für $a_2 = \frac{1}{2^n}, a_3 = \frac{1}{3^n}, a_5 = \frac{1}{5^n}, \dots$ mehrere Beziehungen abgeleitet. Gd.

M. VECCHI. Un nuovo aspetto dato al teorema di Goldbach. Rom. Acc. L. Rend. 22_2, 654-659.

Beweis des Satzes: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine gerade Zahl $2n > 132$ die Summe von zwei Primzahlen derselben Ordnung ist, lautet, daß es wenigstens eine Zahl kleiner als

$$\tfrac{1}{2}(p_m^2 + p_m) - p_{m+1} + 2$$

geben muß, die durch keinen der Ausdrücke

$$a_1 + 3x,\ b_1 + 5x, \ldots,\ l_1 + p_m x,$$
$$a_2 + 3x,\ b_2 + 5x, \ldots,\ l_2 + p_m x$$

darstellbar ist. Dabei sind die Primzahlen ihrer Größe nach durch $p_1, p_2, p_3, \ldots$ gegeben, und zwei p_a und p_{a+h} haben die gleiche Ordnung, wenn $p_a^2 > p_{a+h}$. p_m ist die kleinste Primzahl, so daß für die folgende die Ungleichung $p_{m+1}^2 + p_{m+1} > n$ gilt. Die $a, b, \ldots, l$ sind die Reste nach den betreffenden Primzahlen.
Fu.

L. POLETTI. Un contributo alla tavola dei numeri primi. Pontremoli: Cavanna. 8 S. 8°.

L. POLETTI. La tavola dei numeri primi per l'intervallo da 10 000 000 a 10 020 000. Pontremoli: Cavanna. 8 S. 8°.

Der Verf. behauptet, beträchtliche Vereinfachungen in der Aufstellung einer Primzahltafel ersonnen zu haben, und gibt die durch seine neue Methode berechnete Tafel der zwischen 10 000 000 und 10 020 000 liegenden Primzahlen.
Vi.

R. NIEWIADOMSKI. Nowa metoda rozkładu liczb na czynniki pierwsze. (Eine neue Methode der Zerfällung der Zahlen in Primfaktoren.) Wektor 3, 193-205,

Bekanntlich gibt es verschiedene Methoden der Zerfällung von Zahlen in Primfaktoren, die jedoch alle sehr unvollkommen sind. Die Methode des Verf. führt sehr schnell zum Ziele, viel schneller z. B. als die Methode von Tschebyscheff, ist aber nur auf Zahlen der Form $10m \pm 1$ anwendbar. Sie beruht auf dem Gebrauch der verallgemeinerten Folgen von Fibonacci, d. h. der Folgen von Zahlen $\alpha a + \beta b$, wo a, b zwei relative Primzahlen sind, und α, β der Reihe nach je zwei benachbarte Zahlen der gewöhnlichen Folge von Fibonacci durchlaufen:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

Aus zwei Folgen, die die allgemeinen Glieder

$$(1)\quad \alpha a + \beta b \text{ und } \alpha p + \beta q$$

haben, entsteht die „zusammengesetzte" Folge

$$(2)\quad \alpha(pb - qa) + \beta[qb - (p+q)a].$$

Die „Determinante" der zusammengesetzten Folge, d. h. der Ausdruck

$$(3)\quad D = \pm\,(u_n^2 - u_{n-1}\,u_{n+1})$$

(u_n n-tes Glied der Folge), berechnet für die Folge (2), ist gleich dem Produkte der Determinanten der zwei Folgen (1). Ist also eine Zahl gegeben, so wird zunächst eine verallgemeinerte Folge von Fibonacci gesucht, deren Determinante die gegebene Zahl ist, was auf die ganzzahlige Auflösung der Gleichung

$$(4)\ y^2 - xy - x^2 = D$$

hinauskommt. Diese Folge wird dann als zusammengesetzte Folge (2) betrachtet, und die Folgen (1), aus denen (2) sich zusammensetzt, werden gesucht. Gibt es 2^k Lösungen der Gleichung (4), dann enthält die gegebene Zahl $k+1$ Primzahlen, die schließlich alle als Determinanten gewisser verallgemeinerten Folgen von Fibonacci erhalten werden.

Die Methode versagt, wenn ein Primfaktor die Gestalt $10m \pm 3$ hat. Außerdem ist die Lösung der Gleichung (4), wobei die Hülfe der Tabellen von Quadratzahlen in Anspruch genommen wird, ziemlich umständlich. A. R.

J. A. Gmeiner. Über die Zerlegung der natürlichen Zahlen in Primfaktoren. Monatsh. f. Math. u. Phys. **24**, 3-26.

Ist $w = [\sqrt{a}]$ und $a = w^2 + r$, so zeigt die Gleichung $a = (w-x)(w+x) + r + x^2$, daß jeder gemeinsame Primfaktor von $w - x$ und $r + x^2$ (und ebenso von $w + x$ und $r + x^2$) auch Primfaktor von a ist. Es kommt nun offenbar darauf an, daß bei dieser Prüfung jede Primzahl $\leqq w$ auftritt. Hierzu genügt es, x alle Werte $1, 2, 3, \ldots, \left[\frac{w}{3}\right]$ zu erteilen. Doch kann man oft in speziellen Fällen mit noch weniger Werten auskommen. Ähnlich läßt sich die Gleichung $a = (w-x)(w+x+1) + (r-w) + x(x+1)$ verwerten und noch allgemeiner, wenn $\varkappa$ und λ zwei teilerfremde Zahlen sind, $b = \left[\frac{\varkappa a}{\lambda}\right]$, $\varkappa a = \lambda b + \varepsilon$ und $b = a^2 + \varrho$ ist, die Gleichungen

$$\varkappa a = \lambda(w-x)(w+x) + \lambda\varrho + \varepsilon + \lambda x^2,$$
$$\varkappa a = \lambda(w-x)(w+x+1) + \lambda(\varrho - w) + \varepsilon + \lambda x(x+1).$$

Es wird jetzt noch die Frage nach günstigen Wertepaaren $\varkappa, \lambda$ besprochen. Schr.

A. Aubry. Sur divers procédés de factorisation. Ens. math. **15**, 202-231.

Sehr brauchbare Übersicht über die Methoden zur Zerlegung ganzer Zahlen in Primfaktoren, wie sie von Frénicle, Fermat, Euler, Lagrange, Legendre, Gauß, Tschebyscheff, Landry, Genocchi, Ed. Lucas, Pepin, Lawrence, Barbette und Gérardin aufgestellt worden sind. Schr.

F. J. Vaes. Factorisation des grands nombres. A propos des articles de MM. G. Loria et A. Aubry. Ens. math. **15**, 333-334.

Verweis auf des Verf. drei Noten in Verh. v. d. k. Akademie van Wetenschapen te Amsterdam 1902 (F. d. M. **32**, 1901, 188; **33**, 1902, 200). Schr.

R. D. Carmichael. On the numerical factors of the arithmetic forms $\alpha^n \pm \beta^n$. Annals of Math. (2) **15**, 30-70.

Es seien $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ zwei ganze rationale teilerfremde Zahlen. α, β sind dann Wurzeln der Gleichung

$$z^2 - (\alpha + \beta)z + \alpha\beta = 0.$$

Der Verf. setzt

$$D_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, S_n = \alpha^n + \beta^n.$$

D_n und S_n sind wieder ganze Zahlen. Wegen $S_n = D_{2n}/D_n$ kommt es im Grunde nur auf die Zahlen D_n an. Diese werden auf ihre Faktoren untersucht. Alle Sätze leiten sich aus der Grundformel

$$D_n = \prod_d F_d(\alpha, \beta)$$

her, wo das Produkt über alle Teile $d \neq 1$ von n zu erstrecken ist, und

$$F_d(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^{\varphi(d)} (\alpha - \beta e^{\frac{2\pi i}{d} s_i})$$

ist (s_i sind die zu d teilerfremden Zahlen zwischen 0 und d). Die Zahlen $F_d(\alpha, \beta)$ sind alle ganz und rational. D_n ist stets durch D_d teilbar, wenn d ein Teiler von n. Wenn p eine Primzahl ist und $p^a \neq 2$ die höchste in D_n enthaltene Potenz von p, so ist p^{a+b} die höchste in $D_{n\mu p^b}$ enthaltene Potenz von p, falls μ zu p prim ist. Wenn p kein Teiler von $(\alpha - \beta)^2$ und $\alpha\beta$ ist, so ist p ein Faktor von D_{p-1} oder D_{p+1}, je nachdem $(\alpha - \beta)^{p-1} \equiv +1$ oder $-1 (\text{mod. } p)$ ist. Der größte gemeinsame Teiler von D_n und D_{np}/D_n ist 1 oder p, falls p eine Primzahl ist.

Als Anwendung wird der Dirichletsche Satz über die Anzahl der Primzahlen einer arithmetischen Reihe für die linearen Formen $p^k x - 1$ ($x = 1, 2, \ldots$, p eine ungerade Primzahl) und $2^k 3 x - 1$ bewiesen. Fu.

N. S. Aiyar. Question 17 368. Ed. Times (2) **23**, 102-103.

Es ist $m(m^2 + m + 8)(m^2 + 3m + 2)(4m^2 + 5m + 19)$ immer durch 840, und wenn m von der Form $4n + 2$ ist, durch 1680 teilbar. — Beweise von A. Cunningham und H. Freeman. Gd.

A. Cunningham. Factorisation of $N = (y^4 \mp 2)$ and $(2y^4 \mp 1)$. Messenger (2) **43**, 34-57.

„In dieser Abhandlung ist die Aufgabe gestellt, die Faktorenzerlegung der Zahlen N von den vier Typen: $y^4 - 2$, $y^4 + 2$, $2y^4 - 1$, $2y^4 + 1$ zu entwickeln. Diese Zahlen hängen eng zusammen, so daß es passend ist, sie zusammen zu behandeln. Sie haben auch enge Beziehungen zu den Zahlen $2^n \mp 1$, und ihre Faktorenzerlegung hängt in ausgedehnter Weise von einer vorgängigen Kenntnis der letzteren Art von Zahlen ab, wie dies später hervortreten wird."

Die aus vielen Einzelheiten bestehende Untersuchung muß im Original

nachgelesen werden. Drei Methoden werden betrachtet: I. Aus früheren Faktorenzerlegungen. II. Mit Hülfe der primitiven Wurzeln. III. Mit Hülfe der Potenzreste. Am Ende der Abhandlung sind mehrere Tabellen mit den errechneten Zahlen gegeben. Lp.

A. Cunningham. Question 17 314. Ed. Times. (2) **23**, 62-66.

Es sei

$$N_1 = t_1^4 - 2u_1^2,\ N_2 = t_2^2 - 2u_2^4,\ N_3 = 2u_3^4 - t_3^2,\ N_4 = 2u_4^2 - t_4^4.$$

Die Zahlen N zu finden, welche auf zwei, drei oder vier Arten in irgendeiner der obigen Formen ausdrückbar sind. Einige dieser Zahlen sind auch algebraisch auf eine oder mehrere Arten in einer zweiten von diesen Formen ausdrückbar. — Lösung vom Aufgabensteller mit Erweiterungen und mehreren Zahlenbeispielen. (Vgl. auch Questions 17 204 und 17 226; F. d. M. **43**, 258, 1912.) Gd.

A. Cunningham. Question 17 171. Ed. Times (2) **24**, 85-86.

Es sei $N_q = x^q - y^q$, dann lassen sich N_3 und N_7 in der Form $N = Q^2 + 1$ für gewisse Werte von x, y ausdrücken. Für $q = 3$ sind diese Werte $x = \xi^2$, $y = 3\eta^2$, wobei (1) $\xi^2 - 3\eta^2 = 1$; für $q = 7$ ist $x = \xi^2, y = 7\eta^2$ und (2) $\xi^2 - 7\eta^2 = 1$. Jede Lösung (ξ, η) der beiden Pellschen Gleichungen (1) und (2) liefert Zahlen N_3 und N_7 von der Form $1 + Q^2$. Eine Zahlentabelle fügt der Aufgabensteller seiner Lösung bei. Gd.

A. Cunningham. Question 4157. Intermèd. des math. **20**, 120, 184.

Jede Primzahl p von der Form $X^n - Y^n$ ist in der Form $p = \dfrac{x^3 - y^3}{x - y} = \dfrac{v^3 + w^3}{v + w}$ ausdrückbar für $n = 12m + 7$. Beweis von L. Aubry für $n = 6m + 1$, von Welsch für jedes ungerade n. Lp.

A. Cunningham. Question 4105. Intermèd. des math. **20**, 66-68.

Es sei $N_{(n)} = (X^n - Y^n)/(X - Y)$; jede Zahl $N_{(n)}$ ist in der Form ausdrückbar

$$N_{(n)} = T^2 + nXYU^2,$$

wenn $n = 4k + 3$. Durchgerechnet für $n = 7$. Lp.

A. Cunningham. On Mersenne's numbers. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 384-386; Brit. Ass. Rep. Dundee **82**, 406—407.

Es handelt sich um die Frage, für welche Primzahlen p die Mersenneschen Zahlen $M_q = 2^q - 1$ Primzahlen sind, und für welche nicht. Mersenne hatte

(1644) ohne Beweis behauptet, daß von den 56 q unter der Grenze 257 die 12 Werte

$$q = 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$$

Primzahlen für M_q ergeben, die übrigen nicht. Die Behauptung hat sich nicht in allen Fällen als richtig erwiesen, bisher ist von den 12 Werten

$$q = 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 127$$

bewiesen, daß M_q prim ist, von 29 Werten

$$q = 11, 23, 29, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 67, 71, 73, 79, 83, 97, 113, 131, 151, 163, 173, 179, 181, 191, 197, 211, 223, 233, 239, 251,$$

daß M_q nicht prim ist, für 15 Werte

$$q = 101, 103, 107, 109, 137, 149, 157, 167, 193, 199, 227, 229, 241, 257$$

ist der Charakter von M_q noch nicht entschieden. Die Notiz enthält eine Tabelle mit Angabe der betreffenden Autoren, welche die entscheidenden Rechnungen ausführten, und die zugehörige Bibliographie. A. K.

Balak Ram. Mersenne's numbers. Indian Math. Soc. **5**, 56-59.

Der Verf. skizziert ein Verfahren, das verhältnismäßig rasch entscheiden läßt, ob z. B. $2^{31} - 1$, $2^{41} - 1, \ldots$ eine Primzahl ist, oder in welche Faktoren es zerlegt werden kann. Fu.

M. Meissner. Über die Teilbarkeit von $2^p - 2$ durch das Quadrat der Primzahl $p = 1093$. Berl. Ber. 1913, 663-667.

Im Anschluß an das Wieferich-Mirimanoff-Furtwänglersche Kriterium des Fermatschen Satzes (siehe F. d. M. **43**, 272, 1912) gibt der Verf. an, daß $p = 1093$ die erste Primzahl ist, für die $2^p - 2$ durch p^2 teilbar ist. Er zeigt, wie mittels der Zerlegung von 1093 im Körper $(\sqrt{-1})$:

$$1093 = 33^2 + 2^2$$

diese Tatsache leicht kontrolliert werden kann. Eine von Cunningham (F. d. M. **43**, 245, 1912) unabhängige Tabelle der Werte

$$\tau \equiv \frac{p-1}{t}, \lambda \equiv \frac{2^t - 1}{p}, \text{ wo } \frac{2^{p-1} - 1}{p} \equiv \tau\lambda \pmod{p},$$

für alle Primzahlen p bis 2000 wird angefügt. Fu.

T. Suzuki. A theorem on the series of prime numbers. Tôhoku Math. J. **3**, 83-86.

Der Verf. verallgemeinert Sätze von Bonse, indem er beweist: Es gibt eine nur von m abhängige Grenze N, so daß für alle $n > N$:

$$p_{n+1}^{m} < p_1 p_2 \ldots p_n.$$

Dabei durchlaufen $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ die der Größe nach angeordneten natürlichen Primzahlen. Fu.

Coblyn. Sur les couples de nombres premiers. S. M. F. C. R. 1913, 55—56.

Die Note soll feststellen, welche Mittel die elementare Arithmetik besitzt, um zu untersuchen, ob es für die Reihe der Primzahlen eine Grenze für Paare mit der Differenz 2 gibt.

Solche Primzahlen müssen von der Form $6P \pm 1$ sein; P heißt die Ordnung des durch diese Form ausgedrückten Zahlenpaares, ob Primzahlen oder nicht. Es läßt sich ein Sieb aufstellen, das auf dem Wege der Exhaustion die Ordnungen der Primzahlpaare gibt. Wenn die Reihe der Primzahlen begrenzt ist, so muß von einem gewissen Range an der Ausdruck $6\alpha\beta + \varepsilon\alpha + \varepsilon'\beta$, in dem für α und β alle möglichen ganzzahligen Werte gesetzt werden und ε sowie ε' gleich $+1$ oder -1 sind, alle ganzen Zahlen darstellen. Andererseits beweist der Verf. den folgenden Zusatz des Wilsonschen Satzes: Damit die Zahl p prim sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Zahl

$$(r-1)!\,(p-r)! + (-1)^{r-1}$$

ein Vielfaches von p ist, wo p eine beliebige ganze Zahl ist, prim oder nicht, kleiner als p. Hieraus wird gefolgert, daß

$$\frac{4\,(6p-2)!}{36p^{r-1}}$$

als Rest ergibt:

$-(6p+3)$, wenn $6p-1$ und $6p+1$ beide Primzahlen sind,
0, wenn $6p-1$ und $6p+1$ zusammengesetzt sind,
$-2\,(6p+1)$, wenn $6p-1$ allein Primzahl ist,
$6p-1$, wenn $6p+1$ allein Primzahl ist.

Wenn endlich eine der Zahlen $6p+1$ und $6p-1$ zusammengesetzt ist, so kann ihr Produkt auf mehrere Arten in Produkt aus zwei Faktoren zerlegt werden. Dann läßt sich eine Primzahl $6\alpha + \varepsilon$ finden, wo $\alpha < p$ ist, die $6p + \varepsilon'$ und $p - \varepsilon\varepsilon'\alpha$ teilt. Lp.

C. Rogel. Über Primzahlen und k-te potenzfreie Zahlen. Wien. Ber. **122**, 669-700.

Der erste Teil der Arbeit ist die Fortsetzung der früheren Arbeit F. d. M. **43**, 249, 1912: Jeder Primzahl u sind wenigstens zwei Primzahlen $v < u$ zugeordnet. Der zweite Teil ist eine Weiterführung der Arbeit F. d. M. **43**, 243, 1912. Weitere Darstellungen der Funktion $Q_k(z)$. Fu.

U. Concina. Sulla divisibilità della somma di potenze simili di numeri interi consecutivi pel numero dei suoi termini. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 164-177.

Fortsetzung der Untersuchung in der Note „Di una proprietà dei numeri primi“ (F. d. M. **42**, 207, 1911).

Es sei $S(k,n) = 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + k^n$ und $Z(k,n)$ die Summe der Glieder in $S(k,n)$, die teilerfremd zu k sind. Folgende Sätze werden bewiesen:

I. Wenn k eine ungerade Zahl und n eine durch keinen um 1 verminderten Primteiler von k teilbare ganze Zahl ist, so ist $S(k,n)$ ein Vielfaches von k.

II. Die Summe $S(2^\lambda, n)$ ist durch 2^λ teilbar, wenn n ungerade und größer als 1

ist, außerdem $\lambda > 1$; in jedem anderen Falle ergibt die Division durch 2^λ den Rest $2^{\lambda-1}$. III. Wenn k eine gerade Zahl und n eine ungerade Zahl größer als 1 ist, so ist die Summe $S(k, n)$ teilbar durch k oder nur durch $\frac{1}{2}k$, je nachdem k durch 4 oder nicht durch 4 teilbar ist. Ist $n = 1$, so ist $S(k, n)$ bloß durch $\frac{1}{2}k$ teilbar. Wenn endlich n gerade ist, so ist $S(k, n)$ bloß durch $\frac{1}{2}k$ teilbar oder, falls überdies n nicht ein Vielfaches irgendeines der um 1 verminderten Primfaktoren von k ist. IV. Wenn p eine ungerade Primzahl und n durch $p-1$ teilbar ist, so gibt die Division von $S(p^\alpha, n)$ durch p^α den Rest $\varphi(p^\alpha)$. V. Wenn n und $k = 2^\lambda a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots = 2^\lambda L = a^\alpha A = b^\beta B = c^\gamma C = \ldots$ $(\lambda \geqq 0, \alpha \geqq 0, \beta \geqq 0, \gamma \geqq 0, \ldots)$ ganze Zahlen sind und $a, b, c, \ldots$ die verschiedenen ungeraden Primfaktoren von k, so besteht die Kongruenz:

$$S(k, n) \equiv \varepsilon_2 L\varphi(2^\lambda) + \varepsilon_a A\varphi(a^\alpha) + \varepsilon^\beta B\varphi(b^\beta) + \varepsilon\, C\varphi(c^\gamma) + \cdots,$$

wo $\varepsilon_2 = 0$ ist, wenn n ungerade und > 1, $\lambda > 1$, (mod. k), aber $\varepsilon_2 = 1$ in allen anderen Fällen; $\varepsilon_a = 1$ oder $= 0$, je nachdem n ein Vielfaches von $a - 1$ ist oder nicht; ähnlich für $\varepsilon_b, \varepsilon_c, \ldots$. VI. Bei denselben Bezeichnungen besteht die Kongruenz:

$$Z(k, n) \equiv \varphi(k) \{\varepsilon_2 L^{\varphi(2^\lambda)} + \varepsilon_a A^{\varphi(a^\alpha)} + \varepsilon_b B^{\varphi(b^\beta)} + \cdots\} \text{ (mod. } k),$$

wo $\varepsilon_2 = 0$, wenn n ungerade und $\lambda > 1$ ist, dagegen $\varepsilon_2 = 1$ in jedem anderen Falle; ε_a ist 1 oder 0, je nachdem n ein Vielfaches von $a - 1$ ist oder nicht; ebenso $\varepsilon_b, \varepsilon_c$ usw.

Lp.

U. Concina. Delle potenze simili dei numeri che sono primi con un dato numero. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 267-270.

Die Note knüpft an den VI. Satz der vorstehend angezeigten Arbeit an und beweist mit Hülfe einer zuerst aufgestellten Verallgemeinerung des kleinen Fermatschen Satzes: Wenn $k = 2^\lambda a^\alpha b^\beta \ldots h^\eta = 2^\lambda L + a^\alpha A = b^\beta B = \cdots = h^\eta H$, wo $a, b, \ldots, h$ die verschiedenen ungeraden Primteiler von k sind, so besteht die Kongruenz:

$$L^{\varphi(2^\lambda)} + A^{\varphi(a^\alpha)} + B^{\varphi(b^\beta)} + \cdots + H^{\varphi(h^\eta)} \equiv 1 \text{ (mod. } k).$$

Infolge dieses Satzes kommt die in jenem VI. Satz enthaltene Kongruenz auf die Form $Z(k, n) \equiv \varphi(k)$(mod. k), wenn alle ε in ihr gleich 1 sind. Falls aber nur einige der ε in ihr gleich 1 sind, z. B. $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$, so folgt:

$$Z(k, n) \equiv A^{\varphi(a^\alpha)} + B^{\varphi(b^\beta)} + C^{\varphi(c^\gamma)} \text{ (mod. } k).$$

Lp.

L. E. Dickson. Finiteness of the odd perfect and primitive abundant numbers with n distinct prime factors. American J. **35**, 413-422; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 285.

Ist $\sigma(a)$ die Summe aller Teiler der positiven ganzen Zahl a, so heißt a überschwenglich, vollkommen oder mangelhaft, je nachdem

$$\sigma(a) > 2a, = 2a \text{ oder } < 2a$$

ist. Eine nicht mangelhafte Zahl heißt primitiv, wenn sie nicht Vielfaches einer kleineren nicht mangelhaften Zahl ist. Der Verf. beweist den Satz: Die Anzahl der primitiven, nicht mangelhaften Zahlen, die eine gegebene Anzahl von verschiedenen Primfaktoren besitzen, ist endlich. Daraus folgt, daß die Anzahl der ungeraden vollkommenen Zahlen mit verschiedenen Primfaktoren endlich ist. Dem Beweise folgt ein Verzeichnis aller nicht mangelhaften Zahlen von vier oder weniger verschiedenen Primfaktoren. Fu.

L. E. Dickson. Even abundant numbers. American J. **35**, 423-426.

Fortsetzung der vorhergehenden Arbeit. Das Resultat wird auch auf gerade, primitive, nicht mangelhafte Zahlen ausgedehnt, falls 2 nur zur m-ten Potenz in der Zahl aufgehen darf. Auch hier werden die Tabellen von verschiedenen Arten nicht mangelhafter Zahlen angegeben. Fu.

L. E. Dickson. Theorems and tables on the sum of the divisors of a number. Quart. J. **44**, 264-296.

Es sei $s(n)$ die Summe der Teiler der natürlichen Zahl n, kleiner als n; man schreibe ferner für $s(s(n)) = s^2(n)$. E. Catalan hat die Vermutung ausgesprochen, daß die Reihe

$$s(n), s^2(n), \ldots, s^{k-1}(n), \ldots$$

entweder auf 1 oder eine vollkommene Zahl ($s(n) = n$) führe. Da $s(p) = 1$ für jede Primzahl p, so kann man den Satz so formulieren, daß die obige Reihe stets eine Primzahl enthält, wenn sie nicht periodisch ist. Diese empirische Tatsache wird vom Verf. an der Hand umfangreicher Tabellen kontrolliert. Der Satz ist richtig für alle Zahlen $n < 138$ und für die meisten Zahlen < 1000. Für $n = 138$ und andere Zahlen ist die Reihe von ungeheurer Länge und konnte nicht berechnet werden. Wird die Kette periodisch von der Periode 2, so sind die Zahlen $s(n)$ und n befreundet:

$$s^2(n) = s(s(n)) = n.$$

Der Verf. findet fünf Paare befreundeter Zahlen ≤ 6232, von denen drei nicht bei Euler auftreten. Außerdem treten Perioden bis zu 8 auf. Eine weitere Tafel gibt alle geraden überschwenglichen Zahlen < 6232. Die übrigen Tafeln betreffen Lösungen der Gleichung $s(n) + n = g$, wo g eine bestimmte Zahl ist. Fu.

H. Rothe. Über ein einfaches arithmetisches Analogon zu einem Satze von C. Jordan. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 317-320.

Ein Teiler b einer natürlichen Zahl a heiße Maximalteiler, wenn kein Vielfaches von $b (\neq a)$ Teiler von a ist. Die Zahl a/b ist also immer eine Primzahl, und die Anzahl der Maximalteiler gleich der Zahl der verschiedenen in a aufgehenden Primzahlen. Ist c ein Maximalteiler von b, d von c, usf., so bildet

$$a, b, c, d, \ldots, k, 1$$

eine Kompositionsreihe und

$$\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{b}{c}, \ldots, \varkappa = \frac{k}{1}$$

die zugehörige Indexreihe. Dieselbe besteht immer aus allen verschiedenen in a enthaltenen Primzahlen. Dieses Resultat ist analog dem Jordanschen Satz über die Maximalteiler und ihre Indexreihe in einer endlichen diskreten Gruppe.

Fu.

J. Barinaga. Sobre las progresiones aritméticas cuya diferencia es prima con un cierto modulo. Ann. sc. Ac. Pol. Porto 8, 249-253.

Es sei δ eine zu $N = nk$ teilerfremde Zahl; dann ist die Summe zu einem beliebigen n teilerfremden Gliede der arithmetischen Progression $N, N + \delta$, $N + 2\delta, \ldots$, die zwischen den Vielfachen nk und $n(k + h\delta)$ liegen, gleich $\frac{1}{2}\varphi(n)(2k + h\delta)h$. Die Summe eben dieser Glieder, die einen größten gemeinsamen Teiler p mit $m = np$ haben, ist $\frac{1}{2}n\varphi(n/p)(2k + h\delta)h$. Lp.

W. Kapteyn. Vraagstuk CIV. Wisk. Opgaven 11, 271-275.

Wenn n, p, q beliebige Zahlen sind, so wird eine Zahl t gesucht, die der Bedingung

$$E\left(\frac{n}{pt - q}\right) = E\left(\frac{n + qt}{pt}\right)$$

genügt. Lösung:

$$t = E\left(\frac{q + \sqrt{q^2 + 4np}}{2p}\right)$$

Beweis von W. Kapteyn und C. Crijns. Schn.

S. Guzel. O kilku własnościach największego dzielnika nieparzystego. (Einige Eigenschaften des größten ungeraden Teilers.) Wektor 2, 97-107 (1912).

In einer früheren Arbeit „Über den größten ungeraden Teiler" (Wiad. mat. **14**; F. d. M. **41**, 226, 1910) hat der Verf. eine Formel für die Summe

$$(1) \qquad \varphi(x) = \sum_{1}^{Ex} \delta(n)$$

aufgestellt, wo $\delta(n)$ den größten ungeraden Teiler der Zahl n bedeutet. Jetzt betrachtet er die allgemeinere Summe

$$(2) \qquad S(x) = \sum_{1}^{Ex} \delta(n)\, \tau(n),$$

wo $\tau(n)$ eine gewissen Bedingungen genügende Funktion von n ist.

Es sei zunächst die Bedingung erfüllt

$$\tau(2n) = \lambda\tau(n),$$

(λ positive Zahl), und es werde

$$T(x) = \sum_{1}^{Ex} n\tau(n)$$

gesetzt, dann ist

(3) $$S(x) = T(x) - \sum_{1}^{E \log x} \lambda^k T(2^{\frac{x}{k}}).$$

Es genüge zweitens $\tau(n)$ der Bedingung

$$\tau(1)\,\tau(ab) = \tau(a)\,\tau(b);$$

setzt man

$$\overline{U}(x) = \frac{1}{\tau(1)} \sum_{1}^{E\frac{x+1}{2}} 2(n-1)\,\tau(2n-1),$$

dann ist

(4) $$S(x) = \sum_{0}^{E \log_2 x} \tau(2^m)\,\overline{U}\left(\frac{x}{2^m}\right),$$

wo $\log_2 x$ den Logarithmus von x mit der Basis 2 bedeutet. A. R.

Jos. Schumacher. Der Wilsonsche Satz. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 263-264.

Wiedergabe des Beweises von Cayley (Messenger (2) **12**, 41; F. d. M. **14**, 121, 1882). Collected Mathematical Papers **12**, 45. Lp.

P. Bachmann. Über Fermats „kleinen" Satz. Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 185-187.

Fragestellung: Ist der kleine Fermatsche Satz umkehrbar? d. h. ist, wenn für jede zu n teilerfremde Zahl x

$$x^{n-1} \equiv 1 (\text{mod. } n)$$

ist, auch n eine Primzahl? Antwort: Dies ist nicht der Fall. Beispiel $n = 3 \cdot 11 \cdot 17, n = 5 \cdot 13 \cdot 17$ (Mitteilung von Mahnke). Fu.

J. E. Rowe. On Fermat's theorem and related theorems. Johns Hopkins Univ. Circ. 1913 Nr. 7, 35-40.

6 ganz elementare Sätze, wie: die Zahl $x^n - y^n$, wo x, y, n ungerade Zahlen bedeuten, ist nur dann eine n-te Potenz, wenn

$$x - y \equiv 0 (\text{mod. } 2^n).$$

Fu.

A. Arévalo. Notas para la „Teoria de los números". Rev. Soc. Mat. Esp. **2**, 123-131.

Ist p eine Primzahl, und setzt man in

$$a(a+r)(a+2r)\dots(a+(p-1)r) = a^p + S_1 a^{p-1} r + S_2 a^{p-2} r^2 + \cdots + S_{p-1} a r^p$$

für r und a eins ein, so wird

$$p! = 1 + S_1 + \cdots + S_{p-1}.$$

Man sieht leicht, daß $S_1, \dots, S_{p-2}$ durch p teilbar sind. Also ist

$$S_{p-1} + 1 = (p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{(Satz von Wilson)}$$

und für $r = 1$:

$$a(a+1)\dots(a+(p-1)) \equiv a^p - a \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{(Satz von Fermat)}.$$

Fu.

G. Frattini. Sulle congruenze omogenee e simmetriche con un numero primo di variabili. Periodico di Mat. **29** [(3) **11**], 49-53.

„Die Sätze von Catalan und Lionnet, welche in der Note von U. Concina: Di una proprietà dei numeri primi" (1911) enthalten sind, sowie die Sätze selbst von Fermat und Wilson, können als unmittelbare Folgen eines einzigen Prinzipes angesehen werden, das lautet: Eine homogene, symmetrische ganze Funktion der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ habe ganzzahlige Koeffizienten; $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ seien teilerfremd zu der ganzen positiven Zahl m und kleiner als m. Wenn die Funktion auch eine zu m teilerfremde Zahl ist, so muß der Homogeneitätsgrad der Funktion ein Vielfaches des kleinsten Exponenten sein, zu welchem $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ gehören (mod. m), das will sagen des kleinsten Exponenten i, für den

$$\alpha^i \equiv 1, \beta^i \equiv, \gamma^i \equiv 1, \dots \pmod{m}.$$

Daß solch ein kleinster Exponent existieren muß, wird leicht bewiesen, ohne daß man auf das Fermatsche Theorem zurückgreift; das letztere läßt sich, wie ich hernach zeige, aus dem ausgesprochenen Satze herleiten." Als Zusätze werden noch einige interessante Folgerungen gezogen (vgl. F. d. M. **42**, 207, 1911). Lp.

U. Concina. Una dimostrazione del teorema relativo alla possibilità della congruenza binomia di grado n e di modulo primo. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 212-216.

Ein Beweis des bekannten Satzes: Es sei $p > 2$ eine Primzahl, die kein Teiler von D ist. Damit die Kongruenz $x^n \equiv D \pmod{p}$ möglich sei, ist es notwendig und hinreichend, daß $D^{(p-1)/\delta} \equiv 1 \pmod{p}$ ist, wo δ der größte gemeinsame Teiler von n und $p-1$ ist, und dann besitzt die Kongruenz δ und nur δ Wurzeln. Der Beweis benutzt nur elementare Hülfsmittel, nicht aber die Theorie des Index. Lp.

A. Cunningham and H. J. Woodall. On Haupt-Exponents of 2. Quart. J. **44**, 237-242.

Gehört 2 zum Exponenten ξ (mod. p), so heißt ξ Hauptexponent von 2 und $\nu = \frac{p-1}{\xi}$ größter Index. Der Verf. gibt als Fortsetzung seiner früheren Tafeln (F. d. M. **43**, 245, 1912) eine Tabelle der ν für alle Primzahlen zwischen 60 000 und 80 000. Fu.

F. Schuh. Verschillende opmerkingen uit het gebied der congruenties Suppl. Vriend der Wisk. **25**, 33-59, 143-159, 228-259.

Exponentiale und binomiale Kongruenzen; Theorie der Indexe. Erweiterung des Wilsonschen Satzes. Bestimmung verschiedener Produkte mit Hülfe der Theorie der Indexe. Symmetrische Funktionen der Wurzeln einer Kongruenz mit Primmodul. Die Lösung mehrerer linearer Kongruenzen nach einem Primmodul mit mehreren Unbekannten. Der Artikel ist eine Ergänzung eines Artikels von 1910 (F. d. M. **41**, 230, 1910). Schn.

P. J. Heawood. On a graphical demonstration of the fundamental properties of quadratic residues. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 373-376.

Es sei p eine ungerade Primzahl. Man nimmt einen Kreis vom Umfang p. Trägt man für jede weitere ungerade Primzahl q Kreisbogen der Länge $q, 2q, 3q, \ldots, (p-1)q, pq$ von einem festen Punkt des Kreises in einer bestimmten Richtung ab, so erhält man Kreispunkte, deren Entfernungen vom Anfangspunkt, auf dem Kreise gemessen, den kleinsten Resten (mod. p) entsprechen. Das Gaußsche Lemma kann dann so ausgesprochen werden:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^r,$$

wo r die Anzahl der Punkte von $q, 2q, 3q, \ldots, \frac{p-1}{2}q$ im untern Halbkreis ist. Entsprechend kann der ganze Beweis des Reziprozitätsgesetzes geometrisch eingekleidet werden. Fu.

J. McDonnell. On quadratic residues. American M. S. Trans. **14**, 477-480.

Der Verf. beweist, daß für die n-te primitive Einheitswurzel s das Produkt

$$A = \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{s^{km} - s^{-km}}{s^k - s^{-k}}$$

das Jacobische Symbol $\left(\frac{m}{n}\right)$ darstellt. Fu.

J. C. Kluyver. Vraagstuk XCIII. Wisk. Opgaven **11**, 239-241.

Wenn die Quadratreste einer Primzahl p der Form $4n-1$ angedeutet werden durch c $(0 < c < p)$, so ist:

$$\sqrt{p}\sum \cot \frac{c}{p}\pi = \tfrac{1}{2}p(p-1) - 2\sum_{c} c.$$

Beweis von L. Crijns. Schn.

P. Bachmann. Zwei zahlentheoretische Sätze. Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 91-95.

1. Bedeutet $S_h(m)$ die Summe der h-ten Potenzen aller Teiler von m, so ist

$$S_h(m)\, S_h(n) = \sum_{(d)} d^h S_h\left(\frac{mn}{d^2}\right),$$

wo die Summe rechts über alle gemeinsamen Teiler d von m und n zu erstrecken ist.

2. Ist $P = pq$ das Produkt zweier verschiedenen ungeraden Primzahlen, so ist der Überschuß der Anzahl Reste (mod. P), welche $< \frac{1}{2}P$, über die Anzahl Reste, welche $> \frac{1}{2}P$ sind, für die Reihe der Quadratzahlen $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, \left(\frac{P-1}{2}\right)^2$ gleich

$$\sum_{h=1}^{\frac{P-1}{2}}\left(\frac{P}{h}\right) + \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{h}{p}\right) + \sum_{h=1}^{\frac{q-1}{2}}\left(\frac{h}{q}\right).$$

Fu.

G. Rados. Sur la théorie des congruences de degré supérieur. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **30**, 395-412.

Es sei p eine rationale Primzahl. Der Verf. behandelt als erste Aufgabe, die Bedingungen dafür anzugeben, daß die beiden Kongruenzen

$$f(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m \equiv 0,$$
$$g(x) \equiv b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n \equiv 0 \pmod{p}$$

eine gemeinsame Wurzel haben. Setzt man

$$\begin{vmatrix} a_0 u + b_0, & a_1 u + b_1, \ldots, a_{p-2} u + b_{p-2} \\ a_1 u + b_1, & a_2 u + b_2, \ldots, a_0 u + b_0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{p-2} u + b_{p-2}, & a_0 u + b_0, \ldots, a_{p-3} u + b_{p-3} \end{vmatrix} \equiv R_0 u^{p-1} + R_1 u^{p-2} + \cdots + R_{p-1} \pmod{p},$$

so ist notwendig und hinreichend für die Existenz der gemeinsamen Wurzel, daß

$$R_0 \equiv 0, R_1 \equiv 0, \ldots, R_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Die Funktionen R werden für $p = 5$ berechnet. Setzt man $g(x) = \frac{df(x)}{dx}$, so erhält man die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $f(x)$ eine vielfache Wurzel (mod. p) besitzt.

Im 2. Abschnitt verallgemeinert der Verf. einzelne Resultate für den Fall, daß der Modul eine Primzahlpotenz p^t ist. Fu.

N. W. G. H. Beeger. Quelques remarques sur les congruences $r^{p-1} \equiv 1$ (mod. p^2) et $(p-1)! \equiv -1$ (mod p^2). Messenger (2) **43**, 72-84.

Der Hauptteil der Arbeit betrifft die erste der beiden Kongruenzen. Nach einer historischen Einleitung wird die Methode beschrieben, deren sich der Verf. zur Lösung für die Primzahlen p, die unter 200 liegen, bedient hat; danach folgen, tabellarisch zusammengestellt, diese Lösungen. In dem kurzen zweiten Teil wird das Verfahren auseinandergesetzt, das zur Lösung der zweiten Kongruenz führt, und wird an dem Beispiel $p = 61$ erläutert. Lp.

C. Grötzsch. Die Anzahl der Wurzeln der Kongruenz $x^x \equiv a$ (mod. p). Arch. der Math. u. Phys. (3) **22**, 49-53.

Wenn α eine Lösung der Kongruenz ist, so ist auch jede zu α (mod. $p(p-1)$) kongruente Zahl eine solche. Es fragt sich, wieviel (mod. $p(p-1)$) inkongruente Lösungen existieren. a ist dabei als zu p teilerfremd angenommen. Resultat: Sind ind$a$ und $p-1$ teilerfremd, so hat die Kongruenz $x^x \equiv a$ (mod. p) gerade $\varphi(p-1)$ nach dem Modul $p(p-1)$ inkongruente Wurzeln. Entsprechend lauten die Sätze, wenn ind$a$ mit $p-1$ einen Teiler gemein hat oder gleich 0 ist. Fu.

N. P. Bertelsa. Om simultane Fremstillinger af sammenhörende. Värdier af P, Q og R i den ubestemte Ligning af förste Grad $yQ - zP = \pm R$, hvor y og z er givne hele positive Tal, og hvor P og Q er de mindste hele positive Lösninger, som svarer til det hele positive variable Tal R. (Simultane Darstellung der entsprechenden Werte von P, Q und R in der unbestimmten Gleichung ersten Grades $yQ - zP = \pm R$, wo y und z gegebene positive ganze Zahlen sind, und wo P und Q die kleinsten ganzen positiven Lösungen, welche der ganzen positiven variablen Zahl R entsprechen, sind.) Nyt Tidsskr. for Mat. (B) **24**, 33-53.

Es wird vorausgesetzt, daß $y > z$, und es handelt sich im Anschluß an eine Arbeit von Gram (Nyt Tidsskr. for Mat. (B) **3**; F. d. M. **24**, 174, 1892) um die Systeme von ganzen Zahlen (P, Q, R), welche die Gleichungen

$$yQ - zP = R \text{ oder } yQ - zP = -R$$

und die Bedingungen

$$1 \leqq P < y, 0 \leqq Q \leqq z, 1 \leqq R < y$$

befriedigen, abgesehen von der trivialen Lösung $P=0$, $Q=0$, $R=0$. Man läßt P sukzessive von 1 bis $y-1$ wachsen, bestimmt zu jedem P ein entsprechendes $Q = E\left(\frac{zP}{y}\right) + 1$ oder $Q = E\left(\frac{zP}{y}\right)$ und den zugehörigen Wert von R. Die zwei Reihen von Brüchen $\frac{P}{Q}$ werden mit zwei Punkten von „Nachbarbrüchen" verglichen, die folgendermaßen entstehen: Die Konvergenten der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung:

$$\frac{y}{z} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

seien

$$\frac{y_{-2}}{z_{-2}} = \frac{0}{1}, \frac{y_{-1}}{z_{-1}} = \frac{1}{0}, \frac{y_0}{z_0}, \frac{y_1}{z_1}, \ldots, \frac{y_r}{z_r}, \ldots, \frac{y_{n-1}}{z_{n-1}}, \frac{y}{z}.$$

Sie werden in zwei Reihen mit geraden und ungeraden Indexen geordnet. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konvergenten $\frac{y_r}{z_r}$ und $\frac{y_{r+2}}{z_{r+2}}$ wird die Reihe von Nachbarbrüchen

$$\frac{y_r + y_{r+1}}{z_r + z_{r+1}}, \frac{y_r + 2y_{r+1}}{z_r + 2z_{r+1}}, \ldots, \frac{y_r + (a_{r+2} - 1)\, y_{r+1}}{z_r + (a_{r+2} - 1)\, z_{r+1}}$$

eingeschoben. Es wird nun gezeigt, wie jeder der Brüche P/Q aus den Zahlen in den Nachbarbruchreihen gebildet werden kann, indem das P eine lineare Funktion mit positiven ganzen Koeffizienten von den Zählern der letztgenannten Bruchreihen und das Q dieselbe Funktion der entsprechenden Nenner ist.

P. H.

R. Remak. Abschätzung der Lösung der Pellschen Gleichung im Anschluß an den Dirichletschen Existenzbeweis. J. für Math. **143**, 250-254.

Der Verf. bildet den Dirichletschen Beweis über die Existenz einer nicht trivialen Lösung der Pellschen Gleichung

$$t^2 - D\, u^2 = 1,$$

die vom Kettenbruchverfahren keinen Gebrauch macht, und zwar in der Art, daß für die positiven Lösungen t und u eine obere Grenze gefunden wird. Fu.

P. v. Schaewen. Die rektangulären Gleichungen. Zs. f. d. Realschulwesen **38**, 141-146.

Es sind die bilinearen diophantischen Gleichungen $axy + bx + cy = d$ gemeint. Alle diophantischen Gleichungen zweiten Grades $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, in denen $b^2 - 4ac = q^2 > 0$ ist, lassen sich auf solche rektangulären Gleichungen zurückführen. Schr.

E. Haentzschel. Über pythagoreische Dreizahlketten. Sond.-Abdr. Blätter f. d. Fortbildung usw. **6**, 4 S.

Grundlegende pythagoreische Dreiecke sind solche, für welche die Maßzahl der Hypotenuse eine Primzahl von der Form $4k + 1$ ist. Jedes pythagoreische Dreieck ist das erste Glied einer pythagoreischen Dreizahlkette, deren Glieder aus dem ersten mit Hülfe der Formeln $\sin(n\alpha)$ und $\cos(n\alpha)$ hergeleitet werden können. Aus je zwei grundlegenden pythagoreischen Dreiecken kann man mit

Hülfe der Additionstheoreme sin $(\alpha \pm \beta)$ und cos $(\alpha \pm \beta)$ unzählig viele pythagoreische Dreizahlketten bilden. Mit Hülfe dieser Sätze lassen sich die eigentlichen Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ ordnen. Ba.

N. Gennimatás. Zu den pythagoreischen Dreiecken. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 14-15.

An die vorjährige Arbeit von E. Meyer (F. d. M. **43**, 251, 1912) anknüpfend, liefert der Verf. ein elementares Verfahren, zu einer gegebenen Hypotenusenzahl die zugehörigen Kathetenzahlen zu bestimmen. Lp.

G. Mühle. Ein Beitrag zur Lehre von den pythagoreischen Zahlen. Progr. (Nr. 257) Wollstein 1913. 19 S.

Der Verf. stellt sich die Aufgabe, Formeln aufzustellen, die gestatten, zu einer beliebigen Zahl die beiden pythagoreischen zu finden. Alsdann geht er dazu über, zu einer gegebenen Zahl drei weitere zu finden, so daß das Quadrat der gegebenen Zahl gleich der Summe der Quadrate der übrigen wird. Und endlich behandelt er die Aufgabe, vier Zahlen zu finden, für die die Summe der Quadrate von zweien gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen ist. Er leitet bei den einzelnen Aufgaben noch Eigenschaften der erhaltenen Zahlen ab. Ba.

A. Martin. On rational right-angled triangles. Proc. 5. Intern. Math. Congr. 2, 40-58.

Außer einer Tabelle der ganzen Zahlen, welche der Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ genügen, für $c < 3000$, werden in dieser Abhandlung besonders merkwürdige Systeme solcher Zahlentripel a, b, c zusammengestellt. Wie z. B. in den beiden Zahlentripeln (15, 20, 25), (10, 24, 26) die beiden c aufeinander folgen, werden drei Tripel mit aufeinander folgenden c gesucht und in großer Zahl gefunden, z. B. (48, 55, 73), (24, 70, 74), (45, 60, 75), dann 5, 6, 7, 8 bis 27 solcher Tripel mit 5, 6, 7, 8 bis 27 aufeinander folgenden c. Weiterhin Tripel, deren c selbst wieder die Gleichung $c_1^2 + c_2^2 = c_3^2$ erfüllen, wie z. B. (21, 72, 75), (60, 80, 100), (35, 120, 125), Tripel, deren c^2 sich in mehrfacher Art in a^2 und b^2 zerlegen läßt, so 1105^2 in 13facher, verschiedener Weise, $32\,045^2$ in 40facher Weise. A. K.

K. Schwering. Ganzzahlige Dreiecke mit Winkelbeziehungen. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **21**, 129-136.

Zwei Dreiecke, deren Seiten (a, b, c), (a_1, b_1, c_1) kommensurabel sind, anzugeben, für deren Winkel (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ drei lineare Relationen mit ganzzahligen Koeffizienten bestehen. Zahlreiche Beispiele, aus denen manche interessanten Spezialsätze entspringen. Sk.

E. Haentzschel. Herleitung der Bedingungen für die Lösbarkeit des Fermatschen Problems, die Gleichung $y^3 = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3$ durch rationale Zahlen zu erfüllen. Deutsche Math.-Ver. **22**, 319-329.

Der Verf. zeigt zunächst, wie mit Hülfe einer Tschirnhausen-Transformation aus einer Lösung unendlich viele neue Lösungen gefunden werden können. Daran schließt er die Beschreibung eines Verfahrens, wie durch versuchliche Auflösung verschiedener Gleichungen die Anfangslösung gefunden werden kann. Fu.

R. F. Davis. Question 12 832. Ed. Times (2) **24**, 67-68.

Wenn $x = p$ eine Lösung der diophantischen Gleichung $ax^3 + bx + c^2 = q^2$ (gleich einem vollständigen Quadrat) ist, dann sind zwei andere Lösungen die reellen rationalen Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(apx - b)^2 = 4ac^2(x + p).$$

Beweise von R. Norrie und dem Aufgabensteller. Gd.

L. J. Mordell. The diophantine equation $y^2 - k = x^3$. Lond. M. S. Proc. (2) **13**, 60-80.

Der Verf. betrachtet die Auflösungen der Fermatschen Gleichung $y^2 - k = x^3$ in ganzen Zahlen. Auf elementarem Wege bestimmt er zunächst Werte von k, für die keine Lösung möglich ist. Z. B. ist die Gleichung für alle $k = A^3 - B^2$, wo $B \not\equiv 0 \pmod 3$ und A und B teilerfremd sind, unlösbar. Weiter kann man Zahlen des quadratischen Zahlkörpers zu Hülfe nehmen, indem

$$x^3 = (y + \sqrt{k})(y - \sqrt{k})$$

gesetzt wird. Ist schließlich $k = k_1 f^2$, wo k_1 quadratfrei ist, so ergibt die binäre kubische Form (f, b, c, d) mit den Hesseschen Determinanten (F, G, H):

$$(bF - fG)^2 - Hf^2 = F^3,$$

und aus der Theorie der kubischen Form kann wieder auf die Auflösbarkeit geschlossen werden. Fu.

H. Brocard. (4057) Solutions de l'équation $x^2 - y^3 = 17$. Interméd. des math. **20**, 62-63.

Außer den in Interméd. **19**, 231 gegebenen Wertepaaren für (x, y): $(5, 2)$, $(9, 4)$, $(23, 5)$, $(282, 43)$, $(375, 52)$ sind noch folgende vorhanden: $(3, -2)$, $(4, -1)$, $(378\,661, 5234)$. Damit hält der Verf. die Lösungen für erschöpft. Lp.

L. Aubry. (4179.) Solution en entiers de $(x^2 - y^2 - 2xy)^2 - 8x^2 y^2 = u^2$. Interméd. des math. **20**, 141-144.

Aus der Lösung $x = 1, y = 0, u = 1$ lassen sich, wie der Verf. zeigt, unendlich viele finden. Lp.

L. Aubry. (4056.) Équation $[\frac{1}{2}x(x+1)]^2 - [\frac{1}{2}y(y+1)]^2 = z^3$. Interméd. des math. **20**, 108.

$$x = \tfrac{1}{3}(8m^4 + 12m^3 - 4m^2 - 1),\ y = \tfrac{1}{3}(8m^4 - 12m^3 - 4m^2 - 1),$$
$$z = \tfrac{1}{3}(16m^5 + 4m^3 - 2m)$$

ist eine Lösung für ein beliebiges m, das kein Vielfaches von 3 ist. Lp.

W. Welmin. Über die Lösung des Gleichungssystems $ax^2 + b = u^2$, $cx^2 + d = t^2$ in rationalen Zahlen. Ann. Univ. Warschau 1913, 1-17. (Russisch.)

Man bestimme λ so, daß die drei elliptischen Funktionen $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$, $\vartheta(\lambda)$ rationale Werte annehmen, wo:

$$\lambda = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(ax^2+b)(cx^2+d)}},\ \psi(\lambda) = \sqrt{a\varphi^2(\lambda)+b},\ \vartheta(\lambda) = \sqrt{c\varphi^2(\lambda)+d}.$$

Dann ist $x = \varphi(\lambda)$ eine Lösung, $y = \varphi(2\lambda)$ eine andere, und mittels ihrer erhält man noch weitere: $\varphi(3\lambda) = \varphi(\lambda + 2\lambda)$, $\varphi(4\lambda), \ldots, \varphi(m\lambda)$. Damit dies unendlich viele seien, muß das Verhältnis der Integrale

$$\int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{(ax^2+b)(cx^2+d)}} \text{ und } \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(ax^2+b)(cx^2+d)}}$$

irrational sein (Rev. sem. $\mathbf{21}_2$, 123). Lp.

O. Birck. (3427) Équation indéterminée. Interméd. des math. **20**, 273-277.

Fortsetzung einer im Vorjahre gegebenen Behandlung der unbestimmten Gleichung $\xi^4 + \eta^4 + \zeta^4 = \pi^4 + \varkappa^4 + \varrho^4$, als zweite Staffel einer Theorie dieser Gleichung. Aus einer Anzahl von Tafeln von Formeln ergeben sich zuletzt zusammengehörige Werte für $\xi, \eta, \zeta, \pi, \varkappa, \varrho$. Lp.

A. Vérébrussov. (3820) Équation indéterminée. Interméd. des math. **20**, 58.

Zu vier im Vorjahre angegebenen ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^4 + y^4 + z^4 = t^4 + u^4$ fügt der Verf. 9 neue hinzu. Lp.

Brehm. Auszug aus einem Schreiben an die Redaktion. Math. naturw. Mitt. (2) **15**, 20-21.

Lösung der Gleichung $xyz(x + y - z) = t^2$ in ganzen Zahlen. Sk.

H. Kapferer. Beweis des Fermatschen Satzes für die Exponenten 6 und 10. Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 143-146.

Zuerst wird gezeigt, daß eine Auflösung der Gleichungen

$$x^6 + y^6 = z^6, \; x_1^{10} + y_1^{10} = z_1^{10}$$

auf eine solche der Gleichung:

$$t^2 = (z^2 \pm y^2) - (zy)^2$$

führt. Letztere ist aber nicht durch ganze rationale Zahlen zu befriedigen. Der Beweis hierzu ist dem von Fermat nachgebildet, indem gezeigt wird, daß jede Auflösung eine weitere nach sich zöge, deren Zahlen kleiner sind.

Fu.

T. Hayashi. On the impossibility of the indeterminate equation $x^n + y^n = nz^n$, in which n is an odd prime integer. Tôhoku Sc. Rep. **1**, 43-50.

T. Hayashi. On Fermat's last theorem. Tôhoku Sc. Rep. **1**, 51-54.

Es werden die beiden Sätze bewiesen: Es sei n eine ungerade Primzahl; die Gleichung

$$x^n + y^n = nz^n \quad \text{(1. Abhandlung)},$$
$$x^n + y^n = z^n \quad \text{(2. Abhandlung)}$$

ist nur dann in ganzen Zahlen x, y, z (von denen im 2. Fall z durch n teilbar sein soll) lösbar, wenn

$$b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{\frac{1}{2}(n-1)} \equiv 0 \pmod{n^2}.$$

Die $b_0, \ldots, b_{\frac{1}{2}(n-1)}$ sind die Koeffizienten der ganzen rationalen Funktion Y vom Grade $\frac{1}{2}(n-1)$, die bei der Zerlegung der ganzen rationalen Funktion von ξ

$$4\frac{\xi^n - 1}{\xi - 1} = Y^2 - (-1)^{\frac{n-1}{2}} Z^2$$

entsteht:

$$Y\left(\frac{y}{x}\right) = b_0\, \xi^{\frac{1}{2}(n-1)} + b_1\, \xi^{\frac{1}{2}(n-3)} + \cdots + b_{\frac{1}{2}(n-1)},$$
$$Z\left(\frac{y}{x}\right) = c_0\, \xi^{\frac{1}{2}(n-3)} + c_1\, \xi^{\frac{1}{2}(n-5)} + \cdots + c_{\frac{1}{2}(n-3)},$$

falls die Formen

$$\eta = b_0\, y^{\frac{1}{2}(n-1)} - b_1\, y^{\frac{1}{2}(n-1)}\, x + \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\, b_{\frac{1}{2}(n-1)}\, x^{\frac{1}{2}(n-1)},$$
$$x\zeta = c_0\, y^{\frac{1}{2}(n-3)}\, x - c_1\, y^{\frac{1}{2}(n-5)}\, x^2 + \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}(n-3)}\, c_{\frac{1}{2}(n-3)}\, x^{\frac{1}{2}(n-3)},$$

so beschaffen sind, daß die quadratische Form

$$\eta^2 - (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\, n(x\,\zeta)^2$$

nur den Teiler 2 und die Teiler von $s^2 - (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\, nt^2$ zuläßt. Fu.

R. Fueter. Die diophantische Gleichung $\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0$. Heidelb. Ak. Sitzber. 1913, 25 S.

Der Verf. untersucht, wann die obige diophantische Gleichung in Zahlen eines quadratisch-imaginären Körpers $k(\sqrt{m})$ lösbar ist. Wenn $m \equiv 2 \pmod{3}$, so ergibt sich das Resultat, daß dies nur dann der Fall ist, wenn die Klassenzahl von $k(\sqrt{m})$ durch 3 teilbar ist. Eine Tabelle zeigt, daß dann in den einfachsten Fällen auch Lösungen, z. B.

$$\left(\frac{9+\sqrt{-31}}{2}\right)^3 + \left(\frac{9-\sqrt{-31}}{2}\right)^3 + 3^3 = 0$$

gefunden werden können. Es wird bewiesen, daß aus einer Lösung stets unendlich viele erhalten werden können. Der letztere Beweis beruht darauf, daß aus einer Lösung in $k(\sqrt{m})$ auf rationalem Wege eine solche im reellen Körper $k(\sqrt{-3m})$ erhalten wird. Dadurch werden zugleich auch für reelle quadratische Körper entsprechende Sätze erhalten.

Schließlich beweist der Verf., daß alle kubischen Körper $k(\sqrt[3]{m^3+27n^3})$, wo m, n irgendwelche zu 3 prime ganze Zahlen sind, eine durch 3 teilbare Klassenzahl haben. Fu.

E. Fabry. Un essai de démonstration du théorème de Fermat. C. R. **156**, 1814-1816.

Um die Unmöglichkeit der Beziehung

$$x^l + y^l + z^l = 0$$

zwischen drei ganzen, zu l teilerfremden Zahlen x, y, z zu zeigen, geht der Verf. von der Kummerschen Relation:

$$(x+\alpha^{n_1}y)(x+\alpha^{n_2}y) - (x+\alpha^{\frac{nl-1}{2}}y) = \alpha^r(a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{l-2}\alpha^{l-2})^l$$

aus, wo die a_i ganze Zahlen sind und α die l-te Einheitswurzel bedeutet, und betrachtet diese Gleichung nach dem mod. l, indem er sie in geeigneter Weise entwickelt. Siehe die Notiz von Mirimanoff (vgl. das folgende Referat). Fu.

D. Mirimanoff. Remarque sur une Communication de M. Eugène Fabry. C. R. **157**, 491-492.

Der Verf. zeigt, daß der Beweis von Fabry (vgl. das vorstehende Referat) nicht stichhaltig ist, indem bei der Entwicklung der dort angegebenen Gleichung in Reihen gewisse Glieder übersehen sind. Fu.

R. D. Carmichael. Note on Fermat's last theorem. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 233-236.

Beweis des Satzes: Wenn p eine ungerade Primzahl ist und die Gleichung $x^p + y^a + z^p = 0$ eine Lösung in ganzen Zahlen x, y, z hat, die alle teilerfremd

zu p sind, dann existiert eine positive ganze Zahl s, kleiner als $\frac{1}{2}(p-1)$, von solcher Beschaffenheit, daß

$$(s+1)^{p^2} \equiv sp^2 + 1 (\text{mod. } p^3)$$

ist.

Lp.

H. C. Pocklington. Some diophantine impossibilities. Camb. Phil. Soc. Proc. **17**, 108-121.

Pocklington behandelt einige Gleichungen, die dadurch erhalten werden, daß eine quadratische Funktion von x^2 und y^2 gleich einem Quadrate gesetzt wird, um entweder zu zeigen, daß sie in ganzen Zahlen oder rationalen Brüchen unmöglich sind, oder um ihre Lösungen in ganzen Zahlen vollständig zu finden. Zwei Sätze über arithmetische Progressionen, von denen gegebene Glieder Quadrate sein sollen, werden gegeben, und die Unmöglichkeit von $x^{2n} + y^{2n} = z^{2n}$ wird erörtert.

J. (Lp.)

E. Landau. Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 93-108.

Der Vortrag, den Verf. auf Einladung des Organisationskomitees des internationalen Mathematiker-Kongresses in Cambridge gehalten hat, gibt in übersichtlicher Kürze und in einer auch für Fernerstehende leicht verständlichen Darstellung die wichtigsten Errungenschaften der neuesten Zeit, welche den Primzahlsatz und die Riemannsche Zetafunktion betreffen; er betont dabei die Lücken, welche hier noch auszufüllen sind, und die Schwierigkeiten, welche sich bei der Inangriffnahme der noch ungelösten Probleme in den Weg stellen. Die Grundlage der meisten neueren Untersuchungen in diesem Gebiete bilden die Untersuchungen Hadamards über die ganzen Funktionen endlichen Geschlechts, durch welche frühere Untersuchungen von Laguerre und Poincaré zu einem gewissen Abschlusse gebracht wurden. Ein wesentliches Resultat Hadamards war der Nachweis, daß die Funktion

$$(s-1)\,\zeta(s) \equiv (s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

eine ganze, transzendente Funktion vom Geschlecht 1 ist, daß nämlich

$$(s-1)\,\zeta(s) = e^{K(s)}\prod_{\varrho}\left(1-\frac{s}{\varrho}\right)e^{s/\varrho},$$

wo ϱ alle Wurzeln von $\zeta(s)=0$ durchläuft und $K(s)$ eine lineare Funktion von s ist. Mit Hülfe dieser Untersuchungen fand Hadamard selbst, gleichzeitig und unabhängig de la Vallée Poussin, und auf einem dritten Wege von Koch den Beweis des Primzahlsatzes

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

wo $\pi(x)$ die Zahl der Primzahlen $\leqq x$ ist und das Zeichen $\sim$ (asymptotisch gleich) bedeutet, daß mit unendlich wachsendem x der Quotient der beiden Seiten

gegen 1 konvergiert. Einen durchaus originellen, auch auf der Theorie der Zetafunktion beruhenden Beweis hat der Verf. gegeben, der sich besonders durch seine elegante Kürze auszeichnet und vor allem den Vorzug hat, daß seine Methode auch zu dem Beweise des analogen, allgemeinen Satzes über Primideale eines algebraischen Zahlkörpers führt, den der Verf. im Jahre 1903 aufgestellt hat. Die Beweismethode für den Primzahlsatz wird kurz skizziert. Mit besonderem Nachdruck wird auf das Interesse der Lage der Nullstellen der Zetafunktion hingewiesen, über welche bereits Riemann einige wichtige Vermutungen ausgesprochen hat. Zunächst die Vermutung einer asymptotischen Formel für die Anzahl der Nullstellen in dem Rechteck

$$0 \gtreqless \sigma \gtreqless 1,\ 0 \gtreqless t \gtreqless T\ (s=\sigma+it),$$

bei unendlich wachsendem T, eine nicht besonders komplizierte Formel, welche zuerst v. Mangoldt bewiesen hat; ferner die noch nicht allgemein bewiesene Vermutung, daß alle Nullstellen auf der Geraden $\sigma=\frac{1}{2}$ liegen. Gerade diese letztere Vermutung Riemanns — die Entscheidung über dieselbe ist eines der interessantesten, ungelösten Probleme in diesem Gebiete — hat eine Reihe hervorragender Arbeiten hervorgerufen, sowohl über die Zetafunktion selbst als auch über allgemeinere Dirichletsche Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},$$

und wieder im besonderen die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s},$$

in der $\mu(n)$ die sogenannte Möbiussche Funktion darstellt und welche für $\sigma>1$ mit der reziproken Zetafunktion identisch ist. Außer den Arbeiten des Verf. sind hier im besonderen Untersuchungen von Littlewood, Schnee, Bohr hervorzuheben.

Der Vortrag wird zusammen mit dem ausgezeichneten Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen sicherlich, dem Wunsche des Verf. entsprechend, diesem interessanten Gebiete der analytischen Zahlentheorie neue Mitarbeiter zuführen. (Man vgl. F. d. M. **43**, 264, 1912.) A. K.

S. N. Aiyar. The distribution of primes. Indian Math. Soc. **5**, 60-61.

Es werden folgende Resultate von Ramanujan ohne Beweise mitgeteilt:
1. Die Anzahl der Primzahlen $< e^a$ ist:

$$\int_0^\infty \frac{a^x\,dx}{xS_{x+1}\,\psi_{(x+1)}},\ \text{wo}\ S_{x+1}=\frac{1}{1^{x+1}}+\frac{1}{2^{x+1}}+\cdots.$$

2. Die Anzahl der Primzahlen $< n$ ist

$$\frac{2}{\pi}\left\{\frac{2}{B_2}\left(\frac{\lg n}{2\pi}\right)+\frac{4}{3B_4}\left(\frac{\lg n}{2\pi}\right)^3+\frac{6}{5B_6}\left(\frac{\lg n}{2\pi}\right)^5+\cdots\right),$$

$B_2 = \frac{1}{6}, B = \frac{1}{30}, \ldots$ die Bernoullischen Zahlen.

3. Dieselbe Anzahl ist

$$\int_\mu^n \frac{dx}{\lg x} - \frac{1}{2}\int_\mu^{\sqrt{n}} \frac{dx}{\lg x} - \frac{1}{3}\int_\mu^{\sqrt[3]{n}} \frac{dx}{\lg x} - \frac{1}{5}\int_\mu^{\sqrt[5]{n}} \frac{dx}{\lg x} + \frac{1}{6}\int_\mu^{\sqrt[6]{n}} \frac{dx}{\lg x} \mp \ldots, \mu = 1,45136380\ldots$$

Die Summe ist über alle quadratfreien Zahlen zu erstrecken; das Zeichen ist + oder −, je nachdem die Anzahl der Teiler gerade oder ungerade ist. Die Formel stimmt für $n = 50, 300, 1000$.

Fu.

E. Waage. Zur Tschebyschefschen Primzahlentheorie. Wien. Ber. **122**, 701-719.

Setzt man

$$\psi(x) = \sum_{(p \leq x)} \left[\frac{\lg x}{\lg p}\right] \lg p,$$

$$T(x) = \lg [x]! = \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \ldots,$$

so gibt der Verf. nach dem Verfahren von Tschebyschef und Sylvester Grenzen für $\psi(x)$ an; z. B.

$$x \lg 2 + o(x) < \psi(x) < x\, 2 \lg 2 + o'(x),$$

die er rechnerisch noch verschärft. Er verwendet dazu Aggregate, wie

$$u_k(x) = T\left(\frac{x}{k}\right) - T\left(\frac{x}{k+1}\right) - T\left(\frac{x}{k(k+1)}\right).$$

Fu.

J. G. van der Corput. Bewijs van een eigenschap, betreffende het aantal ondeelbare getallen, voorkommende in een bepaalde rekenkundige reeks. Nieuw Archief (2) **10**, 357-361.

Beweis des Satzes, daß in der arithmetischen Reihe $1 + u \cdot v$ unendlich viele Primzahlen vorkommen. Der Beweis wird rein arithmetisch mit Hülfe der Kreisfunktion

$$F(a, b) = \frac{(a^m + b^m)\, \Pi(a^{\frac{m}{m_1 m_2}} + b^{\frac{m}{m_1 m_2}}) \ldots}{\Pi(a^{\frac{m}{m_1}} + b^{\frac{m}{m_1}})\, \Pi(a^{\frac{m}{m_1 m_2 m_3}} + b^{\frac{m}{m_1 m_2 m_3}}) \ldots},$$

wo $m_1, m_2, \ldots$ die verschiedenen in m enthaltenen Primzahlen sind, geführt.

Fu.

T. H. Gronwall. Some asymptotic expressions in the theory of numbers. American M. S. Trans. **14**, 113-122.

Es sei $\varphi(x)$ die Anzahl der zu x teilerfremden Zahlen $< x$, $T(x)$ die Anzahl der Teiler von x, und $s_\alpha(x)$ die Summe der α^{ten} Potenzen dieser Teiler. Der Verf. dehnt das Landausche Resultat:

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\frac{\varphi(x)}{x}}{\lg\lg x} = e^C, \quad \limsup_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 1$$

(C die Eulersche Konstante) und das Wigertsche Resultat

$$\liminf_{x=\infty} T(x) = 2, \quad \limsup_{x=\infty} \frac{\frac{\log T(x)}{\lg x}}{\lg\lg x} = \lg 2$$

auf die Funktion $s_\alpha(x)$ aus, indem er die beiden Relationen beweist:

$$\liminf_{x=\infty} \frac{s_\alpha(x)}{x^\alpha} = 1 \ (\alpha > 0)$$

und

$$\limsup_{x=\infty} \frac{s_\alpha(x)}{x^\alpha} = \zeta(\alpha), \text{ wenn } \alpha > 1,$$

$$\limsup_{x=\infty} \frac{s_1(x)}{x\lg\lg x} = e^C, \text{ wenn } \alpha = 1,$$

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\frac{\lg \frac{s_\alpha(x)}{x^\alpha}}{(\lg x)^{1-\alpha}}}{\lg\lg x} = \frac{1}{1-\alpha}, \text{ wenn } 0 < \alpha < 1.$$

Fu.

G. H. Hardy and J. E. Littlewood. Some problems of diophantine approximation. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 223-229.

Es sei für irgendeine Zahl x

$$x = [x] + (x),$$

wo $[x]$ eine ganze Zahl vorstellt und $0 \leqq (x) < 1$ sein soll. Versteht man unter θ eine irrationale Zahl und unter α irgendeine Zahl zwischen 0 und 1 (die Null eingeschlossen), so kann man bekanntlich eine Folge von ganzen Zahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ so finden, daß mit unendlich wachsendem r die Zahl $(n_r\theta)$ gegen α konvergiert. Es sei nun $f(n)$ eine positive, mit n wachsende Funktion von n, eine ganze Zahl, wenn n ganz ist, und f_r bezeichne den Wert von $f(n)$ für $n = n_r$. Das soeben angeführte, bekannte Resultat läßt die folgende Frage entstehen: Für welche Formen von $f(n)$ kann man beweisen, daß bei irgendeinem irrationalen θ und irgendeinem Werte von α $(0 \leqq \alpha < 1)$ eine Folge n_r von solcher Beschaffenheit gefunden werden kann, daß mit wachsendem r $(f_r\theta)$ gegen α konvergiert? Die Untersuchung dieser Frage führt zu einer Anzahl interessanter zahlentheoretischer Sätze, deren Bedeutung an einigen sehr geschickt gewählten Beispielen dargelegt wird.

A. K.

S. Kakeya. On a diophantine approximation. Tôhoku Sc. Rep. **2**, 33-54.

Der Verf. dehnt einen Minkowskischen Satz zu folgendem Resultat aus: Sind $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ linear unabhängige reelle Größen und $b_1, b_2, \ldots, b_n$ beliebige reelle Zahlen, so können die ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ stets so gefunden werden, daß für ein beliebig kleines positives δ

$$| a_i x_i + b_i | < \delta \, (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dieser Satz wird erstens angewandt, um die Untersuchung einer Funktion von n Variablen im 0-Punkt auf die Untersuchung einer Funktion einer Variable x bei $x = 0$ zurückzuführen; und zweitens auf das Neumannsche Problem von n periodischen Funktionen derselben Periode. Fu.

E. Stiemke. Sur les modules dénombrables. C. R. **157**, 273-274.

Sind $w_1, w_2, w_3, \ldots$ abzählbar viele Zahlen, die unabhängig sind, d. h. für die keine Relation

$$k_1 w_{i_1} + k_2 w_{i_2} + \cdots + k_n w_{i_n} = 0$$

existiert, außer wenn die ganzen Zahlen k sämtlich Null sind, so heißt $w_1, w_2, \ldots$ eine Basis des abzählbaren Moduls

$$M = [w_1, w_2, w_3, \ldots].$$

Der Verf. fragt, wann ein beliebiger Modul M von abzählbar vielen Zahlen eine Basis besitzt. Greift man aus M eine endliche Anzahl von unabhängigen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ heraus, so bilden alle Zahlen α von M, für die

$$k\alpha = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_n \alpha_n$$

ist, einen Modul, der Teiler von M heiße. Es gilt dann der Satz: Damit ein abzählbarer Modul eine Basis besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß jeder seiner Teiler ein Modul von endlicher Basis ist. Fu.

J. Kürschák. Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 285-289.

Verf. führt in der Körpertheorie den neuen Begriff der „Bewertung eines Körpers K“, der als eine Verallgemeinerung des absoluten Wertes angesehen werden kann, durch eine Definition der folgenden Form ein:

Es sei jedem Elemente (jeder Größe) a eines Körpers K eine reelle Zahl $\| a \|$ so zugeordnet, daß den folgenden Forderungen genügt wird:

1. Es ist $\| 0 \| = 0$; für jedes von Null verschiedene a ist $\| a \| > 0$;
2. für jedes Element a ist $\| 1 + a \| = 1 + \| a \|$;
3. für je zwei Elemente ist $\| ab \| = \| a \| \, \| b \|$;
4. es gibt in K wenigstens ein solches Element, daß $\| a \|$ von Null und von 1 verschieden ist.

Jede solche Zuordnung wird eine Bewertung des Körpers K genannt. Die Zahl $\| a \|$ heißt die Bewertung von a.

Es wird eine Anzahl von Anwendungen dieses neuen Begriffes gegeben, durch welche die Zweckmäßigkeit der Einführung dieses Begriffes dargelegt wird (vgl. das folgende Referat). A. K.

J. Kürschák. Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie. J. für Math. **142**, 211-253.

Es werde folgender Begriff zugrunde gelegt: Es sei jedem Element a eines Körpers eine reelle Zahl $\|a\|$ zugeordnet, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\|0\| = 0$; $\|a\| > 0$, wenn $a \neq 0$;
2. $\|1 + a\| \leq 1 + \|a\|$,
3. $\|ab\| = \|a\| \, \|b\|$.
4. Es gibt wenigstens ein Element a im Körper, für das $\|a\| \neq 0$ und $\neq 1$ ist.

Ist jedem Element a das Symbol $\|a\|$ zugeordnet, so heißt der Körper bewertet, $\|a\|$ die Bewertung von a. Der absolute Betrag ist der einfachste Fall der Bewertung. Schreibt man jede rationale Zahl a in der Form

$$a = \frac{u}{v} p^{\alpha},$$

wo p eine Primzahl und u, v zu p teilerfremd sind, so führt die Bewertung

$$\|a\| = e^{-\alpha}$$

(e die Basis der Exponentialfunktion) zu einer Einteilung, wie sie Hensel für die p-adischen Zahlen aufgestellt hat. Mit Hülfe der Bewertung kann man die Begriffe Limes und Fundamentalreihe für den Körper definieren, indem überall der Begriff absoluter Betrag durch den Begriff Bewertung ersetzt wird. Ein Körper heißt perfekt, wenn er die Gesamtheit der Limes der in ihm enthaltenen Fundamentalreihen enthält. Er heißt algebraisch abgeschlossen, wenn jede dem Körper angehörende ganze rationale Funktion im Körper in lineare Faktoren zerfällt. Der Verf. beweist, daß jeder bewertete Körper durch Adjunktion neuer Elemente zu einem algebraisch abgeschlossenen perfekten bewerteten Körper gemacht werden kann. Um einen bewerteten Körper perfekt zu machen, kann man die Cantorsche Theorie der Irrationalzahlen auf den Fall der allgemeinen Bewertung übertragen. Der erweiterte Körper ist, falls die obige Bewertung $\|a\| = e^{-\alpha}$ der rationalen Zahlen zugrunde gelegt wird, der Henselsche Körper der p-adischen Zahlen. Um einen perfekten bewerteten Körper auch algebraisch abgeschlossen zu machen, werden die Resultate von Steinitz (F. d. M. **41**, 445, 1910) und Henselsche Beweismethoden verwandt. Fu.

J. Kürschák. Eine Verallgemeinerung des Begriffes des absoluten Wertes. Math. és termész. ért. **30**, 699-745. (Ungarisch 1912.)

Vgl. das vorstehende Referat.

A. Ostrowski. Über einige Fragen der allgemeinen Körpertheorie. J. für Math. **143**, 255-284.

Ergänzungen zu der Arbeit Kürschåks (siehe vorstehende Referate). Insbesondere greift der Verf. die Fragestellung auf, ob die kleinste Erweiterung der Körper der p-adischen Zahlen zu einem perfekten, algebraisch abgeschlossenen Körper auch Zahlen enthält, die keiner algebraischen Gleichung mit p-adischen Zahlkoeffizienten genügen. Er beweist allgemeiner, daß die kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung K' eines perfekten Körpers K nur dann perfekt ist, wenn es in K' eine endliche Anzahl Zahlen $w_1, w_2, \ldots, w_n$ gibt, so daß jede Zahl von K' in der Form

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n$$

darstellbar ist, falls $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ Zahlen von K sind. Der Verf. bildet in einfacher Weise Fundamentalreihen im Körper der p-adischen Zahlen, deren Limes sicher keiner algebraischen Gleichung mit p-adischen Koeffizienten genügen. Diese Zahlen können als „transzendente p-adische Zahlen" bezeichnet werden.

Fu.

D. Hilbert. Théorie des corps de nombres algébriques. Notes de MM. G. Humbert et Th. Got. Toulouse Ann. (3) **3**, 1-62.

G. Humbert. Note I (annexe au § 5). Démonstration du lemme 2 (Théorème d'Hurwitz). p. 1—3.

G. Humbert. Note II (annexe au § 5). Démonstration du théorème fondamental 8 par la méthode de Hurwitz mentionné au § 6. p. 3—8.

G. Humbert. Note III (annexe au § 17). Démonstration des inégalités fondamentales de Minkowski pour n formes linéaires à n variables. p. 8—13.

G. Humbert. Note IV (annexe au § 59). Questions diverses concernant les bases des idéaux d'un corps quadratique. p. 13—17.

Th. Got. Note V (annexe au § 48). Détail de la démonstration de la seconde expression du nombre de classes d'idéaux du corps circulaire des racines $l^{\text{ièmes}}$ de l'unité, l étant premier. p. 17—20.

Th. Got. Note VI (annexe au § 172). Recherches sur le théorème de Fermat, faites par Kummer et divers auteurs, postérieurement à la démonstration de l'impossibilité en nombres entiers de l'équation (1) $x^l + y^l + z^l = 0$, donnée pour les exposants l premiers réguliers. p. 21—62.

Diese Noten schließen sich an die französische Übersetzung des Hilbertschen Berichtes über die Theorie der algebraischen Zahlkörper an (vgl. F. d. M. **28**, 157-162, 1897; französisch von A. Lévy, F. d. M. **41**, 244, 1910; **43**, 269, 1912). Referate über die einzelnen Noten würden ein Zurückgehen auf den Hilbertschen Bericht notwendig machen. Wir beschränken uns daher auf die Wiedergabe der Titel und fügen für die umfangreiche letzte Note nur noch die Titel der Unterabteilungen hinzu.

I. Étude du cas où xyz n'est pas divisible par l. § 1. Étude d'un produit particulier d'idéaux conjugués. § 2. Le critérium de Kummer. § 3. Impossibilité de l'équation (1) en nombres entiers x, y, z premiers à l, quand l ne divise qu'un des $\frac{1}{2}(l-3)$ premiers nombres de Bernoulli. § 4. Recherches récentes sur l'équation (1) dans le cas où xyz n'est pas divisible par l.

II. Étude du cas où xyz est divisible par l. § 5 — § 6. Définition et propriétés des logarithmes pour le module l^{n+1}. § 7. Expression de l'indice de l'unité $E_n(\zeta)$. § 8. Étude des idéaux dont la $l^{\text{ième}}$ puissance est un idéal principal. § 9. Condition moyennant laquelle un nombre du corps $c(\zeta+\zeta^{-1})$, multiplié par une unité convenable, est congru, mod. l, à un entier rationnel. § 10. Propriétés des unités congrues, mod. l^n, à un entier rationnel. § 11. Théorème sur l'impossibilité de l'équation (1), dans le cas de x, y ou z divisible par l, lorsque l vérifie les trois conditions du paragraphe 5. Lp.

H. Weber und J. Wellstein. Der Minkowskische Satz über die Körperdiskriminante. Math. Ann. **73**, 275-285.

Rein arithmetischer Beweis des Satzes, daß die Körperdiskriminante eines algebraischen Körpers vom Grade $n>1$ wenigstens eine Primzahl enthält, also >1 ist. Sind a_{ik} ganze rationale Zahlen und

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \quad (i=1,2,\ldots,n),$$

wo die Determinante $\varDelta$ des Systems von 0 verschieden ist, so wird zunächst durch Zurückführung des Gleichungssystems auf ein kanonisches der Satz bewiesen: Man kann die ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ so bestimmen, daß sie nicht alle 0 sind, und daß

$$|y_i| \leqq \left|\sqrt[n]{\varDelta}\right| \; (i=1,2,\ldots,n).$$

Dieser Satz wird sukzessive erweitert; zuerst auf ein Gleichungssystem, das auch Paare von konjugiert imaginären Linearformen enthält, wobei alle reellen Zahlenkoeffizienten ganze Zahlen bleiben. Daraus folgt der Satz ohne weiteres für Gleichungssysteme mit gebrochenen rationalen Koeffizienten. Da irrationale Zahlen durch rationale Näherungsbrüche beliebig nahe gegeben sind, folgt der Satz für jedes Linearsystem, dessen Determinante von Null verschieden ist, und das zu jeder imaginären Linearform auch ihre Konjugierte enthält. Durch Variation der Koeffizienten a_{ik} wird im Fall $n>1$ stets ein System ganzer Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die nicht sämtlich Null sind, gefunden, für das

$$0 \leqq |y_1 y_2 \cdots y_n| < |\varDelta|.$$

Ist also $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ eine Basis der ganzen Zahlen eines algebraischen Körpers vom Grade $n>1$, so ist für jede Zahl ω und ihre Konjugierten $\omega^{(k)}$:

$$\omega^{(k)} = x_1\omega_1^{(k)} + x_2\omega_2^{(k)} + \cdots + x_n\omega_n^{(k)} \; (k=0,1,\ldots,n-1),$$

$$|\varDelta| = |\omega_i^{(k)}|, D=\varDelta^2.$$

Für $\varDelta$ gilt für geeignetes ω die Ungleichung:

$$0 \leqq |\omega\,\omega'\,\omega''\ldots\omega^{(n-1)}| < |\varDelta|.$$

Da die Norm $|\omega\,\omega'\ldots\omega^{(n-1)}| \geqq 1$, so gilt für die Körperdiskriminante D: $D > |\varDelta| > 1$. Fu.

E. v. Zyliński. Zur Theorie der außerwesentlichen Diskriminantenteiler algebraischer Körper. Math. Ann. **73**, 273-274.

Der Verf. zeigt, daß aus den Henselschen Resultaten über außerwesentliche Diskriminantenteiler eines Körpers n-ten Grades leicht der Satz folgt: Eine natürliche Primzahl p kann nur dann ein gemeinsamer außerordentlicher Diskriminantenteiler eines algebraischen Körpers n-ter Ordnung sein, wenn die Ungleichung $p < n$ besteht. Fu.

J. Klotz. Anzahl der Lösungen einer quadratischen Kongruenz in einem beliebigen endlichen algebraischen Zahlkörper. Zürich. Naturforsch. Ges. 58, 239-268.

Der erste Teil dieser Arbeit bringt eine Zusammenstellung der Hauptresultate und Begriffe der Zahlentheorie für einen beliebigen Körper. Im zweiten Teil wird nach der Auflösung der Kongruenz

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,k}^{1,n} \alpha_{ix}\, x_i\, x_k \equiv \omega \pmod{j}$$

gefragt, wo $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ und ω beliebige ganze Zahlen, ferner j ein beliebiges Ideal des Körpers sind. Zunächst wird die Aufgabe auf den Fall zurückgeführt, daß j die Potenz $\mathfrak{p}^t$ eines Primideals ist. Der Verf. nimmt die Form als zu $\mathfrak{p}$ primitiv an und $\mathfrak{p}$ als teilerfremd zu 2. Dann ist f äquivalent einer Form

$$f_H \equiv \alpha_1\, x_1^2 + \delta^{w_1}\, \alpha_2\, x_2^2 + \cdots + \delta^{w_1 + \cdots + w_{n-1}}\, \alpha_n\, x_n^2 \pmod{\mathfrak{p}^t},$$

wo die α_i zu $\mathfrak{p}$ prim und δ durch $\mathfrak{p}$, nicht aber durch $\mathfrak{p}^2$ teilbar ist; es genügt, die Kongruenz

$$f_H \equiv \omega \pmod{\mathfrak{p}^t}$$

nach dem Modul $\mathfrak{p}$ zu lösen, da hieraus sukzessive die Lösungen (mod. $\mathfrak{p}^a$), ..., (mod. $\mathfrak{p}^t$) gefunden werden. Der dritte Abschnitt gibt die Anzahl der Lösungen der Kongruenz (mod. $\mathfrak{p}$) an. Fu.

E. Jacobsthal. Diophantische Gleichungen im Bereich aller ganzen algebraischen Zahlen. Math. Ann. 74, 31-65.

Die Arbeit handelt von der Auflösung der Gleichung

$$\alpha x + \beta y = \gamma,$$

wo α, β, γ ganze algebraische Zahlen sind, in irgendwelchen ganzen algebraischen Zahlen x, y. Der Verf. beweist: Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \gamma$ irgendwelche ganzen algebraischen Zahlen, die folgenden Bedingungen genügen:

$$(\alpha_i, \beta_i) = 1, \quad (\alpha_i, \gamma) = 1, \quad (\beta_i, \gamma) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$
$$(\alpha_i, \alpha_k) = 1, \quad (\beta_i, \beta_k) = 1, \quad i \neq k \quad (i, k = 1, 2, \ldots, m);$$
$$\beta_k\, \alpha_i - \beta_i\, \alpha_k \equiv 0 \pmod{\gamma}; \; (\beta_k\, \alpha_i - \beta_i\, \alpha_k, \beta_{k'}\, \alpha_{i'} - \beta_{i'}\, \alpha_{k'}) = \gamma$$
$$(i, h, i', h' = 1, 2, \ldots m, \; (i - i')^2 + (k - k')^2 > 0),$$

so ist das System der Gleichungen

$$\beta_i = \alpha_i\, \xi + \gamma\, \eta_i \; (i = 1, 2, \ldots, m)$$

stets durch Einheiten ξ, η_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) zu befriedigen. Selbstverständlich wird kein Körper zugrunde gelegt, sondern es werden irgendwelche algebraischen

Einheiten verlangt. Es gibt also z. B. zu drei algebraischen Zahlen α, β, γ, von denen je zwei teilerfremd sind, zwei Einheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, so daß

$$\varepsilon_1 \alpha + \varepsilon_2 \beta = \gamma.$$

Daraus folgt weiter: Sind in der Primitivform:

$$P_{m+1}(x, y) = (a_0 x + b_0 y)(a_1 x + b_1 y) \dots (a_m x + b_m y),$$

wo die a_i und b_k ganze algebraische Zahlen sind, die Größen

$$D_{ki} = b_k a_i - a_k b_i$$

zu je zweien teilerfremd, so besitzt die Gleichung

$$P_{m+1}(x, y) = \gamma$$

mit der ganzen algebraischen Zahl γ stets eine Lösung in ganzen algebraischen Zahlen x, y. Fu.

R. Fueter. Über eine Eigenschaft der Klassenkörper der komplexen Multiplikation. Gött. Nachr. 1913, 331-334.

Neuer, einfacher und gruppentheoretischer Beweis des von H. Weber bewiesenen Satzes: Ist $m = l_1 l_2 \dots l_r$ eine quadratfreie und in ihre Primzahlen zerlegte ganze Zahl, so genügt die singuläre elliptische Modulfunktion $f(\sqrt{m})$ einer irreduzibeln Gleichung, der Klassengleichung. Dieselbe zerfällt durch Adjunktion der Größen $\sqrt{(-1)^{\frac{a-1}{2}} l}$, wenn l die ungeraden der Primzahlen $l_1, l_2, \dots, l_r$ durchläuft; die so entstandenen irreduzibeln Faktoren zerfallen nicht weiter, wenn man irgendeine Einheitswurzel adjungiert. Fu.

T. Takenouchi. On the classes of congruent integers in an algebraic Körper. Tokyo Journ. Coll. of Sc. **36**, 1-28.

Der Verf. betrachtet die Gruppe der primitiven Kongruenzklassen nach einem Primidealpotenzmodul in einem beliebigen algebraischen Körper. Fu.

G. Rabinowitsch. Eindeutigkeit der Zerlegung in Primzahlfaktoren in quadratischen Zahlkörpern. J. für Math. **142**, 153-164.

Ein quadratischer Körper heiße einfach, wenn seine Klassenzahl eins ist. Der Verf. beweist, daß ein Körper stets einfach ist, wenn es möglich ist, zu zwei beliebigen ganzen Zahlen α, β, von denen keine durch die andere teilbar ist, zwei ganze Zahlen ξ, η desselben Körpers zu finden, so daß

$$0 < n(\alpha\xi - \beta\eta) < n(\beta).$$

Daraus folgt z. B., daß ein Körper der negativen Diskriminante $D = 1 - 4m$ dann und nur dann einfach ist, wenn alle Zahlen

$$p^2 - p + m \; (p = 1, 2, \dots, m - 2)$$

Primzahlen sind. Umgekehrt ist in einem einfachen Körper die Ungleichung:

$$0 < n(\alpha\,\xi - \beta\,\eta) < n(\beta)$$

stets bei beliebigem α, β, von denen keine durch die andere teilbar ist, durch ganze Zahlen ξ, η lösbar. Damit ist für diese Körper ein Analogon zum euklidischen Algorithmus leicht gefunden. Fu.

G. Rabinowitsch. Eindeutigkeit der Zerlegung in Primzahlfaktoren in quadratischen Zahlkörpern. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 418-421.

Es werden quadratische Zahlkörper mit der Diskriminante der Form $D = 1 - 4m$ betrachtet, und es wird nur mit Zahlen, ohne Einführung von Idealen, operiert. Man kann sich bei jedem der betrachteten Zahlkörper fragen, ob jede Zahl des Körpers nur auf eine Weise in Primzahlen zerlegt werden kann. Mit dieser Frage, die auch so formuliert werden kann: Ist die Klassenzahl eines gegebenen Körpers gleich 1 oder größer? beschäftigt sich die vorliegende Untersuchung. A. K.

Ph. Furtwängler. Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern. (Dritter und letzter Teil.) Math. Ann. **74**, 413-429.

Die beiden ersten Teile (F. d. M. **40**, 265, 1909 und **43**, 272, 1912) enthielten die Entwicklungen für ungerade Primzahlen und für 2, falls weder der Grundkörper reell, noch unter seinen konjugierten reelle vorhanden sind. Der noch übrigbleibende Fall wird in dieser Arbeit erledigt. Das Verfahren ist dasselbe. So wird das allgemeine quadratische Reziprozitätsgesetz erhalten: Sind α und β zwei zueinander und zu 2 teilerfremde Zahlen eines Körpers k, von denen eine primär und total positiv ist, so gilt in k:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Die beiden Ergänzungssätze lauten: 1. Ist $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal, so kann man eine primäre, total positive Zahl α so wählen, daß $(\alpha) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{q}^2$ wird, wo $\mathfrak{q}$ ein geeignetes Ideal ist. Ist α eine total positive primäre Zahl und $(\alpha) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{q}^2$, so ist $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal. 2. Ist $\mathfrak{a}$ ein hyperprimäres Ideal, so kann man $(\alpha) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'^2$ als hyperprimäre positive Zahl wählen. Ist α eine total positive hyperprimäre Zahl, so ist (α) ein hyperprimäres Ideal. Hieraus folgt das Hilbertsche quadratische Reziprozitätsgesetz:

$$\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1,$$

wo ν, μ beliebige Zahlen sind und das Produkt über alle Primideale $\mathfrak{w}$ und die Symbole $1^{(i)}$ zu erstrecken ist. Fu.

J. Westlund. On the factorization of rational primes in cubic cyclotomic number fields. Deutsche Math.-Ver. **22**, 135-140; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 290.

Es sei p eine Primzahl der Form $6n+1$. Dann enthält der Körper der p-ten Einheitswurzeln einen Abelschen Unterkörper dritten Grades, der durch eine Gleichung der Form

$$y^3 - 3py - pA = 0,$$

wo $4p = A^2 + 27B^2$ und $A \equiv 1 (\text{mod. } 3)$ ist, gegeben werden kann. Der Verf. studiert die Zerlegung der Primzahlen in diesem kubischen Körper k. Fu.

R. König. Beiträge zur Arithmetik der hyperelliptischen Funktionenkörper. J. für Math. **142**, 191-210.

Im Anschluß an die Hensel-Landsbergsche Darstellung der algebraischen Funktionen gibt der Verf. auf arithmetischer Grundlage eine Theorie der Funktionen

$$X + Y\sqrt{\Delta},$$

wo X, Y beliebige rationale Funktionen von z und

$$\Delta = (z - e_1)(z - e_2) \dots (z - e_{2p+1})$$

ist. Jeder solchen Funktion wird ein „Divisor nullter Ordnung" zugeordnet. Derselbe ist ganz, wenn der Nenner nur den Punkt ∞ enthält. Damit ist die Teilbarkeit von Divisoren gegeben. An dieselbe schließen sich die Kongruenz und die Kongruenzklassen nach einem gegebenen Divisor an. Die zum Divisor teilerfremden Klassen bilden eine kontinuierliche unendliche Abelsche Gruppe. Da nicht jedem Divisor eine Funktion entspricht, so heißen zwei Divisoren äquivalent, wenn ihr Quotient algebraisch ist. Damit ist die Klasseneinteilung der Divisoren gegeben. Die Untersuchung der Divisorenklasse nullter Ordnung führt zum Weierstraßschen Lückensatze.

Zum Schluß bringt der Verf. einen Abriß der Theorie der binären quadratischen Formen der Diskriminante Δ mit rationalen Funktionen als Koeffizienten. Dieselben entsprechen den Divisoren nullter Ordnung, ebenso wie die Formenklassen den Divisorenklassen. Fu.

W. E. H. Berwick. The classification of ideal numbers that depend on a cubic irrationality. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 393-429.

Der Verf. gibt im Anschluß an Jacobi und Minkowski ein algorithmisches Verfahren, das, auf Zahlen eines kubischen Körpers negativer Diskriminante angewandt, periodisch wird. Mit Hülfe dieses Verfahrens gelingt es, jedes Ideal eines solchen Körpers einem „reduzierten Ideal" desselben äquivalent zu setzen. Da es nur endlich viele solcher reduzierten Ideale gibt, und da jedes Ideal durch endlich viele Operationen einem solchen äquivalent gesetzt werden kann, beherrscht man alle Ideale des Körpers völlig. Es werden Beispiele angeführt. Fu.

E. Hecke. Über die Konstruktion relativ-Abelscher Zahlkörper durch Modulfunktionen von zwei Variablen. Math. Ann. **74**, 465-510.

Die Arbeit bildet die Fortsetzung der Dissertation des Verf. (F. d. M. **42**, 457, 1911). Es ist dort die Irreduzibilität gewisser Gleichungen, denen Modulfunktionen von zwei Variablen ξ und ξ' für

$$\xi = \sqrt{\mu},\ \xi' = \sqrt{\mu'},$$

wo μ, μ' die beiden Konjugierten eines quadratisch-reellen Körpers $k(\sqrt{D})$ sind, genügen, nicht bewiesen worden. Dies gelingt jetzt unter der Annahme, daß die Klassenzahl von $K(\sqrt{\mu})$ und $k(\sqrt{D})$ ungerade sei. Weiter werden die Zerlegungsgesetze der Primideale des Grundkörpers im Oberkörper aufgestellt und bewiesen. Es zeigt sich, daß die gefundenen Körper wirklich Unterkörper des Klassenkörpers sind, aber die Relativdiskriminante 1 haben. Dieser Beweis gelingt durch Zugrundelegung eines andern Systems von unsymmetrischen Funktionen, die im Innern des Existenzbereiches keine Singularitäten haben.

Fu.

F. S. Macaulay. On the resolution of a given modular system into primary systems including some properties of Hilbert numbers. Math. Ann. **74**, 66-121.

I. Einleitung: „In Math. Ann. **60**, S. 51, Satz VII (F. d. M. **36**, 292, 1905) beweist E. Lasker, daß jeder Modul (Modulsystem) der kleinste enthaltende Modul (L. C. M.) einer endlichen Anzahl primärer Moduln ist. Sein keinen Punkt enthaltender Modul R wird in der gegenwärtigen Abhandlung als ein den Ursprung enthaltender primärer Modul angesehen.

Die folgende Untersuchung befaßt sich mit der wirklichen Auflösung jedes Moduls, dessen Basis gegeben ist, in primäre Moduln und umfaßt eine Anzahl von damit zusammenhängenden Sätzen.

Die beschriebenen Prozesse und Methoden gründen sich auf Noethers Fundamentaltheorem (Math. Ann. **6**, 351, 1873), dem Lasker in seinen Sätzen VII und XXVII den allgemeinsten und vollständigsten Ausdruck gegeben hat. Einige einfache Beispiele für die Auflösung eines Moduls werden in den §§ 44-46 gegeben; für die Ausführung der Auflösung im allgemeinen werden aber die folgenden umfassenden Annahmen gemacht:

I. Die Basis des L. C. M. eines jeden gegebenen Modulsystems ist bekannt. II. Die Basis des Residuums eines jeden Moduls in bezug auf ein anderes ist bekannt. III. Ein vollständiges System linear unabhängiger Glieder jedes angegebenen (zahlenmäßig bezeichneten) Grades eines gegebenen H-Moduls kann niedergeschrieben und abgezählt werden. Ein wesentlicher Grundzug der Untersuchung besteht darin, daß H-Moduln und K-Moduln (Hilbertsche und Kroneckersche Moduln) gleichzeitig betrachtet werden; dies ist beinahe notwendig für meinen Standpunkt, und ich umgehe dies nicht, obgleich es zur Wirrnis des Gegenstandes hinzutritt.

Außer der Auflösung eines Moduls in primäre Moduln gibt es eine Richtung, nach der ein primärer Modul selbst aufgelöst werden kann. Es läßt sich zeigen, daß ein primärer Modul aufgebaut werden kann auf einer gewissen Anzahl von Hüllen („layers“, roh erläutert durch die vielfachen Hüllen, in die ein Körper eingewickelt werden kann), und seine Auflösung besteht in der Entfernung der Hüllen, jedesmal einer einzelnen. Die Anzahl der Hüllen heißt die Vielfachheit des primären Moduls.

Der Keim der in dieser Abhandlung entwickelten Ideen ist in einer früheren

Arbeit zu finden (Lond. M. S. Proc. **31**, 381-422; F. d. M. **30**, 509, 1899), in der die enge Abhängigkeit von dem Noetherschen Fundamentaltheorem ebenfalls zutage liegt. Ich habe vor einiger Zeit die vollständigere Bedeutung dieser Ideen im Zusammenhange mit der Theorie der Modulsysteme entwickelt, habe aber keine frühere Gelegenheit gehabt, sie zu gestalten. Ich habe es nicht für nötig erachtet, alle gemachten Aussagen zu beweisen, habe jedoch bewußtermaßen keine Eigenschaft angenommen, ohne einen Beweis erlangt zu haben, wofern nicht das Gegenteil klar festgestellt ist."

II. Definitionen und vorgängige Festsetzungen. III. Auflösung eines Moduls. IV. Theoreme. V. Hilbertsche Zahlen. Lp.

Weitere Literatur.

E. T. Bell. The representation of a number as a sum of squares. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 167-168.

P. Bernays. Zur elementaren Theorie der Landauschen Funktion $\varphi(\alpha)$. Habilitationsschrift Zürich. 38 S. 8°.

C. Bisman. Notes arithmétiques. I. Sur la somme des puissances paires et semblables de $n^2 + 4$ nombres. II. Sur un théorème d' Euler. Mathesis (4) **3** 257-259.

G. Borel. Beweisführung des Borelschen Satzes. Rotterdam: Nijgh & Van Ditmar.

H. Böttcher. Analoga zu den pythagoreischen Dreiecken. Unterrichtsbl. f. Math. **19**, 132-133.

Rationale Dreiecke mit einem Winkel von 120° und solche mit einem Winkel von 60°.

N. Čajkowsky. Studien aus der Kongruenztheorie. Lemberg Ševčenko Ges. **15**, 1-45.

J. F. Cameron. Über die Zerlegung einer Primzahl in einem komponierten Körper. Diss. Marburg. 38 S. 8°.

G. Cappelletti. Numeri primi. Teoria e applicazioni. Cenno sui numeri perfetti e amicabili. Verona: Cinquetti. 30 S. 8°.

R. D. Carmichael. On the numerical factors of the arithmetic forms $\alpha^n \pm \beta^n$. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 280-281.

R. D. Carmichael. On the impossibility of certain diophantine equations and systems of equations. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 449.

R. D. Carmichael. On certain diophantine equations having double parameter solutions. Ebenda, 449-450.

A. Cunningham. Arithmetical factors of the Pellian terms. Brit. Ass. Rep. Dundee **82**, 412-413.

L. E. Dickson. Amicable number triples. Amer. Math. Monthly **20**, 84-92. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 285-286.

A. Gérardin. Factorisation des grands nombres et application. Wisk. Tijdschr. **10**, 52-62.

A. Gérardin. Sur les nombres premiers. Assoc. Franç. Av. Sc. (Tunis) **42**, 62.

Vorzeigung eines Mechanismus, der die Faktoren von $x^4 + 1 < 10^8$ liefert. Lp.

H. Hancock. Problems in arithmetical geometry. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 300.

H. Hancock. Generalization of a theorem due to Liouville or to Dedekind, with application to the geometry of numbers. Ebenda, 300-301.

H. Hancock. A theorem in the analytic geometry of numbers. Ebenda, 389.

R. Janculescu. Sur deux équations indéterminées. Mathesis (4) **3**, 119-120.

$(x+y)z = xy$ und $(x^2+y^2)z^2 = (xy)^2$. Lp.

W. Kluge. Diophantische Gleichungen zweiten Grades. Unterrichtsbl. f. Math. **19**, 9-11.

C. Krediet. De congruenties van Fermat en Euler. Wisk. Tijdsskr. **10**, 40-46, 87-97.

Fortsetzung aus 8, 177-188, **9**, 14-38 (F. d. M. **43**, 245, 1912).

D. N. Lehmer. Certain theorems in the theory of quadratic residues. Amer. Math. Monthly **20**, 148-157.

J. McDonald. On quadratic residues. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 457.

E. H. Moore. A mode of composition of positive quadratic forms. Brit. Ass. Rep. Dundee **82**, 413.

T. M. Putnam. Concerning the residues of certain sums of powers of integers to a prime modulus. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 518-519.

L. Struiste. Die linearen diophantischen Gleichungen. Progr. Innsbruck. 28 S. 8⁰.

W. Welmin. Über die Theorie der Reste achten Grades im algebraischen Körper. Ann. Univer. Warschau 1912, I-XI, 1-56.

W. Backes. Ein Beweis des Fermatschen Satzes. Mainz: Druckerei Lehrlingshaus. 4 S. gr. 8⁰.

O. A. Bergholz. Substitutionsbeweis des großen Fermatschen Satzes auf Grund der Formel für $(a+b)^2$. Dessau: H. S. Art'l. 22 S. 8⁰.

H. Brandenburg. Der große Fermatsche Satz und sein Beweis mit Hülfe der allgemeinen pythagoreischen Dreiecksgleichung. 2. Ausgabe. Leipzig: Alfred Lorentz. 8 S. 8⁰.

R. D. Carmichael. On Fermat's theorem and certain related theorems. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 80.

E. R. Cruewell. Der Satz des Fermat. Zweite, vermehrte Auflage. Berlin. 4 S. 8⁰.

E. Fabry. Démonstration du theorème de Fermat. Paris: A. Hermann. 23 S. 8⁰.

H. Fleischhauer. Allgemeiner Beweis des großen Fermatschen Satzes. Delitzsch: Reinhold Pabst. 8 S. 8⁰.

J. W. Haeusler. Irrationale Auflösung der Fermatschen Gleichung $x^n = y^n + z^n$ durch eine unendliche Reihe rationaler Glieder. Berlin: M. Krayn. 15 S. 8⁰.

H. Hädicke. Eine neue Art der Lösung der Potenzen, nebst Nutzanwendung. Verh. Naturf. Ges. Münster 2_1, 4-5.

Zum Fermatschen Satz. Lp.

H. Jakob. Beweis, daß falsch ist jede Gleichung $a^{2d+1} + b^{2d+1} = c^{2d+1}$, wenn a, b, c, d ganze Zahlen sind, die größer sind als Null. Dresden: A. Köhler. 4 S. gr. 8⁰.

P. Kaegbein. Die Gleichung $X^m + Y^m = Z^m$ und der Fermatsche Satz. Hamburg: Selbstverlag. 16 S. 8⁰.

Karnasch. Beweis für den Fermatschen Satz, daß die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ in ganzen Zahlen nicht lösbar ist, wenn $n > 2$. Berlin: Mayer & Müller. 15 S. 4⁰.

A. Kempe. Der große Fermatsche Satz. Versuch einer Beweisführung. Zweite, verbesserte Auflage. Amsterdam: W. Versluys. 22 S. 8⁰.

A. Kimpel. Lösung des Fermatschen Problems. Mai 1913 vorgelegt der Kgl. Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften. Barr: Buchdruckerei E. Herrmann. 9 S. 8⁰.

A. Lots. $X^n + Y^n = Z^n$? Beweis des großen Fermatschen Satzes. Altenburg S.-A.: Selbstverlag. 8 S. 8⁰.

E. Löwenberg. Der große Fermatsche Satz $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$? Ur- und Grundbeweis für seine Unmöglichkeit, gültig für alle Exponenten $\lambda > 2$. Berlin: H. Schildberger. 4 S. 8⁰.

L. Löwenklau. Zum großen Fermatschen Satz. Zweiter und endgültiger Beweis. Dresden: A. Köhler. 4 S. gr. 8⁰.

W. Lückhoff. Allgemeiner Beweis des Fermatschen Satzes. Berlin-Wilmersdorf: Selbstverlag. 4 S. 8⁰.

M. A. McGinnis. Proof of Fermat's theorem, and McGinnis' theorem of derivative equations in an absolute proof of Fermat's theorem reduction of the general equation of the fifth degree to an equation of the fourth degree. Meadowdale, Wash. Hjorth. XI + 34 S. 12mo.

C. Markus. Das Gesetz der metaphysischen Dimensionen. Ein Beweis für das Theorem des Fermat. Zweite, vermehrte Auflage. Berlin. 4 S. 8⁰.

F. Mercier. Note au sujet du dernier théorème de Fermat. Cherbourg Mém. Soc. Sc. nat. (4) 8, 729-744 (1912).

L. E. Olivier. Solution du problème de Fermat. Paris: Gauthier-Villars. 4 S. 8⁰.

W. Pustau. Lösung des großen Fermatschen Satzes. Zweite Bearbeitung. Frankfurt: Knauer. 12 S. 8⁰.

K. Radlik. Der Beweis des großen Fermatschen Satzes und der Nachweis fundamentaler Irrtümer in der mathematischen Lehre. Geschrieben als Herausforderung aller Universitäten von einem krassen Außenseiter der Wissenschaft. Berlin: Selbstverlag. II + 27 S. 8°.

J. E. Rowe. On Fermat's theorem and related theorems. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 68-69.

J. G. Schaller. Beweis der Richtigkeit des „großen Fermatschen Satzes". Nebst Anh. Beilage. Grabow. i. Meckl. (Lindenstr. 7): Selbstverlag. 14 S. gr. 8°.

G. Schröder. Der große Fermatsche Satz. Ein mathematisches Problem gelöst. Berlin: Leonhard Simion. 63 S. 4° + 1 S. Nachtrag.

V. M. Spunar. On Pythagorean numbers and on Fermat's last theorem. Chicago: University of Chicago. 16 S.

R. Suarez. Zum großen Fermatschen Satz! Beweis, daß falsch ist jede Gleichung $a^{2d+1} + b^{2d+1} = c^{2d+1}$, wenn a, b, c, d ganze Zahlen sind, die größer sind als Null. Dresden: A. Köhler. 4 S. gr. 8°.

A. Voigt. Untersuchung der Gleichung $x^m - y^m = z^m$ auf ihre Lösbarkeit durch ganze Zahlen. Frankfurt a. M. C. Adelmann. 12 S. gr. 8°.

B. Theorie der Formen.

G. Humbert. Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. C. R. **157**, 1358-1362.

Es seien m_1, m_2 die kleinsten durch eine binäre, quadratische, definite Form der Diskriminante $-(4N+3)$ eigentlich dargestellten ungeraden Zahlen. Dann existiert die Relation:

$$\sum_{4N+3}\left[m_1\left(\frac{-1}{m_1}\right) + m_2\left(\frac{-1}{m_2}\right)\right] = -2\sum_{|x| < \frac{1}{2}\sqrt{4N+3}} \psi(4N+3-4x^2).$$

Die Summe links erstreckt sich über ein Repräsentantensystem aller Klassen der gegebenen Diskriminante. $\psi(M)$ ist die Summe der Teiler von M, die $< \sqrt{M}$ sind. Der Verf. zeigt, daß die rechte Seite in Verbindung gebracht werden kann mit reduzierten binären quadratischen indefiniten Formen der Diskriminante $4N+3$:

$$\sum_{4N+3}\left[m_1\left(\frac{-1}{m_1}\right) + m_2\left(\frac{-1}{m_2}\right)\right] = \tfrac{1}{2}\sum[a + c - 2\,|\,b\,|].$$

Die Summe rechts ist über gewisse reduzierte indefinite Formen (a, b, c) der Diskriminante $4N+3$ zu erstrecken, für die $a + c > 0$ ist. Fu.

J. Chapelon. Sur les nombres de classes des formes quadratiques binaires positives. C. R. **156**, 675-677.

Mittels der Transformation fünften Grades erhält der Verf. folgende Klassenzahlrelationen: Es sei $N = 5^\mu N'$, wo N' prim zu 5; d ein beliebiger Teiler von N, so daß $\frac{N}{d} = d_1 > d$; d_p ein solcher gerader Teiler von N, daß $\frac{N}{d_p} = d_i$ ungerade und $< d_p$; δ' ein Teiler, für den $\frac{N}{2\delta'}$ ungerade ist; d' ein beliebiger Teiler von N. Dann ist:

$$\sum_{x \equiv 5(10)} F(4N - x^2) = 4 \sum \delta' \left(\frac{\delta'}{5}\right)^2 + 2 \sum (d_p - d_i)\left[1 - \left(\frac{d_p + d_i}{5}\right)^2\right],$$

$$\sum_{x \equiv \pm 1(10)} F(4N - x^2) = 2\left[1 + 5^\mu \left(\frac{N'}{5}\right)\right] \sum \delta' \left(\frac{\delta'}{5}\right) - 2 \sum \delta' \left(\frac{\delta'}{5}\right)^2$$
$$+ \sum (d_1 - d)\left(\frac{d_1 + d}{5}\right)\left[1 + \left(\frac{d_1 + d}{5}\right)\right];$$

$$\sum_{x \gtreqless 0} F(N - 25\, x^2) = \tfrac{1}{2} \sum (-1)^{d'} \left(\frac{d'}{5}\right)^2 + \tfrac{1}{2} \sum (-1)^{d_1}(d_1 - d)$$
$$- \tfrac{1}{2} \sum (-1)^{d_1}(d_1 - d)\left(\frac{d_1 + d}{5}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\Phi(N) + \tfrac{5}{4}\Phi\left(\frac{N}{25}\right).$$

$\Phi(m)$ ist die Summe der ungeraden Teiler von m, wenn m ganz ist, sonst $= 0$. $F(n)$ ist die Klassenzahl der positiven binären Formen der Diskriminante $-n$. Fu.

J. Chapelon. Sur les nombres de classes des formes quadratiques binaires positives et à déterminant négatif. C. R. **156**, 1661-1663.

Es sei $F(n)$ die Klassenzahl der binären quadratischen Formen der negativen Diskriminante $-n$. Der Verf. hat die Klassenzahlrelation

$$\sum_x F(N - x^2),$$

summiert über ganze Zahlen x, die (mod. 5) kongruent $0, \pm 1$ oder ± 2 sind, für den Fall berechnet, daß N ein Vielfaches von 10 ist. In dieser Notiz gibt er die Formeln für die Fälle $N \equiv \pm 2, \pm 4$ (mod. 10). Siehe das vorstehende Referat. Fu.

Th. Got. Sur l'équivalence de certaines formes quadratiques ternaires indéfinies de même genre. C. R. **156**, 1596-1598.

Arnold Meyer hat den Satz bewiesen: Zwei ternäre quadratische, eigentlich primitive Formen der gleichen Invarianten Ω, Δ, von denen keine durch 4 teilbar ist, und die keinen ungeraden gemeinsamen Teiler haben, sind äquivalent, wenn sie zum gleichen Geschlecht gehören. Der Verf. deutet einen vereinfachten Beweis dieses Satzes an für den Fall, daß:

$$f = x^2 - \varphi(y, z), \ f_1 = x - \varphi_1(y, z)$$

die beiden Formen sind. Dabei bedeuten $\varphi(y, z)$, $\varphi_1(y, z)$ zwei binäre positive primitive Formen derselben ungeraden oder ungerade-geraden Diskriminante Δ, welche zu demselben Geschlecht gehören. Fu.

Th. Got. Sur les domaines fondamentaux de certains groupes fuchsiens. C. R. **156**, 1741-1743.

Th. Got. Sur les symétries des groupes reproductifs des formes quadratiques ternaires indéfinis. C. R. **157**, 34-36.

„Die Strahlungsmethode ermöglicht in allen Fällen die leichte Bestimmung des Fundamentalbereiches der Fuchsschen Gruppe, die aus der reproduktiven Gruppe der indefiniten ternären quadratischen Formen f vom Schlage $x^2 - \varphi(y, z)$ abgeleitet ist, wo φ eine positive binäre Form bezeichnet." Hierzu werden zwei Methoden beschrieben. „Die für die Formen $x^2 - \varphi(y, z)$ angegebenen Verfahren haben nicht eine so beschränkte Anwendung, wie das a priori scheinen dürfte; denn jede indefinite, eigentlich primitive quadratische Form sowie ihre Adjunkte von einer Determinante kongruent 1, 3 oder 5 modulo 8 ist einer Form des Schlages $x^2 - \varphi$ äquivalent."

In der zweiten Note wird der Satz bewiesen: Damit eine indefinite ternäre quadratische Form Symmetrien in ihrer reproduktiven Gruppe gestatte, ist es notwendig und hinreichend, daß sie einer der beiden Formen:

$$ax^2 + by^2 + 2gyz + cz^2,$$
$$ax^2 + (2k - g)y^2 + (2h - g)z^2 + 2gyz + 2hzx + 2kxy$$

äquivalent ist, wo $bc - g^2$ negativ sein muß, damit die Symmetrieachse den Kegelschnitt in reellen Punkten schneidet. Lp.

Th. Got. Questions diverses concernant certaines formes quadratiques ternaires indéfinies et les groupes fuchsiens arithmétiques qui s'y rattachent. Toulouse: Privat. 105 S. 4°.

G. Cotty. Sur la réduction des formes quadratiques binaires à coefficients entiers dans un corps quadratique réel. C. R. **156**, 1448-1451.

Sind a, b, c ganze Zahlen des quadratischen reellen Körpers $k(\sqrt{\Delta})$, und bezeichnet man mit Strichen die Konjugierten der Zahlen von $k(\Delta)$, so heißt das Paar quadratischer Formen

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= a\,x^2 + 2b\,x\,y + c\,y^2,\\ \varphi'(x'\,y') &= a'\,x'^2 + 2b'\,x'\,y' + c'\,y'^2\end{aligned}$$

definit, gemischt oder indefinit, je nachdem beide definit, nur eine definit oder beide indefinit sind. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen von $k(\sqrt{\Delta})$, für die $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, so erhält man aus dem Paar $\varphi(x, y)$, $\varphi'(x'\,y')$ durch die Substitution

$$\Sigma = (x, y, x', y' : \alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y, \alpha'\,X' + \beta'\,Y', \gamma'\,X' + \delta'\,Y')$$

ein äquivalentes Paar $\Phi(X, Y), \Phi'(X'\,Y')$ und damit eine Klasse von Paaren konjugierter Formen. Der Verf. behauptet, daß er jedem Körper $k(\sqrt{\Delta})$ ein System Abelscher Funktionen von 2 Variabeln zuordnen könne, aus dem

sich ebenso die Reduktion der Formenpaare ergebe wie bei den elliptischen Funktionen für die gewöhnlichen definiten Formen. Zugleich gibt er für die drei Arten von Formenpaaren die geometrischen Fundamentalbereiche im Raume von 4 Dimensionen an. Fu.

L. Orlando. Sopra alcuni polinomii definiti, considerati da Hurwitz. Rom. Acc. L. Rend. $\mathbf{22}_1$, 213-215.

Hurwitz hat bewiesen (F. d. M. **43**, 280, 1912), daß, wenn

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{2n} x^{2n}$$

immer positiv ist für jeden reellen Wert von x, auch

$$f_1(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(2n)}(x)$$

und

$$f_2(x) = f(x) + \frac{f''(x)}{1!} + \frac{f''''(x)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(2n)}(x)}{n!}$$

immer positiv sind. Statt des transzendenten Beweises gibt der Verf. hierfür einen algebraischen. Fu.

H. Brandt. Zur Komposition der quaternären quadratischen Formen. J. für Math. **143**, 103-127.

Im Anschluß an die Arbeit Speisers (F. d. M. **43**, 277, 1912), die einen entsprechenden Satz für binäre Formen bewiesen hat, gewinnt der Verf. das Resultat: Wenn eine bilineare Substitution die quaternäre quadratische Form A in das Produkt BC der beiden quaternären quadratischen Formen B und C verwandelt, so gibt es zwei weitere bilineare Substitutionen, die aus der ersten durch rationale Operationen hergeleitet werden können, von denen die eine B in das Produkt AC, die andere C in das Produkt AB transformiert. Hierbei sind die Koeffizienten beliebige Zahlen. Für den Fall, daß dieselben reell und rational sind, ist eine Zerlegung in das Produkt zweier Formen nur möglich, wenn die Determinante eine rationale Quadratzahl ist. Schließlich supponiert der Verf. alle Koeffizienten (auch die der Substitutionen) als ganze rationale Zahlen und nimmt nur primitive Formen. Eine solche heißt aus zwei andern komponiert, wenn sie durch eine bilineare Transformation in das Produkt der andern übergeführt werden kann. Dies ist dann und nur dann möglich, wenn ihre Determinante $D = d^2$ eine Quadratzahl und ihre Adjungierte durch d teilbar ist. Fu.

R. Remak. Neuer Beweis eines Minkowskischen Satzes. J. für Math. **142**, 278-282.

Der Verf. gibt statt des geometrischen Beweises einen arithmetischen Beweis des Minkowskischen Satzes: Es seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi_0, \eta_0$ reelle Zahlen, und $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Dann kann man x, y in der zerlegbaren, homogenen quadratischen Form

$$(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0) = (\alpha x + \beta y - \xi_0)(\gamma x + \delta y - \eta_0)$$

immer so als ganze rationale Zahlen bestimmen, daß:

$$|(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)| \leqq \tfrac{1}{4}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn die Form der Form

$$(X - \tfrac{1}{2})(Y - \tfrac{1}{2})$$

arithmetisch äquivalent ist. Fu.

R. König. Über quadratische Formen und Zahlkörper sowie zwei Gruppensätze. Deutsche Math.-Ver. **22**, 239-254.

Der Verf. stellt sich die Aufgabe, den Zusammenhang zwischen der Gauß-schen Theorie der quadratischen Formen und der Theorie des quadratischen Zahlkörpers vollständig aufzudecken. Dazu ist zunächst jedem Ideal, das keinen rationalen Teiler hat, eine Form eindeutig zuzuordnen. Bei den Formen positiver Diskriminante entsteht hierbei die Schwierigkeit, daß den Formen (a, b, c) und $(-a, b, -c)$ nur ein Ideal zugeordnet ist. Der Äquivalenzbegriff hat bei Formen und Idealen die entsprechende Bedeutung. Besondere Bedeutung kommt der Reduktionstheorie und ihrem Wert für die Idealtheorie zu. Es wird eine Methode zur Bestimmung der zweiseitigen Klassen gegeben. Die Gruppensätze beziehen sich auf die Abelsche Gruppe der Klassen. Fu.

G. Frobenius. Über die Reduktion der indefiniten binären quadratischen Formen. Berl. Ber. 1913, 202-211.

Der Verf. führt die Gaußsche Reduktion der binären quadratischen Formen positiver Diskriminante für den Fall durch, daß die Koeffizienten a, b, c in

$$\varphi(x, y) = a x^2 + b x y + c y^2$$

beliebige reelle Größen sind. Die Variablen x, y dagegen durchlaufen ganzzahlige Werte. Fu.

I. Schur. Zur Theorie der indefiniten binären quadratischen Formen. Berl. Ber. 1913, 212-231.

Siehe hierzu die nachstehend angezeigte Arbeit von Frobenius und die dort angegebenen Resultate Markoffs. Der Verf. leitet einen dem Markoffschen analogen Satz für die mittleren Koeffizienten der quadratischen binären indefiniten Formen einer Klasse ab. Es sei B die untere Grenze der absoluten Beträge der mittleren Koeffizienten einer Klasse der Diskriminante D. Dann ist die kleinste Häufungsstelle der Zahlen

$$Q = \frac{\sqrt{D}}{B}$$

für alle Klassen der Diskriminante D gleich $2 + \sqrt{5}$. Wenn Q unterhalb dieser Zahl liegt, so hat es einen der Werte von

$$\sqrt{13 + \frac{8 p_{2\nu}}{p_{2\nu+1}}},$$

wo p_λ die Reihe der Fibonaccischen Zahlen durchläuft. Die zugehörigen Formen sind

$$\psi_{2\nu} = (p_{2\nu+1}, p_{2\nu+1}, -p_{2\nu+4}) = p_{2\nu+1}\, x^2 + p_{2\nu+1}\, xy - p_{2\nu+4}\, y^2.$$

Der Verf. nennt (a, b, c) eine Minimalform, wenn

$$0 \leqq b \leqq a \leqq c, \; a > 0$$

und a die kleinste durch den absoluten Betrag der Form darstellbare Zahl ist. Dann ist

$$c \geqq 2a + b,$$

falls die gegebene Form nicht $(a, a, -a)$ ist. Ist sie auch nicht von der Form $(a, a, -3a)$, so ist

$$c \geqq \frac{2+\sqrt{3}}{2}\, a + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\, b.$$

Die Häufungsstelle von $\frac{\sqrt{D}}{b}$ für alle Minimalformen ist $2+\sqrt{3}$, und $\frac{\sqrt{D}}{b}$ ist nur für die Formen

$$(a, a, -a), (a, a, -3a), (a, a, -\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\, a)$$

kleiner oder gleich $2+\sqrt{3}$; es wird nämlich für diese 3 Formen:

$$\frac{\sqrt{D}}{b} = \sqrt{5}, \sqrt{13}, \; 2+\sqrt{3}.$$

Fu.

G. Frobenius. Über die Markoffschen Zahlen. Berl. Ber. 1913, 458-487.

Es sei

$$\psi = a\,x^2 + bxy + c\,y^2$$

eine indefinite quadratische Form der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$. M sei der kleinste Wert von $|\,\psi\,|$, wenn x, y die ganzen Zahlen durchlaufen. A. Markoff hat bewiesen, daß nur dann

$$\sqrt{D} < 3\,M$$

ist, wenn ψ, mit einem geeigneten Faktor multipliziert, einer Form

$$\varphi = p\,x^2 + (3p - 2q)\,xy + (r - 3q)y^2$$

äquivalent ist. p, q, r sind hier positive ganze Zahlen; p genügt einer Gleichung

$$p^2 + p_1^2 + p_2^2 = 3p\,p_1\,p_2,$$

wo auch p_1 und p_2 ganze Zahlen sind, und wird vom Verf. eine Markoffsche Zahl genannt. $\pm\, q$ ist der absolut kleinste Rest von $\frac{p_1}{p_2}$ (mod. p) und r durch $pr - q^2 = 1$ bestimmt. Für φ ist:

$$D = 9p^2 - 4, M = p, \frac{\sqrt{D}}{M} = 3\sqrt{1 - \frac{4}{9p^2}} < 3.$$

Der Verf. gibt einen neuen Beweis für diese Eigenschaften der Form φ, ohne auf das allgemeine Markoffsche Problem einzugehen. Er studiert hierauf die Markoffschen Zahlen genauer und entwickelt für sie eine explizite Darstellung durch die Teilnenner eines Kettenbruches. Vgl. über den Gegenstand auch Hurwitz, F. d. M. 38, 246, 1907. Fu.

T. Astuti. Sur une forme quadratique définie positive. Ann. sc. Ac. Pol. Porto 8, 119-120.

In der Theorie des Potentials der isotropen elastischen Körper muß bewiesen werden, daß die beiden Beziehungen $3\lambda + \mu > 0$, $\mu > 0$ eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür bilden, daß die quadratische Form

$$\lambda(a + b + c)^2 + 2\mu(a^2 + b^2 + c^2 + \tfrac{1}{2}f^2 + \tfrac{1}{2}g^2 + \tfrac{1}{2}h^2)$$

eine definite positive Form ist. Der in der vorliegenden Note dafür gelieferte Beweis ist ganz einfach. Lp.

H. F. Blichfeldt. On the arithmetic value of quadratic forms. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 518.

Kapitel 3.

Kettenbrüche.

H. Priester. Über Kettenbrüche und einige arithmetische Reihen höherer Ordnung. Progr. 690. Realgymnas. Langenberg, Rhld. 22 S.

Die Arbeit zerfällt in drei Teile. Der erste Teil handelt über die Verwandlung der Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl in einen Kettenbruch. Im zweiten Teil wird gezeigt, wie die Differentialrechnung mit Nutzen bei der Bestimmung der Potenzsummen der natürlichen Zahlen Verwendung finden kann. Als Beispiel zur Theorie der arithmetischen Reihen höherer Ordnung wird im dritten Teil die Frage beantwortet: Auf wieviele verschiedene Weisen läßt sich der Wert 3 Mark durch verschiedene Münzsorten darstellen? Gd.

G. Polvani. Sopra le frazioni di Lambert. Periodico di Mat. **28**[(3) **10**], 241-266.

„In dieser kurzen Abhandlung will ich die Haupteigenschaften der Lambertschen Brüche (aufsteigenden Kettenbrüche) bestimmen; keine Arbeit über sie ist zu meiner Kenntnis gekommen, und nur einen kleinen Hinweis habe ich in der Encyclopédie des sciences mathématiques gefunden. Die von mir gebrauchten Bezeichnungen sind zum größten Teile die von Prings-

heim in seinem Enzyklopädieartikel für die aufsteigenden Kettenbrüche gewählten (I A 3, Nr. 57, S. 140). Bei den Benennungen habe ich mich durch die formalen Analogien zwischen den aufsteigenden und den gewöhnlichen Kettenbrüchen leiten lassen. Die Arbeit ist in zwei Teile geteilt. In dem ersten beschäftige ich mich ausschließlich mit den begrenzten aufsteigenden Kettenbrüchen, in dem zweiten mit den unbegrenzten." Inhalt: Begrenzte aufsteigende Kettenbrüche. I. Erste Eigenschaften. II. Bedingungen dafür, daß zwei aufsteigende Kettenbrüche gleich sind. III. Operationen zwischen aufsteigenden Kettenbrüchen. IV. Entwicklung einer rationalen Zahl in einen begrenzten aufsteigenden Kettenbruch.

Unbegrenzte aufsteigende Kettenbrüche. V. Erste Eigenschaften. VI. Konvergenz. VII. Periodische aufsteigende Kettenbrüche. Lp.

O. Nikodym. O pewnym sposobie ponumerowania wszystkich ułamków właściwych. (Über ein Abzählungsverfahren sämtlicher eigentlichen Brüche.) Wektor **2**, 13-17 (1912).

Ein von dem Verfahren von Faber (Math. Ann. **60**; F. d. M. **36**, 100, 1905) verschiedenes, auf der Entwicklung der Brüche in Kettenbrüche

$$w = 1 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \cdots$$

beruhendes Verfahren, das aber keineswegs, wie der Verf. behauptet, einfacher ist als das Fabersche. A. R.

K. Petr. Über Berechnung der numerischen Reihen. Časopis **42**, 353-369, 465-493. (Böhmisch.)

Der Verf. beschäftigt sich mit den unendlichen Reihen, bei welchen das Verhältnis zweier aufeinander folgenden Glieder eine rationale Funktion des Zeigers ist. Es wird ein Verfahren angegeben, wie man eine solche Reihe in einen zu numerischer Berechnung geeigneten Kettenbruch verwandeln kann, und dies wird an zahlreichen Beispielen erläutert. Z. B. ist die Reihe

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot \delta} + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1) \cdot \delta(\delta+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdot \beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2) \cdot \delta(\delta+1)(\delta+2)} + \cdots$$

dem Kettenbruche

$$\beta_0 + \frac{d_1|}{|\beta_1} + \frac{d_2|}{|\beta_2} + \cdots$$

gleich; dabei ist für $\varrho > 0$

$$d_{\varrho+1} = \frac{\varrho(\varrho-\alpha+\gamma)(\varrho-\alpha+\delta)(\varrho-\beta+\gamma)(\varrho-\beta+\delta)(\varrho-\alpha-\beta+\gamma+\delta)}{(2\varrho-1+\gamma+\delta-\alpha-\beta)(2\varrho+\gamma+\delta-\alpha-\beta)^2(2\varrho+1+\gamma+\delta-\alpha-\beta)},$$

$$4\beta_\varrho = \alpha+\beta+\gamma+\delta-2 + \frac{(\gamma+\delta-\alpha-\beta)(\alpha-\beta+\gamma-\delta)(\alpha-\beta-\gamma+\delta)}{(2\varrho-1+\gamma+\delta-\alpha-\beta)(2\varrho+\gamma+\delta-\alpha-\beta)}$$

und

$$d_1 = \frac{(-\alpha+\gamma)(-\alpha+\delta)(-\beta+\gamma)(-\beta+\delta)}{(\gamma+\delta-\alpha-\beta-1)(\gamma+\delta-\alpha-\beta)(\gamma+\delta-\alpha-\beta+1)},$$

$$\beta_0 = \frac{\alpha\beta-\gamma\delta+(\gamma+\delta-1)(\gamma+\delta-\alpha-\beta)}{(\gamma+\delta-\alpha-\beta-1)(\gamma+\delta-\alpha-\beta)}.$$

Fe.

L. H. RICE. Continuant expressions for $\sqrt{a^2+b}$ and $(\sqrt{a^2+b}+a)^n$. Annals of Math. (2) **14**, 139-142.

Wird $(\sqrt{a^2+b}+a)^n = P_n + Q_n\sqrt{a^2+b}$ gesetzt, so ist $\lim \frac{P_n}{Q_n} = \pm \sqrt{a^2+b}$, je nachdem $a \gtrless 0$ ist. Weiter ist

$$(\sqrt{a^2+b}+a)^n = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{a^2+b} & & & \\ -1 & a & b & & \\ & -1 & 2a & b & \\ & & -1 & 2a & b \; . \\ & & & . & . \; . \end{vmatrix}_{n+1}$$

und hieraus läßt sich die (bekannte) Kettenbruchentwicklung

$$\sqrt{a^2+b} = |a| + \frac{b|}{|2\,|a|} + \frac{b|}{|2\,|a|} + \cdots$$

herleiten. Schr.

L. TOCCHI. Sullo sviluppo in frazione continua degli irrazionali quadratici. Batt. G. **51** [(3) **4**], 149-160.

Die Entwicklung quadratischer Irrationalzahlen in gewöhnliche Kettenbrüche wird mühsam, wenn die Periode der Teilnenner lang ist. Man kann kürzere bekommen, indem man auch Teilzähler > 1 zuläßt, nur hat man gewisse Vorsichten zu beobachten, damit die Näherungswerte reduzierte Brüche werden. Dies trifft z. B. ein, wenn alle Teilzähler gleich und zu jedem Teilnenner teilerfremd sind.

Eine solche Entwicklung ist z. B. $\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b|}{|2a} + \frac{b|}{|2a} + \cdots$ Schr.

O. PERRON. Erweiterung eines Markoffschen Satzes über die Konvergenz gewisser Kettenbrüche. Math. Ann. **74**, 545-554.

Ist $\psi(x)$ eine in dem endlichen Intervall (a, b) wachsende Funktion mit unendlich vielen Wachstumsstellen, so hat das Stieltjessche Integral $\int_a^b \frac{d\,\psi(x)}{z+x}$ einen „assoziierten" Kettenbruch $\frac{k_1|}{|z+l_1} + \frac{k_2|}{|z+l_2} + \cdots$ und für $a=0$ auch einen korrespondierenden Kettenbruch $\frac{1|}{|b_1 z} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3 z} + \frac{1|}{|b_4} + \cdots$ (näheres in Perron, Kettenbrüche Kap. IX). Beide sind unter gewissen

Bedingungen gleich dem Integral. Es werden Beiträge zu dem Problem geliefert, aus dem Verhalten von $\psi(x)$ direkt auf die Konvergenz der Kettenbrüche und ihre Gleichheit mit dem Integral zu schließen. Schr.

H. Tietze. Über die raschesten Kettenbruchentwicklungen reeller Zahlen. Monatsh. f. Math. u. Phys. **24**, 209-242.

Es sei w eine reelle Zahl, $w = b_0 + r_1, \frac{1}{|r_\nu|} = b_\nu + r_{\nu+1}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$; die b_ν ganze Zahlen, $-1 < r_\nu < 1$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$. Dann heißt

$$\left[b_0; \frac{\varepsilon_\nu}{b_\nu}\right]_1^n,$$

wo $r_\nu = \varepsilon_\nu |r_\nu|$ ist, eine halbregelmäßige Kettenbruchentwicklung von w. Unter ihnen ist die regelmäßige Kettenbruchentwicklung als spezieller Fall für $0 \leqq r_\nu < 1$ enthalten.

Jeder Näherungsbruch einer halbregelmäßigen Kettenbruchentwicklung ist entweder ein Haupt- oder ein Nebennäherungsbruch der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung. In jeder halbregelmäßigen Kettenbruchentwicklung nimmt $|y - wx|$ für die Näherungsbrüche $\frac{y}{x}$ fortwährend ab. Werden die Haupt- und Nebennäherungsbrüche nach wachsender Annäherung an $y = wx$, und zwar je nach der Richtung der Abweichung, in zwei Zeilen angeordnet,

$$\begin{array}{cccc} \bullet\ \bullet \ldots \bullet & & \bullet\ \bullet \ldots \bullet & \\ & \bullet\ \bullet \ldots \bullet & & \bullet\ \bullet \ldots, \end{array}$$

so ergeben sich die Näherungsbrüche jeder halbregelmäßigen Entwicklung, indem man beim ersten links beginnt und dann jedesmal zum nächsten entweder in derselben oder in der nächsten Zeile übergeht. Kürzere (bei irrationalem w „raschere") Entwicklungen als die nach absolut kleinsten Resten kann es nicht geben, wohl aber gibt es unter Umständen ebenso kurze. Die Anzahl der halbregelmäßigen Entwicklungen wird bestimmt; das Resultat ist jedoch zu weitläufig, um hier angegeben zu werden. Die kürzesten (oder raschesten) Entwicklungen sind die, bei denen $|r_\nu| < \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61\,803\ldots$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ ist.

Die Resultate berichtigen gewisse Behauptungen Vahlens in J. f. Math. **115** (F. d. M. **26**, 1895, 230) und Minkowskis in Math. Ann. **54**, 91; Werke Band I, S. 320 (F. d. M. **31**, 1900, 213) und Diophantische Approximationen, S. 42. Schr.

A. Perna. Intorno ai numeri trascendenti di Liouville. Sonderdruck aus Annali del R. Istituto tecnico di Napoli **30**, 11 S.

Der Verf. stellt einige notwendige sowie einige hinreichende Bedingungen dafür auf, daß ein Kettenbruch eine Liouvillesche transzendente Zahl darstellt. Vi.

M. T. NARANIENGAR. Some properties of polynomials. Indian Math. Soc. 5, 176-178.

Bestimmung von T_{p-1} und G_{p-1} in

$$R_p = T_{p-1}\, A + G_{p-1}\, B,$$

wo R_p der Rest $(n-p)$-ten Grades des euklidischen Algorithmus bedeutet oder sonst eine Funktion, die nur $n-p+1$ vorgeschriebene Potenzen von x enthält. Schr.

Vierter Abschnitt.

Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

ITALO GHERSI. Matematica dilettevole e curiosa. Problemi bizzarri. Paradossi algebrici, geometrici e meccanici. Moto perpetuo. Grandi numeri. Curve e loro tracciamento meccanico. Sistemi articulati. Quadratura del circolo. Trisezione dell' angolo. Duplicazione del cubo. Geometria della riga e del compasso. Rompicapo geometrici. Iperspazio. Probabilità. Giochi. Quadrati, poligoni e poliedri magici. Con 693 figure originali dell' Autore. Milano: Ulrico Hoepli. VIII + 730 S. 16mo.

Dieses den Manuali Hoepli angehörige Werk kündigt sich zwar als zur vergnüglichen Unterhaltungsmathematik gehörig an, zählt auch auf S. VII und VIII die sie behandelnden Hauptschriften der neueren Zeit auf, steht aber als mathematisches Werk auf einem höheren Standpunkte, was wohl aus den im Titel aufgezählten Gegenständen schon ersichtlich ist. Es enthält außer den gewöhnlichen mathematischen Spielen, die ja auch oft den Stoff zu ernsten Untersuchungen abgeben können, zum größeren Teil rein mathematische Dinge, die vielleicht auch nicht mathematisch veranlagten oder ausgebildeten Köpfen interessant erscheinen.

Wir wollen zur Bestätigung den Inhalt des geometrischen Teils (S. 329 bis 669) genauer angeben. Der Abschnitt beginnt mit einer Vorführung der bekanntesten ebenen Kurven dritter Ordnung: verschiedene kubische Parabeln, hyperbolische Kubik, unikursale zirkulare Kubik, Strophoide, Trisektrix von Mac Laurin, Zissoide, Zirkulare Kubik von Jeřabek, Konchoide von de Sluze, Trisektrix von Longchamps, Fußpunktkurve der Steinerschen Hypozykloide in bezug auf eine Spitze. Darauf folgen unikursale Kurven vierter Ordnung nebst anderen Quartiken sowie Kurven höherer Ordnung, Sektrizen, Verfolgungskurven, transzendente Kurven und Instrumente zur mechanischen Anfertigung von Kurven.

Nach einem kurzen Abschnitt über solche Aufgaben, die mit Hülfe von Zirkel und Lineal lösbar sind, folgt eine ausführliche Besprechung der Teilung des Kreises und der Konstruktion regelmäßiger Vielecke, wobei die angenäherten Lösungen berücksichtigt werden.

Von den zur Trisektion eines Winkels geeigneten Methoden werden 19 vorgeführt, ohne daß damit etwa die bekanntesten alle gegeben sind.

Über die Versuche zur Quadratur des Kreises werden zuerst geschichtliche Angaben gemacht. Danach werden angenäherte Methoden beschrieben, und zwar zuerst 15 Konstruktionen für die Rektifikation des Kreises, 8 für die Quadratur.

Bei der dann folgenden Erörterung der Verdoppelung des Würfels werden drei Lösungen mit Hülfe von Kegelschnitten, 16 durch Anwendung von Kubiken, drei mit anderen Kurven, endlich auch drei angenäherte Lösungen gezeigt.

Der letzte geometrische Abschnitt „Geometrische Merkwürdigkeiten" vereinigt alles, was in die angeführten früheren Abteilungen nicht eingereiht werden konnte. Wir heben aus dem bunten Allerlei hervor 25 Beweise des Pythagoreischen Lehrsatzes sowie vier seiner Verallgemeinerungen, zwölf geometrische Trugschlüsse, geometrische Zerschneidungen und Zusammensetzungen, Faltungsgeometrie, regelmäßige Vielflache, geometrische Modelle.

Hiernach ist es wohl klar, daß der dargebotene Stoff weit über bloße Spielereien hinausgeht und jedem Lehrer für den Unterricht recht nützlich sein kann. Für die Befriedigung tiefergehender mathematischer Ansprüche wäre eine genauere Angabe der benutzten Quellen wünschenswert gewesen. Die bloße Angabe des Namens des Finders einer Lösung ist nicht genügend. Die Auswahl der verschiedenen Lösungen einer und derselben Aufgabe läßt kein Prinzip erkennen; fast scheint es, daß der Verfasser bloß die zufällig zu seiner Kenntnis gekommenen Lösungen wiedergegeben hat. Die deutsche Literatur ist nur in geringem Maße berücksichtigt worden. Dafür hat der Verfasser aber auch eine nicht geringe Zahl eigener Lösungen hinzugefügt. Im ganzen habe ich bei der Durchsicht des Werkes in der Tat mich vergnüglich mathematisch unterhalten und kann es mit gutem Gewissen warm empfehlen, unter anderem auch deshalb, weil der Preis des ungemein reichhaltigen Buches, entsprechend der Wohlfeilheit der Manuali Hoepli, ein recht geringer ist. Lp.

A. Kiefer. Die Kombinationslehre auf dem Gymnasium. Progr. (Nr. 617) Gymnas. Essen-Ruhr 1913. 32 S.

Der Verf. beabsichtigt, durch seine Darlegungen, wie sich der Unterricht in diesem Gebiete im Laufe der Jahre an seiner Schule gestaltet hat, an der Hand zahlreicher Aufgaben das Interesse für diesen Gegenstand zu beleben, sodaß ihm eine größere Rolle beim Unterricht in der Prima zufällt. Ba.

P. Alibrandi. Permutazioni di un esametro latino. Rom. Acc. P. d. N. L. Atti **64**, 139-148.

Es handelt sich um den Hexameter von Bernhard Bauhuis (1575 bis 1629): tot tibi sunt dotes, virgo, quot sidera caelo. Bauhuis gibt die Anzahl der möglichen, einen Sinn in Hexametern gebenden Permutationen als 1022 an, Jakob Bernoulli als 3312. Der Verf. des vorliegenden Artikels kommt durch Abwägung der prosodischen Gesetze zu einer bedeutend geringeren Zahl, nämlich kaum 700 allenfalls erträgliche Hexameter. Lp.

Ch. Halphen. Sur un problème d'énumération. Nouv. Ann. (4) **13**, 176-183.

Die Arbeit behandelt die Lösung der folgenden Aufgabe: Die Zahl der Schnittlinien der durch je drei von n im Raume gegebenen Punkten gelegten Ebenen beträgt

$$N = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{72}.$$

Ba.

F. N. Cole. The triad systems of thirteen letters. Amer. M. S. Trans. **14**, 1-5.

Während die Bestimmung der Tripelsysteme von 13 Elementen von de Pasquale (Lomb. Ist. Rend. (2) **32**; 1899) und Brunel (J. de Math. (5) **7**; 1901) von den Kantorschen Konfigurationen $(3, 3)_{10}$ ausging, zeigt der Verf., wie man das Ziel allein mit der Theorie der Substitutionen erreichen kann. Sk.

H. S. White. Triple-systems as transformations, and their path among triads. Amer. M. S. Trans. **14**, 6-13.

Der Verf. betrachtet das Tripelsystem als einen Operator, der, ähnlich wie die Form in der symbolischen Algebra, auf die verschiedensten Gegenstände angewandt werden kann. In der vorliegenden Arbeit wendet er ihn auf Triaden an und findet, daß insbesondere das Tripelsystem Δ_{13} diese in Reihen ordnet, die für das System charakteristisch sind, und daß diese ein Hülfsmittel zur Auffindung der Gruppe darstellen, zu der das System gehört. Dabei ergeben sich auch in einfacher und anschaulicher Weise neue Eigenschaften der Systeme vom Nettoschen oder vom Reißschen Typus. Sk.

L. D. Cummings. Note on the groups for triple-systems. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 355-356.

Anwendung der im vorstehenden Referate besprochenen Methode auf zwei Tripelsysteme von 15 Elementen; hierbei wird die von der Verfasserin schon früher gefundene Tatsache bestätigt, daß zwei nichtkongruente Tripelsysteme dieselbe Gruppe haben können. Lp.

H. Onnen. Gergonne's stapelprobleem. Wisk. Tijdschr. **9**, 5-13, 81-91, 129-140, 197-205.

Im Anschluß an Arbeiten von L. E. Dickson und dem Verf. (F. d. M. **43**, 287, 1912. Daselbst ist die Bandnummer **8** in **9** zu ändern) wird das Problem in seiner allgemeinsten Form analysiert. Schn.

A. Łaparewicz. Królowe na szachownicy. (Königinnen auf dem Schachbrett). Wektor **1**, 326-336. (1912.)

Bericht über die Arbeiten, in denen das Problem der Aufstellung von acht Königinnen auf dem Schachbrett, von denen keine zwei einander bedrohen sollen, behandelt wird, insbesondere die Arbeiten von Günther (Arch. d. Math. u. Phys. (2) **56**) und Glaisher (Phil. Mag. (4) **48**). A. R.

C. Salomon. Nouveaux essais de magie arithmétique polygonale. Paris: Gauthier-Villars. 26 S. gr. 8⁰.

C. Salomon. Questions inédites de magie arithmétique polygonale. Paris: Gauthier-Villars. 21 S. gr. 8⁰.

Seinen Essais de magie arithmétique polygonale (F. d. M. **43**, 288, 1912) läßt der Verf. zwei weitere Studien folgen, die einige Methoden zur Konstruktion magischer Sternpolygone entwickeln. Im ersten Heftchen handelt es sich um Étoiles magiques à 10 et 12 branches (30, 36, 48 points) et hexagones et octagones magiques, das zweite Heft führt als weiteren Titel: Étoiles magiques à 8, 16 et 20 branches (24, 64 et 100 points) et rosaces hypermagiques (16, 25, 36 points). Sk.

E. Barbette. (3922) Nombre de carrés magiques de m^2 cases. Interméd. des math. **20**, 59-62.

Der Verf. teilt unter Bezugnahme auf seine früheren Veröffentlichungen einige Ergebnisse mit und verweist auf sein Buch „Les carrés magiques du $m^{\text{ième}}$ ordre" (F. d. M. **43**, 288, 1912). Lp.

K. Weichberger. Das magische Dreieck. Braunschw. G-N-C-Monatsschrift 1913, 500-508.

Das vom Verf. magisch genannte Dreieck gehört nicht in die Klasse der viel behandelten magischen Quadrate. Es ist ein auf die Spitze gestelltes gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten in n gleiche Teile geteilt sind. Zieht man durch die Teilpunkte einer Seite Parallelen zu den beiden anderen Seiten, so zerfällt das Dreieck in n^2 kleine gleichseitige Dreiecke. Diese werden, von unten beginnend, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... ausgefüllt, so daß in jeder horizontalen Folge von Dreiecken, von der Linken anfangend, die Zahlen in der natürlichen Folge stehen, also zunächst 1, dann 2, 3, 4, dann 5, 6, 7, 8, 9 usw. Aus der so geschaffenen Anordnung der natürlichen Zahlen lassen sich manche Beziehungen zwischen ihnen ablesen, die durch Schattierungen an verschiedenen Bildern veranschaulicht werden. Lp.

E. L. Dodd. A justification of empirical probability based upon an undetermined a priori probability. Batt. G. **51** [(3) **4**], 257-263; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 454.

Ist bei s Versuchen ein Ereignis r-mal eingetreten, und ist die Wahrscheinlichkeit a priori dafür, daß die Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses in dem Intervall $I(x \dots x_1)$ liegt, $\int_x^{x_1} \psi(x)\, dx$ ($\psi(x)$ beschränkt und integrabel, mit einem

positiven Minimum im Intervall 0 ... 1), so ist die Wahrscheinlichkeit a posteriori, daß p in I liegt, $x = \frac{r}{s} + \eta$, wobei $\lim \eta = 0$ für $s = \infty$, $(x - x_1) = 0$, und der wahrscheinliche Wert $\bar{p}$ von p unterscheidet sich von r/s um weniger als eine vorgeschriebene kleine Größe ε, wenn s groß genug gewählt wird. Werden s_1 weitere Versuche angestellt, so wird das Ereignis am wahrscheinlichsten n-mal eintreten, wobei n die der Zahl $\frac{r}{s} s_1$ nächstgelegene ganze Zahl ist (immer vorausgesetzt, daß s im Verhältnis zu s_1 groß ist!) Sk.

L. Bachelier. Les probabilités semi-uniformes. C. R. **156**, 203-205.

„Man sagt, ein Problem beziehe sich auf gleichmäßige Wahrscheinlichkeiten, wenn es darin besteht, daß die Wirkung des Zufalles auf eine Folge identischer Proben ermittelt werden soll. Gleichförmigkeit besteht nicht, sobald die Proben a priori unähnlich sind. Man kann sagen, ein Problem beziehe sich auf halbgleichförmige Wahrscheinlichkeiten, wenn die betrachteten Proben in Gruppen von $k_1, k_2, \ldots, k_\gamma, \ldots, k_\lambda, \ldots$ unter sich identische Proben geteilt werden, wobei die Bedingungen für jede Gruppe nach gewissen Daten und nach dem Zufall vorgängig bestimmt werden.“ Unter Verweis auf seinen „Traité du calcul des probabilités“ (F. d. M. **43**, 288, 1912), Kap. 18, stellt sich der Verf. die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeit dafür zu ermitteln, daß die Abweichungen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sind, wenn die Anzahl λ der Gruppen sehr groß ist. Lp.

E. C. Molina. Computation formula for the probability of an event happening at least c times in n trials. American Math. Monthly **20**, 190-193.

Manche physikalisch-technischen Probleme erfordern zu ihrer quantitativen Lösung eine bequeme Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis wenigstens c-mal bei n Versuchen eintritt, wobei die Wahrscheinlichkeit p seines Eintretens bei einem Versuch bekannt ist. Mehrere ziemlich einfache Formeln sind von Poisson in dem 3. Kapitel seiner „Recherches sur la probabilité des jugements“ unter Benutzung einer von Laplace in der „Théorie analytique des probabilités“ entwickelten Methode gegeben worden. Aber diese Formeln schließen den Fall aus, wo p sehr klein und $c = np + r$ ist. r bezeichnet dabei eine im Vergleich zu np nicht kleine Größe. Unter diesen Voraussetzungen leitet der Verf. zwei Formeln ab. Gd.

C. S. Jackson. A problem in probability. Math. Gazette **7**, 38-40.

Die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Versuches (Kopf oder Schrift beim Aufwerfen einer Münze) sei $^1/_2$. Fragen über die Wahrscheinlichkeit von r ununterbrochenen Folgen eines der Ereignisse bei n Versuchen, und dergleichen mehr. Lp.

O. MEISSNER. Würfelversuche. Zs. f. Math. u. Phys. **62**, 149-156.

Verf. berichtet über das Ergebnis einer Versuchsreihe von 4320 Würfen, die er mit vier verschieden bezeichneten Würfeln ausgeführt hat. Dabei stellt sich eine wesentlich bessere Übereinstimmung mit der Theorie heraus als bei den bekannten Würfelversuchen von R. Wolf. Sk.

D. MIRIMANOFF. Sur quelques problèmes concernant le jeu de trente et quarante. Ens. math. **15**, 231-233.

Poisson (Gergonnes Ann. **16**; 1820) und Oettinger (J. für Math. **67**; 1867) haben als erste die Fragen des Trente et quarante behandelt, doch stimmen ihre Ergebnisse nicht ganz mit den von Bertrand in seinem Calcul des probabilités entwickelten Resultaten überein. Verf. nimmt daher die Untersuchung noch einmal auf und findet den Grund der Abweichung im wesentlichen in Rechenfehlern Bertrands. Dagegen sind auch in den Abhandlungen der ersten beiden Autoren Dunkelheiten, deren Aufklärung Verf. bei anderer Gelegenheit zu geben verspricht. Sk.

T. KARIYA. On some paradoxon in probability. Tôhoku Math. J. **3**, 165-166.

Die üblichen Lösungen der Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeiten führen vielfach, je nach dem Lösungswege, auf verschiedene Ergebnisse. So wird bekanntlich die Wahrscheinlichkeit, daß eine beliebige Sehne eines Kreises größer ist als die Seite des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks, je nach Ansatz $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{4}$. Verf. glaubt den Irrtum der ersten Schlußweise dartun zu können. Sk.

I. L. CSADA. Quistione 802. Periodico di Mat. (3) **10**, 285-288.

Die von F. Verde gestellte Aufgabe lautet: „Unter wahrscheinlichem Ausdruck E_f einer Funktion $f(x)$ in bezug auf ein gegebenes Dreieck verstehe ich einen solchen, der die Wahrscheinlichkeit mißt, ein anderes Dreieck mit den Dreiecksseiten $f(p), f(q), f(r)$ zu bilden, wo p, q, r die von einem beliebigen Punkte innerhalb des Dreiecks auf seine Seiten gefällten Lote sind. Lemoine hat den Fall $f(x) = x$ untersucht und hat

$$E_f = \frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

gefunden. Ich selbst habe (Batt. G. **32**, 358-363, 1894) den Fall erledigt, wo $f(x) = x + k$. Es soll der Fall $f(x) = x^2$ erforscht werden." Csada findet

$$E_f = \frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

$$-\left[\frac{(a+b+c)\,abc}{(b+c)(c+a)(a+b)} \cdot \Sigma \frac{a+b}{\delta_c} + abc\,\frac{1}{\delta_c\sqrt{\delta_c}} \log \frac{a+b+c-\sqrt{\delta_c}}{a+b+c+\sqrt{\delta_c}}\right],$$

wo $\delta_a = -a^2 + b^2 + c^2$, $\delta_b = a^2 - b^2 + c^2$, $\delta_c = a^2 + b^2 - c^2$. Lp.

L. Bachelier. Les probabilités cinématiques et dynamiques. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **30**, 77-119.

Wie man eine Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten ausgebaut hat, so gehen die Bestrebungen des Verf. darauf aus, ähnliche Betrachtungen auf die Mechanik auszudehnen und damit eine Theorie der mechanischen Wahrscheinlichkeiten anzubahnen. Die Vorarbeiten hierzu sind zu finden in seinen größeren Abhandlungen: „Théorie des probabilités continues" (Journ. de Math. (6) **2**, 259-327; F. d. M. **37**, 266, 1906); „Étude sur la probabilité des causes" (Journ. de Math. (6) **4**, 395-425; F. d. M. **39**, 286, 1908); „Les probabilités à plusieurs variables" (Ann. de l'Éc. Norm. (3) **27**, 339-360; F. d. M. **41**, 256, 1910). Eine Probe der hierher zu rechnenden Aufgaben hat er gegeben in der Note: „Mouvement d'un point ou d'un système matériel soumis à l'action de forces dépendant du hasard" (C. R. **151**, 852-855; F. d. M. **41**, 790, 1910).

„Eine Aufgabe gehört zu den dynamischen Wahrscheinlichkeiten, wenn sie darin besteht, die Bewegung eines Punktes oder eines Massensystems zu erforschen, falls die diesen Punkt oder dieses System angreifenden Kräfte insgesamt oder teilweise vom Zufall abhängen." Folgende Aufgaben werden behandelt:

Ein geometrischer Punkt M besitzt eine Geschwindigkeit v, deren Größe konstant ist und deren Richtung beständig willkürlich sich ändert. Die Bewegung von M wird auf drei durch die Anfangslage gehende rechtwinklige Achsen bezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach Verlauf der Zeit t der betrachtete Punkt die Koordinaten x, y, z hat? — Ein im Raume beweglicher Punkt M wird von einem festen Punkte O proportional der Entfernung angezogen. Unabhängig von der aus dieser Anziehung folgenden Bewegung erhält der Punkt beständig eine Geschwindigkeit v, deren Größe konstant ist und deren Richtung willkürlich wechselt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Punkt nach Verlauf der Zeit t eine gegebene Lage hat? — Endlich wird die Bewegung eines Massenpunktes unter der Einwirkung einer Kraft von konstanter Größe betrachtet, deren Richtung fortwährend willkürlich wechselt. Die Hauptfragen hierbei sind: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zur Zeit t der Massenpunkt eine gegebene Geschwindigkeit besitzt? Oder daß er dann eine gegebene Lage hat? Oder daß er sowohl eine gegebene Lage, als auch eine gegebene Geschwindigkeit hat? Oder daß er bei einer Bewegung in einem widerstehenden Medium bei einem der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand eine gegebene Geschwindigkeit hat? Da diese Aufgaben gewisse Schwierigkeiten darbieten, werden der Reihe nach die Fälle der Bewegung in einem Raume von 1, 2 und 3 Dimensionen behandelt.

Von den Aufgaben aus der Mechanik der Systeme wird nur der Fall eines ebenen festen Körpers betrachtet, der sich um einen festen, ihm angehörigen Punkt dreht und anfänglich eine Winkelgeschwindigkeit w_0 besitzt. Eine gewisse Anzahl von Kräften, deren Richtungen willkürlich sich ändern, greifen an gegebenen Punkten des Körpers an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er zur Zeit t zum ersten Male unbewegt ist? Die Aufgabe wird zuerst als reibungslos behandelt, danach als mit Reibung behaftet.

Über solche Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung sagt J. Bertrand: „Unendlich ist keine Zahl, man darf es nicht ohne Erläuterung in die Schlußfolgerungen einbeziehen. Auf gut Glück (au hasard) zwischen einer Anzahl möglicher Fälle wählen, ist keine genügende Angabe." Aus diesem Grunde bemerkt der Verf. denn auch in der Einleitung: „Alle Aufgaben, die große Zahlen nach sich ziehen, müssen auf eine einzige Form gebracht werden,

die es ermöglicht, die besonderen, sie kennzeichnenden Eigenschaften und die allgemeinen, sie umfassenden Charaktere zu erfassen." Aus der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten ist es bekannt, daß man bei Außerachtlassung dieser Vorsichtsregel für eine gegebene Frage ganz verschiedene Antworten erhält. Lp.

J. F. de Sousa Pinto. Noções de calculo das probabilidades para o estabelecimento das bases da estatistica. Ann. Ac. Pol. Porto **8**, 43-64, 83-106.

Der Artikel enthält im ersten Teil die grundlegenden Sätze der niederen Wahrscheinlichkeitslehre, im zweiten die Ableitung der Hauptformeln der Fehlertheorie. Lp.

P. Mansion. Sur les recherches de Laplace relatives à la théorie des erreurs. Brux. S. sc. **37** (B), 107-117. Goedseels. Rapport. Brux. S. sc. **37** (A), 67-79.

Die Untersuchungen beziehen sich auf die Methode der Bestimmung des Fehlers, auf die der Lage und auf die der kleinsten Quadrate (Laplace, Buch III u. II der Mécanique celeste. — Théorie analytique des probabilités, 3e éd. 1820, p. 343; Chap. IV nos. 20, 21; deuxième suppl. 1818, p. 30-50). [Rev. sem. $\mathbf{21}_2$, 15.] Lp.

R. Suppantschitsch. Zur Axiomatik der Methode der kleinsten Quadrate. Wien. Ber. **122**, 3-34.

Nachdem die Forderungen über die Gruppe normaler Beobachtungsresultate genau formuliert sind (§ 2), wird unter Einschränkung der möglichen Bestimmungen durch neue Forderungen, wodurch die Anzahl der Postulate auf fünf steigt, der erste Beweis des Hauptsatzes geliefert (§ 3): „Werden unter den möglichen Bestimmungen von z $[z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, die eine Gruppe normaler Beobachtungsresultate ergibt, nur jene zugelassen, die von systematischen Fehlern frei sind und die unbekannte physische Größe nicht enthalten, so erscheint z in der Form $z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$, wo die Konstanten der Bedingung $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ unterliegen."

Bezüglich des eingeschlagenen Verfahrens sagt der Verf. in der Einleitung (§ 1): „Besonders klar hat A. A. Markoff die Methode der kleinsten Quadrate auf Postulate aufgebaut. Allein auch bei dieser Darstellung erscheint die Beschränkung auf lineare Funktionen der Beobachtungsresultate bloß bedingt durch die Vereinfachung, die sie der Rechnung verleiht. Hier tritt nun der Hauptsatz meiner Abhandlung ein, der zeigt, wie diese Forderung mit den Postulaten zusammenhängt. Markoff benutzt zwar einen ähnlichen Gedanken, ohne Beweis und ohne scharfe Betonung seiner Tragweite; doch aus den Postulaten Markoffs allein folgt der Hauptsatz überhaupt nicht.... Einen Versuch, die Beschränkung auf lineare Funktionen der Beobachtungswerte aus einfacheren Annahmen zu beweisen, konnte ich bloß bei Ch. A. Vogler finden. Eine wesentliche Voraussetzung dieses Versuches ist aber die Annahme sehr kleiner Fehler, außerdem solcher Einschränkungen der benutzten Funktionen, daß man meines Erachtens ebensogut die lineare Funktion der Beobachtungswerte selbst sofort ansetzen könnte."

Nach Beendigung des ersten Beweises dieses Hauptsatzes folgt nach einer zweiten Definition der Gruppe normaler Beobachtungsresultate der zweite Beweis, und in den hinzugefügten axiomatischen Bemerkungen wird dann noch die Widerspruchslosigkeit des Axiomensystems gezeigt. Die letzten Paragraphen behandeln die Ausgleichung direkter Beobachtungen und die der vermittelnden Beobachtungen. Lp.

E. L. Dodd. The error-risk of certain functions of the measurements. Monatsh. f. Math. **24**, 268-276; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 223-224.

Das Fehlerrisiko des arithmetischen Mittels M der Beobachtungen m ist unter der Voraussetzung des Gaußschen Fehlergesetzes nach Czuber kleiner als das Fehlerrisiko irgendeiner anderen Funktion, die von dem wahren Werte unabhängig ist. Verf. betrachtet einige Funktionen, die vom wahren Werte in gewisser Weise abhängig sind, bei denen unter Umständen das Fehlerrisiko kleiner ist als das des arithmetischen Mittels. Ist insbesondere $1 > b > 1 - \frac{2}{2h^2 a^2 + 1}$, wo a den wahren Wert und h das Präzisionsmaß bedeutet, so ist der wahrscheinliche Wert des Quadrats der Fehler von bm kleiner als der wahrscheinliche Wert des Quadrats des Fehlers von m; für andere Intervalle wieder wird der wahrscheinliche Wert des absoluten Fehlers von bm kleiner als für m, der wahrscheinlichste Wert der k-ten Potenz des Fehlers von bm kleiner als der w. W. der k-ten Potenz des Fehlers von m, u. s. f. Dabei ist stets das Gaußsche Fehlergesetz vorausgesetzt. Sk.

E. L. Dodd. The probability of the arithmetic mean compared with that of certain other functions of the measurements. Annals of Math. (2) **14**, 186-198; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 500.

Die Annahme des arithmetischen Mittels als des wahrscheinlichsten Wertes einer Messung ist, wie schon Bertrand (Calcul des probabilités S. 180 [1889]) an einem Beispiel gezeigt hatte, unter Umständen mit dem Gaußschen Fehlergesetz nicht vereinbar. Die vorliegende Arbeit, die eine große Reihe von Funktionen der Beobachtungen auf ihre Wahrscheinlichkeit hin untersucht (die Quadratwurzel aus dem arithmetischen Mittel ihrer Quadrate, den Wert der mittleren Messung, das geometrische Mittel u. a. m.), gibt weitere Beispiele solcher Funktionen, deren Wahrscheinlichkeit größer ist als die des arithmetischen Mittels. Sk.

E. L. Dodd. An erroneous application of Bayes' theorem to the set of real numbers. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 290-291, 479-482.

Es wird gezeigt, durch welchen Gedankengang ein Zusammenhang zwischen dem Theorem von Bayes und dem Gaußschen Fehlergesetz hergestellt wird. Hierbei wird ein von Poincaré erhobener Einwand zurückgewiesen. Die wesentliche Schwierigkeit erblickt der Verf. in dem Umstande, daß die Menge der reellen Zahlen unbegrenzt ist. Lp.

R. A. Sampson. On the law of distribution of errors. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 163-173.

Durch eine kritische Prüfung der Grundlagen des Fehlergesetzes kommt der Verf. zu folgendem Ergebnis: „Die Regel der kleinsten Quadrate muß als eine Lösung aus einer unbegrenzten Anzahl berechtigter Lösungen angesehen werden, oder wenn wir die Lösungen durch endliche Schritte trennen, eine aus einer endlichen Anzahl, die alle in Wirklichkeit regelmäßig vorkommen. Unter diesen Lösungen ist die Lösung der kleinsten Quadrate der Fall, der tatsächlich häufiger vorkommt als irgend ein anderer individueller Fall. Aber es gibt durchaus nichts, was nachwiese, daß er das Geschehnis oder den individuellen Fall darstellt, den wir brauchen, selbst nicht, daß er häufiger vorkommt als einer aus der Gesamtheit der beiseite gelassenen möglichen Fälle.“ Lp.

L. Carnera. Osservazioni sul calcolo degli errori medii. Torino Atti **48**, 815-821.

Bezüglich der Note von O. Meißner (F. d. M. **43**, 298, 1912) über einen Fehlschluß bei der Ableitung des mittleren Fehlers bemerkt der Verf., die Sache sei an sich offensichtig; es hätte aber auf scharfe und strenge Art aufgeklärt werden müssen, wie die beregte Verschiedenheit der Ergebnisse dargetan werden könnte durch das Aufspüren der wahren Ursache. Dies leistet und erläutert er an dem Zahlenbeispiel von Meißner. Lp.

C. Mineo. Su una nuova deduzione della legge di frequenza degli errori. Zs. f. Math. u. Phys. **61**, 403-415.

Die neue Ableitung stützt sich auf die folgenden drei Postulate: I. Wie auch immer der Inbegriff der Fehlerquellen beschaffen sei, die auf die Beobachtungen Einfluß haben, so darf man annehmen, daß der Fehler, der bei dem Messen einer gegebenen physikalischen Größe gemacht wird, alle in dem Intervalle $(-\alpha, \beta)$ gelegenen Werte annehmen kann, wo α und β zwei positive Zahlen sind, und daß für eine gewisse Klasse physikalischer Messungen seine relative Häufigkeit eine Funktion $\varphi(x)$ ist, die 1. in dem ganzen Intervall $(-\alpha, \beta)$ in eine Taylorsche Reihe entwickelbar ist, 2. eine gewisse Anzahl für das gegebene System von Beobachtungen charakteristischer Parameter enthält, 3. in jedem der Intervallchen $(-x-\eta, -\alpha+\eta)$, $(\beta-\eta, \beta+\eta)$, wo η eine hinreichend kleine positive Zahl ist, auf Null gehalten werden kann, 4. endlich die Bedingung $\int_{-\alpha}^{\beta}\varphi(x)dx = 1$ erfüllt. II. Die Wahrscheinlichkeit $\varphi(x)dx$, daß ein Fehler x zwischen x und $x + dx$ liegt, ist unabhängig von der Maßeinheit, in welcher der Fehler ausgedrückt ist. III. Wenn eine virtuelle Fehlerquelle vorkommt, so unterliegen die Parameter der Funktion φ sehr kleinen Änderungen derart, daß die relative Häufigkeit des Fehlers z, des höchsten Betrages des Fehlers x, der von dem Inbegriff der vorigen Quellen herrührt, und des Fehlers y, der von der neuen Quelle herrührt, in $\varphi(z) + \delta\varphi(z)$ dargestellt erscheint, wo $\delta\varphi(z)$ der Zuwachs erster Ordnung von $\varphi(z)$ ist, der den Zunahmen der Parameter entspricht. Vgl. Story, F. d. M. **35**, 238, 1904. Lp.

L. v. Schrutka. Eine vektoranalytische Interpretation der Formeln der Ausgleichungsrechnung, nach der Methode der kleinsten Quadrate. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **21**, 293-296.

Die Formeln der Ausgleichungsrechnung lassen eine einfache geometrische Deutung zu. Jhk.

W. F. Sheppard. Calculation of moments of an abrupt frequency-distribution. Proc. 5. Intern. Math.-Congr. **2**, 414-426.

„Die Formeln, die für die Berechnung der Momente einer Häufigkeitsverteilung angenommen werden, oder allgemeiner eines Trapezes, in bezug auf welches unsere Daten nicht Ordinaten sind, sondern Flächeninhalte von Streifen, sind nicht immer genau. Die Formel für den Fall, in welchem die Figur „doppelschwänzig ist, d. h. an beiden Enden engen Anschluß an die Basis hat, ist ganz gut bekannt. Die zu betrachtenden Fälle sind solche, bei denen die Figur an dem einen Ende oder an allen beiden abreißt, d. h. jedes schließt mit einer Ordinate, die nicht Null ist, oder bildet einen Winkel zwischen dem oberen Ende und der Basis". Wie aus dieser Einleitung zu ersehen ist, handelt es sich im wesentlichen um mechanische Quadraturen, für welche Formeln und Vorschriften zur praktischen Auswertung entwickelt werden. Lp.

K. Weigel. Über die Behandlung der Fehlergleichungen, deren Koeffizienten bei den Unbekannten nicht fehlerfrei sind. Österr. Zs. f. Vermessw. **11**, 297-304.

Die Fehler der Koeffizienten können davon herrühren, daß sie Beobachtungsresultate sind, oder davon, daß für nichtlineare Funktionen lineare Näherungen eingeführt werden. Im ersten Fall ist es notwendig, gewisse Gewichte für die Fehlergleichungen einzuführen, im zweiten müssen die Glieder höherer Ordnung nach und nach berücksichtigt werden. Dieser zweite Fall ist jedoch praktisch fast ohne Bedeutung. Als Beispiel für den ersten wird die Ermittlung des wahrscheinlichsten Halbmessers eines im Felde abgesteckten Kreisbogens behandelt. Schr.

G. Grigercsik. Das Stabilitätsprinzip in der Ausgleichungsrechnung. Österr. Zs. f. Vermessw. **11**, 234-239.

„Die Ausgleichung ist stabil, wenn das willkürliche Rechnungssystem keinen Einfluß auf die objektive Bedeutung des Resultates hat." Unter Rechnungssystem wird der Anfangspunkt und der Maßstab für die Zählung verstanden. Doch wird an andere als lineare Transformationen nicht gedacht. Schr.

S. Wellisch. Ein interessanter Fall der Ausscheidung von Beobachtungen. Österr. Zs. f. Vermessw. **11**, 142-146.

Besprechung einer von S t a m p f e r im 20. Band der Jahrbücher des k. k. polytechnischen Institutes in Wien, 1839, ausgeführten Ausgleichung. Schr.

Alf. Basch. Über eine Anwendung der graphostatischen Methode auf den Ausgleich von Beobachtungsergebnissen. Österr. Zs. f. Vermessw. **11**, 11-18, 42-46.

Abdruck der Arbeit in den „Mitteilungen des k. k. technischen Versuchsamtes **1**" (F. d. M. **43**, 300, 1912). Schr.

L. Zivy et A. Sainte-Laguë. Mesure des erreurs relatives à la règle à calcul. Revue de Math. spéc. **23**, 113-114.

An einem Zahlenbeispiel wird gezeigt, wie man den Rechenschieber in der Ausgleichungsrechnung zur Bestimmung des relativen Fehlers einer Messung benutzen kann. Sk.

L. Schott. Statistik. Leipzig: B. G. Teubner. 130 S. 8°. (Aus Natur u. Geisteswelt Nr. 442.)

Das Büchlein belehrt in sehr ansprechender Weise über das Wesen und die Aufgabe der Statistik, ihre Arbeitsmethoden und ihre Anwendungsgebiete. Da mathematische Kenntnisse nicht vorausgesetzt werden, wird die mathematische Behandlung statistischer Ergebnisse nur ganz kurz gestreift. Eine Zeittafel enthält die wichtigsten Daten, ein literarischer Anhang gibt eine dankenswerte Auswahl aus der für den Laien sonst unübersehbaren Literatur. Sk.

F. Bernstein. Beiträge zur mathematischen Statistik. I. Zur Methodik der Bearbeitung von unvollkommenem Material. Gött. Nachr. 1913, 84-98.

In einem konkreten Falle hatte der Verf. die Frage zu untersuchen: Bewirkt die sogenannte Selektion, d. h. die Zurückweisung der nach ärztlicher Untersuchung minder Gesunden von der Aufnahme in eine Kasse wenigstens für die erste Zeit eine verminderte Erkrankungswahrscheinlichkeit? Die Frage wird entgegen den bisherigen Annahmen auf Grund einer nicht kurz wiederzugebenden analytischen Entwicklung verneint. Sk.

F. Y. Edgeworth. A method of representing statistics by analytical geometry. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 427-440.

„Die Statistik, deren Abbildung hier versucht wird, ist von einer Art, die gewöhnlich in der Biologie, Soziologie und anderen statistischen Wissenschaften vorkommt. Dieser allgemeine Typus wird durch einfache Häufigkeitskurven gekennzeichnet, so daß die Abszisse die Größe oder das Attribut eines Dinges bezeichnet, die Ordinate die Häufigkeit jeder Größe; die Ordinate hat nur ein Maximum und wird Null an jedem Ende. Die vorgeschlagene Methode ist die Entwicklung derjenigen, die der Verf. unter dem Titel „Method of translation" auseinandergesetzt hat im Journal of the Royal Statistical Society 1898, 1899, 1900. Die Methode besteht in der Transformation einer (Gaußschen) normalen Fehlerkurve, indem man für jede der nach einem solchen Gesetz aufge-

stellten Größen irgendeine vorgegebene Funktion jener Größe einsetzt. Wenn, wie das gewöhnlich der Fall ist, der Ursprung, von dem aus die zu verwandelnden Größen gemessen werden, ganz außerhalb der merkbaren Fläche der Normalkurve liegt, die zu „verschieben" ist, z. B. in eine Entfernung von dem Zentrum der Normalkurve um mehr als das Doppelte ihres Modulus, oder das Dreifache ihrer normalen Abweichung, dann teilen alle Punkte auf der Abszisse der transformierten Kurve $P, Q, R, \ldots$ ihren Flächeninhalt in dieselben Teile, wie die entsprechenden Punkte $p, q, r, \ldots$ der erzeugenden Normalkurve." Die fortwährende Verweisungen des Verf. auf die bezüglichen Schriften von Pearson und auf seine eigenen Veröffentlichungen sowie die von Sheppard erschweren das Verständnis in solchem Grade, daß ein näheres Eingehen auf den Inhalt unmöglich wird. Lp.

L. von Bortkiewicz. Die radioaktive Strahlung als Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen. Berlin: J. Springer. 84 S. gr. 8°.

Verf. sucht zu zeigen, wie die Bearbeitung des Zahlenmaterials, das über die Schwankungen in der radioaktiven Strahlung angesammelt ist, möglichst korrekt im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung durchgeführt werden kann. Er beginnt mit der Ableitung des Verteilungsgesetzes für die Zeitabstände aufeinanderfolgender Szintillationen und zeigt, wie man es an der Erfahrung prüfen kann. Zuzweit wird das Verteilungsgesetz hergeleitet, das für die Zahl der Szintillationen in einer bestimmten Zeit gilt, und die Ergebnisse der Untersuchung werden auf eine entsprechende Versuchsreihe angewandt. Endlich wird der mathematische Ansatz, der bisher ganz allgemein gehalten war, dem besonderen Vorgang der radioaktiven Strahlung genauer angepaßt. Nach der Zerfalltheorie wird jede Szintillation durch ein α-Teilchen bewirkt, das bei dem Zerfall eines Atoms des radioaktiven Stoffes ausgesandt wird. Dabei kommt man von selbst auf das Schweidlersche Gesetz, welches das theoretische Maß der Schwankungen der radioaktiven Strahlung darstellt, das übrigens, wie der Verf. betont, das übliche längst bekannte Schwankungsmaß ist. Zum Schluß wird die Anwendbarkeit der benutzten Kriterien für die normale Dispersion in Fällen gezeigt, wo es sich um die räumliche Verteilung gewisser Erscheinungen handelt, insbesondere bei kolloidalen Lösungen. Sk.

W. F. Sheppard. Reduction of errors by means of negligible differences. Proc. 5. Intern. Math.-Congr. 2, 348-384.

„Die von den Versicherungstechnikern angewandte sogenannte „Graduierung" besteht darin, daß jedes Glied einer Folge durch das mit einem Gewicht versehene Mittel aus einer Anzahl von Gliedern ersetzt wird, so daß dadurch für benachbarte Fehler von entgegengesetzten Vorzeichen die Gelegenheit herbeigeführt wird, sich gegenseitig auszugleichen. Dieses Vorgehen ist nicht gerechtfertigt, wofern nicht der Unterschied zwischen dem ursprünglichen und dem eingesetzten Glied ein solcher ist, der vernachlässigbar sein würde, wenn die ursprünglichen Glieder nicht Fehler enthielten. Die zugrunde liegende Annahme ist also, daß Differenzen von den wahren Werten über eine gewisse Ordnung

hinaus vernachlässigbar sind, und das Ersetzen ist nur berechtigt, wenn der so eingeführte Fehler in Gliedern mit diesen vernachlässigten Differenzen auszudrücken ist.

In gleicher Weise schließt die Existenz wahlfreier Formeln für die Quadratur usw. die Überlegung ein, daß die Differenz zwischen zwei Formeln vernachlässigbare Differenzen von den Gliedern der richtigen Folge darstellt. Umgekehrt kann jede Formel, die eine Größe durch eine lineare Funktion eines Systems von Gliedern einer Folge ausdrückt, innerhalb gewisser Grenzen durch die Hinzufügung von Gliedern abgeändert werden, welche die vernachlässigbaren Differenzen darstellen. Das hinzugefügte Stück wird willkürliche Konstanten enthalten, und man kann diese so wählen, daß sie das beste Ergebnis für die neue Formel liefern.

Zum Vergleiche der Güte ist ein Kennzeichen erforderlich. Wir nehmen das mittlere Quadrat des Fehlers als ein solches; die Aufgabe ist also, die Werte der Koeffizienten zu finden, wenn das mittlere Fehlerquadrat des gesamten Ausdruckes ein Kleinstes ist. Es ist nicht möglich, für den allgemeinen Fall mehr als eine formale Lösung zu geben; für die Normalklasse von Fällen jedoch, bei denen die Fehler der Glieder der Folge unabhängig und alle in gleicher Weise veränderlich sind, wird die Lösung explizit in Gliedern zentraler Differenzen bestehen.

Die Methode unterscheidet sich in wesentlichen Einzelheiten von der Methode der kleinsten Quadrate und der Methode der Momente; es ergibt sich jedoch, daß sie für manche Aufgaben dieselben Resultate liefert, die nach jenen Methoden folgen würden. Die erhaltenen Formeln können deshalb so angesehen werden, als ob sie (für die Normalklasse von Fällen) eine allgemeine Lösung der Gleichungen, die in diesen Methoden entstehen, in Gliedern zentraler Differenzen geben. Die Methode wird auf besondere Klassen von Fällen ausgedehnt, bei denen die Fehler nicht unabhängig oder nicht alle in gleicher Weise veränderlich sind.“

Mit dieser Wiedergabe der vom Verf. selbst an die Spitze seines langen Vortrages gestellten allgemeinen Gedanken müssen wir uns begnügen; das Eingehen auf die vielen technischen Einzelheiten verbietet sich von selbst. Lp.

A. Quiquet. Sur une méthode d'interpolation exposée par Henri Poincaré, et sur une application possible aux fonctions de survie d'ordre n. Proc. 5. Intern. Math.-Congr. **2**, 385-388.

Der Verf. dieser Note, der die Vorlesungen Poincarés über Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgearbeitet und als Calcul des probabilités in zwei Auflagen herausgegeben hat, stellt zunächst aus diesem Werke die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Untersuchung einer unbekannten Funktion $f(x)$ dar und zeigt dann, wie man das Verfahren auf die Untersuchung der Funktionen des Überlebens anwenden kann, d. h. der Funktionen, die analytisch die Anzahl $l(x)$ der Lebenden im Alter x für eine gegebene Zahl von Geburten oder für eine gegebene Zahl von Menschen darstellen, die zu einer und derselben Zeit ein bestimmtes Alter haben. Lp.

J. F. Steffensen. On the fitting of Makeham's curve to mortality observations. Proc. 5. Intern. Math.-Congr. **2**, 389-394.

Es handelt sich darum, die Konstanten der Formel $y_n = \alpha + \beta c^x$ aus einer gegebenen großen Anzahl von Beobachtungen so zu bestimmen, daß das Fehlerquadrat ein Kleinstes wird. Die dabei zu lösenden Gleichungen werden für c von sehr hohem Grade, und man hat verschiedene Wege zur praktischen Lösung vorgeschlagen und benutzt. Der Verf. hat ein neues Verfahren hierfür ersonnen, setzt dies zuerst in allgemeinen Zügen auseinander und erläutert es dann an einem der Wirklichkeit entnommenen Beispiel. Lp.

C. A. dell' Agnola. Della rendita vitalizie su n teste. Ven. Ist. Atti **72** [(8) **15**], 1203-1226.

Wird von einer Gruppe von n Personen eine Lebensversicherung abgeschlossen, so ist der Barwert der Einheitsrente, die nach dem Tode von $(n-k)$ Versicherten den k Überlebenden bis zum Tode des nächsten ausgezahlt wird, durch einen Ausdruck von der Form $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \cdots + \lambda_n Z_n$ gegeben, wobei die λ_i die Elemente der k-ten Spalte der Determinante n-ter Ordnung

$$\left| (-1)^{r+s} \binom{r}{s} \right| \quad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

bedeuten. Die Z_i sind die Elementarrenten, und zwar ist

$$Z_i = \sum A_{x_{p_1} x_{p_2} \ldots x_{p_i}},$$

wobei $A_{x_1, \ldots, x_p}$ die Einheitsrente einer Gruppe von p Personen im Alter von $x_1, \ldots, x_p$ Jahren bedeutet, welche mit dem Tode eines der Versicherten erlischt. Sk.

J. H. Peek. On the application of the calculus of probabilities in calculating the amount of securities and in utilising statistical data for the sake of classification of legal accident-insurance risks in the practice of the Dutch State Insurance Office. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 395-407.

Die holländischen Gesetze über Unfallversicherung gestatten den Unternehmern, unter gewissen Beschränkungen die Versicherung nach den Voraussetzungen jener Gesetze selbst zu übernehmen. Eine der zu erfüllenden Bedingungen ist, daß die „Rijksverzekeringsbank" von dem Versicherer eine gewisse Summe als Sicherung für die aus der Beobachtung des Gesetzes entspringenden Verpflichtungen erhält. Es ist für wünschenswert erachtet worden, diese Sicherungen als einen Bruchteil des durchschnittlichen Nettowertes der wahrscheinlichen Belastung festzusetzen, die aus zu erwartenden Unfällen im Jahr unter den gefährdeten Arbeitern sich ergibt, vermehrt um ein solches Vielfaches der mittleren Abweichung von jener Belastung, daß größere Abweichungen eine geringere Wahrscheinlichkeit haben als eine vorgegebene. Daraus entstehen zwei Aufgaben: 1. Die Bestimmung der mittleren Abweichung von dem

oben bezeichneten Nettowert, 2. die des Gesetzes bezüglich der Verteilung der Abweichungen. Die Lösungen beider Aufgaben werden aus einem umfangreichen amtlichen Bericht von 1902 mitgeteilt. Lp.

R. R. BRODIE. Notes upon the curves of certain functions involving compound interest and mortality. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 408-413.

„Zwei Kräfte wirken auf den Reservewert, der von Jahr zu Jahr entsteht; nämlich der Zinseszins strebt, den Betrag zu vergrößern, die Sterblichkeit dagegen, ihn zu verkleinern, und der Fortgang des Betrages hängt von der gegenseitigen Stärke dieser Kräfte ab. Gegenstand der Note ist, die schließliche Wirkung dieser beiden Kräfte auf die von einem solchen Betrage erzeugte Kurve nachzuweisen.“ Lp.

L. AMOROSO. Analogie tra i fenomeni statistico-economici e i fenomeni meccanici. Rom. Acc. L. Rend. (5) **22**$_2$, 552-557.

Verf. hatte schon früher, angeregt durch den „Cours d'Économie politique“ von Pareto (Lausanne 1897), die Erscheinungen der Mechanik und der wirtschaftlichen Erscheinungen in Parallele gesetzt (F. d. M. **42**, 257, 1911). In der vorliegenden Note werden diese Versuche wieder aufgenommen und fortgesetzt. Sk.

L. AMOROSO. I caratteri matematici della scienza economica. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 347.

Kurze Andeutungen über die Aufstellung einer partiellen Differentialgleichung, die sich auf die Verteilung des Einkommens bezieht. Lp.

R. A. LEHFELDT. Equilibrium and disturbance in the distribution of wealth. Proc. 5. Intern. Math.-Congr. **2**, 343-346.

„Man hat gesagt, das Element der Zeit sei der Mittelpunkt der Schwierigkeit bei volkswirtschaftlichen Problemen. Das Folgende ist ein Versuch zu einer Methode, diese Zeitbeziehungen in mathematischer Form auszudrücken, so daß sie mit der Klarheit erfaßt werden können, welche stets mit der Sprache der Mathematik verbunden ist.“ Für den an äußerste Schärfe gewöhnten Mathematiker dürften die etwas unbestimmten Annahmen des Verf. wohl nicht als klare Daten für Rechnungen gelten. Lp.

A. VOIGT. Mathematische Theorie des Tarifwesens. Deutsche Math.-Ver. **22**, 127-135.

Der Vortrag bezweckt, die Mathematiker auf ein vernachlässigtes Gebiet der politischen Arithmetik aufmerksam zu machen: auf die Herstellung gerechter Preis- und Steuertarife. Daß diese bisher eine Fülle von Willkürlichkeiten und Unbilligkeiten aufweisen, zeigt der Verf. an zwei Beispielen: dem ungarischen

Eisenbahntarif (Zonentarif) und dem Einkommensteuertarif in Preußen. Wie solche Unbilligkeiten zu vermeiden sind, hat Verf. in seiner „Mathematischen Theorie des Tarifwesens" (Jena 1912) ausführlich dargelegt. Sk.

A. de' Stefani. Velocità e giacenze delle monete. Analisi dei due concetti. Ven. Ist. Atti **72** [(8)] **15**], 957-969.

A. de' Stefani. Velocità e giacenze delle monete. Caratteristiche notevoli. Ven. Ist. Atti **72** [(8), **15**], 1191-1201.

Nachdem der Verf. auf die Vieldeutigkeit und Verschwommenheit des Begriffs Geschwindigkeit hingewiesen hat, betont er insbesondere, daß die Geschwindigkeit des Geldumlaufs nur entfernte Verwandtschaft mit dem kinematischen Geschwindigkeitsbegriff aufweist. Als Umlaufsgeschwindigkeit im geldwirtschaftlichen Sinne versteht er die Anzahl v der Besitzwechsel der Werteinheit in der Zeiteinheit. Die Zeit zwischen zwei Besitzwechseln heißt ein Besitzintervall (intervallo di possesso), das arithmetische Mittel dieser Intervalle nennt der Verf. die Ruhezeit (giacenza) des Geldes. Die weiteren Folgerungen, die aus diesen gleich von vornherein scharf definierten Begriffen gezogen werden, sind mathematisch durchaus elementarer Natur und wesentlich von volkswirtschaftlichem Interesse. Sk.

A. O. Holwerda. Frequentiecurven. (Frequenzkurven.) Culemborg: Brom & Olivierse. Diss. Utrecht. 204 S. 8⁰.

Der Verf. gibt eine Übersicht über die Momentenmethode und über die Untersuchungen der Pearsonschen Schule. Daran schließt sich eine Besprechung der wichtigsten Kurven, die in den letzten Jahren abgeleitet sind, und eine eingehende Behandlung der Pearsonschen Kurven. Schn.

J. Brownlee. On inheritance of hair and eye colour. Edinb. Roy. Soc. Proc. **32**, 458-474.

Analyse einiger vom verstorbenen Beddoe gemachten Beobachtungen. Die Mendelschen Gesetze sind in bemerkenswertem Grad erfüllt. J.

Weitere Literatur.

W. S. Andrews and H. A. Sayles. Magic squares made with prime numbers to have the lowest possible summations. Monist **23**, 623-630.

H. A. Sayles. Geometric magic squares and cubes. Monist **23**, 631-640.

E. Barbette. Sur les carrés panmagiques. Paris: Gauthier-Villars. 32 S. 8⁰.

W. H. Bussey. The tactical problem of Steiner. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 62.

B. Portier. Sur les panmagiques de module 8, à grilles. Exposition pratique. Paris: Gauthier-Villars. 4 S. 8⁰.

B. H. Rau. A card trick. Indian Math. Soc. J. **5**, 15-16.
Erklärung eines Kunststücks mit einem Paket von Spielkarten. Lp.

D. E. Smith and certain Students of Teachers' College. Number games and number rhymes. Teachers' College Record **13**, Nr. 5. 111 S. 8° (1912).
Anzeige in Arch. d. Math. u. Phys. (3) **23**, 360 von H. Wieleitner.

K. Szily jr. Untersuchungen aus dem Gebiete der elementaren Zahlentheorie. Math. és phys. lapok **22**, 25-39, 323-351. (Ungarisch.)
„Die behandelten Fragen gehören mehr in die Kombinatorik." Rev. sem. **22**$_2$, 105.

J. L. Coolidge. Two geometric applications of the method of least squares. Amer. Math. Monthly **20**, 187-190.
Schnittpunkt vieler Geraden, Gerade durch viele Punkte. Lp.

F. Corridore. Considerazioni intorno al calcolo delle probabilità, con riguardo alla media. Roma: Manuzio. 20 S. 8°.

F. Corridore. Degli errori di osservazione e del termine centrale. Roma: Manuzio. 86 S. 8°.

F. Čuřík. Gesetz der linearen Fehlerfunktion. Časopis **42**, 545-549. (Böhmisch.)

E. L. Dodd. The validity of Bertrand's approximations leading to the probability integral. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 291-292.

E. L. Dodd. The probability integral deduced by means of developments in finite forms. Amer. Math. Monthly **20**, 123-127.

E. L. Dodd. The arithmetic mean as approximately the most probable value a posteriori under the Gaussian law. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 73.

A. S. Eddington. On a formula for correcting statistics for the effect of a known probable error of observation. Monthly Notices **73**, 359-360.

P. Mansion. Sur les recherches de Laplace relatives à la théorie des erreurs. Mathesis (4) **3**, Suppl. I, 11 S.

A. Markov. Die Zweijahrhundertfeier des Gesetzes der großen Zahlen (1713 bis 1913). Beweis des zweiten Grenzsatzes der Theorie der Wahrscheinlichkeiten durch die Momentenmethode. Nachtrag zur dritten russischen Auflage der Wahrscheinlichkeitsrechnung. St. Petersburg. IV + 66 S. 8°. (Russisch.)

A. A. Markov. Versuche einer statistischen Untersuchung über den Text des Romans „Eugen Onegin" zur Beleuchtung des Zusammenhanges der Kettenversuche. St. Petersb. Bull. 1913, Nr. 3, 153-162. (Russisch.)

J. F. Ritt. A control for least square solutions. Astr. Journ. **28**, 73-74.

C. Rodriguez. Sobre un problema de la teoría de los errores. Mexico Soc. cient. „Antonio Alzate" **31**, 1-28 (1912).

C. Rodriguez. La compensación de los errores al punto de vista geometrico. Tacubayo Bol. obs. astr. **3**, 89-93.

R. M. Stewart. The fundamental principle of least squares. Canada Roy. Astr. Soc. Journ. **7**, 359-362.

R. M. Stewart. A theorem in least squares. Ibid. 363-370.

A. Beckmann und H. Niebour. Tafeln zur Ermittlung der Invaliden- und Altersrenten. Neue Ausgabe. Berlin. IX + 230 S. 8°.

J. I. Craig. The periodogram and method of correlation. Brit. Ass. Rep. Dundee **82**, 416-418.

L. G. du Pasquier. Mathematische Theorie der Invaliditätsversicherung. Bern. XVII + 107 S.

O. Hinrichs. Tabellen zur Berechnung von Tagen, Zinszahlen und Zinsen. In deutscher, englischer, französischer, italienischer, russischer und spanischer Sprache. Essen: Literaturverlag. XXI + 188 S. 8°.

N. R. Jörgensen. Grundzüge einer Theorie der Lebensversicherung. Jena. X + 408 S. 8°.

W. L. King. Exercises in statistical method. Madison, Wis.: University Cooperative Association. 49 S. 8°.

H. Laurent. Théorie et pratique des assurances sur la vie. 2e édition. Paris: Gauthier-Villars. 176 S. 16mo.

F. A. Liernoit. La mathématique scientifique des courses. L'art de miser avec barêmes et progressions. Paris: Drubay. V + 91 S. 16mo.

A. Manes. Versicherungswesen. Zweite, umgearbeitete und erweiterte Auflage. Leipzig: B. G. Teubner. 8°.

A. Osorio. Théorie mathématique de l'échange. Traduit par J. d'Almada. Paris: Giard et Brière. XVIII + 395 S. 8°.

Pigier. Étude analytique sur les comptes courants et d'intérêts. Paris: Pigier. 31 S. 8°.

R. Risser. Application de l'équation de Volterra à divers problèmes d'assurances sur la vie. Ass. Franç. C. R. Tunis **42**, 66-67.

A. Schlimbach. Faktoren-Zusammenstellung zur politischen Arithmetik. Frankfurt a. M.: M. Diesterweg. 117 S. gr. 8°.

F. Schouten. Grondbeginselen der Levensverzekeringswiskunde. 2te Auflage. W. L. en J. Brusse, Rotterdam. 166 S. gr. 8°.

K. Simon. Ratenberechnungstafeln. Karlsruhe: G. Braunsche Hofbuchdruckerei. 131 S.

A. P. Violeine. Nouvelles tables pour les calculs d'intérêts composés, d'annuités et d'amortissements. 9e édition, entièrement refondue par A. Arnaudeau. Paris: Gauthier-Villars. 4°.

F. Zizek. Statistical averages; a methodological study. Authorized translation, with additional notes and references by W. M. Persons. New York: Holt. IX + 392 S. 12mo.

Fünfter Abschnitt.

Reihen.

Kapitel 1.

Allgemeines.

I. Schur. Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte. Math. Ann. **74**, 447-458.

Ist $x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine beliebige Zahlenfolge, und setzt man einerseits

$$h_n^{(1)} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \quad h_n^{(k)} = \frac{h_1^{(k-1)} + h_2^{(k-1)} + \cdots + h_n^{(k-1)}}{n},$$

andrerseits

$$s_n^{(1)} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad s_n^{(k)} = s_1^{(k-1)} + s_2^{(k-2)} + \cdots + s_n^{(k-1)} \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

so bezeichnet man die Zahlen $h_n^{(k)}$ als die Hölderschen und die Zahlen $c_n^{(k)} = \frac{s_n^{(k)}}{\binom{n+k-1}{k}}$ $\left(\text{oder auch } \frac{k!\, s_n^{(k)}}{n^k}\right)$ als die Cesàroschen Mittel k-ter Ordnung.

Aus $x_n \to \gamma$ folgt für jedes k sowohl $h_n^{(k)} \to \gamma$, als auch $c_n^{(k)} \to \gamma$, während aus der Existenz eines der letzteren Grenzwerte nichts auf das etwaige Vorhandensein von $\lim x_n$ geschlossen werden kann. Aber Knopp bewies (1907), daß aus $h_n^{(k)} \to \gamma$ (für ein bestimmtes k) stets $c_n^{(k)} \to \gamma$ (für dasselbe k) folgt. Schnee bewies (1909) auch das Umgekehrte (vgl. F. d. M. **40**, 304, 1909). Beide Beweise sind ziemlich kompliziert. Verf. gibt einen außerordentlich durchsichtigen Beweis für diese Tatsachen. K. K.

K. Knopp. Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit des Herrn I. Schur. Math. Ann. **74**, 459-461.

Der in der vorstehend besprochenen Arbeit gegebene Beweis stützt sich wesentlich auf die Tatsache: „Ist $\alpha > 0$, so folgt aus der Existenz von

$\lim \left[\alpha x_n + (1-\alpha)\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right]$ diejenige von $\lim x_n$ und (natürlich) die Gleichheit ihrer Werte."

Für diesen Satz wird ein fast jede Rechnung vermeidender unabhängiger Beweis gegeben. K. K.

E. Landau. Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwertes für Integrale. Leipz. Ber. **65**, 131-138.

Analog den Hölderschen und Cesàroschen Mittelwerten für Zahlenfolgen, wie sie im zweitvorhergehenden Referat genannt sind, treten in der Literatur auch die entsprechenden Mittelbildungen für Funktionen einer stetigen Veränderlichen auf: Es sei $f(x)$ für $x \geqq 0$ definiert und für $0 \leqq x \leqq c (c > 0)$ eigentlich integrabel; dann setzt man für $x > 0$, den Hölderschen Mitteln entsprechend:

$$h_0(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)du, \quad h_k(x) = \frac{1}{x}\int_0^x h_{k-1}(u)du$$

und, entsprechend den Cesàroschen:

$$s_0(x) = h_0(x), \quad s_k(x) = \int_0^x s_{k-1}(u)\,du, \quad c_k(x) = \frac{k!}{x^k} s_k(x),$$

während für $x = 0$ alle diese Funktionen gleich 0 gesetzt werden.

Dann gilt auch hier der Äquivalenzsatz: Ist $c_k(x) \to \gamma$ für ein bestimmtes k bei $x \to \infty$, so ist auch $h_k(x) \to \gamma$ (Analogon zum Satz von Schnee), und umgekehrt (Analogon zum Satz von Knopp). K. K.

O. Toeplitz, Über allgemeine lineare Mittelbildungen. Prace mat.-fiz. **22**, 113-119.

Ist die Folge (s_n) konvergent, so ist bekanntlich auch die Folge (t_n) der arithmetischen Mittel

$$t_p = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_p}{p} \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

konvergent und hat denselben Grenzwert, während das Umgekehrte nicht zu gelten braucht.

Setzt man in allgemeinerer Mittelbildung

$$t_p = a_{p1}\,s_1 + a_{p2}\,s_2 + \cdots + a_{p,n_p}\,s_{n_p},$$

so wird die Frage aufgeworfen: Wie muß die Matrix (a_{pq}) beschaffen sein, damit die Folge t_n für jede konvergente Folge (s_n) selbst konvergent ausfällt. Als notwendig ergibt sich sofort:

1. $\lim\limits_{p=\infty} (a_{p1} + a_{p2} + \cdots + a_{p,n_p}) = 1$, d. h. die Zeilensummen müssen den Limes 1 haben.

2. $\lim\limits_{p=\infty} a_{pq} = 0 \; (q = 1, 2, \ldots)$, d. h. die Kolonnenglieder müssen den Limes 0 haben. — Etwas tiefer liegt:

3. $\sum_q |a_{pq}| \leqq M$, $p = 1, 2, \ldots$, d. h. die Summen der Beträge der Zeilenglieder müssen beschränkt sein. — Und es zeigt sich nun, daß diese 3 Bedingungen auch stets hinreichend sind, um aus $\lim s_n = s$ auch $\lim t_n = s$ stets folgern zu können.

Mit Hülfe dieser Bedingungen läßt sich dann auch (wenigstens, falls stets $n_p = p$ und $a_{pp} \neq 0$) entscheiden, wann zwei verschiedene Mittelbildungen (a_{pq}) und (b_{pq}) dasselbe „Konvergenzfeld" besitzen, d. h. so beschaffen sind, daß $a_{p1} s_1 + a_{p2} s_2 + \cdots + a_{pp} s_p$ und $b_{p1} s_1 + b_{p2} s_2 + \cdots + b_{pp} s_p$ stets gleichzeitig konvergent oder divergent sind. K. K.

E. Landau. Über einen Satz des Herrn Littlewood. Palermo Rend. **35**, 265-276.

Über den Littlewoodschen Satz vgl. F. d. M. **42**, 276, 1911, sowie **43**, 312, 1912.

Für diesen wichtigen Satz wird in §§ 1, 2 eine in mehreren Punkten vereinfachte Beweisanordnung gegeben, die den Grundgedanken Littlewoods durchaus benutzt. — In § 3 wird gezeigt, daß die bisherige Voraussetzung „$na = O(1)$" durch etwas weniger ersetzt werden kann: „Es sei $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = O(1)$ und $\sum a_n x^n \to L$ für $x \to 1$; es bezeichne $\varphi(\delta)$ für jedes $\delta > 0$ die obere Grenze (für $m = 1, 2, \ldots$) des Maximums $\mathfrak{M}(m, \delta)$ von $|S_n - S_m|$ im Intervall

$$\frac{m}{1+\delta} \leqq n \leqq m(1+\delta)$$

und es sei $\varphi(\delta) \to 0$ für $\delta \to 0$. Dann ist $\sum a_n$ konvergent und $= L$."

In § 4 wird der entsprechende Satz für den Reihentyp $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ (mit $\lambda_{n+1} / \lambda_n \to 1$) bewiesen. K. K.

E. Landau. Ein neues Konvergenzkriterium für Integrale. Münch. Ber. 1913, 461-467.

Den Umkehrungen des Abelschen Grenzwertsatzes bei Potenzreihen (Tauber) und den sich daraus ergebenden Konvergenzkriterien für Reihen entsprechen gewisse Konvergenzkriterien für Integrale. So hatte Landau (s. F.d. M. **38**, 295, 1907) bewiesen: „Es sei $\varphi(x) = o\left(\frac{1}{x \log x}\right)$, also a fortiori $f(s) = \int_1^\infty \varphi(x)\, x^{-s}\, dx$ für $s > 0$ konvergent. Für $s \to 0$ sei $f(s) \to l$. Dann ist $f(0) = \int_1^\infty \varphi(x)\, dx = l$, d. h. $\Phi(x) = \int_1^x \varphi(y)\, dy \to l$ für $x \to +\infty$."

In Analogie zur Littlewoodschen Erweiterung (s. F. d. M. **42**, 276, 1911) des Tauberschen Satzes zeigt jetzt Landau, daß $o\left(\frac{1}{x \log x}\right)$ durch $O\left(\frac{1}{x \log x}\right)$ ersetzt werden darf. Der bewiesene Satz ist noch ein wenig weiter-

tragend, da seine Formulierung einer wieder von Landau gegebenen Erweiterung des Littlewoodschen Satzes (s. vorstehendes Referat) entspricht. K. K.

G. H. Hardy and J. E. Littlewood. Tauberian theorems concerning series of positive terms. Messenger (2) **42**, 191-192.

Ein kleiner Nachtrag zu der vorjährigen großen Arbeit der beiden Verf. „Contribution to the arithmetic theory of series" (F. d. M. **43**, 312, 1912): 1. Ist $f(x) = \sum a_n x^n$ eine Potenzreihe mit lauter positiven Koeffizienten und $f(x) \backsim 1/(1-x)^k$ für $k > 0$, wenn $x \to 1$, so ist

$$f^{(r)}(x) \backsim \frac{k(k+1)\dots(k+r-1)}{(1-x)^{k+r}},$$

2. $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \backsim \dfrac{n^k}{\Gamma(1+k)}$.

3. Wenn $s > 1$ und $f(s) = \dfrac{a_n}{n^s} \backsim \dfrac{1}{(s-1)^k}$, wenn $s \to 1$, so ist

$$f'(s) = \sum \frac{a_n \log n}{n^s} \backsim \frac{k}{(s-1)^{k+1}},$$

4. $s_n = \dfrac{a_1}{1} + \dfrac{a_2}{2} + \dots + \dfrac{a_n}{n} \backsim \dfrac{(\log n)^k}{\Gamma(1+k)}$. Lp.

G. H. Hardy. An extension of a theorem on oscillating series. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 174-180.

Der hier bewiesene Satz ist für einen speziellen Fall vom Verf. schon früher bewiesen (vgl. F. d. M. **41**, 278, 1910, sowie **43**, 312, 1912). Ist $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \to +\infty$, so heißt eine Reihe $\sum c_n$ summierbar $(R, \lambda, \varkappa)$, d. h. nach der Rießschen Methode unter Benutzung der gewählten Folge (λ_n) und eines bestimmten Exponenten $\varkappa$, wenn

$$\frac{1}{\omega^\varkappa} C^{(\varkappa)}(\omega) = \frac{1}{\omega^\varkappa} \sum_{\lambda_n \leq \omega} (\omega - \lambda)^\varkappa c_n$$

für $\omega \to \infty$ einen Grenzwert hat, welcher dann die „Summe" von $\sum c_n$ heißt.

Es gilt nun die über den a. a. O. bewiesenen Satz hinausgehende Tatsache: Ist $\sum c_n$ summierbar $(R, \lambda, \varkappa)$ und ist

$$c_n = O\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right),$$

so ist $\sum c_n$ sogar im gewöhnlichen Sinne konvergent. Anders ausgedrückt: Wenn die c_n der genannten Bedingung genügen, und wenn $\sum c_n$ nicht konvergiert, so kann dem Symbol $\sum c_n$ auch durch die Rießschen Methoden keine Bedeutung gewonnen werden. K. K.

L. Orlando. Sulla permutabilità di due segni di limite. Rom. Acc. L. Rend. 22_2, 415-417.

Bezüglich der Grenzfunktion $f(x)$ einer in einem Intervall $a \ldots b$ konvergenten Reihe $\Sigma u_n(x)$ von Funktionen, die sämtlich in ξ stetig sind, wird die alte Frage nach der Stetigkeit von $f(x)$ in ξ aufgeworfen und die (sachlich nicht neue) Formulierung gefunden: Für die Stetigkeit von $f(x)$ in ξ ist es notwendig und hinreichend, daß nach Wahl von ε sich δ und n so angeben lassen, daß für alle $|x - \xi| < \delta$ stets $R_n(x) < \varepsilon$ sei. K. K.

K. Kurosu. A theorem on limits. Tôhoku Math. J. **3**, 151-157.

Es handelt sich um einige (nicht sehr tiefliegende) Erweiterungen von Grenzwertsätzen aus Bromwich „Infinite series", S. 386 u. 53. K. K.

S. Kakeya. On the divergence of an infinite series. Tôhoku Math. J. **3**, 25-28.

Einige Divergenzkriterien für Reihen Σa_n mit positiven abnehmenden Gliedern von dem Typus: Die Reihe ist divergent, wenn bei festem m und allen hinreichend großen n

$$m\, a_{mn} - a_n \geqq 0.$$

K. K.

C. Grötzsch. Zu meinem Kriterium für bedingte Konvergenz unendlicher Reihen. Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 54-57.

Vgl. hierzu F. d. M. **43**, 310, 1912. Es wird eine Reihe angegeben, die zeigt, daß die daselbst unter 4. genannte Bedingung tatsächlich nicht zur Konvergenz notwendig ist. K. K.

F. Tavani. Principles of a new theory of the series. 24 S.

Unter dem Nietzscheschen Motto „Man darf niemals fragen, ob Wahrheit nützt", werden die „Grundlagen einer neuen allgemeinen Reihentheorie" entwickelt. Da ihr aber das Kriterium der Wahrheit, die innere Widerspruchslosigkeit, abgeht, so darf man getrost behaupten, daß sie bestimmt nichts nützt. K. K.

A. Rosenblatt. Über die Multiplikation der unendlichen Reihen. Krakau Anz. (A) 1913, 603-631.

Bildet man aus zwei Reihen Σa_n und Σb_n eine dritte Σc_n, indem man setzt

$$c_n = a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + \cdots + a_n\, b_0,$$

so ist eine Reihe von hinreichenden Bedingungen für die absolute oder bedingte Konvergenz der letzteren bekannt (Cauchy, Mertens, Pringsheim u. a.). Zu den neuesten Resultaten hierüber gehört ein Satz von

Hardy, der zeigt, daß aus der Konvergenz von $\sum a_n$ und $\sum b_n$ sicher dann diejenige von $\sum c_n$ folgt, wenn die Folgen $(n\,a_n)$ und $(n\,b_n)$ beschränkt sind. Dieser Satz wird auf die Cesàrosche Summierbarkeit übertragen: „Ist $\sum a_n$ von der r-ten und $\sum b_n$ von der s-ten Ordnung summierbar, so ist $\sum c_n$ sicher dann von der $(r+s)$-ten Ordnung summierbar, wenn die Folgen $(A_n^{(r-1)}/n^{r-1})$ und $(B_n^{(s-1)}/n^{s-1})$ beschränkt sind. Hierbei bedeuten $A_n^{(\gamma)}$ und $B_n^{(\gamma)}$ die n-ten Partialsummen γ-ter Ordnung (im Sinne Cesàros) der Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$.

Hardy hat ferner den weitertragenden Satz bewiesen, daß die Konvergenz von $\sum a_n$ und $\sum b_n$ diejenige von $\sum c_n$ auch schon dann nach sich zieht, wenn $n\,\Psi(n)\,a_n \to 0$ und $\frac{n}{\Psi_{(n)}}\,b_n \to 0$ ist, unter $\Psi(n)$ eine Funktion vom Typus $(\log n)^\alpha (\log\log n)^\beta \ldots$ verstanden. Verf. erweitert den Satz dadurch, daß er „$= O(1)$“ statt „$\to 0$“ setzt.

K. K.

S. Chapman. Some theorems on the multiplication of series which are infinite in both directions. Quart. J. 44, 219-233.

Entsprechend der Cauchyschen Multiplikation zweier gewöhnlichen unendlichen Reihen, d. h. der Bildung von

$$\sum_0^\infty c_n \text{ mit } c_n = a_0\,b_n + a_1\,b_{n-1} + \cdots + a_n\,b_0$$

aus $\sum_0^\infty a_n$ und $\sum_0^\infty b_n$ wird hier entsprechend die Multiplikation von Reihen untersucht, die nach beiden Seiten unendlich sind. Setzt man

$$A(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\,x^n,\quad B(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n\,x^n$$

und schreibt das formal gebildete Produkt wieder als Laurentsche Reihe

$$C(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,x^n,\quad \text{so ist } c_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m\,b_{n-m}.$$

Und die Fragestellung lautet: Wenn $A(1)$ und $B(1)$ konvergieren, ist dann auch $C(1)$ konvergent und $= A(1)\,.\,B(1)$?

In dieser Richtung wird gezeigt (analog den Sätzen von Cauchy, Mertens, Pringsheim, Cesàro bei gewöhnlichen Reihen):

1. Falls A und B absolut konvergieren, so tut es auch jedes c_n sowie C, und es ist $C = AB$.

2. Falls wenigstens eine der Reihen A oder B absolut konvergiert, konvergieren alle c_n und C, und es ist $C = AB$.

3. Nehmen u_n und v_n für $n \to \pm\infty$ monoton gegen 0 ab, so nehmen auch die Größen $w_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u_m\,v_{n-m}$ monoton gegen 0 ab, und es ist $\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\,w_n = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\,u_n \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\,v_n$, falls $\sum_1^\infty (u_n + u_{-n})(v_n + v_{-n})$ konvergiert.

4. Ein wenig einfach zu formulierender Satz über Summierbarkeit erster Ordnung von $\sum(-1)^n w_n$ in 3) ohne Voraussetzung über $\sum(u_n + u_{-n})(v_n + v_{-n})$.

K. K.

O. Blumenthal. Einfache Beispiele ungleichmäßig konvergenter Reihen. Ann. Ac. Pol. Porto 8, 68-73.

Es handelt sich um eine bequeme Methode zur Konstruktion von Beispielen für die verschiedenen bei ungleichmäßig konvergenten Reihen analytischer Funktionen auftretenden Besonderheiten. An einer Figur werden die zu veranschaulichenden Tatsachen erläutert: eine Reihe, deren Glieder analytische Funktionen sind, die in jedem den Punkt 1 nicht enthaltenden Teilintervall des Intervalles $(0, 1)$ gleichmäßig konvergiert und die Summe Null hat, dagegen im ganzen Intervall mit Einschluß des Endpunktes 1 nicht gleichmäßig konvergiert. Die einzelnen möglichen Fälle werden aufgezählt und an passenden Beispielen erläutert.

Lp.

S. Pincherle. Un' applicazione della convergenza in media. Rom. Acc. L. Rend. 22_2, 397-402.

Über den von E. Fischer eingeführten Begriff einer „im Mittel" konvergenten Funktionenfolge vgl. F. d. M. 38, 422, 1907. Für Funktionen, die von einem stetigen Parameter abhängen, lautet sie: „$f(t, r)$ konvergiert (in $a \dots b$) im Mittel gegen $f(t)$ bei $r \to r_0$, wenn alle $f(t, r)$ und $f(t)$ und deren Quadrate im Lebesgueschen Sinne summierbar sind, und wenn jedem ε ein δ so zugeordnet werden kann, daß für alle $|r - r_0| < \delta$

$$\int_a^b (f(t) - f(t, r))^2 \, dt < \varepsilon$$

ist." Von diesem Begriff wird auf analytische Funktionen eine Anwendung gemacht: Ist $\varphi(x) = \alpha(r, t) + i\,\beta(r, t)$ eine für $|x| < 1$ reguläre Funktion, und sind für $r \to 1$ die Teile $\alpha(r, t)$ und $\beta(r, t)$ im Mittel konvergent gegen $p(t)$ und $q(t)$, welch letztere einschließlich ihrer Quadrate in $0 \dots 2\pi$ summierbar sind, so ist, wenn $e^{it} = z$, $p(t) + i\,q(t) = u(z)$ gesetzt und über den Einheitskreis integriert wird, für $|x| < 1$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{u(z)}{z - x} dz.$$

K. K.

H. Bohr. Om addition af uendelig mange konvekse kurver. Dansk. Videnskab. Selsk. Forh. 1913, No. 4, 325-366.

In einer früheren Arbeit (s. F. d. M. **43**, 328, 1912) hatte Bohr als Hülfssatz die Tatsache bewiesen: Ist $\sum r_n (r_n > 0)$ konvergent, und durchlaufen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ unabhängig voneinander alle reellen Werte, so erfüllt der Wertevorrat von $\sum r_n e^{i\varphi_n}$ genau das Gebiet eines Kreises oder das eines Kreisringes (einschließlich der Ränder) mit leicht angebbaren Radien. In der vorliegenden Arbeit stellt er sich die allgemeinere Frage: Es seien $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ irgendwelche konvexen geschlossenen Kurven (im vorigen waren es die Kreise $r_n e^{i\varphi}$), es sei z_n ein beliebiger Punkt auf M_n und $\sum z_n$ sei stets konvergent. Was läßt sich dann über den Wertevorrat dieser $\sum z_n$ aussagen?

Nachdem in § 1 für beliebige Punktmengen M_n einige Sätze über die Menge der Werte von $\sum z_n$ (kurz mit $\sum M_n$ bezeichnet) hergeleitet sind, wird in § 2

die „Summe“ zweier konvexen Kurven und in § 3 der allgemeine Fall untersucht. Es ergibt sich, daß der in Rede stehende Wertevorrat genau das Innere einer geschlossenen konvexen Kurve oder das Ringgebiet zwischen zwei solchen Kurven (einschließlich der Ränder) ausfüllt. Über die Lage der Begrenzungskurven lassen sich dabei genauere Angaben machen. K. K.

E. Steinitz. Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. (Teil I.) J. für Math. **143**, 128-175.

Die vorliegende Arbeit greift in umfassender Weise ein sehr einfach zu formulierendes, aber, wie es scheint, sehr tief hinabreichendes Problem an: Eine bedingt konvergente Reihe mit reellen Gliedern kann bekanntlich so umgeordnet werden, daß sie konvergent bleibt und eine vorgeschriebene Summe bekommt. Das Problem lautet nun: Ist etwas Entsprechendes (wenigstens in gewissem Umfange) auch für Reihen mit komplexen Gliedern der Fall?

Die Gesamtheit der durch Umordnung erzielbaren Summenwerte nennt Steinitz den Summenbereich der Reihe. Der Summenbereich einer reellen Reihe ist danach entweder ein Punkt oder die ganze reelle Achse.

Sind $\sum a_n$ und $\sum b_n$ zwei bedingt konvergente reelle Reihen, so zeigen die Beispiele

$$\alpha + \sum \omega\, a_n \quad \text{und} \quad a_1 + i\, b_1 + a_2 + i\, b_2 + \ldots$$

(α und ω beliebig komplex), daß der Summenbereich einer bedingt konvergenten komplexen Reihe eine Gerade ($\alpha + r\omega$, $-\infty < r < \infty$) oder die ganze Ebene sein kann. Hiermit ist aber schon das allgemeinste Verhalten getroffen; denn es gilt der das Problem vollständig erledigende Satz: Der Summenbereich einer beliebigen konvergenten komplexen Reihe ist entweder ein Punkt oder eine Gerade oder die ganze Ebene.

Entsprechend gilt für komplexe Zahlen, die sich aus n Einheiten aufbauen, der Satz: Der Summenbereich einer beliebigen konvergenten Reihe aus solchen komplexen Zahlen ist stets eine lineare Mannigfaltigkeit (s. u.).

Dieser Satz ist für den Fall gewöhnlicher komplexer Zahlen nicht neu, sondern schon von P. Lévy (Nouv. Ann. (4), **5**; F. d. M. **36**, 320, 1905) erhalten und für beliebige n angedeutet worden; seine Beweise sind aber sehr unklar gefaßt und geben zu Bedenken Anlaß. Daher ist es zu begrüßen, daß Steinitz seinen ebenfalls schon 1905 gefundenen, dem Lévyschen verwandten, aber sehr durchsichtigen und in sich wertvollen Beweis veröffentlicht. Dieser ist jedoch in dem vorliegenden ersten Teil seiner großen Arbeit (der zweite ist 1914, der letzte 1915 erschienen) noch nicht enthalten. Hier werden vielmehr zunächst die Grundlagen der n-dimensionalen Geometrie, welche weiterhin überall gebraucht werden, im Zusammenhange vorgetragen, eine Darstellung, die sich durch große Klarheit und Übersichtlichkeit auszeichnet und geradezu als Einführung dienen kann. Abschn. I beschäftigt sich mit den grundlegenden Definitionen und mit den linearen Mannigfaltigkeiten (§§ 1—5: Punkte des n-dimensionalen Raumes; Moduln; lineare Transformationen; lineare Mannigfaltigkeiten; Einführung metrischer Begriffe). Abschn. II mit Konvergenzbegriffen (§§ 6—8: Schranken einer Punktmenge; abgeschlossene Punktmengen; Konvergenz). Abschn. III mit den konvexen Punktmengen, die in gewissem Sinne den zentralen Gegenstand der Untersuchungen bilden:

eine Punktmenge heißt konvex, wenn sie mit zwei Punkten α und β auch alle ihre Zwischenpunkte enthält (auch ein einzelner Punkt sowie der ganze Raum gelten als konvexe Punktmengen). § 9: Grundtatsachen über konvexe Punktmengen. § 10: Analytische Darstellung der kleinsten, eine gegebene Punktmenge enthaltenden konvexen Punktmenge. § 11: Die kleinste, eine gegebene Punktmenge enthaltende konvexe und abgeschlossene Punktmenge.

Abschn. IV endlich enthält einen auf ganz anderer Grundlage als der Lévysche beruhenden neuen Beweis des obengenannten Satzes über den Summenbereich einer komplexen Reihe, und zwar einen Beweis, der den allerallgemeinsten Beweis ganz direkt angreift, und bei dem auch eine ziemlich einfache geometrische Deutung derjenigen linearen Mannigfaltigkeit herausspringt, die den Summenbereich der vorgelegten Reihe bildet. K. K.

E. Cahen. Remarque sur un article antérieur. S. M. F. Bull. **41**, 369-370.

Berichtigung eines Irrtums in der Arbeit „Sur l'irrationalité des sommes des séries dont le terme général est une fonction rationnelle de l'indice". (S. M. F. Bull. **40**, 52; F. d. M. **43**, 339, 1912.) Sk.

S. Lattès. Sur les suites récurrentes non linéaires et sur les fonctions génératrices de ces suites. Toulouse Ann. (3) **3**, 73-124.

Diese Arbeit enthält in der Hauptsache eine ausführliche Darlegung und Weiterführung der Resultate zweier früheren Noten in den C. R. (s. F. d. M. **41**, 284, 285, 1910; vgl. auch die ebenda besprochene Arbeit von Fatou). Zahlreiche Beispiele sind durchgeführt, insbesondere das linear-gebrochene Rekursionsgesetz

$$u_{n+1} = \frac{a\,u_n + b}{c\,u_n + d}.$$

K. K.

E. Landau. Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe. I und II. Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 42-50, 250-255.

Eine Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = f(x)$ sei für $|x| < 1$ konvergent und beschränkt, etwa stets $|f(x)| \leqq 1$. Dann ist bekanntlich $|a_n| \leqq 1$ ferner $\sum |a_n|^2$ konvergent und auch noch $\leqq 1$. Es handelt sich nun um Sätze über $|a_0 + a_1 + \cdots + a_n|$.

1. Pompeiu (s. F. d. M. **43**, 509, 1912) hatte bewiesen, daß $|a_0 + a_1| \leqq \frac{5}{4}$, und daß $\frac{5}{4}$ nicht noch weiter verkleinert werden kann. Hierfür gibt Landau in § 1 einen erheblich einfacheren Beweis und zeigt in der zweiten Abhandlung (ein Resultat von seltener Schönheit), daß allgemein

$$G_n = 1 + (\tfrac{1}{2})^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1\cdot 3 \ldots . (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots 2n}\right)^2$$

die genaue obere Grenze des Ausdrucks $|a_0 + a_1 + \cdots + a_n|$ für alle $f(x)$ ist, die für $|x| < 1$ konvergent sind, und für die $|f(x)| \leqq 1$ ist.

2. In § 2 werden zwei Arbeiten von H a n s e n kritisiert, die teils unrichtige, teils triviale Sätze auf sehr komplizierten Wegen beweisen. Hierbei ergibt sich ein neuer Beweis für die Tatsache, daß, wenn nur $f(x)$ für $|x| < 1$ konvergiert, für $n \geqq 2, 0 < r < 1$ bei geeigneter Wahl eines absolut konstanten c

$$|a_0 + a_1 + \cdots + a_n| < \frac{c \log n}{r^n} M(r)$$

ist, wenn $M(r)$ das Maximum von $|f(x)|$ für $|x| = r$ bedeutet.

3. Die Frage, ob für jedes feste $f(x)$, welches für $|x| < 1$ konvergent und für das $|f(x)| < 1$ ist, notwendig

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = o(\log n)$$

sei, ist noch nicht entschieden. Dagegen gibt es sicher keine mit $\frac{1}{n}$ zu 0 abnehmende Funktion $\varepsilon(n)$, so daß für alle solche $f(x)$ und alle $n \geqq 2$ stets

$$|a_0 + a_1 + \cdots + a_n| < \varepsilon(n) \log n$$

wäre (F e j é r). In der genauen Ermittlung von G_n, welches $\sim \frac{1}{\pi} \log n$ ist, liegt ein neuer Beweis dieser Tatsache. K. K.

H. Bohr. A theorem concerning power series. Lond. M. S. Proc. (2) **13**, 1-5.

Es handelt sich um die folgende Fragestellung: $f(x) = \sum a_n x^n$ sei für $|x| < 1$ regulär, für $|x| \leqq 1$ stetig, und es sei $|f(x)| < 1$ für $|x| \leqq 1$. Läßt sich dann stets eine positive Zahl k so angeben, daß für $|x| \leqq k$ immer (d. h. für jede den genannten Bedingungen genügende Potenzreihe) auch $\sum |a_n x^n| < 1$ ist? und welches ist die obere Grenze K dieser Zahlen k?

Es wird zunächst gezeigt, daß $k = \frac{1}{6}$ in jedem Falle ausreicht, daß also $K \geqq \frac{1}{6}$ ist; sodann (dieser Teil der Arbeit geht auf Mitteilungen von R i e ß, S c h u r und W i e n e r zurück), daß $K = \frac{1}{3}$ ist. K. K.

H. Steinhaus. Sur un problème de MM. L u s i n et S i e r p i ń s k i. Krak. Anzeiger (A) 1913, 435-450.

Eine Potenzreihe kann bekanntlich auf dem Rande des Konvergenzkreises überall konvergieren oder überall divergieren oder auch in einer dort überalldichten Menge C von Punkten konvergent und zugleich in einer ebensolchen Menge D von Punkten divergent sein. Welchen Charakter kann die Menge C aller dort gelegenen Konvergenzpunkte haben?

S i e r p i ń s k i hat (1912) gezeigt, daß C aus einem einzigen Punkte bestehen kann. In der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt, daß C und D gleichzeitig ganze Bogenstücke enthalten können. Hiermit ist zugleich eine entsprechende, bisher nicht beantwortete Fragestellung bei den trigonometrischen Reihen erledigt. K. K.

L. FEJÉR. La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissances effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple. C. R. **156**, 46-49.

Ein bekannter Satz von Hardy-Landau besagt: Wenn $\sum v_n$ nach der Methode der arithmetischen Mittel summierbar ist, und wenn $n u_n > -A$ bleibt, so ist $\sum u_n$ sogar konvergent. Fejér findet das neue Kriterium, daß aus der Summierbarkeit zusammen mit der Konvergenz von $\sum n \mid u_n \mid^2$ diejenige von $\sum u_n$ folgt, und macht hiervon eine interessante Anwendung.

Ist $f(z) = \sum a_n z^n$ für $\mid z \mid < 1$ konvergent und für $\mid z \mid \leqq 1$ stetig, und vermittelt $w = f(z)$ die Abbildung des Einheitskreises auf ein schlichtes Gebiet der w-Ebene, so ist $\sum a_n z^n$ sogar für $\mid z \mid \leqq 1$ gleichmäßig konvergent.

K. K.

T. ONO. Sur une généralisation du théorème de Taylor. Tôhoku Math. J. **3**, 15-20.

Der Verf. teilt aus dem Buche von Whittaker, Modern analysis, S. 110, eine vermeintliche Verallgemeinerung der Taylorschen Formel mit und weist nach, daß diese an der angeführten Stelle dem Leser zum Beweise überlassene Verallgemeinerung falsch ist; für die ebenda als Anwendungen gegebenen Beispiele, die von Laurent und Guichard stammen, werden andere Beweise erbracht.

Lp.

V. C. POOR. A theorem on asymptotic series. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 346-348.

„Wenn $f(z)$ bei $z = 0$ nicht holomorph, formell aber in eine Maclaurinsche Reihe entwickelbar ist, und wenn w asymptotisch zu $a_1/z + a_2/z^2 + \cdots$ ist, so hat $f(w)$ eine asymptotische Darstellung." (Vgl. Ford, S. M. F. Bull. **40**, Erratum du Tome **39**.)

Lp.

K. KNOPP. Über Lambertsche Reihen. J. für Math. **142**, 283-315; Berichtigung **143**, 50.

Es handelt sich um Reihen der Form $\sum b_n \frac{x^n}{1-x^n}$, von denen die für $b_n \equiv 1$ und $b_n = n$ entstehenden schon von Lambert in Potenzreihen entwickelt wurden.

In § 1 werden die Konvergenzfragen erledigt: Ist $\sum b_n$ konvergent, so konvergiert die Lambertsche Reihe für jedes $\mid x \mid \gtrless 1$, ist dagegen $\sum b_n$ divergent, so hat sie dasselbe Konvergenzgebiet wie $\sum b_n x^n$. Ist r der Radius der letzteren, so läßt sich für $\mid x \mid < \varrho = \mathrm{Min}\,(r, 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

setzen, wobei

$$a_n = \sum_{d/n} b_d \text{ und also } b_n = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) a_d$$

wird: Jede Lambertsche Reihe läßt sich in eine Potenzreihe verwandeln und umgekehrt. Dies ist die Quelle einer großen Anzahl merkwürdiger (meist schon bekannter) Identitäten.

Die folgenden Paragraphen sind der Untersuchung des Verhaltens der Reihe bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze gewidmet. In Erweiterung eines Satzes von Franel wird in § 2 durch ein in seinem Grundgedanken auf Landau zurückgehendes Beweisverfahren bewiesen: „Sind für ein $k \geqq 1$ die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{k\nu+l}}{k\nu+l} \quad (l=0,1,\ldots,k-1)$$

sämtlich konvergent, so ist bei radialer Annäherung von x an den Randpunkt $x_0 = e^{2\pi i k'/k}$ (k' und k teilerfremd)

$$\lim_{x=x_0}\left\{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)\sum b_n \frac{x^n}{1-x^n}\right\} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_{k\nu}}{k\nu}.\text{“}$$

In § 3 wird derselbe Satz auf Grund ganz anderer Methoden bewiesen, wobei sich ergibt, daß die Annäherung nicht radial zu erfolgen braucht; sie darf irgendwie in einem Winkelraum erfolgen, dessen Scheitel in x_0 liegt, und dessen Schenkel in das Innere des Einheitskreises dringen, wofern $\sum \left|\frac{b_n}{n}\right|$ konvergiert.

Durch den bewiesenen Satz wird die Frage nach dem Verhalten der Reihensumme bei der Annäherung von x an einen irrationalen Randpunkt $\xi = e^{2\pi i\gamma}$ (γ irrational) nahegelegt. In dieser Richtung wird bewiesen: „Es ist bei radialer Annäherung

$$\lim_{x=\xi}\left(1-\frac{x}{\xi}\right)\sum b_n \frac{x^n}{1-x^n} = 0,$$

falls $\sum |b_n|$ konvergiert.“ Dieselbe Beziehung bleibt auch für beliebige Annäherung richtig, falls die Teilnenner der Kettenbruchentwicklung von γ beschränkt sind.

Aus den bewiesenen Sätzen folgt u. a., daß eine Lambertsche Reihe sicher dann eine über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbare Funktion darstellt, wenn für unendlich viele k die Reihen $\sum \frac{b_{k\nu+l}}{k\nu+l}$ konvergent sind und $\sum \frac{b_{k\nu}}{k\nu} \neq 0$ ist (z. B. bei $b_n = \frac{1}{n^s}$ mit $\Re(s) > 0$). Sie ist auch für $b_n = n^s$, $\Re(s) > 0$, $b_n = 1$, u. a. nicht fortsetzbar.

Da $-\log \Pi(1-x^n) = \sum \frac{1}{n}\frac{x^n}{1-x^n}$, so ergibt sich als weitere Anwendung, daß bei Annäherung an jeden rationalen Randpunkt

$$\lim \Pi(1-x^n) = 0$$

ist, woraus speziell wieder folgt (was nicht neu), daß auch die Funktion $\Pi(1-x^n)$ nicht über den Einheitskreis hinaus fortsetzbar ist.

Auf S. 312 der Arbeit muß es $q_\mu < \delta k_{\mu-2}$ statt $\delta a_{\mu-2}$ heißen. K. K.

E. Landau. Sur les séries de Lambert. C. R. **156**, 1451-1454.

Durch geschicktere Beweisanordnung gelingt es Landau, die wichtigsten unter den in der vorstehend besprochenen Arbeit von Knopp erhaltenen Sätze erheblich einfacher und mit erweitertem Gültigkeitsbereich zu beweisen. Die so gewonnenen Sätze lauten:

1. Ist $\sum \frac{|b_n|}{n}$ konvergent, γ eine irrationale Zahl und $\xi = e^{2\pi i\gamma}$, so ist bei Annäherung im Winkelraum

$$\lim_{x=\xi}\left(1-\frac{x}{\xi}\right)\sum b_n \frac{x^n}{1-x^n}=0.$$

2. Sind die Teilnenner q_s der Kettenbruchentwicklung von γ beschränkt, so ist sogar schon

$$\lim_{x=\xi}\sqrt{1-\frac{x}{\xi}}\sum b_n \frac{x^n}{1-x^n}=0.$$

3. Genügen die q_s wenigstens der Bedingung $q_s = o(k_{s-1})$, wo k_s den Nenner des s-ten Näherungsbruches bedeutet, so ist

$$\lim_{x=\xi}\left(1-\frac{x}{\xi}\right)^{\frac{2}{3}}\sum b_n \frac{x^n}{1-x^n}=0.$$

K. K.

D. Pompeiu. Sur certaines séries de fractions simples. Nieuw Archief (2) **10**, 353-356.

Bilden die Punkte (a_n) eine isolierte, im Innern eines Kreisringes gelegene Punktmenge, die sich überall auf den Peripherien des Ringes häuft, und ist $\sum |A_n|$ konvergent, so definiert

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{z-a_n}$$

sowohl innerhalb des kleinen, wie außerhalb des großen Kreises eine reguläre Funktion.

Borel hat in seiner Thèse bewiesen, daß, wenn die eine Funktion $\equiv 0$ ist, es auch die andere sein muß (allerdings unter der einschränkenden Voraussetzung, daß, unter r_0 den kleineren, unter r_1 den größeren Radius des Ringes verstanden,

$$\lim\left(\frac{2r_0}{r_1}\right)^n\sum_{n+1}^{\infty}|A_k|=0$$

ist). Verf. zeigt an einem sehr geschickten Beispiel, daß ohne eine einschränkende Voraussetzung über die Art der Konvergenz von $\sum |A_k|$ der Satz nicht mehr allgemein gültig ist.

K. K.

T. Rietti. Alcuni sviluppi in serie di fattoriali. Batt. G. **51** [(4) **3**], 240-245.

Es werden einige Entwicklungen in Binomialkoeffizientenreihen

$$\sum A_\nu (x-1)(x-2)\dots(x-\nu+1)$$

hergeleitet und ihr Konvergenzbereich bestimmt; so besonders die Entwicklung einer Funktion $f(x)$, die durch ein Integral der Form

$$f(x)=\int_a^\infty e^{-tx}\varphi(t)\,dt$$

definiert ist. K. K.

P. Appell. Sur les développements en série procédant suivant les inverses de polynomes donnés. C. R. **157**, 5-7.

P. Appell. Développement de $(x-y)^{-1}$ en série procédant suivant les inverses de polynomes donnés. C. R. **157**, 1042-1043.

Es seien $P_0(x), P_1(x), \dots$ ganze rationale Funktionen vom Grade des Index mit dem Koeffizienten $+1$ im höchsten Gliede; alle ihre Wurzeln seien absolut genommen $< R$. Ist dann $f(x)$ eine für $|x| > R$ reguläre Funktion, und existiert eine Entwicklung der Form

$$f(x)=A_0+\frac{A_1}{P_1(x)}+\dots+\frac{A_n}{P_n(x)}+\dots,$$

so lassen sich die Koeffizienten A_n der Reihe nach aus einfachen linearen Gleichungen eindeutig bestimmen. Die Konvergenzfrage läßt sich nach der Methode der Majoranten erledigen, falls eine Entwicklung von $\frac{1}{x-y}$, $|y|<R$, $|x|>R$, bekannt ist. Ist eine solche vorhanden, so hat sie notwendig die Form

$$\frac{1}{x-y}=\frac{1}{P_1(x)}+\frac{Q_1(y)}{P_2(x)}+\dots+\frac{Q_{n-1}(y)}{P_n(x)}+\dots,$$

bei der die $Q_\lambda(y)$ Polynome λ^{ten} Grades mit $+1$ im höchsten Gliede bedeuten. Die zweite Note skizziert ihre (formale) Bestimmung: sie ergeben sich eindeutig aus

$$I_{n\nu}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=R}\frac{Q_n(z)}{P_{\nu+1}(z)}\,dz=\begin{cases}0, & \text{für } \nu\neq n\\ 1, & \text{für } \nu=n\end{cases};$$

für die A_ν hat man dann auch

$$A_{n+1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|x|=R'}f(z)\,Q_n(z)\,dz,\quad R'>R.$$

Bezüglich der Konvergenzfragen wird auf eine spätere Abhandlung verwiesen. K. K.

P. du Bois-Reymond. Abhandlung über die Darstellung der Funktionen durch trigonometrische Reihen (1876). Herausgegeben von Ph. E. B. Jourdain. Dritte Abhandlung. Leipzig: W. Engelmann. 140 S. 8°. (Ostwalds Klassiker Nr. 186.)

Ein unveränderter Abdruck der berühmten Abhandlung mit einigen erläuternden Anmerkungen; in diesen wird besonders auf die neueren Resultate hingewiesen, durch die ja viele der von Du Bois-Reymond noch als offen bezeichneten Fragen im positiven oder negativen Sinne entschieden sind.

K. K.

C. NEUMANN. Zur Theorie der Fourierschen Reihen. Leipz. Ber. **65**, 197-198.

Es wird (ohne Beweis) eine Abschätzung für die Güte der Annäherung der Partialsummen an die Summe der Fourier-Reihe einer abteilungsweise monotonen, höchstens endlich viele Unstetigkeiten aufweisenden Funktion $F(x)$ gegeben, nämlich:

$$|\,S_n(x)-\tfrac{1}{2}[F(x+0)+F(x-0)]\,| < 4\,\pi\,H\,(D_{-\varDelta}+D_{\varDelta})+\frac{16\,MH}{\pi\sin\frac{1}{2}\varDelta}\cdot\frac{1}{n},$$

wenn M und H gewisse Konstanten, $0<\varDelta<\pi$ und $D_{\pm\varDelta}$ die größten Schwankungen in $(x\pm\varDelta, x)$ bedeuten.

K. K.

W. SIERPIŃSKI. Dowód pewnego twierdzenia Cantor'a z teoryi szeregów trygonometrycznych. (Beweis eines Satzes von G. Cantor aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.) Wektor **1**, 215-218 (1912).

Einfacher Beweis des Satzes: Wenn für jedes x innerhalb des Intervalles α, β

$$\lim_{n=\infty}(a_n\sin nx+b_n\cos nx)=0$$

ist, dann ist auch

$$\lim_{n=\infty}a_n=0,\ \lim_{n=\infty}b_n=0.$$

A. R.

L. v. SCHRUTKA. Fouriersche Entwicklungen. Separat aus Elemente d. höh. Math., Leipzig, 339-350.

Abdruck aus des Verf. vortrefflichem Lehrbuch (F. d. M. **43**, 350, 1912).

E. J.

L. N. G. FILON. On a symbolic proof of Fourier's theorem. Math. Gazette **7**, 34-36.

Der Verf. wendet die bei den Engländern beliebte Methode der symbolischen Rechnung mit einem Operator $\varphi(D)$, wo $D=\frac{d}{dx}$, $\varphi(D)$ ein Polynom in D ist, auch für den Fall an, daß $\varphi(D)$ eine in Partialbrüche zerlegbare transzendente Funktion ist, um die Entwicklung einer Funktion $f(x)$ in eine trigonometrische Reihe herzuleiten. Hierbei wird $\varphi(D)=\sinh aD$ gesetzt.

Lp.

T. H. Gronwall. On the summability of Fourier's series. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 392; **20**, 139-146.

Vereinfachter Beweis des von Rieß und von Chapman stammenden Satzes: Die Funktion $f(x)$ sei in dem Intervall $-\pi \leqq x \leqq \pi$ definiert und so beschaffen, daß $|f(x)|$ im Sinne von Lebesgue integrierbar ist; dann ist die Fouriersche Reihe für $f(x)$ summierbar (Ck) für jedes $k > 0$ mit der Summe

$$\tfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = \tfrac{1}{2}\lim_{e=0}\,[f(x+e)+f(x-e)]$$

in jedem Punkt, wo diese Grenze existiert. Die Konvergenz der Cesàroschen Mittel von der Ordnung k gegen diese Grenze ist gleichmäßig auf jeder geschlossenen Folge (range), bei der $f(x)$ für jeden Punkt beschränkt (bounded) ist und $f(x+0)+f(x-0)$ gleichmäßig existiert (Rieß in C. R. **149**, 909-912; F. d. M. **40**, 315, 1909. Chapman in Lond. M. S. Proc. (2) **9**, 369-409, S. 390).

Lp.

H. Steinhaus. Sur la convergence non-uniforme des séries de Fourier. Krak. Anz. (A) 1913, 145-160.

H. Steinhaus. Sur une fonction remarquable représentée par une série de Fourier. Krak. Anz. (A) 1913, 291-304.

Verf. konstruiert in der ersten der beiden Arbeiten eine stetige Funktion, deren Fourier-Reihe zwar überall konvergiert, jedoch so, daß die Konvergenz in keinem Intervall eine gleichmäßige ist.

In der zweiten konstruiert er eine beschränkte Funktion mit der Periode 2π, die überall durch ihre Fourier-Reihe dargestellt wird, falls die Integrale zur Koeffizientenbestimmung im Lebesgueschen Sinne verstanden werden, und die doch in keinem Intervalle im Riemannschen Sinne integrierbar ist.

Hierdurch wird die von Lebesgue in seinem Buche „Séries trigonométriques" aufgeworfene Frage nach der Existenz solcher Funktionen im affirmativen Sinne entschieden.

K. K.

D. Jackson. On the approximate representation of an indefinite integral and the degree of convergence of related Fourier's series. American M. S. Trans. **14**, 343-364.

Über den Problemenkreis der Arbeit vgl. F. d. M. **42**, 434, 1911 und **43**, 499, 1912. Dort war bewiesen worden:

1. Es gibt eine absolute Konstante K, so daß für jede reelle Funktion $f(x)$ der Periode 2π, die der Lipschitz-Bedingung mit λ genügt, eine Approximation der Form

$$f(x) = \mathfrak{T}_n(x) + \frac{K\lambda}{n}\vartheta$$

möglich ist. Hierbei steht $\mathfrak{T}_n(x)$ symbolisch für ein geeignetes trigonometrisches Polynom einer Ordnung $\leqq n$, und es ist $|\vartheta| < 1$. Dabei ist $K \geqq \frac{1}{2}\pi$; $K = 3$ ist ausreichend.

Im ersten Teil der Arbeit wird nun bewiesen:

2. Ist $f(x)$ integrabel, $\int f(x)dx$ wieder periodisch und für ein n und ε

$$f(x) = \mathfrak{T}_n(x) + \varepsilon\,\vartheta,$$

so ist

$$\int f(x)dx = \mathfrak{T}_n(x) + \frac{2K\varepsilon}{n}\vartheta.$$

Hieraus ergeben sich unter anderem einfachere Beweise und Präzisierungen früherer Resultate.

Im zweiten Teil der Arbeit werden analoge Untersuchungen für die Approximation durch Polynome in x durchgeführt.

Der dritte Teil bezieht sich auf Approximation durch die Partialsummen der Fourier-Entwicklung. K. K.

D. Jackson. On the accuracy of trigonometric interpolation. American M. S. Trans. **14**, 453-461.

Faber fand (Math. Ann. **69**, 372-443, S. 417 ff.; F. d. M. **41**, 449, 1910), daß die trigonometrischen Interpolationspolynome gegen die zugrunde liegende stetige Funktion $f(x)$ konvergieren, wenn diese die üblichen Bedingungen für die Entwickelbarkeit in eine Fourier-Reihe erfüllt. Verf. zeigt, daß die in seinen Arbeiten über Approximation (vgl. vorstehendes Referat) entwickelten Methoden auf kürzestem Wege dieselben Resultate ergeben.

Genügt $f(x)$ der Lipschitz-Bedingung mit λ, so ist die Güte der Approximation, wenn auf $2n+1$ Punkte interpoliert wird, $\leqq \frac{21\,\lambda \log n}{n}$.

Eine andere Art von Interpolationspolynomen (die allerdings auch an den Interpolationsstellen von $f(x)$ abweichen können) erreicht sogar einen Approximationsgrad $\leqq \frac{6\pi\lambda}{n}$. K. K.

P. Fatou. Sur la convergence absolue des séries trigonométriques. S. M. F. Bull. **41**, 47-53.

Die in F. d. M. **43**, 319, 1912 besprochenen Arbeiten von Denjoy und Lusin gehen auf eine Anregung von Fatou zurück, der in der vorliegenden Abhandlung nun selbst auf den Gegenstand zurückkommt. Er beweist die a. a. O. angeführten Sätze erheblich einfacher, insbesondere also den Satz:

Die Menge der Punkte des Intervalles $0 \dots 2\pi$, in denen eine trigonometrische Reihe $\sum(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ absolut konvergiert, hat entweder das Maß 0 oder das Maß 2π; und letzteres nur dann, wenn $\sum |a_n|$ und $\sum |b_n|$ konvergieren. Hieran knüpft Fatou eine Reihe weiterer interessanter Bemerkungen:

Die Punkte mit irgendeiner Konvergenzeigenschaft (absolute oder bedingte Konvergenz, Divergenz, Summierbarkeit einer gewissen Art usw.) liegen stets symmetrisch (auf dem Einheitskreise) zu den Punkten der absoluten Konvergenz. Die Menge dieser letzteren liegt also symmetrisch zu jedem ihrer

eigenen Punkte; sie besteht also aus den Ecken eines regulären Polygons, wenn sie nur aus endlich vielen Punkten besteht, und ist notwendig überalldicht, wenn sie aus unendlich vielen Punkten besteht. Da dann ihre „Dichte" überall eine gleiche sein muß, folgt weiter, daß ihr Maß nur 0 oder 2π sein kann.

Allgemeiner: Hat eine trigonometrische Reihe unendlich viele Punkte absoluter Konvergenz, so hat die Menge aller Punkte mit einer bestimmten Konvergenzeigenschaft entweder das Maß 0 oder das Maß 2π.

Solche Reihen (die sich leicht so bilden lassen, daß doch $\sum(|a_n| + |b_n|)$ divergiert) spielen hiernach eine beachtenswerte Rolle. Fatou vermutet, daß die zugehörige Potenzreihe $\sum(a_n + ib_n)z^n$ dann stets den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat. K. K.

N. Lusin. Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier. C. R. **156**, 1655-1658.

Es handelt sich um eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Fourier-Reihe einer Funktion $f(x)$, deren Quadrat summierbar ist, „fast überall" (d. h. außer in einer Menge von Punkten des Maßes 0) konvergiert.

Sind $\sum(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ und $\sum(-b_n \cos nx + a_n \sin nx)$ mit konvergenter $\sum(a_n^2 + b_n^2)$ vorgelegt, so sind (nach Fischer-Rieß) beide Reihen die Fourier-Reihen von Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ mit summierbarem Quadrat. Dann lautet die Bedingung:

Es muß „fast überall"

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{g(x+\alpha) - g(x-\alpha)}{2\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha}\,d\alpha = f(x)$$

und auch fast überall

$$\lim_{n=\infty}\int_0^\pi \frac{g(x+\alpha) - g(x-\alpha)}{\alpha}\cos n\alpha\,d\alpha = 0$$

gelten. K. K.

Ch. N. Moore. On convergence factors in double series and the double Fourier's series. American M. S. Trans. **14**, 73-104.

Der fruchtbare Gedanke Fejérs, dem Studium der Fourierschen Reihen die Summabilitätstheorie (speziell die Cesàrosche) nutzbar zu machen, soll in der vorliegenden Arbeit auf die Fourierschen Doppelreihen ausgedehnt werden.

Dazu ist in den beiden ersten Paragraphen eine kurze Entwicklung der Summabilitätstheorie der Doppelreihen im allgemeinen dargestellt. Diese wird nur soweit entwickelt, als es für den vorliegenden Zweck unbedingt erforderlich ist. Sätze und Beweismethoden sind ganz ähnlich wie bei einfachen Reihen.

In § 3 wird die erhaltene Theorie auf die Fourierschen Doppelreihen angewendet und ein dem Fejérschen gleichwertiges Theorem erhalten: „Ist $f(x, y)$ in dem Quadrat $-\pi \leqq x, y \leqq +\pi$ beschränkt und (im Lebesgueschen Sinne) integrierbar, so ist die Entwicklung von $f(x, y)$ in eine Fourier-

sche Doppelreihe dort summierbar von der ersten Ordnung mit dem Funktionswert als Summe in jedem inneren Punkte des Quadrates, in dem $f(x, y)$ stetig ist. Die Summierbarkeit ist eine gleichmäßige in jedem abgeschlossenen Gebiete, das ganz innerhalb eines Stetigkeitsgebietes von $f(x, y)$ liegt.

In § 4 wird eine Anwendung auf die Theorie der Wärmeströmung gegeben.

Die Arbeit hat sehr viele Berührungspunkte mit der Abhandlung von Young, die F. d. M. **43**, 325, 1912 besprochen ist. K. K.

Ch. N. Moore. On the summability of the double Fourier's series of discontinuous functions. Math. Ann. **74**, 555-572.

In der vorstehend besprochenen Arbeit hat Moore die Summabilität erster Ordnung einer Fourierschen Doppelreihe in jedem Stetigkeitspunkt der zu entwickelnden Funktion bewiesen. In der vorliegenden Arbeit dehnt er die Untersuchung auf Unstetigkeitsstellen aus und gelangt so zu Sätzen, die den Fejérschen bei gewöhnlichen Fourierschen Reihen verwandt sind:

1. Ist $f(x, y)$ in dem Quadrat $-\pi \leqq x, y \leqq +\pi$ beschränkt und integrierbar und besitzt es in dem inneren Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ eine Unstetigkeitsstelle, derart, daß alle einer Umgebung von P_1 angehörenden weiteren Unstetigkeitsstellen eine durch P_1 gehende gerade Strecke erfüllen, und daß $f(x, y)$ Grenzwerte bei jeder Annäherung an Punkte dieser Strecke besitzt, so ist die Entwicklung von $f(x, y)$ in eine Fouriersche Doppelreihe summierbar von der ersten Ordnung mit dem arithmetischen Mittel der beiden in Betracht kommenden Grenzwerte als Summe.

2. Das Entsprechende gilt auch noch, wenn die Unstetigkeitsstellen zwei sich in P_1 senkrecht schneidende Strecken erfüllen, bezüglich des arithmetischen Mittels der 4 dann in Betracht kommenden Grenzwerte.

3. Desgleichen, wenn statt der Strecke ein glattes Kurvenstück mit Tangente in P zugelassen wird, welch letztere nicht den Achsen parallel ist.

Beispiele zeigen, daß einige der restriktiven Bedingungen wesentlich sind. K. K.

W. H. Young. On the multiplication of successions of Fourier constants. Lond. Roy. Soc. Proc. **87**, 331-339.

Die Reihe $\sum(a_n^{2k} + b_n^{2k})$, wo k eine beliebige positive ganze Zahl ist, $n = 1, 2, 3, \ldots$, konvergiert, wenn die $2k/(k-1)$-te Potenz der Funktion, von der a_n und b_n die Fourierschen Konstanten sind, summierbar ist. Die Verallgemeinerung des Parsevalschen Theorems wird bewiesen, und wichtige Folgerungen werden abgeleitet (Rev. sem. 22_1, 74). Lp.

W. H. Young. On the formation of usually convergent Fourier series. Lond. Roy. Soc. Proc. **88**, 178-188.

„Reihen, die mit Ausnahme einer Menge vom Inhalt Null konvergieren, oder die mit Benutzung eines gewöhnlich angenommenen Ausdruckes fast

überall (usually) konvergieren, besitzen viele von den Eigenschaften, die den überall konvergierenden Reihen zukommen. Es ist deshalb von Wichtigkeit, Umstände zu ersinnen, unter denen wir die Folgerung aufrecht erhalten können, daß eine Reihe in dieser Art konvergiert.“ Der Verf. verweist auf die bezüglichen Arbeiten betreffs der trigonometrischen Reihen von Jerosch und Weyl (F. d. M. **39**, 320, 1908 und **40**, 310, 1909), meint aber, es sei für den praktischen Gebrauch oft vorteilhafter, statt mit Kriterien für hinreichende und notwendige Bedingungen der Konvergenz nur mit solchen für hinreichende Bedingungen zu arbeiten, und faßt daher die Aufgabe von neuem direkt an. Als Ergebnis bezeichnet er den Satz: „Die Fouriersche Reihe für irgendeine Funktion von beliebigem Grade der Summierbarkeit und die zu ihr gehörige (allied) Reihe werden beide in Fouriersche Reihen verwandelt, die fast überall konvergieren, wenn die Koeffizienten a_n und b_n durch eine beliebig kleine Potenz des Zeigers n ihrer Stelle in der Reihe dividiert werden, mit anderen Worten, sie werden in solche Reihen verwandelt durch die Anwendung des Konvergenzfaktors n^{-k} $(0 < k)$ und durch die Anwendung des Konvergenzfaktors $(\log n)^{-1-k}$. Noch allgemeiner: Sie werden in solche Reihen durch die Anwendung des Konvergenzfaktors verwandelt, dessen Zähler die Einheit, dessen Nenner der Ausdruck ist:

$$l_1(n)\, l_2^2(n) \ldots l_{r-1}^2(n)\, [l_r(n)]^{2+k} \quad (0 < k),$$

wo $l_r(n) = \log l_{r-1}(n)$, $l_0(n) = n$ ist.“ Lp.

W. H. Young. On Fourier series and functions of bounded variation. Lond. Roy. Soc. Proc. 88, 561-568.

In einer früheren Mitteilung hatte der Verf. gezeigt: Die Folge der Konstanten, die man dadurch erhält, daß zwei Folgen Fourierscher Konstanten in der von selbst sich bietenden Weise miteinander multipliziert werden, ist eine Folge Fourierscher Konstanten. Außerdem wurde die Summierbarkeit der Funktion erörtert, mit der die neuen Konstanten verknüpft sind. Der Gebrauch der Fourierschen Konstanten einer geraden Funktion $g(x)$ als Konvergenzfaktoren in der Fourierschen Reihe einer Funktion $f(x)$ verwandelt die letztere in eine Fouriersche Reihe, während die Summierbarkeit der mit der neuen Reihe verknüpften Funktion erhöht ist. Der Gebrauch der Fourierschen Konstanten einer ungeraden Funktion als Konvergenzfaktoren hat andrerseits die Wirkung, die zu der Fourierschen Reihe von $f(x)$ gehörige (allied) Reihe in eine Fouriersche Reihe zu verwandeln, selbst wenn die zugehörige Reihe keine Fouriersche Reihe ist.

In Erweiterung dieser Sätze werden jetzt die folgenden bewiesen: „Wenn die Koeffizienten der abgeleiteten Reihe einer Fourierschen Reihe einer ungeraden Funktion von beschränkter Schwankung als Konvergenzfaktoren gebraucht werden, bleibt die Fouriersche Reihe einer allgemeinen summierbaren Funktion die Fouriersche Reihe einer summierbaren Funktion, während der Grad der Summierbarkeit der Funktion im allgemeinen ungeändert ist. Andererseits, wenn die benutzte Funktion von beschränkter Schwankung gerade ist, so haben die durch die Ableitung ihrer Fourierschen Reihe erhaltenen entsprechenden Konvergenzfaktoren die Wirkung, die zugehörige Reihe

einer Fourierschen Reihe in die Fouriersche Reihe einer Funktion zu verwandeln, die denselben Grad der Summierbarkeit hat wie die ursprüngliche Fouriersche Reihe.“ Lp.

W. H. Young. On a condition that a trigonometrical series should have a certain form. Lond. Roy. Soc. Proc. 88, 569-574.

Beweise des folgenden Satzes: Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß eine trigonometrische Reihe $\sum (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$ die abgeleitete Reihe der Fourierschen Reihe einer Funktion von begrenzter Schwankung sei, ist $\int_{-\pi}^{\pi} | f_n(x) | \, dx \leqq C$, wo C eine von n unabhängige Konstante ist und $f_n(x)$ die partielle Cesàrosche Summation der gegebenen Reihe, oder endlich: Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß eine gegebene trigonometrische Reihe die Fouriersche Reihe einer beschränkten Funktion sei, ist $| f_n(x) | \lesseqgtr B$ für alle Werte von n und x, wo B eine endliche Konstante ist. Lp.

W. H. Young. On trigonometrical series whose Cesàro partial summations oscillate finitely. Lond. Roy. Soc. Proc. (A) 89, 150-157.

„Riemanns merkwürdiger Satz, der in der erweiterten Form, die Lebesgue ihm vermöge des Gebrauches des Begriffes der verallgemeinerten Integration gegeben hat, aussagt, daß eine trigonometrische Reihe eine Fouriersche Reihe ist, wenn sie mit Ausnahme in einer reduziblen Punktmenge überall gegen eine Funktion konvergiert, die summierbar ist und einen überall endlichen Wert (oder Werte) hat, ist von einer verhältnismäßig großen Zahl von Forschern besprochen und noch weiter ausgedehnt worden. Gegenstand der gegenwärtigen Mitteilung ist die Aufstellung und der Beweis gewisser Ergebnisse, die alle bisher bekannten einschließen. Es sind die folgenden Theoreme: I. Wenn die oberen und unteren Funktionen der Folge der Cesàroschen partiellen Summationen (Index nicht größer als 1) einer trigonometrischen Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty}(a_r \cos rx + b_r \sin rx) \equiv \sum_{r=1}^{\infty} A_r,$$

bei der $a_n \to 0$ und $b_n \to 0$ für $n \to \infty$, summierbar sind und überall endlich, etwa mit Ausnahme in einer Punktmenge, die keine perfekte Untermenge hat, so ist die Reihe eine Fouriersche Reihe. II. Wenn die oberen und die unteren Funktionen der Folge der Cesàroschen partiellen Summationen (Index k, wo $0 \lesseqgtr k < 1$) einer trigonometrischen Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} A_r$ summierbar und überall endlich sind, so ist die Reihe eine Fouriersche Reihe.“ Lp.

W. H. Young. On the Fourier series of bounded fonctions. Lond. Math. Soc. Proc. (2) **12**, 41-70.

Die wesentlichen Resultate der Untersuchungen, welche sich unmittelbar an frühere Untersuchungen des Verf. anschließen (F. d. M. **43**, 323-326, 1912), sind die folgenden: Ist für die beschränkte Funktion $f(x)$:

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2} a_0 + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

so werden die Reihen mit dem allgemeinen Gliede $a_n q_n$ konvergieren, wenn $q_n \log n$ gegen Null konvergiert, während über die Folge $q_1, q_2, \ldots$ sehr allgemeine Voraussetzungen gemacht werden können; die Reihen mit dem allgemeinen Gliede $b_n q_n$ konvergieren, wenn $\sum \frac{q_n}{n}$ konvergent und die Folge $q_1, q_2, \ldots$ eine monoton abnehmende Folge mit der Grenze Null ist. Ist $f(x)$ stetig oder nur mit Unstetigkeiten erster Art behaftet, so ist $\sum a_n \log n$ konvergent. Ist $f(x)$ eine Funktion mit beschränkter Schwankung, so sind $na_n q_n$ und $nb_n q_n$ die Fourierschen Konstanten einer (im Lebesgueschen Sinne) integrierbaren Funktion, wenn (unter im übrigen ziemlich weiten Voraussetzungen) die Folge $q_1, q_2, \ldots$ monoton abnehmend mit der Null als Grenze ist und ihre Dekremente gleichfalls eine monoton abnehmende Folge darstellen; es sind ferner $nb_n q_n$ und $na_n q_n$ die Fourierschen Konstanten einer (im Lebesgueschen Sinne) integrierbaren Funktion, wenn — unter im übrigen ziemlich weiten Voraussetzungen — die Folge $q_1, q_2, \ldots$ monoton abnehmend mit der Null als Grenze ist und $\sum \frac{q_n}{n}$ als konvergent vorausgesetzt wird. A. K.

W. H. Young. On the determination of the summability of a function by means of its Fourier constants. Lond. Math. Soc. Proc. (2) **12**, 71-88.

Das Resultat: „Wenn eine trigonometrische Reihe

$$\tfrac{1}{2} a_0 + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

derart beschaffen ist, daß

$$\sum (a_n^{1+1/p} + b_n^{1+1/p}),$$

wo p eine ungerade ganze Zahl vorstellt, eine konvergente Reihe ist, so ist die trigonometrische Reihe die Fouriersche Reihe einer Funktion $f(x)$, deren $(1+p)$-te Potenz (im Lebesgueschen Sinne) integrierbar ist", vervollständigt in gewisser Hinsicht ein in einer früheren Notiz des Verf. „Sur la généralisation du théorème de Parseval" (F. d. M. **43**, 323, 1912) gegebenes Resultat. A. K.

W. H. Young. On the mode of oscillation of a Fourier series and of its allied series. Lond. Math. Soc. Proc. (2) **12**, 433-452.

Wie in einer Anzahl früherer Arbeiten beschäftigt sich der Verf. auch hier mit der Auffindung gewisser Konvergenzfaktoren, welche die Fouriersche Reihe

$$\tfrac{1}{2} a_0 + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

sicher konvergent machen; daneben beschäftigt er sich in dieser Abhandlung mit der Art der Oszillation der Fourierschen Reihen, bei Anbringung von Faktoren, welche ihrer Größenordnung nach noch nicht imstande sind, eine Konvergenz der Reihen zu bewirken. A. K.

G. H. HARDY. On the summability of Fourier's series. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 365-372.

Im Anschluß an Arbeiten von W. H. Young (vgl. F. d. M. **43**, 324, 1912) wird für die zu einer summierbaren Funktion gehörige Fourier-Reihe

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

bewiesen:

1. Sie ist für jedes positive δ „fast überall" summierbar (C, δ).
2. Für die n-te Partialsumme s_n gilt „fast überall" die Abschätzung

$$s_n = o(\log n).$$

3. Die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{\log n}$$

konvergiert „fast überall". K. K.

W. H. YOUNG. On the usual convergence of a class of trigonometrical series. Lond. M. S. Proc. (2) **13**, 13-28.

In nahem Zusammenhang mit der vorstehend besprochenen und eigenen früheren Arbeiten (vgl. F. d. M. **42**, 283-287, 1911) werden einige Sätze verallgemeinert oder verfeinert; so wird u. a. erhalten:

Die abgeleitete Reihe der Fourier-Reihe einer Funktion von beschränkter Schwankung konvergiert „fast überall" gegen die Ableitung der Funktion. K. K.

G. H. HARDY et J. E. LITTLEWOOD. Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable. C. R. **156**, 1307-1309.

Ist $f(x)$ summierbar und

$$\tfrac{1}{2}A_0 + \sum A_m = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum(a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

ihre Fourier-Reihe, so ist (nach Fejér) diese Reihe von erster Ordnung summierbar mit der Summe $s = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ für jedes x, für das dieser Ausdruck einen Sinn hat. Es ist dort also

$$\lim \frac{(s_0 - s) + (s_1 - s) + \cdots + (s_n - s)}{n+1} = 0,$$

wenn $s_m = \frac{1}{2}A_0 + A_1 + \cdots + A_m$ ist. Es wird nun in dieser Richtung bewiesen:

1. Ist $f(x)^2$ summierbar, so ist auch

$$\lim \frac{(s_0 - s)^2 + (s_1 - s)^2 + \cdots + (s_n - s)^2}{n+1} = 0.$$

2. Dies ist „fast überall" auch dann richtig, wenn $s = f(x)$ genommen wird. K. K.

H. STEINHAUS. Sur le développement du produit de deux fonctions en une série de Fourier. Krakau Anz. (A) 1913, 113-116.

Lebesgue hat den Satz bewiesen: Sind $f(\vartheta)$ und $\lambda(\vartheta)$ zwei stetige Funktionen mit der Periode 2π, deren zweite in der Umgebung von $\vartheta = x$ stetige Ableitungen bis zur vierten Ordnung besitzt, so konvergieren die Fourier-Reihen von f und $f\lambda$ stets gleichzeitig in x.

Verf. zeigt, daß es vorauszusetzen genügt, es sei $f(\vartheta)$ beschränkt und summabel, und es genüge $\lambda(\vartheta)$ der „Dinischen Bedingung", d. h. es sei

$$\left|\frac{\lambda(x+t) - \lambda(x)}{t}\right|$$

als Funktion von t in jedem Intervall summabel. K. K.

TH. ANGHELUTZA. Quelques remarques sur le développement exponentiel de Cauchy. C. R. **156**, 1358-1361.

TH. ANGHELUTZA. Sur une généralisation de la sommation de Riemann. C. R. **157**, 108-110.

In der ersten Note zeigt Verf., daß die Cauchyschen Exponentialreihen (vgl. Picard, Traité 2, Kap. VII, 2) durch die Methoden summiert werden können, die bei den Fourier-Reihen zum Ziele führen, insbesondere also durch die Methode der arithmetischen Mittel. In der zweiten Note zeigt er, durch eine Bemerkung Picards veranlaßt, daß hier die „sommation exponentielle" das adäquatere Hülfsmittel ist. K. K.

E. W. HOBSON. On the convergence of series of orthogonal functions. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 297-308.

Ist $f(x)$ und $(f(x))^2$ im Sinne Lebesgues in $-\pi \cdots +\pi$ summierbar, so ist für die Folge der zugehörigen Fourier-Koeffizienten bekanntlich

$$\tfrac{1}{2} a_0 + \sum (a_n^2 + b_n^2)$$

konvergent, und der entsprechende Satz gilt für alle Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten: Bilden $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ ein normiertes Orthogonalsystem in (a,b) und sind $c_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx$ die zugehörigen Entwicklungskoeffizienten, so ist $\sum c_n^2$ konvergent; und umgekehrt (Fischer-Rieß) ist diese Konvergenz einer $\sum c_n^2$ auch hinreichend dafür, daß eine $f(x)$ existiert, welches die gegebenen c_n liefert. Und diese Sätze sind unabhängig davon, ob $\sum c_n\,\varphi_n(x)$ selbst konvergiert oder nicht. Doch gibt es schon eine Anzahl hin-

reichender Bedingungen, die diese Konvergenz „fast überall" zur Folge haben, so wenn

1. $\sum n^{1/2} c_n^2$ noch konvergiert (Weyl),

2. $\varphi_n(x)$ gleichmäßig beschränkt ist und wenigstens $\sum n^{\frac{1}{3}} c_n^2$ konvergiert (Weyl).

In der vorliegenden Abhandlung zeigt Hobson, daß es genügt, wenn $\sum n^k c_n^2$ für irgendein positives k konvergiert (also sicher, wenn für ein positives λ: $n^{\frac{1}{2}+\lambda} c_n \to 0$), und dies ohne jede Einschränkung über die $\varphi_n(x)$. Die Konvergenz von $\sum c_n \varphi_n(x)$ ist dann sogar „fast" gleichmäßig in (a, b).

K. K.

M. Plancherel. Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales. C. R. **157**, 539-542.

Indem die von Hobson angegebene Methode (vgl. vorstehendes Referat) zur Untersuchung der Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten, in ihren Einzelheiten modifiziert wird, gelangt Verf. zu dem folgenden weiteren Satze, der nun wieder das Hobsonsche Resultat als Spezialfall einschließt:

Wenn nur $\sum (\log n)^3 c_n^2$ konvergiert, so ist $\sum c_n \varphi_n(x)$ in (a, b) fast überall konvergent.

K. K.

L. Fejér. Sur les polynomes harmoniques quelconques. C. R. **157**, 506-509.

Eine in einem Kreise und auf dessen Rande reguläre harmonische Funktion $u(x, y)$ hat im Mittelpunkte bekanntlich einen mittleren Wert zwischen Maximum und Minimum auf dem Rande:

$$m \leqq u(x_0, y_0) \leqq M.$$

Für ein harmonisches Polynom $P_n(x, y)$ des Grades n wird die genauere Abschätzung

$$m + \frac{M-m}{n+1} \leqq P_n(x_0, y_0) \leqq M - \frac{M-m}{n+1}$$

bewiesen. Und das Gleichheitszeichen gilt hierbei nur für gewisse leicht angebbare Polynome. — Der Beweis stützt sich auf einen entsprechenden Satz über definite trigonometrische Polynome: „Ist

$$\varphi(\vartheta) = 1 + a_1 \cos \vartheta + b_1 \sin \vartheta + \cdots + a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta$$

ein solches von einer Ordnung $\leqq n$, und ist stets $\varphi(\vartheta) \geqq 0$, so ist

$$\varphi(0) \leqq n + 1$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur bei speziellen, leicht angebbaren Polynomen.

K. K.

L. Fejér. Sur les polynomes trigonométriques. C. R. **157**, 571-574.

Für den im vorstehenden Referat genannten Satz über trigonometrische Polynome wird ein neuer und sehr einfacher Beweis gegeben und aus ihm gefolgert: Ist

$$F(\vartheta) = a_1 \cos \vartheta + b_1 \sin \vartheta + \cdots + a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta$$

ein beliebiges trigonometrisches Polynom ohne konstantes Glied, von einer Ordnung $\leqq n$, und M und m Maximum und Minimum für $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$, so ist, da auf $\frac{F(\vartheta)+m}{m}$ und $\frac{M-F(\vartheta)}{M}$ der vorige Satz anwendbar ist,

$$m \leqq nM \text{ und } M \leqq n \cdot m,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur bei speziellen, leicht angebbaren Polynomen.
K. K.

W. Lichtenberg. Przyczynek do teoryi szeregów funkcyj (Ein Beitrag zur Theorie der Reihen von Funktionen). Wiad. mat. **16**, 197-199.

Es bedeute $\varphi(x)$ die absolute Differenz zwischen x und der nächsten ganzen Zahl. Die Reihe

$$f(x) = \frac{\varphi(3x)}{1} - \frac{\varphi(3x)}{1} + \cdots + \frac{\varphi(3^k x)}{k} - \frac{\varphi(3^k x)}{k} + \cdots$$

ist stets konvergent und gleich Null, und zwar unbedingt konvergent für $x = l/3^q$, wo l, q ganze Zahlen sind, dagegen nur bedingt konvergent für $x = (l + \frac{1}{2})/3^q$. Somit ist diese Reihe pantachisch unbedingt und pantachisch bedingt konvergent.
A. R.

T. H. Gronwall. Über die Laplacesche Reihe. Math. Ann. **74**, 213-270.

Bedeuten ϑ und φ Poldistanz und geographische Länge eines Punktes auf der Einheitskugel K, ist $f(\vartheta, \varphi)$ eine eindeutige Funktion auf K, für die das (Riemannsche) Oberflächenintegral $\int_K f(\vartheta, \varphi) do$ existiert, ist γ $(0 \leqq \gamma \leqq \pi)$ der zu den Punkten (ϑ, φ) und (ϑ', φ') gehörige Zentriwinkel und $P_n(x)$ das n-te Legendresche Polynom, so ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{\pi} \int_K f(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\gamma) do'$$

die zu $f(\vartheta, \varphi)$ gehörige Laplacesche Reihe. Diese geht, falls $f(\vartheta, \varphi)$ von φ unabhängig ist und $\cos\vartheta = x$, $f(\vartheta, \varphi) = f(x)$ gesetzt wird, in die Legendresche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \text{ mit } c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx$$

über. Die Frage, ob und wie diese Reihen konvergieren, und welche Summe sie bejahendenfalls haben, bietet ähnliche Schwierigkeiten und ähnliche Erscheinungen wie die analogen Probleme bei den Fourierschen Reihen. In der vorliegenden Arbeit handelt es sich um Fragestellungen, die für Fouriersche Reihen von Fejér und Lebesgue ausführlich behandelt worden sind;

zur Formulierung der Probleme vgl. die Referate über die Arbeiten des ersteren in F. d. M. **40**, 440, 1909; **41**, 288 u. 289, 1910, sowie Gronwall, F. d. M. **43**, 321, 1912.

Nachdem in § 1 einige Hülfssätze über Kugelfunktionen entwickelt worden sind, werden in § 2 die Lebesgueschen Konstanten nullter Ordnung ϱ_n eingeführt und für sie das asymptotische Gesetz $\varrho_n \sim 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{n}$ ermittelt. In § 3 wird eine stetige Funktion konstruiert, deren Legendresche Reihe an einer Stelle nicht konvergiert (Du Bois-Reymondsche Singularität), in § 4 ein zweites derartiges Beispiel; das erste schließt sich an die Fejérsche Konstruktion an, das zweite an die Lebesgue-Haarsche Methode. In § 5 wird das Beispiel einer stetigen Funktion gegeben, deren Legendresche Reihe zwar überall konvergiert, bei einem Punkte aber nicht gleichmäßig (Lebesguesche Singularität).

Im zweiten Teile der Arbeit wird die Summation der Laplaceschen Reihe nach dem Verfahren der arithmetischen Mittel behandelt. Vgl. hierzu Fejér, F. d. M. **40**, 499, 1909. Die Fejérschen Resultate werden erheblich verbessert. Verf. gelangt zu dem folgenden Hauptresultat seiner Arbeit:

„Die Laplacesche Reihe einer jeden absolut integrablen Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ ist summierbar erster Ordnung mit der Summe $f(\vartheta, \varphi)$ in jedem Punkte, wo die Funktion stetig ist, und in einem Bereiche, welcher ganz innerhalb eines Stetigkeitsbereiches liegt, ist die Summierbarkeit gleichmäßig."

§§ 8, 9 erweitern das Resultat für den Fall gewisser Unstetigkeiten und auf den Fall nur bedingt integrabler Funktionen. K. K.

H. Bohr. Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln in der Theorie der Dirichletschen Reihen $\sum \frac{a_n}{n^s}$. Gött. Nachr. 1913, 441-488.

Ist $\sum a_n n^{-s}$ eine gewöhnliche Dirichletsche Reihe, und setzt man $p_m^{-s} = y_m$ ($p_m = m$-te Primzahl), so läßt sich zunächst rein formal $\sum a_n n^{-s}$ als Potenzreihe von unendlich vielen Variabeln schreiben:

$$P(y_1, y_2, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_{n_1}^{\nu_1} y_{n_2}^{\nu_2} \cdots y_{n_r}^{\nu_r},$$

wo die n_λ und ν_λ die Indexe und Exponenten bei der Zerlegung von n in Primzahlen bedeuten. Also

$$\sum a_n n^{-s} = c + \sum_\alpha c_\alpha y_\alpha + \sum_{\alpha \leqq \beta} c_{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta + \cdots.$$

Es wird nun die Potenzreihe der unendlich vielen Veränderlichen x_λ

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = c + \sum_\alpha c_\alpha x_\alpha + \sum_{\alpha \leqq \beta} c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + \cdots$$

als die zur Dirichletschen Reihe „gehörige" Potenzreihe bezeichnet; und deren Eigenschaften stehen in tiefem Zusammenhang miteinander. Von den vielen interessanten Sätzen hierüber können nur einige Proben angegeben werden:

1. Bezeichnet U die Menge der Werte, die $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt, auf der $\sum | a_n | n^{-\sigma_0}$ konvergiert, und bezeichnet V die Menge der Werte, die die Potenzreihe für

$$| x_1 | \leqq p_1^{-\sigma_0}, | x_2 | \leqq p_2^{-\sigma_0}, \ldots, | x_m | \leqq p_m^{-\sigma_0}, \ldots$$

annimmt, so ist U in V enthalten, und es liegt U überall dicht in V.

2. Liegt σ_0 im Innern des Gebietes absoluter Konvergenz, und bezeichnet nun W die Menge der Werte, die $f(s)$ auf $\sigma = \sigma_0$ oder in beliebiger Nähe dieser Geraden anzunehmen vermag, so ist sogar $W \equiv V$.

3. Es sei $P(x_1, x_2, \ldots)$ im Gebiete $| x_1 | \leqq G_1, | x_2 | \leqq G_2, \ldots$ (im Sinne Hilberts) beschränkt, und es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine Folge positiver echter Brüche, für die $\sum \varepsilon_n^2$ konvergiert; dann ist die Potenzreihe P im Gebiete

$$| x_1 | \leqq \varepsilon_1 G_1, | x_2 | \leqq \varepsilon_2 G_2, \ldots, | x_m | \leqq \varepsilon_m G_m, \ldots$$

absolut konvergent.

4. Die weiteren Sätze beziehen sich auf die Bedeutung der Zahl S, welche die obere Grenze aller derjenigen Zahlen α darstellt, für die der vorige Satz mit $\sum \varepsilon_n^\alpha$ statt $\sum \varepsilon_n^2$ richtig bleibt. S steht in wichtigem Zusammenhang mit den Konvergenzproblemen der Dirichletschen Reihen (vgl. F. d. M. **43**, 328, 1912 sowie nachstehende Referate). Es ergibt sich insbesondere, daß $B - C \leqq \frac{1}{2}$ ist, wenn B und C die Abszissen der absoluten, bzw. gleichmäßigen Konvergenz bedeuten. K. K.

H. Bohr. Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen. J. für Math. **143**, 203-211.

H. Bohr. Darstellung der gleichmäßigen Konvergenzabszisse einer Dirichletschen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ als Funktion der Koeffizienten der Reihe. Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 326-330.

Neben den bekannten Grenzgeraden $\sigma = A$ und $\sigma = B$ der gewöhnlichen, bzw. absoluten Konvergenz einer Dirichletschen Reihe $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ hatte Bohr in einer Note (s. F. d. M. **41**, 291, 1910) eine dritte Gerade $\sigma = C$, die der gleichmäßigen Konvergenz, eingeführt: In der Halbebene $\sigma > C + \varepsilon$ ist die Reihe gleichmäßig konvergent, für $\sigma > C - \varepsilon$ dagegen nicht mehr. Es ist natürlich $A \leqq C \leqq B$. Jetzt führt er eine vierte Gerade $\sigma = D$ ein durch die Bedingung: Für $\sigma = D + \varepsilon$ ist die durch die Reihe definierte Funktion regulär und beschränkt, für $\sigma > D - \varepsilon$ dagegen nicht mehr. Diese Gerade ist also durch eine sehr einfache funktionentheoretische Eigenschaft definiert.

Es ist nun im allgemeinen $C = D$. Genauer:

1. Ist die Exponentenfolge (λ_n) so beschaffen, daß ein $l \geqq 0$ existiert, für das bei jedem $\delta > 0$

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O(e^{\lambda_n (l+\delta)})$$

gilt, und hat die Reihe $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ überhaupt ein Konvergenzgebiet, so ist $C = D$ (und beide $< +\infty$).

2. Ist $\lim \frac{\log n}{\lambda_n} = 0$, so ist (falls $A < +\infty$) $A = B = C = D$. In der zweiten Arbeit wird für den Fall gewöhnlicher Dirichletscher Reihen

$\sum a_n n^{-s}$ (für die 1. gilt) eine explizite Formel für C — analog den bekannten Formeln für A und B — gewonnen:

Für $x \geqq 1$ setze man $\sum_{n=1}^{x} a_n n^{-s} = S_x(s)$ und bezeichne mit T_x die obere Grenze von $|S_x(it)|$, $t = -\infty \cdots +\infty$; dann ist, falls $C > 0$,

$$C = \limsup_{x=+\infty} \frac{\log T_x}{\log x}.$$

K. K.

H. Bohr. Ein Satz über Dirichletsche Reihen. Münch. Ber. 1913, 557-562.

Es wird der folgende Satz bewiesen:

„Es sei die Dirichletsche Reihe $f(s) = f(\sigma + ti) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ (mit $0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots \to +\infty$) in einer gewissen Halbebene absolut konvergent. Zwei reelle Zahlen G und H seien so beschaffen, daß $f(s)$ in der Viertelebene $\sigma > G$, $t > H$ regulär und beschränkt ist. Dann ist $f(s)$ in der ganzen Halbebene $\sigma > G$ regulär und beschränkt.“ K. K.

H. Bohr. Note sur la fonction zéta de Riemann $\zeta(s) = \zeta(\sigma + ti)$ sur la droite $\sigma = 1$. Ac. Royale des Sc. et d. Lettr. d. Danemark 1913, No. 1, 3-11.

In einer früheren Note (s. F. d. M. **42**, 443, 1911) hatte Bohr bewiesen, daß die Funktion $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$, ja sogar auf der Geraden $\sigma = 1$ selbst, beliebig kleiner Werte fähig ist.

In der vorliegenden Arbeit wird der Wertevorrat von $\zeta(s)$ auf der Geraden $\sigma = 1$ genauer charakterisiert:

Ist ϑ eine beliebige Amplitude, so liegen auf dem Halbstrahl $re^{i\vartheta}$ $(0 < r < \infty)$ unendlich viele Zahlen, die von $\zeta(s)$ auf jener Geraden angenommen werden, und unter diesen gibt es beliebig kleine und auch beliebig große. K. K.

H. Bohr und E. Landau. Beiträge zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion. Math. Ann. **74**, 3-30.

In dieser Arbeit werden, wie auch in der nachfolgenden, eine Reihe von Resultaten hergeleitet unter der Annahme, daß die Riemannsche Vermutung über die Lage der komplexen Nullstellen der Zetafunktion richtig sei. Diese Sätze sind u. a.:

1. Es gibt eine absolute Konstante a mit folgender Eigenschaft: für jedes ϑ mit $0 < \vartheta < \frac{1}{2}$ und jedes reelle τ hat die Ungleichung

$$|\log \zeta(s)| > (\log t)^{a\vartheta}$$

im Gebiete $\sigma \geqq 1 - \vartheta$, $t \geqq \tau$ eine Lösung.

2. Bezeichnet $N(T)$ die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$ im Rechteck $0 \leqq \sigma \leqq 1, 0 \leqq t \leqq T$, und setzt man

$$N(T) - \left\{ \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} T \right\} = P(T),$$

so ist bekanntlich $P(T) = O(\log T)$. Bei passender Wahl einer absoluten Konstante c ist aber $P(T) \neq O(\log^c T)$, nämlich sogar

$$\liminf_{T=\infty} \frac{P(T)}{\log^c T} = -\infty, \ \limsup_{T=\infty} \frac{P(T)}{\log^c T} = +\infty.$$

3. Für jedes $\nu \geqq 1$ ist auf der Geraden $\sigma = 1$

$$\frac{d^\nu \log \zeta(s)}{ds^\nu} = O([\log \log t]^\nu).$$

4. Ist $\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$, so nimmt $\zeta(s)$ im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ jeden Wert außer 0 unendlich oft an. K. K.

H. Bohr, E. Landau, J. E. Littlewood. Sur la fonction $\zeta(s)$ dans le voisinage de la droite $\sigma = \frac{1}{2}$. Belg. Bull. Sc. 1913, 35 S.

Diese in den belgischen Akademieberichten erschienene gemeinsame Arbeit eines deutschen, eines dänischen und eines englischen Mathematikers fördert sehr wesentlich die Kenntnis der Riemannschen Zetafunktion, allerdings unter der Annahme der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung, daß alle komplexen Nullstellen der Zetafunktion den reellen Teil $\frac{1}{2}$ haben, was bei den folgenden Sätzen zu beachten ist.

In dem ersten, im wesentlichen von Bohr herrührenden Kapitel wird bewiesen, daß sich unter dieser Annahme die Riemann-v. Mangoldtsche Formel

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T)$$

für die Anzahl $N(T)$ der im Rechteck $(0 \leqq \sigma \leqq 1, 0 \leqq t \leqq T)$ gelegenen Nullstellen von $\zeta(\sigma + ti)$ dahin verfeinern läßt, daß $o(\log T)$ statt $O(\log T)$ gesetzt werden darf. Das hat zur Folge, daß nun auch die Anzahl der Nullstellen für ein Ordinatenintervall asymptotisch angegeben werden kann; es ist für festes $\delta > 0$

$$\lim_{T=\infty} \frac{N(T+\delta) - N(T)}{\log T} = \frac{1}{2\pi} \delta.$$

In dem zweiten (Landauschen) Kapitel wird bewiesen: 1. Ist a eine beliebige komplexe Zahl und $N(a, T)$ die stets endliche Anzahl der Wurzeln von $\zeta(s) = a$ im Streifen $1 \leqq t \leqq T, T > 1$, so ist, falls $a \neq 1$:

$$N(a, T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T),$$

dagegen für $a = 1$:

$$= \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log 4\pi}{2\pi} T + O(\log T),$$

und dies unabhängig von der Riemannschen Annahme. — 2. Unter der Voraussetzung der Richtigkeit dieser Annahme ist

$$\lim \Phi(x) / \Psi(x) = 1,$$

wenn $\Phi(x)$ die Anzahl der Wurzeln von $\zeta(s) = a$ (a beliebig) im Kreise $|s| \leqq x$, $\Psi(x)$ die Anzahl derjenigen dieser Wurzeln bedeutet, für die noch $\frac{1}{2} - \delta < \sigma < \frac{1}{2} + \delta$ ist.

In dem von Littlewood stammenden dritten Kapitel wird die sehr bemerkenswerte Entdeckung gemacht: Ist $A > 0, \delta > 0$, so läßt sich $\tau_1 = \tau_1(A, \delta)$ so angeben, daß für jedes $\tau > \tau_1$ die Funktion $\zeta(s)$ im Kreise $|s - (\frac{1}{2} + \tau i)| < \delta$ jeden Wert a mit $|a| < A$ annimmt, falls Riemanns Annahme richtig ist. K. K.

E. Landau. Über die Nullstellen Dirichletscher Reihen. Berl. Ber. 1913, 897-907.

„Im folgenden werde ich die überraschende Tatsache feststellen: Eine gewisse Eigenschaft der Riemannschen Zetafunktion und der allgemeineren Funktionen $L(s) = \sum \chi(n)\, n^{-s}$, wo $\chi(n)$ ein Charakter modulo k ist, kommt sämtlichen Dirichletschen Reihen $\sum a_n n^{-s}$ zu, ja sogar sämtlichen Dirichletschen Reihen des allgemeineren Typus $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$. Dies war darum nicht zu erwarten, weil die für $\zeta(s)$ und $L(s)$ vorhandenen Beweismethoden ganz spezielle Eigenschaften dieser Funktionen benutzen, welche offensichtlich den beliebigen Dirichletschen Reihen fehlen: Die Existenz der Funktion in der ganzen Ebene; die Funktionalgleichung zwischen den Werten für $s = \sigma + ti$ und $1 - s$, die dadurch hervorgerufene Nichtexistenz von Nullstellen in der Halbebene $\sigma < 0$ außerhalb der reellen Achse, das Hineingreifen der Gammafunktion, die Anwendbarkeit der Hadamardschen Theorie der ganzen Funktionen usw."

Es handelt sich um folgende Eigenschaft: Bezeichnet $A(T)$ die Anzahl der Nullstellen von $L(s)$ im Gebiet $\sigma > 0$, $T < t \leqq T + 1$, so ist $A(T) = O(\log T)$, und dieselbe Beziehung bleibt auch richtig, wenn man sich auf das Gebiet $\sigma > \delta$ (> 0), $T < t \leqq T + 1$ beschränkt.

Während diese Eigenschaft mit $\sigma > 0$ nun keinesfalls allgemein für beliebige Reihen richtig sein kann, ist sie es überraschenderweise mit $\sigma > \delta$. Desgleichen für die Reihen $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ die Beziehung

$$A(T) = O(\log^2 T).$$

K. K.

J. Grossmann. Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion und der Dirichletschen L-Funktionen. Diss. Göttingen 1913, 99 S.

Diese Dissertation, die auf dem Boden des Landauschen Arbeitsgebietes entstanden ist, beschäftigt sich mit dem heißumworbenen Problem, die Lage der komplexen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion und der nahe verwandten Dirichletschen L-Funktionen zu ermitteln. Bekanntlich hat Riemann bezüglich der Zetafunktion die Vermutung ausge-

sprochen, daß jene Nullstellen alle den reellen Teil $\frac{1}{2}$ haben. Durch v. Mangoldt, de la Vallée Poussin, Gram und Lindelöf sind bestimmte Ergebnisse hierüber gefördert worden: Auf jener Geraden liegen tatsächlich 20 Nullstellen, deren Ordinaten absolut genommen < 50 sind.

Verf. beweist nun zunächst, daß diese 20 Nullstellen (sämtlich einfache) die einzigen sind, deren Ordinaten $\leqq 50$. Durch eine fast gleichzeitig erschienene Arbeit von Backlund ist jenes Resultat insofern übertroffen, als dieser feststellt, daß sogar alle Nullstellen, deren Ordinaten absolut genommen $\leqq 100$ sind, auf jener Geraden liegen. Doch unterscheiden sich die Beweismethoden beider wesentlich voneinander, so daß jede ihren Wert behält.

Verf. wendet überdies seine Methoden an, um bei den L-Funktionen das entsprechende zu beweisen: die ersten komplexen Nullstellen liegen auf der genannten Geraden. Wenigstens gelingt ihm dieser Beweis — übrigens unter Aufwand eines ganz bedeutenden Rechenapparates — für diejenigen L-Funktionen, die den eigentlichen Charakteren modulo 3, 4, 5, 7 und 9 entsprechen.

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der asymptotischen Abschätzung der Anzahl $N(T)$ der Nullstellen, deren Ordinate zwischen 0 und T gelegen ist, für große T.

Es war bezüglich der Zetafunktion bekannt, daß

$$\frac{2\pi N(T) - T \log T + (1 + \log 2\pi)T}{2\pi \log T}$$

unterhalb einer festen Konstante bleibt, ja sogar daß

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + \eta \,\{ 0{,}43200 \log T + 1{,}91662 \log \log T \}$$

mit $-1 < \eta < +1$ ist (v. Mangoldt).

In dieser Gleichung werden die Konstanten in der $\{\cdots\}$ ein wenig verbessert.

Bezüglich der L-Funktionen war bisher nur bekannt (Landau), daß der Quotient

$$\frac{2\pi N(T) - T \log T + \left(1 + \log \frac{2\pi}{k}\right) T}{2\pi \log T}$$

unterhalb einer festen Konstante läge. Für diese Konstante wird eine obere Grenze angegeben: Sie ist, unabhängig von k, $\leqq 0{,}29062$. K. K.

T. H. Gronwall. Über das Verhalten der Riemannschen Zetafunktion auf der Geraden $\sigma = 1$. Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 231-238.

Die bisher besten Abschätzungen für das Verhalten von $\zeta(s) = \zeta(\sigma + ti)$ auf der Geraden $\sigma = 1$ für große t waren:

$$|\zeta(1 + ti)| < \log t + c_1 \quad \text{und} \quad \left| \frac{1}{\zeta(1 + ti)} \right| < c_2 \log t \cdot \log \log t.$$

Diese Beziehungen werden zu

$$|\zeta(1+ti)| < \frac{3}{4}\log t + c_3 \text{ und } \left|\frac{1}{\zeta(1+ti)}\right| < c_4 \log t \cdot [\log\log t]^{\frac{3}{8}}$$

verschärft. K. K.

T. H. Gronwall. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann au voisinage de $\sigma = 1$. Palermo Rend. **35**, 95-102.

In Verschärfung und Erweiterung der Resultate der vorstehenden Arbeit wird bewiesen:

$$1. \qquad \left|\frac{1}{\zeta(\sigma+ti)}\right| < c\log t,$$

$$2. \qquad \left|\frac{\zeta'(\sigma+ti)}{\zeta(\sigma+ti)}\right| < c'\log t,$$

für $\sigma \geqq 1 - \frac{1}{2\,a\log t}$, $t \geqq t_0$. K. K.

T. H. Gronwall. Sur les séries de Dirichlet correspondant à des caractères complexes. Palermo Rend. **35**, 145-159; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 225.

Landau (F. d. M. **41**, 289, 1910) hatte den Dirichletschen Beweis für $L_k(1) \neq 0$ im Falle komplexer Charaktere verkürzt und dahin verschärft, daß er zeigte, daß

$$\left|\frac{1}{L_k(1)}\right| < c(\log k)^5.$$

Die Methoden, die dem Verf. die in den vorstehenden Arbeiten besprochenen Verschärfungen geliefert haben, gestatten ihm hier,

$$\left|\frac{1}{L_k(1)}\right| < c'\log k(\log\log k)^{\frac{3}{8}}$$

zu beweisen. K. K.

G. Torelli. Studio sulla funzione $\zeta(s)$ di Riemann. Napoli Rend. (3) **19**, 212-216.

Auf Grund der Identität

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right), \sigma > 1$$

ergibt sich die in dieser Form wohl neue Darstellung der ζ-Funktion für $\sigma > 0$:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{\infty} y^{-s}(y - [y])\frac{dy}{y}.$$

Indem hierin Reelles und Imaginäres getrennt wird, ergibt sich eine Bedingung, der die etwa vorhandenen Nullstellen von $\zeta(s)$, für die $0 < \sigma < 1, \sigma \neq \frac{1}{2}$ ist, genügen müssen. Die Form dieser Bedingung läßt aber kaum die Hoffnung aufkommen, aus ihr etwas über die Existenz oder Nichtexistenz solcher Nullstellen zu schließen. K. K.

G. N. Watson. Some properties of the extended zeta-function. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 288-296.

Diese Funktion ist bei $s = \sigma + ti$ mit $\sigma > 1$ definiert durch

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (a+n)^{-s} \quad (a \neq 0),$$

und es handelt sich um das Verhalten dieser Funktion bei festem σ und wachsenden Ordinaten t. Es ergibt sich:

1. Für jedes σ ist

$$\zeta(s, a) = O(e^{t \operatorname{arc} a}) \text{ und } \neq o\,(e^{t \operatorname{arc} a}).$$

2. Es ist stets

$$\zeta(s, a) = O(|\, t\,|^{\tau(\sigma)} \log |\, t\,|) + O(e^{t \operatorname{arc} a}),$$

wo $\tau(\sigma) = 0$ für $\sigma \geqq 1, = \frac{1}{2}(1-\sigma)$ für $0 \leqq \sigma \leqq 1$, und $= \frac{1}{2} - \sigma$ für $\sigma \leqq 0$. K. K.

N. G. W. H. Berger. Sur la fonction qui est définie par la série

$$D(s) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^s} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5^s} + \cdots$$

et sur une suite de polynomes qui s'y rattache. Nieuw Archief (2) **10**, 416-426.

Verf. geht von der Bemerkung aus, daß die allgemeine Theorie der Dirichletschen Reihen zwar schon sehr weit vorgeschritten sei, während nur wenige Funktionen, die durch spezielle Reihen dieser Art dargestellt werden, genauer untersucht worden sind. Er untersucht die in der Überschrift definierte Funktion $D(s)$, stellt sie durch ein bestimmtes Integral dar, ermittelt ihre Werte für ganzzahlige positive s, erhält ihre analytische Fortsetzung über die ganze Ebene und findet dabei alle ihre Pole und einen Teil ihrer Nullstellen. Alle Eigenschaften sind denen der ζ-Funktion nahe verwandt. K. K.

P. Martinetti. Sur l'interpolation. Ann. Ac. Pol. Porto 8, 129-133.

Im J. für Math. **126**, 116-162 (F. d. M. **34**, 297, 1903) hat Teixeira den Satz aufgestellt: Wenn eine Funktion innerhalb eines Kreises um den Nullpunkt als Mittelpunkt mit dem Radius R beschrieben wird, so konvergieren die Lagrangeschen Interpolationsprobleme, die sich auf die Werte

$$x_1 = r_0 \cos \frac{\pi}{2n}, x_2 = r_0 \cos \frac{3\pi}{2n}, \cdots, x_n = r_0 \cos \frac{2n-1}{n} \pi$$

beziehen, gleichmäßig gegen die Funktion in jedem Kreise, der den Nullpunkt zum Mittelpunkt hat und einen Radius kleiner als $\sqrt{R^2 - r_0^2}$. Der Verf. dehnt diesen Satz auf konfokale Ellipsen mit den Brennpunkten $\pm r_0$ aus, wie dies auch aus den bezüglichen Untersuchungen von Runge (Zs. f. Math. u. Phys. **46**, 224-243; F. d. M. **32**, 272, 1901) und Rychlik (Časopis **36**, 13-44; F. d. M. **38**, 309, 1907) folgt. Lp.

Weitere Literatur.

C. N. Armstrong. Eine Untersuchung der Anwendbarkeit rekurrenter Reihen zur Aufsuchung versteckter Periodizitäten. Diss. München. 96 S. 8°.

E. Bálint. Über die Nullstellen der Potenzreihen mit reellen Koeffizienten. Math. és termész. ért. **31**, 286-305. (Ungarisch.)

P. Boutroux. Les principes de l'analyse mathématique. Exposé historique et critique. Tome I: Les nombres, les grandeurs, les figures, le calcul combinatoire, le calcul algébrique, calcul des fonctions, l'algèbre géométrique. Paris: A. Hermann & Fils. XI + 548 S. 8°. (1914.)

E. W. Chittenden. Relatively uniform convergence of series of functions. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 450.

D. F. Diéguez. Algo sobre valores indeterminados. Rev. Soc. Mat. Esp. **2**, 132-135.

O. E. Glenn. Symbolic theory of finite expansions. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 459.

T. H. Gronwall. On Lebesgue's constants in the theory of Fourier's series. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 392.

T. H. Gronwall. On the degree of convergence of Laplace's series. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 392-393.

T. H. Gronwall. On various summation methods and their application to Fourier's series. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 444-445.

D. Jackson. On the degree of convergence of related Fourier series. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 173.

D. Jackson. On the accuracy of trigonometric interpolation. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 394.

N. M. Krylov. Über die Laplacesche Reihe. Petersb. Ann. des Bergw.-Inst. $\mathbf{4}_1$, 47-53. (Russisch.)

N. M. Krylov. Über die Theorie der trigonometrischen Reihen. Petersb. Ann. des Bergw.-Inst. $\mathbf{4}_1$, 54-62. (Russisch.)

Beweis der Schließungsformel von Parseval-Stekloff; Entwicklung einer Funktion, die den Lipschitzschen Bedingungen genügt.

P. Noaillon. Sur la convergence des séries de Fourier et des suites de Fourier-Frégier. Belg. Bull. Sc. 1913, 524-541.

Verallgemeinerung eines Satzes von de la Vallée Poussin in Palermo Rend. **31**, 296-299 (F. d. M. **42**, 283, 1911).

St. Ruziewicz. Z teoryi szeregów (Zur Theorie der Reihen). Wektor **1**, 466-472. (1912.)

Chr. Schmehl. Die Algebra und algebraische Analysis in den oberen Klassen von höheren Lehranstalten. Gießen: E. Roth. IV + 22 S.

L. L. Silverman. On the equivalence of definitions of summability. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 302.

L. L. Smail. Some generalizations in the theory of summable divergent series. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 301-302.

L. L. Smail. Note on the summability of properly divergent series. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 507.

Ch. J. de la Vallée Poussin. Sur l'unicité du développement trigonométrique. Belg. Bull. Sc. 1913, 9-14.

Nachtrag zu der vorjährigen Abhandlung (F. d. M. **43**, 320, 1912). Lp.

J. J. G. Westendorp. Over de convergentie of divergentie van enkele machtreeksen voor een punt op den omtreck van den convergentiecirkel. Wisk. Tijdskr. **9**, 141-147.

Kapitel 2.
Besondere Reihen.

W. Meiser. Fortsetzung von Lösungen zu Aufgaben aus der algebraischen Analysis nach Johann Lieblein bearbeitet. Nürnberg: Friedr. Kornsche Buchhandlung. I (1911), IV + 59 S., II (1912), IV + 58 S., III (1913), IV + 52 S., IV (1914), IV + 35 S. 8°.

Vergl. die Anzeige der „Lösungen zu Aufgaben aus der algebraischen Analysis nach Johann Lieblein bearbeitet" (F. d. M. **41**, 298, 1910), wo die Nützlichkeit einer solchen Bearbeitung hervorgehoben wurde. In jener ersten Veröffentlichung waren Aufgaben aus den ersten fünf Abschnitten der von Láska in zweiter Auflage herausgegebenen Liebleinschen Sammlung in Auswahl behandelt worden. Verschiedene Arten von Funktionen, zyklometrische Funktionen, Grenzwerte, Stetigkeit und Unstetigkeit der Funktionen, Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen. Von den Fortsetzungen enthält die erste zumeist Aufgaben über Reihenentwicklungen, die zweite solche über unendliche Produkte, die dritte solche über Funktionen komplexer Variabeln, die vierte endlich solche über Kettenbrüche, entsprechend den Abschnitten VIII, IX, X, XI der Liebleinschen Sammlung.

Was die gegebenen Lösungen anbetrifft, so wäre eine weniger breite Darstellung für das Verständnis des Gedankenganges oft förderlicher gewesen. Der Zusammenhang mit anderen Fragen ist nicht immer angedeutet. Bei der

Aufgabe (Dritte Fortsetzung S. 10), die Funktion $y = \ln \operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x)$ in eine Potenzreihe von x und umgekehrt x in eine Potenzreihe von y zu entwickeln, fehlt z. B. der Hinweis darauf, daß die Sekantenzahlen in den Entwicklungen auftreten. Dies wird ersichtlich, wenn man zuerst berechnet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x} = \sec x,$$

dann x durch y darstellt und $\frac{dx}{dy}$ bildet:

$$\tfrac{1}{2}x = \operatorname{arc\,tang}(\mathfrak{Tang}\,\tfrac{1}{2}y), \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,x} = \mathfrak{Sec}\,x.$$

Die gesuchten Potenzreihen entstehen also durch Integration der Potenzreihen für $\sec x$ und $\mathfrak{Sec}\,x$. — Bei den Näherungswerten des Kettenbruches für π (Vierte Fortsetzung S. 29) ist schon der vierte unrichtig; er entspricht zwar dem vom Verf. gewählten Wert 3,1415926, nicht aber dem genaueren Werte von π. Statt

$$\frac{86598}{27565} \text{ muß stehen } \frac{103993}{32109}.$$

Die langen Divisionen auf S. 30 konnten auf die Angaben der Quotienten beschränkt werden. Außerdem hätte der fünfte Näherungswert nicht ausgelassen werden sollen. Die in der Aufgabensammlung bezeichneten Quellen für viele Aufgaben scheinen kaum zu Rate gezogen zu sein. — Dies nur einige Proben über augenfällige Mängel. Lp.

A. R. Richardson. An absolute convergent series as the product of divergent series. Messenger (2) **42**, 192.

$$\left(1 - \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \cdots\right)\left(1 + \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\left(2^2 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2\left(2^3 + \frac{1}{2^3}\right) + \cdots\right)$$
$$= 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots$$

Lp.

R. Niewiadomski. Calcul d'un terme de la série de Fibonacci. Interméd. des math. **20**, 53-54.

Gibt ein Verfahren, das die Berechnung solcher Glieder ermöglicht, die eine hohe Stelle einnehmen. Lp.

Cochez. Question 17165. Ed. Times (2) **24**, 96.

Es ist $S_n =$

$$\sum_1^n \frac{n^2 - n + 1}{n(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{1}{24}\left(\frac{43}{12} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{41}{n+3} - \frac{63}{n+4}\right),$$

$$S_\infty = \frac{43}{288}.$$

Lösung von C. M. Roß und S. Aiyar. Gd.

Otto Förster. Geometrische Darstellung einer besonderen Art unendlicher Reihen. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 555-557.

Geometrische Darstellung von Reihen mit dem allgemeinen Gliede

$$b_\nu = \frac{n}{(n+\nu)(n+\nu+1)}$$

und ihrer Summe $1/n$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots \infty$. Lp.

D. Biddle. Question 17 332. Ed. Times (2) **24**, 102-103.

Es ist

$$\sum_{n=1}^{n=x} \frac{1}{2n(2n-1)} = \sum_{n=x+1}^{n=2x} \frac{1}{n}$$

und daher für $x = 2^r$

$$\sum_{n=1}^{n=2^r} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2}r + \frac{1}{12}(r-1) + \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{56}\right)(r-2)$$
$$+ \left(\frac{1}{90} + \frac{1}{132} + \frac{1}{182} + \frac{1}{240}\right)(r-3) + \ldots$$

Beweis von W. V. Bailey. Gd.

W. S. B. Woolhouse. Question 2611. Ed. Times (2) **23**, 74-75.

Es seien $1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n$ die ersten Differenzen der Koeffizienten in der Entwicklung des Binoms $(1+x)^{2n}$, und zwar bis zum mittleren oder größten Koeffizienten, ferner setze man:

$$\nu = \tfrac{1}{2}(n+1)n,\ \nu' = \tfrac{1}{2}\,n(n-1),\ \nu'' = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2), \ldots$$

Dann ist die algebraische Funktion $x^\nu - \delta_1 x^{\nu'} + \delta_2 x^{\nu''} - \delta_3 x^{\nu'''} + \cdots$ durch $(x-1)^n$ ohne Rest teilbar, und die Summe der Zahlenkoeffizienten des Quotienten ist $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)$. Lösung von A. M. Nesbitt. Gd.

Schoute. Question 11 686. Ed. Times (2) **24**, 20-22.

Man bestimme 1. drei aufeinanderfolgende Binomialkoeffizienten, die eine arithmetische Progression bilden, 2. vier aufeinanderfolgende Binomialkoeffizienten, die eine arithmetische Proportion bilden, und beweise, daß es weder drei aufeinanderfolgende Binomialkoeffizienten gibt, die eine geometrische oder harmonische Progression bilden, noch vier aufeinanderfolgende Binomialkoeffizienten in arithmetischer Progression. — Lösungen von A. Cunningham und vom Aufgabensteller. Gd.

F. Ferrari. Somme di fattoriali. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 177-180.

Der Verf. meint, es sei noch nirgends die Summe der Produkte aller Kombinationen einer arithmetischen Reihe zur Klasse k bestimmt worden, und zeigt,

wie man unter Benutzung der Summenformeln für die gleich hohen Potenzen zu Formeln gelangen kann, die jene Summe ausdrücken. Ref. verweist auf seine bezügliche „Nota matemática“ (F. d. M. **25**, 109, 1894), wo ein Verfahren zur Berechnung der Summen der Produkte aus den Gliedern einer arithmetischen Progression zu je zwei, drei, vier, ... Faktoren angegeben ist; ferner auf seine Programmabhandlung von 1885, wo die vom Verf. angegebenen Formeln für diese Produkte aus den natürlichen Zahlen nicht bloß bis zu den Kombinationen vierter Klasse, sondern bis zur achten Klasse einschließlich abgedruckt sind.

Lp.

L. de Tommaso. Espressione di alcune somme di potenze simili. Suppl. al Period. **16**, 113-117.

Es sei $s_k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$. Zuerst werden die Formeln in n für $k = 1, 2, 3, \ldots, 11$ abgedruckt und dann diese Ausdrücke, umgerechnet in solche mit s_1, angegeben, wobei für gerades k der irrationale Faktor $\sqrt{8s_1+1}$ eingeht. Dann werden nach den Newtonschen Summenformeln die Produkte p_k der Kombinationen der n ersten ganzen Zahlen zur Klasse k durch die s_i in n ausgedrückt für $k = 2, 3, 4, 5$ und ebenfalls in Ausdrücke mit s_1 umgerechnet. Hieran werden verschiedene Übungsaufgaben geknüpft. Lp.

I. J. Schwatt. On the sum of a family of series. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 560-561.

Bestimmung der Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n r^n}{\Pi(tn+m)},$$

wo in dem Produkt Π des Nenners $m = 1, 2, \ldots, p$; Ausdehnung der Methode in der Note „On the summation of a series“ (F. d. M. **43**, 339, 1912). Lp.

C. v. Ebbenhorst Tengbergen. Vraagstuk CXII. Wisk. Opgaven **11**, 294-297.

Es gilt die Identität

$$\frac{(k-1)!}{n!\,(n-k)!} = 2\sum_{p=k}^{n} \frac{(p+k-1)!}{(p-k)!\,(n-p)!\,(n+p)!}$$

Schn.

S. N. Aiyar. Some theorems in summation. Indian Math. Soc. **5**, 183-186.

Eine Reihe von Formeln vom Charakter der folgenden:

$$\varphi(0) + \frac{x}{1!}\varphi(1) + \frac{x^2}{2!}\varphi(2) + \cdots = e^x\left[\varphi(0) + \frac{x}{1!}\Delta\varphi(0) + \frac{x^2}{2!}\Delta^2\varphi(0) + \cdots\right].$$

Schr.

G. PÓLYA. Lösung zu 400 (E. Steinitz). Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 366-368.

Es ist

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \frac{\cos^2 \pi x + \cos^4 2\pi x + \cos^6 3\pi x + \ldots + \cos^{2n} n\pi x}{n}$$

zu bestimmen.

Lösung: Ist x rational, $= \frac{p}{q}$ (p, q teilerfremd), so ist $f(x) = \frac{1}{q}$; ist x irrational, so ist $f(x) = 0$.

Beim Beweis wird ein Satz von Sierpiński verwendet, über den in F. d. M. **41**, 282, 1910 referiert ist. Schr.

G. PÓLYA. Lösung zu 383 (I. Schur). Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 181-185.

Es sei $M = 0{,}7246\ldots$ das Minimum der Funktion $\frac{\sin^2 x}{x}$. Für alle reellen x und für alle positiven ganzzahligen n ist

$$\left| \frac{\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx}{n+1} \right| < M.$$

Die Konstante M ist die kleinste Zahl, die dieser Bedingung genügt. Ba.

N. NIELSEN. Recherches sur les suites régulières et les nombres de Bernoulli et d'Euler. Annali di Mat. (3) **22**, 71-115.

Die Bernoullischen Polynome werden definiert durch die Funktionalgleichungen

$$B'_n(x) = B_{n-1}(x),\ B_n(x) - B_n(x-1) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},\ B_0(x) = 1,$$

und ähnlich die Eulerschen Polynome $E_n(x)$ durch

$$E_n(x) + E_n(x-1) = \frac{x^n}{n!} \quad (n \geqq 0).$$

Sie genügen beide der Funktionalgleichung

$$(-1)^n f(-x-1) = f(x).$$

Ein Polynom, das dieser Gleichung genügt, wird regulär genannt. Eine Folge $f_0, f_1, \ldots$ von regulären Polynomen ($f_0 = \text{const}$), für die überdies bei $n \geqq 1$

$$f'_n(x) = f_{n-1}(x)$$

ist, heißt eine reguläre Folge.

Indem sehr allgemeine Klassen solcher regulären Folgen aufgestellt werden, wird eine große Anzahl von Formeln erhalten, bei denen die Bernoullischen und die Eulerschen Zahlen eine dominierende Rolle spielen. K. K.

J. W. L. Glaisher. On the last two figures in certain coefficients analogues to the Eulerian numbers. Quart. J. 44, 105-112.

Bekanntlich ist $\sum_k \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{E_n}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}$, wo E_n die n^{te} Eulersche Zahl bedeutet. Analog hat Glaisher (Quart. J. 29) gezeigt, daß in

$$1 + \frac{1}{3^{2n+1}} - \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + + - - \cdots = \sqrt{2}\frac{P_n}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1},$$
$$1 - \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{5^{2n}} + + - - \cdots = \sqrt{2}\frac{Q_n}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}$$

P_n und Q_n positive ganze Zahlen sind. Es zeigt sich nun, daß deren Endziffern einfache Gesetze aufweisen. Wie die Eulerschen Zahlen abwechselnd auf 1 und 5 endigen, so enden die P_n abwechselnd auf 3 und 7, die Q_n stets auf 1.

Und weiter: die Gruppe der beiden letzten Ziffern hat in P_n und Q_{2n+1} eine (genau) fünfgliedrige Periode, Q_{2n} dagegen endet stets auf 11. K. K.

J. W. L. Glaisher. Relations connecting sums of powers of reciprocals of numbers and similar relations concerning other summations. Quart. J. 44, 170-186.

Eine schier endlose Anzahl von Formeln des Typus

$$\sum_2^\infty \frac{n^2-1}{n^4+n^2+1} = 1, \quad \sum_1^\infty \frac{n}{4n^2+1} = \frac{1}{4}, \quad \sum_2^\infty \frac{n}{9n^4-3n^2+1} = \frac{1}{12}, \cdots$$

wird hergeleitet — mit gleichen oder alternierenden Vorzeichen, mit den mannigfachsten Koeffizienten und Exponenten in Zähler und Nenner.

Setzt man

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots \text{ und } S'_n = S_n - 1,$$

so ergeben sich aus diesen Formeln weitere von dem Typ

$$S'_4 + S'_{10} + S'_{16} + \cdots = \frac{1}{12},$$

und ähnliche, bei denen nur die ungeraden ganzen Zahlen in den Nennern auftreten, mit gleichen oder alternierenden Vorzeichen usw. K. K.

J. W. L. Glaisher. On Eulerian numbers (formulae, residues, endfigures) with the values of the first twenty-seven. Quart. J. 45, 1-51.

Die vorliegende Arbeit handelt von den durch den Ansatz

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}$$

definierten Eulerschen Zahlen; sie zerfällt in 4 Teile.

Teil I gibt Rekursionsformeln zur Berechnung der E_n; die meisten dieser Formeln scheinen neu zu sein.

Teil II gibt die numerische Berechnung der ersten 27 dieser Zahlen auf Grund der Formeln von I (E_{27} ist schon 61-stellig!).

Teil III handelt von den Kongruenzresten der E_n. Diese Reste werden für alle Moduln bis zu 25 und einige höhere gegeben. Verallgemeinerte Ausdrücke der Reste mod r, mod r^2, mod r^{2k} werden erhalten, wenn r eine ungerade Zahl bedeutet.

Teil IV bezieht sich auf die letzten 2, 4 und 6 Ziffern der Eulerschen Zahlen. Diese enden bekanntlich abwechselnd auf 1 und 5. Es werden nun Formeln entwickelt, aus denen die genannten Zifferngruppen für jedes n erhalten werden können. Diese Gruppen kehren periodisch wieder.

Ein ausführliches Inhaltsverzeichnis am Schluß der Arbeit gibt den genauen Inhalt der 92 (!) Paragraphen. K. K.

C. Runge und F. Emde. Rechnungsformular zur Zerlegung einer empirisch gegebenen Funktion in Sinuswellen. Nebst einer Erläuterung von C. Runge. Braunschweig: Vieweg & Sohn.

Nach der Anzeige in Zs. f. Math. u. Phys. **63**, 318-319 geht Runge aus von einer Einteilung der Periode in 12 Teile, so daß die Summen aus je 12 Gliedern bestehen. Aus den 12 Funktionswerten lassen sich die 12 ersten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_6, b_1, \ldots b_5$ einer mit diesen Gliedern abbrechenden trigonometrischen Reihe berechnen. Das Rechnungsformular soll eine zweckmäßige Durchführung dieser Rechnungen ermöglichen. Lp.

Weitere Literatur.

J. Barinaga. Aplicación del método de los coeficientes indeterminados a la investigación de las condiciones de divisibilidad de los polinomios enteros. Rev. Soc. Mat. Esp. **2**, 184-189.

J. A. Donaldson. On the summation of $1^r + 2^r + \cdots + n^r$. Edinb. M. S. Proc. **31**, 9-16.

H. Heine. Ableitungen und Betrachtungen aus dem Gebiete der arithmetischen und geometrischen Reihen. Für den Gebrauch an höheren Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Dresden: L. Ehlermann. VIII + 72 S. 8⁰.

Anzeige in Arch. d. Math. u. Phys. (3) **23**, 170 von A. Baruch.

D. N. Lehmer. On the expansion of the surd $R^{1/K}$. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 174-175.

H. Priester. Über Kettenbrüche und einige arithmetische Reihen höherer Ordnung. Progr. Langenberg. 22 S. 4⁰.

Sechster Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

Kapitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher usw.).

G. Fubini. Lezioni di analisi matematica. Torino: Società tipografico-editrice nazionale. 535 S. 8°.

Dieser Band enthält die vom Verf. an der technischen Hochschule zu Turin gehaltenen Vorlesungen. Wir beschränken uns darauf, das Verzeichnis des reichhaltigen Buches wiederzugeben.

Irrationalzahlen und Koordinaten auf einer Geraden. Elemente der Goniometrie und der analytischen Geometrie. Kombinatorik und Binomialentwicklung. Determinanten und Systeme von linearen Gleichungen. Funktionen und Grenzwerte. Reihen. Ableitung, Differential, Integral. Erste Anwendungen der Differentialrechnung (Maximal- und Minimalwerte, Konkavität, Newton-Fouriersche Auflösung der algebraischen Gleichungen, Reihenentwicklung einer Funktion). Komplexe Zahlen. Allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen. Anwendungen (Zerlegung einer rationalen Funktion in Partialbrüche, Interpolation). Existenztheoreme der Integralrechnung. Integrationsmethoden. Angenäherte und mechanische Berechnung der Integrale. Funktionen von mehreren Veränderlichen, vollständige Differentiale. Flächenintegrale. Differentialgleichungen. Geometrische Anwendungen der Infinitesimalrechnung. Linienintegrale. Potentiale. Ergänzungen (über Flächen- und Linienintegrale, Transformation der mehrfachen Integrale, die Fouriersche Reihe, Elemente der Variationsrechnung). Vi.

R. D'Adhémar. Leçons sur les principes de l'analyse, avec une note de S. Bernstein. Tome II: Fonctions synectiques, méthode des majorantes. Équations aux dérivées partielles du premier ordre. Fonctions elliptiques. Fonctions entières. Paris: Gauthier-Villars. VII + 297 S. 8°.

Vgl. die Anzeige des ersten Bandes F. d. M. **43**, 475, 1912.

Will man sich über den Charakter des vorliegenden Bandes orientieren, so rufe man sich folgende Worte aus der Besprechung des ersten Bandes ins Ge-

dächtnis zurück: „Die Stoffauswahl weicht offenbar absichtlich sehr stark ab von dem sonst Üblichen. Das Buch ist unsystematisch und will es sein; daher Studierenden zur Erwerbung eines hinreichend breiten und verläßlichen Fundaments im Infinitesimalkalkül kaum zu empfehlen. Aber es hat dafür den Vorzug, lebhaft, interessant und vielseitig anregend zu sein.“ Über den Inhalt sei nur soviel bemerkt: Kapitel 1 und 2 beschäftigen sich noch mit reeller Funktionentheorie (Implizite Funktionen, Unabhängigkeit der Funktionen, Quadratische Formen, Maxima und Minima). Mit Kapitel 3 beginnt die komplexe Funktionentheorie. Aus der Fülle des hier Gebotenen heben wir partielle und gewöhnliche Differentialgleichungen, ganze Funktionen, elliptische Funktionen, A b e l sche Integrale und Thetafunktionen hervor. Bereichert wird das Buch durch einen Anhang von S. B e r n s t e i n, der betitelt ist: Sur les séries normales. B. gibt seine eigenen Untersuchungen über „Entwicklungen nach Polynomen“.

E. J.

L. S. Hulburt. Differential and integral calculus. An introductory course for colleges and engineering schools. New York: Longmans, Green and Co. XVII + 481 S. (1912).

Wir können dieses Buch nur nach der sehr lobenden Besprechung im Amer. Soc. Bull. (2) **19**, 197-203, 1913, anzeigen. Der Rezensent D. D. L e i b hebt hervor, daß es durchaus nicht eine von den Veröffentlichungen ist, die als leichte Ware auf den Markt geworfen werden. „Ob der Lehrgang dazu dienen mag, die mathematischen Studien eines Hörers auf der höheren Lehranstalt abzuschließen, oder die Vervollständigung in der Mathematik für den vorwärtsschauenden Ingenieur zu bezeichnen, oder nur der Leitfaden für ein weiter fortschreitendes Studium des angehenden Mathematikers zu sein, die Anordnung und die Darstellung in diesem Bande wird dem Lehrer und den Lernenden hinreichende Beihülfe leisten.“ Es möge bemerkt werden, daß inhaltlich zuletzt eine Einleitung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen gegeben wird.

Lp.

A. Sainte-Laguë. Notions de mathématiques. Avec préface de G. K o e n i g s. Paris: A. Hermann et Fils. XII + 512 S. 8°.

Wir berichten über dieses uns nicht zugegangene Buch nach der Anzeige von A r c h i b a l d im Bull. Amer. Math. Soc. (2) **19**, 421-422. Es soll an die Stelle der Notions de mathématiques von J. T a n n e r y treten, das wir nur mit dem Titel anführen konnten (F. d. M. **34**, 80, 1903), gerade wie seine deutsche Übersetzung (F. d. M. **40**, 227 u. 541, 1909). Obschon das neue Werk „viel größer ist, sind die behandelten Gegenstände nicht so zahlreich, und die ganze Behandlungsweise ist gründlich verschieden. An den meisten Universitäten Frankreichs wird den Studenten der Physik, Chemie und Technik ein Lehrgang in allgemeiner Mathematik geboten. Algebra, Analysis und Mechanik werden in ihm entwickelt. Als eine Vorbereitung für solche Kurse und zur Ausfüllung der hiermit zusammenhängenden Lücken ist das vorliegende Buch abgefaßt. Während die Strenge nicht vernachlässigt ist, hält sich die Darstellung nicht bei Einzelheiten der Beweise auf, und es werden praktische Anwendungen der verschiedenen Gegenstände betont.“

Lp.

J. Haag. Cours complet de mathématiques spéciales. Tome I. Algèbre et analyse. Paris: Gauthier-Villars. VI + 402 S. gr. 8°.

Das geplante Werk, von dem der erste Band vorliegt, soll alles enthalten, was nach den gegenwärtig in Frankreich bestehenden Vorschriften als „spezielle Mathematik“ bezeichnet, bei den Prüfungen zur Aufnahme in die École Polytechnique und die École Normale supérieure gefordert wird. Dieser Stoff umfaßt etwa den Inhalt der Vorträge in der Mathematik während des ersten Studienjahres an unseren Hochschulen. Dies möge durch das Inhaltsverzeichnis des ersten Bandes des Werkes belegt werden. I. Inkommensurable Zahlen. Wurzeln, Exponenten. II. Kombinatorische Analysis. Binomialformel. III. Komplexe Zahlen. IV. Reihen. Unendliche Folgen. Grenzen. Reihen mit positiven Gliedern. Reihen mit beliebigen Gliedern. Addition und Multiplikation der Reihen. Zahlische Berechnung einer Reihe. Praktische Ratschläge zur Erforschung einer Reihe. V. Funktionen einer reellen Veränderlichen. Begriff einer Funktion, Stetigkeit. Derivierten, Schwankung der Funktionen. Operationen an den Funktionen. Elementare Funktionen. VI. Exponentiale und logarithmische Funktionen. Zahl e. VII. Potenzreihen. VIII. Begrenzte Entwicklungen. IX. Unendlichkleine. Unbestimmte Formen. X. Funktionen mehrerer Veränderlichen. XI. Differentiale. XII. Bestimmte und unbestimmte Integrale. XIII. Berechnung von Integralen. XIV. Anwendungen der Quadraturen. XV. Differentialgleichungen. Gleichungen erster Ordnung. Gleichungen zweiter Ordnung. XVI. Polynome. Allgemeine Eigenschaften. Division der Polynome. Teilbarkeit. XVII. Rationale Brüche. XVIII. Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen. Symmetrische Funktionen der Wurzeln. Vielfache Wurzeln. XIX. Elimination. XX. Transformation der Gleichungen. XXI. Gleichungen mit reellen Koeffizienten. XXII. Gleichungen mit Zahlkoeffizienten. XXIII. Determinanten. XXIV. Gleichungen und lineare Formen. XXV. Quadratische Formen. Noten: Rekurrente Beziehungen. Das Doppelverhältnis. Die Riccatische Gleichung.

Daß bei dieser Häufung des Stoffes die sprichwörtliche französische Eleganz der Darstellung über manche Schwierigkeit hinweghelfen muß, ist wohl einleuchtend. Aber auch hierin ist die Darstellung lehrreich. Lp.

J. Haag. Exercices du Cours de mathématiques spéciales. Tome I. Algèbre et analyse. Paris: Gauthier-Villars. IV + 220 S. 8°.

In genauem Anschluß an den vorstehend besprochenen Band des Cours complet de mathématiques spéciales sind zu jedem der dort gemachten Abschnitte Übungsaufgaben gestellt. Zuerst werden die Lösungen mehrerer Aufgaben vollständig entwickelt, teils solcher, die als Musterbeispiele dienen sollen, teils solcher, die zur selbständigen Lösung größere Schwierigkeiten bieten, aber wegen ihrer historischen oder mathematischen Bedeutung besondere Aufmerksamkeit verdienen. Die Zahl dieser Aufgaben ist 137. Dann folgen für jeden Abschnitt Aufgaben ohne Lösung, im ganzen 393, so daß die Gesamtzahl aller Aufgaben 530 ist. Dem französischen Prüfungswesen entsprechend, sind die Aufgaben alle aus der reinen Analysis entnommen und verlangen zuweilen nicht bloß theoretisch sichere Kenntnisse, sondern auch praktische Gewandtheit in der Handhabung der verschiedenen Operationen. Zerstreut finden sich manchmal Angaben über Prüfungen, bei denen die Aufgaben gestellt sind. Der Verf. sagt

selbst: „Der Leser muß möglichst viele von ihnen lösen und einige vollständig bearbeiten. Er kann die ihm zu schwierig scheinenden zuerst liegen lassen mit dem Vorsatz, auf sie zurückzukommen, wenn er geschickter geworden ist.“ Auch für deutsche Studenten ist die interessante Sammlung zum Durcharbeiten sehr zu empfehlen. Lp.

Z. G. DE GALDEANO. Sumario de mis cursos de cálculo infinitesimal con arreglo al nuevo método de enseñanza (1912 a 1914). Zaragoza: Tipografia de G. Casañal. 192 S. 8⁰.

Hinter dem Titelblatt folgt ein Verzeichnis der sämtlichen bisher vom Verf. veröffentlichten Schriften, jede mit dem Titel und dem Jahre des Erscheinens. Als wesentlich didaktisch werden 15 aufgezählt, als wesentlich kritisch 16, als wesentlich pädagogisch 9, als der Verbreitung der Wissenschaft dienend 9. An der Spitze des Verzeichnisses steht das Bildnis des Verf. mit den beiden Titeln: „Ensayo de síntesis matemática y nuevo método de enseñanza matemática 1910“ und „Nuevo método de enseñanza matemática 1911“ links und rechts neben dem Bilde (vgl. F. d. M. **41**, 109, 1910). Endlich folgt ein Widmungsblatt an D. José Echegaray.

Die Vorrede läßt sich über die Grundsätze aus, die den Verf. bei der Abfassung seiner Schriften über die „neue Unterrichtsmethode“ geleitet haben (S. 5-32). Dann folgen Berichte über die vom Verf. gehaltenen Vorlesungen, zuerst über den freien Kursus an der Fakultät der Wissenschaften, dann über die Hauptvorlesung, indem der Inhalt jeder einzelnen Vortragsstunde angegeben wird (S. 33-60). Die Analyse des Vorlesungsprogramms bildet den nächsten Teil (S. 61-88). Hieran schließt sich ein Bericht über die hauptsächlichsten neueren Theorien (S. 89-16) und eine abermalige Darlegung der neuen Unterrichtsmethode (S. 147-168). Die Absichten, die der Verf. bei der Abfassung des vorliegenden Buches hat, und die vornehmlich dahin gehen, die Gleichgültigkeit der Spanier gegen die Pflege der Mathematik zu überwinden, werden in dem nächsten Teile auseinandergesetzt (S. 162-165). Die Autobiographie, sofern das wissenschaftliche Leben des Verf. betroffen wird, macht den Beschluß (S. 166-192). Lp.

J. SALPETER. Einführung in die höhere Mathematik für Naturforscher und Ärzte. Jena: Gustav Fischer. XII u. 336 S. 8⁰.

Nach der Anzeige von R. Rothe (Arch. d. Math. u. Phys. (3) **23**, 38-39) will das Buch eine Einführung in die höhere Mathematik für Naturforscher und Ärzte sein, wobei der Zusatz für Naturforscher und Ärzte sich auf die Auswahl und auf die Behandlung des Stoffes bezieht. Betreffs der Auswahl legt sich der Verf. von vornherein die mathematisch notwendige Beschränkung auf, daß nur so viel Voraussetzungen gemacht werden, wie für die naturwissenschaftlichen Anwendungen erforderlich sind. Der Verf. beschränkt sich aber nicht etwa dabei auf die bekannten elementaren Funktionen, sondern läßt auch Unstetigkeiten, Ecken und derartige Singularitäten zu, wie sie wirklich in den Anwendungen vorkommen. Die Behandlung des Stoffes ist besser als in vielen Schriften ähnlicher Richtung. Die Sätze sind sorgfältig gefaßt und bewiesen. Lp.

G. Kowalewski. Einführung in die Infinitesimalrechnung mit einer historischen Übersicht. Zweite, völlig umgearbeitete Auflage. Leipzig: B. G. Teubner. IV u. 106 S. kl. 8⁰. Mit 22 Fig. im Text. (Aus Natur und Geisteswelt Nr. 197.)

Die erste, 1908 erschienene Auflage ist im Jahrbuch nur mit dem Titel aufgeführt, weil kein Exemplar der Schriftleitung eingeliefert war. Und doch verdient dieses Büchlein des verdienten Verfassers, der in seinen „Grundzügen der Differential- und Integralrechnung" ein durch die Strenge der Herleitungen ausgezeichnetes Werk für die studierende Jugend geliefert hat (F. d. M. **40**, 322, 1910), eher eine Besprechung als manches weniger tief schürfende Erzeugnis der die bloßen Bedürfnisse der Praxis befriedigenden Schreiblust. Mit Recht sagt der Teubnersche Katalog von 1908: „Es wird hier eine den modernen Anschauungen entsprechende Darstellung der Infinitesimalrechnung versucht, ohne auf ganz schwierige Punkte einzugehen, deren Erörterung in den Rahmen einer für weitere Kreise bestimmten Schrift nicht hineinpassen würde." Gerade weil diese Schrift aber in engem Raume prinzipiell wichtige Grundfragen erörtert, eignet sie sich für den Anfänger, nicht gerade für den Techniker, sondern vor allem für den Studenten zur Kenntnisnahme der strengeren Auffassung. Mit Berücksichtigung dieses Leserkreises hat der Verf. die Gestalt stark verändert und „es so eingerichtet, daß der Leser rascher als bei der ersten Auflage zur Differentialrechnung gelangt. Auch sind jetzt die Betrachtungen über Häufungswerte und Grenzwerte leichter zu lesen als früher". Das Büchlein sollte stets den Studenten des ersten Semesters als leicht lesbar und doch wissenschaftlich streng empfohlen werden. Lp.

M. Lindow. Differential- und Integralrechnung mit Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik. Leipzig: B. G. Teubner. VIII u. 112 S. kl. 8⁰. Mit 42 Fig. im Text. (Aus Natur und Geisteswelt Nr. 387.)

Der Inhalt des Bändchens entspricht den vom Verf. in Dortmund an den Königlichen Vereinigten Maschinenbauschulen gehaltenen Vorträgen, in denen nach Möglichkeit auf Anwendungen in den technischen Wissenschaften hingewiesen wurde. Die Herleitungsmethoden berufen sich oft auf die geometrische Veranschaulichung. Wegen der strengeren Formulierung der Grundlagen wird der Leser auf den vorstehend besprochenen Band von Kowalewski aus derselben Sammlung verwiesen. Lp.

J. Perry. Elementary practical mathematics. With numerous exercises for the use of students, and especially of mechanical and electrical engineering students. London: Macmillan and Co. XIV + 335 S.

Von diesem Buche, das der wütige Bekämpfer der hergebrachten Unterrichtsmethoden in der Mathematik verfaßt hat, um zu zeigen, wie die praktische Mathematik für Techniker gelehrt werden müsse, haben wir nur durch eine ausführliche Besprechung Kunde erhalten, die G. H. Bryan in Nature **91**, 551-553 veröffentlicht hat, und die das bestätigt, was wir von dem gewalttätigen Neuerer schon immer gedacht haben. „Die meisten schlechten Züge unserer bestehenden Unterrichtsmethoden, die der Verf. in seiner Vorrede so heftig

angreift, sind in seinem eigenen Text wiederzufinden. In gewisser Ausdehnung ähnelt das Buch einer jüngst erschienenen Schrift, die „des Narren Infinitesimalrechnung“ genannt werden könnte, und die diesen Titel durch die Art rechtfertigte, wie der Verf. einen leichten Gegenstand mit dem Anschein von Schwierigkeit umgeben hat.“ Lp.

Fr. Dingeldey. Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Intregalrechnung. Zweiter Teil: Aufgaben zur Anwendung der Integralrechnung. Mit 96 Figuren im Text. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. IV u. 382 S. gr. 8°.

Dem ersten Teil mit den Aufgaben zur Differentialrechnung ist (F. d. M. 41, 310, 1910) nun auch der nach denselben Grundsätzen behandelte zweite Teil mit den Aufgaben zur Integralrechnung gefolgt. Mehr noch als im ersten Teil zeigt sich hier das Bestreben, durch längere Darlegungen den Inhalt der Lehrbücher zu ergänzen, so daß dem Leser eine Erweiterung seiner theoretischen Anschauungen geboten wird. Dies ist zur Bewältigung vieler der Physik, Chemie, besonders der Technik entnommenen Beispiele nötig; aber auch die strengere, rein mathematische Auffassung wird an vielen Stellen gefördert, und die Verweisungen auf Quellen in den zahlreichen literarischen Fußnoten machen den die Sammlung benutzenden Studenten darauf aufmerksam, daß mit dem Durcharbeiten eines Lehrbuches und einer Aufgabensammlung noch nicht alles Erforderliche abgetan ist, sondern daß zur Vertiefung in ein besonderes Gebiet zu den Schriften der schaffenden Forscher gegriffen werden muß. Das Werk ist daher neben den Vorträgen über Infinitesimalrechnung dem Hörer wohl nützlicher als ein schlichtes Lehrbuch oder eine bloße Aufgabensammlung.

Wer als Lehrer diese neue Sammlung benutzt, wird jedenfalls Anregung zu manchen interessanten Fragstellungen finden, vielleicht auch manches vermissen, was in eine solche umfangreiche Sammlung hineingehört. So fehlt z. B. ein Abschnitt über die Auswertung eines bestimmten Integrals, dessen allgemeines nicht erhältlich ist, nach den Regeln für die mechanische Quadratur, und zu den wenigen Aufgaben über die Auswertung elliptischer Integrale hätten noch viele andere interessante Fragen hinzugefügt werden können. In dieser Beziehung wird eben jeder Lehrer seine besonderen Wünsche haben und wird aus dem Eigenen den gebotenen Inhalt vervollständigen, zuweilen auch vereinfachen.

Als eine aus dem üblichen Rahmen der Aufgabensammlung heraustretende neue Erscheinung von wissenschaftlichem und praktischem Werte wird das Werk einen guten Einfluß auf die Ausbildung der lernbegierigen Jugend ausüben. Lp.

G. Vivanti. Esercizi di analisi infinitesimale. Pavia: Mattei & C. Editori. VIII + 470 S. gr. 8°.

Den „Lezioni di analisi infinitesimale“ (Pavia, 1911), die im Jahrbuch nur mit dem Titel angeführt sind, weil der Verleger kein Exemplar eingeliefert hat, ist jetzt eine Sammlung von 575 Übungsaufgaben gefolgt, denen die vollständig entwickelten Lösungen hinzugefügt sind. Die Titel der einzelnen Abschnitte sind: I. Analytische Vorbereitungen. II. Ableitungen und Integrale der Funktionen einer Veränderlichen. III. Ableitungen und Integrale der Funktionen

mehrerer Veränderlichen. IV. Geometrische Anwendungen. A. Ebene Kurven. B. Raumkurven. C. Oberflächen. V. Differentialgleichungen. A. Gewöhnliche Differentialgleichungen. B. Partielle Differentialgleichungen. VI. Elemente der Variationsrechnung.

Die Aufgaben sollen zur Einübung der im Vortrage entwickelten Lehren dienen, sind daher nur den Gebieten der Analysis und der Geometrie entnommen. Die Lösungen schließen sich aus demselben Grunde genau an die Methoden an, die im Vortrage gelehrt sind, und lassen absichtlich solche Wege beiseite, die durch Berücksichtigung eigenartiger Bedingungen schneller zum Ziel führen; auf diesen Umstand wird gelegentlich aufmerksam gemacht. Mehr als zwei Drittel der Aufgaben hat der Verf. nach seiner Angabe selbst gebildet. Ref. hat die Sammlung vielfach für die von ihm abgehaltenen Übungen benutzt und sich von der Korrektheit der Lösungen überzeugt, kann sie also nach seiner Erfahrung zur Benutzung empfehlen.

Lp.

E. Fabry. Problèmes d'analyse mathématique. Paris: A. Hermann & Fils. IV + 460 S. gr. 8°.

Der Verf. des „Traité de mathématiques générales" (F. d. M. **39**, 342, 1908) und der „Problèmes et exercices de mathématiques générales" (F. d. M. **40**, 328, 1909) liefert jetzt nach der Art des letzteren Buches eine Sammlung von 278 Aufgaben aus der Analysis. In dem ersten Teil des Bandes sind die gestellten Aufgaben dem Wortlaute nach abgedruckt (S. 1-66) unter Hinzufügung des Ortes und der Zeit, wo sie als Prüfungsaufgaben vorgelegt worden sind. Dann folgen im zweiten Teil die ausführlich entwickelten Lösungen. Sachlich geordnet sind die Aufgaben auf die folgenden Kapitel verteilt: I. Quadraturen. II. Vielfache Integrale, Oberflächen-, Körperinhalte. III. Analytische Funktionen, krummlinige Integrale. IV. Differentialgleichungen. V. Ebene Kurven. VI. Kurven und Oberflächen. VII. Asymptotische Linien, Krümmungslinien. VIII. Geradlinige Oberflächen. IX. Partielle Differentialgleichungen. X. Geometrische Anwendungen der partiellen Differentialgleichungen. XI. Totale Differentiale. XII. Elliptische Funktionen.

Wer den Teil der Nouvelles Annales de mathématiques verfolgt, in welchem die Prüfungsaufgaben mitgeteilt und oft von bedeutenden Mathematikern ihre Lösungen veröffentlicht werden, wird wissen, mit welchem Geschick die Fragen gestellt sind, und welche Kenntnisse der Bearbeiter in der Lösung entfalten kann. Daher braucht man sich nicht zu wundern, daß die von Fabry im zweiten Teil entwickelten Lösungen einen auf den ersten Blick recht groß erscheinenden Raum einnehmen. Bei näherem Zusehen zeigt es sich, daß durchaus knappe Darstellung angestrebt ist, daß aber manche einzelne Lösung mit der zugehörigen Diskussion einen in sich abgerundeten Aufsatz bildet, der einen selbständigen Wert hat. Wenn deutsche Kandidaten solche Fragen in der Klausur bearbeiten müßten, würde nach der Art ihrer Ausbildung die Mehrzahl versagen. Die Abrichtung auf die Lösung von Aufgaben für die Prüfungen ist in Frankreich offenbar besser als bei uns. Weierstraß sagt, daß nach unserer Methode des Hochschulunterrichts eine intensivere Bildung erzielt wird. Wir wollen aber nicht verfehlen, solche Vorbilder, wie sie uns in der vorliegenden Sammlung entgegengehalten werden, zur Nachahmung unseren Studenten und auch zur reiflichen Überlegung unseren Hochschullehrern zu empfehlen.

Lp.

M. Cipolla. Sul postulato di Zermelo e la teoria dei limiti delle funzioni. Atti Acc. Gioenia (5) **6**, 13 S.

Zweck dieser Schrift ist, die Theorie der Grenzwerte der Funktionen unabhängig vom Zermeloschen Postulat ohne Beeinträchtigung der Einfachheit und Eleganz zu entwickeln. Vi.

G. Faber. Über die Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte. Münch. Ber. 1913, 519-531.

Der Verf. beweist einen sehr allgemeinen Grenzwertsatz, wovon der bekannte Satz, daß die n-ten Hölderschen und die n-ten Cesàroschen Mittelwerte stets gleichzeitig konvergieren, ein ganz spezieller Fall ist. Fa.

A. Terracini. Alcune considerazioni sul teorema del valor medio. Batt. G. **51** [(4) **3**], 66-72.

Der Verf. leitet die von L. Galvani (Batt. G. **50**, 177-187; F. d. M. **43**, 480, 1912) gefundenen Ergebnisse unter weniger einschränkenden Voraussetzungen ab. Um kurz zu zeigen, worum es sich handelt, erwähne ich den Schlußsatz:

Zwischen x und $x+h$ sei $f(x)$ dreimal differenzierbar, $f''(x)$ von konstantem Vorzeichen, ebenso $f'''(x)$, h beispielsweise >0. Dann ist die von vornherein zwischen 0 und 1 gelegene Zahl ϑ des Mittelwertsatzes $f(x+h)-f(x)=hf'(x+\vartheta h) \lesseqgtr \frac{1}{2}$, je nachdem $f''\cdot f''' \gtreqless 0$ ist. Fa.

G. Peano. Derivata e differenziale. Torino Atti **48**, 47-69.

Der Verf. schlägt vor, das Wort Differential im Sinne von Derivierte zu gebrauchen, und stützt diesen Vorschlag durch logische und geschichtliche Gründe, so durch den Hinweis, daß dx niemals bei Leibniz, sondern erst bei viel Späteren eine „unendlich kleine Größe“ bedeute. Der Verf. verbreitet sich dann überhaupt über Definition und Bezeichnung mathematischer Grundbegriffe (z. B. des Funktionsbegriffs) und über die Verwendung seiner Begriffsschrift. Wenn es auch keineswegs den Anschein hat, daß er mit seinen Bestrebungen durchdringt, so bietet er doch dem Leser, nicht zum mindesten auch durch seine geschichtlichen Bemerkungen, manches Wertvolle. Auch die zum Schlusse von ihm übernommenen vier Seiten Poincarés aus Ens. math. **1**, 106, 1899 (F. d. M. **30**, 88) über die Verwendung der Begriffe Differential und Derivierte im Unterricht wird man immer wieder mit Genuß lesen. Fa.

G. Peano. Sulla definizione di limite. Torino Atti **48**, 750-772.

Der Verf. stellt zunächst fest, daß in den meisten neueren Büchern besserer Mathematiker die Limesdefinition trotz vieler Verschiedenheiten der Formulierung im wesentlichen übereinstimmend und richtig ist; er gibt auch aus älteren Werken Beispiele teils guter Definitionen (aus verhältnismäßig früher Zeit), teils schlechter in sehr verbreiteten Werken. Mit Recht tadelt er die falschen Definitionen, die sich häufig in Schulbüchern finden, sogar in der Algèbre von

Borel. Die gegebenen Beispiele ließen sich natürlich noch durch viele und bezeichnende, sowohl nach der guten wie nach der schlechten Seite hin, vermehren.

Als Heilmittel gegen Mißverständnisse und Unrichtigkeiten empfiehlt der Verf. zum Schlusse, daß der Lehrer seine erste Stunde dazu benutze, um den Schülern den „Formalismus der mathematischen Logik", d. h. doch wohl die Begriffsschrift Peanos, beizubringen; darin aber wird er gewiß wenig Zustimmung finden. Fa.

E. Bortolotti. Espressioni indeterminate. Annali di Mat. (3) **21**, 289-316.

Da die Regeln von Cauchy und Stolz zur Bestimmung des sogenannten wahren Werts unbestimmter Ausdrücke nicht immer anwendbar sind, suchte der Verf. weitertragende Regeln und fand

$$(1)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{f_n}{\varphi_n}=\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_1^n r\,\frac{f_{r+1}-f_r}{\varphi_{r+1}-\varphi_r},$$

$$(2)\qquad \lim_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\begin{cases}\lim\limits_{x=a}\dfrac{1}{a-x}\displaystyle\int_x^a\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\,dx \text{ für endliches } a\\[2ex] \lim\limits_{x=\infty}\dfrac{1}{x-x_0}\displaystyle\int_{x_0}^x\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \text{ für } x_0=\infty,\end{cases}$$

alles unter der Voraussetzung, daß die rechts stehenden Grenzwerte vorhanden sind. Außerdem gibt der Verf. eine Fülle von Grenzwertsätzen für unendliche Reihen sowie für eigentliche und uneigentliche Integrale. Beispiele und Anwendungen wären erwünscht gewesen, um dem Leser ein Urteil zu ermöglichen, inwieweit das Gebotene einen tatsächlichen Fortschritt bedeutet. Fa.

E. Senigaglia. Infinito e infinitesimo in matematica applicata. Periodico di Mat. **29** [(3) **11**], 58-67.

Der Verf. zeigt an einzelnen Beispielen, wie man sich in der angewandten Mathematik zu der Frage zu stellen hat: Unter welcher Bedingung kann man bei der angenäherten Auswertung der Unbekannten den begangenen Fehler als klein genug oder vernachlässigbar oder praktisch unendlich klein bezeichnen? Ein solches Kennzeichen beziehe sich auf die behandelte Frage, sei relativ. Die Aussagen unendlich klein und unendlich groß seien in der Praxis von ganz anderer Bedeutung als in der reinen Mathematik. Lp.

Weitere Literatur.

F. Alonso-Misol. Analisis matematica. Madrid.

P. Appell. Éléments d'analyse mathématique. 3e édition entièrement refondue. Paris: Gauthier-Villars. VIII + 700 S. 8°.

F. d'Arcais. Analisi infinitesimale. 3a edizione, con modificazioni ed aggiunte. Volume II (ultimo). Padova: Draghi. VIII + 941 S. 8°.

W. Bauer und E. v. Hanxleden. Lehrbuch der Mathematik. Differential- und Integralrechnung, nebst den Grundzügen der synthet. u. darst. Geometrie. Braunschweig: F. Vieweg u. Sohn. X + 216 S. gr. 8°.

H. Bouasse et É. Turrière. Exercices et compléments de mathématiques générales. Faisant suite au „Cours de mathématiques générales" de H. Bouasse. Comprenant outre l'étude des courbes et transformations usuelles les éléments de la géométrie du compas, des systèmes articulés, du calcul des séries, du calcul des différences finies, du calcul des probabilités, du calcul vectoriel. Paris: Ch. Delagrave. XV + 499 S. gr. 8°.

Nach der Anzeige im Arch. der Math. u. Phys. (3) **23**, 173 von Wieleitner umfaßt der „Cours", zu welchem die vorliegende Aufgabensammlung gehört, alles Mathematische, was als Einleitung und Vorbereitung zu einem großen Cours de physique dient. Lp.

L. Clariana y Ricart. Rapida excursion a las altas regiones del análisis matemática. Barcelona Mem. Ac. 13 S. 4°.

U. Crudeli. Compendio di calcolo differenziale e di calcolo integrale. Milano: Albrighi, Segati e C. VIII + 243 S. 8°.

E. W. Davis. The calculus. Edition de luxe. New York: Macmillan. XXI + 383 + 63 S. 12mo.

E. Fabry. Problèmes et exercices de mathématiques générales. 2e édition revue et très augmentée. Paris: A. Hermann & Fils. 496 S. 8°.

F. Junker. Analysis (Differential- und Integralrechnung). Stuttgart: Ulmer. VIII + 216 S. 8°.

M. Kleinschmidt. Versuch einer allgemeinen Theorie des Grenzverfahrens. Progr. Jena. 66 S. 8°.

W. Koestler und M. Tramer. Differential- und Integralrechnung. Infinitesimalrechnung für Ingenieure, insbesondere auch zum Selbststudium. Erster Teil: Grundlagen. Berlin: J. Springer. 484 S. 8°.

Vgl. F. d. M. **43**, 352, 1912. — Rezension in Arch. d. Math. u. Phys. (3) **22**, 352 von E. Jahnke.

J. W. Mellor. Higher mathematics for students of chemistry and physics, with special reference to practical work. 4th edition, enlarged. New York: Longmans. XXI + 641 S. 8°.

W. Nernst und A. Schoenflies. Einführung in die mathem. Behandlung der Naturwissensch. Kurzgef. Lehrb. d. Differential- u. Integralrechnung mit bes. Berücksichtigung der Chemie. 7. verm. u. verb. Aufl. München: R. Oldenbourg. XII + 444 S. gr. 8°.

R. E. Root. Limits in terms of order, with example of limiting element not approachable by a sequence. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 445-446.

H. Roussotte. Recueil d'exercices sur le calcul différentiel. Paris: Dunod et Pinat.

I. Todhunter. Trattato sul calcolo. Versione dall' inglese, con aggiunte di G. Battaglini. 5a edizione, riveduta e aumentata sull' ultima edizione inglese. 2 volumi. Napoli: Pellerano. 476 u. 451 S. 8°.

H. VOGT. Éléments des mathématiques supérieures. Édition réduite à l'usage des élèves chimistes. Paris: Vuibert et Nony. VI + 357 S. 8°.

H. VOGT. Solutions des exercices proposés dans les éléments de mathématiques supérieures. Paris: Vuibert et Nony. 277 S. 8°.

C. G. WEITZEL. Unterrichtsbriefe zur Einführung in die höhere Mathematik. In 30 Lieferungen. Wien: A. Hartleben. Lex. 8°.

L. ZORETTI. Leçons de mathématiques générales. Avec une préface de P. Appell. Paris: Gauthier-Villars. XVI + 754 S. 8°.

Kapitel 2.

Differentialrechnung (Differentiale, Funktionen von Differentialen. Maxima und Minima).

E. R. HEDRICK. A direct definition of logarithmic derivative. American Math. Monthly **20**, 185-187.

Die logarithmische Ableitung r_r einer Funktion $y = f(x)$ ist „the relative rate of increase" von y in bezug auf x. Von diesem Standpunkte aus wird ohne Zuhülfenahme der Logarithmen folgende Definition von r_r für $x = a$ gewonnen:

$$r_r = \lim_{\Delta x = 0} \left[\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Phi(a + \Delta x) - \Phi(a)} \right],$$

wo

$$\Phi(x) = \int f(x)\, dx$$

ist. Es wird die Übereinstimmung dieser Definition mit der gewöhnlichen gezeigt und der Satz bewiesen: Wenn zwei Funktionen dieselbe logarithmische Ableitung haben, so ist ihr Quotient eine Konstante. Gd.

E. R. HEDRICK. A direct definition of the logarithmic derivative. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 226.

Mehrere mögliche direkte Definitionen; Wirkung jeder einzelnen auf gewisse Fundamentaltheoreme und auf die Existenz des Begriffes von Punkten, wo die gegebene Funktion verschwindet. Lp.

G. SANNIA. Sui differenziali totali di ordine superiore. Palermo Rend. **36**, 305-316.

Wenn eine Funktion μ von $u_1, u_2, \ldots, u_n$ endliche und stetige erste partielle Ableitungen hat, die n stetigen Funktionen $\alpha_i(\mu)$ von μ selbst, die auch stetige Ableitungen haben, proportional sind, so genügt μ einer in den u linearen Gleichung:

$$(1) \qquad \alpha_0(\mu) + \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i(\mu) u_i = 0,$$

in der $\alpha_0(\mu)$ ebenfalls eine stetige Funktion mit stetiger Ableitung bezeichnet. Eine Funktion μ kann nicht zwei verschiedenen solchen Gleichungen genügen. Wenn eine Funktion einer Gleichung wie (1) genügt, so sind ihre ersten Ableitungen endlich, stetig und den $\alpha_i(\mu)$ proportional.

Es seien x und y Funktionen von $u_1, u_2, \ldots, u_n$, die samt ihren Ableitungen bis zur Ordnung $k+2$ endlich und stetig sind. Die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial^k x}{\partial u_1^k}, & \frac{\partial^k x}{\partial^{k-1} u_1 \, \partial u_2}, & \ldots, & \frac{\partial^k x}{\partial u_n^k} \\ \frac{\partial^k y}{\partial u_1^k} & \frac{\partial^k y}{\partial^{k-1} u_1 \, \partial u_2}, & \ldots, & \frac{\partial^k y}{\partial u_n^k} \end{matrix} \right\| \quad (k > 1)$$

hat den Rang 1 nur: A. wenn eine lineare Kombination $\alpha x + \beta y$ ein Polynom von $(k-1)$-tem Grade wird; B. wenn $x = \int_c^\mu [\alpha_0(s) + \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i(s) u_i]^{k-1} \beta(s) \, ds + P^{(k-1)}$, $y = x + R^{(k-1)}$ ist, wo $\beta(s)$ endlich und stetig $(\neq 0)$, die α mit ihren ersten Ableitungen endlich und stetig, c eine Konstante, $P^{(k-1)}$ und $R^{(k-1)}$ Polynome $(k-1)$-ten Grades in den u sind und μ der Gleichung (1) genügt.

Anwendung hiervon auf die integrierenden Faktoren höherer Differentialausdrücke. Schr.

G. A. Bliss. Note on Pierpont's theory of functions. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 146-147.

Berichtigung einer Aussage über die Möglichkeit der Umkehrung der Reihenfolge der Differentiation einer Funktion $f(x, y)$ in bezug auf x und auf y. Lp.

P. Martinotti. Alcune proprietà relative al teorema del valor medio. Lomb. Ist. Rend. (2) **46**, 496-498.

Eine Umkehrung des Mittelwertsatzes: Ist x_0 ein Stetigkeitspunkt für $f'(x)$, der nicht einem Intervall angehört, in dem $f'(x)$ konstant ist, und der auch keine Häufungsstelle von Extremen von $f'(x)$ ist, so gibt es ein Intervall von x_0 von der Art, daß zu jedem Wert x darin ein Wert x' gehört, für den

$$f'(x) = \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}$$

ist. Schr.

O. Schenker. Eine Interpolationsaufgabe. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **21**, 298-299.

„Von der in rechtwinkligen Koordinaten gegebenen Kurve $y = f(x)$ kennt man die zu den Abszissen $1, 2, 3, 4, \ldots, 0, -1, -2, -3, -4, \ldots$ zugehörigen Ordinaten $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots, y_0, y_{-1}, y_{-2}, y_{-3}, y_{-4}, \ldots$. Man soll mittels

der interpolierenden Kurve $y = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + \dots + C_1 x + C_0$ (für $n = 1, 2, 3, 4, \dots$) Näherungswerte von $y_0' = f'(0)$ ableiten." Dies geschieht für $n = 1, 2, 3, 5$. Zu der vom Verf. angeführten Literatur der Frage fügt die Schriftleitung des Archivs den Hinweis auf die bezüglichen Arbeiten von Runge.

Lp.

R. Slaby. Ein einfaches Verfahren zur Bildung von Differentialkurven. Zs. d. V. d. Ing. 1913, 821.

Da $f'(x)$ um so genauer durch $\frac{f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2})}{h}$ approximiert wird, je kleiner h ist, so erhält man die Differentialkurve $y = f'(x)$, indem man $y = f(x)$ um ein kleines Stück h horizontal verschiebt, die Ordinatendifferenzen als neue Ordinaten nimmt und diese Kurve endlich um $\frac{1}{2} h$ zurückverschiebt. Schr.

Ch. A. Fischer. A generalization of Volterra's derivative of a function of a curve. American J. 35, 369-394.

Sei in der Bezeichnungsweise von Volterra $(x, \Phi(x))$ eine ebene Kurve, $y \mid [\Phi(x)] \mid$ eine Linienfunktion, $y' \mid [\Phi(x), t]$ ihre Ableitung im Punkte $x = t$. Nach Volterra ist unter geeigneten Voraussetzungen

$$(1) \qquad \delta y \mid [\Phi(x)] \mid = \int_A^B y' \mid [\Phi(x), t] \, \delta\Phi(t) dt.$$

Der Verf. führt ein System von Differentialgleichungen

$$(2) \qquad z_i' = g_i(x, Y, Y', z_1, z_2, \dots, z_n) \qquad (i = 1, \dots, m)$$

und eine Schar (C) von Kurven $y = y(x)$ $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$, $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$ ein, die (wie auch g_i) gewissen Stetigkeitsbedingungen genügen und überdies so beschaffen sind, daß, wenn man in (2) für Y, Y' entsprechend y und y' setzt, diese Differentialgleichungen Lösungen haben, die für $x = x_1$ und $x = x_2$ vorgegebene Werte z_{i_1} und z_{i_2} $(i = 1, \dots, m)$ annehmen. Nunmehr wird die Volterrasche Ableitung einer Linienfunktion, deren Definitionsbereich die Schar (C) ist, betrachtet. Man gewinnt eine Formel, welche die Formel (1) als besonderen Fall enthält. In dem letzten Abschnitte der Arbeit werden die Ergebnisse auf das Lagrangesche Problem der Variationsrechnung angewandt. Ltn.

A. F. Carpenter. A theorem for the development of a function as an infinite product. American J. 35, 105-114.

Führt man in der von R. E. Moritz (American J. 24; F. d. M. 33, 302, 1902) erdachten Quotientialrechnung (der „quotiential coefficient" $QF(x)$ von $F(x)$ ist $\lim\limits_{h=1} \log_h \frac{F(x,h)}{F(x)}$) das Analogon der Taylorschen Entwicklung durch, so gelangt man zur Darstellung von Funktionen durch unendliche Produkte. Das Resultat wird noch zu gewissen von Sylvester aufgestellten Formeln in Beziehung gesetzt. Spezielle Anwendungen fehlen.

Schr.

T. Hayashi. On the formula $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$. Tôhoku Math. J. 3, 179.

Mit Bezugnahme auf die Note von Perl im Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung **18**, 399-401 (F. d. M. **40**, 335, 1909) gibt der Verf. ein Beispiel, bei dem die Summe der Quadrate der beiden Differentialquotienten jeden Wert zwischen 0 und 1 annehmen kann. Lp.

D. A. Kryschanowski. Über Maximal- und Minimaleigenschaften ebener Figuren. Odessa. 99 S. kl. 8⁰. (Russisch.)

Die Arbeit ist bereits 1912 in dem russischen „Boten für Experimentalphysik und Elementarmathematik" gedruckt und erscheint jetzt, zum Teil umgearbeitet, als Nr. I einer Sammlung: „Elementare Studien über Physik und Mathematik". Sie behandelt die Frage nach den ebenen Figuren, die bei gegebenem Umfange den größten Flächeninhalt besitzen und dergleichen. Nach einer geschichtlichen Übersicht, in der besonders die Arbeiten Steiners besprochen und kritisiert werden, wird die Frage mit den Hülfsmitteln der Elementargeometrie, wesentlich unter Benutzung der Steinerschen Methoden, behandelt. In den beiden letzten Paragraphen werden dann die Beweise entwickelt, die Edler (1882) und Carathéodory (1910) dafür gegeben haben, daß wirklich ein Maximum des Inhalts eintritt. Nur der letzte Paragraph verläßt das Gebiet der elementaren Geometrie. El.

A. Padoa. Une question de maximum ou de minimum. Proc. 5. Intern. Math.-Kongr. **1**, 337-340.

Es wird bewiesen, daß

$$z = y_1 y_2 \dots y_n,$$

wo n eine ganze Zahl größer als 1 ist und für jedes ganze r von 1 bis n

$$y_r = a_{r_1} x_1 + a_{r_2} x_2 + \dots + a_{r,n-1} x_{n-1} + a_{rn}$$

ein Maximum oder Minimum besitzt, je nachdem das Produkt

$$A = A_{1n} A_{2n} \dots A_{nn}$$

positiv oder negativ ist, wenn wir mit A_{rn} die dem Elemente a_{rs} der Determinante der $a_{11}, \dots, a_{nn}$ entsprechenden Unterdeterminanten bezeichnen, unter der alleinigen Bedingung, daß jeder der Ausdrücke $A_{rn} y_r \gtreqless 0$. Der größte oder kleinste Wert ist gleich der n-ten Potenz der Determinante, dividiert durch $n^n A$. A. K.

E. Maccaferri. Sui massimi e minimi. Suppl. al Period. **16**, 36-38, 88-91.

E. Maccaferri. Una regola di calcolo infinitesimale. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 220-224.

Die ersten beiden Noten setzen die Betrachtungen des Verf. aus dem Vorjahre fort (F. d. M. **43**, 1105, 1912). „Eine Funktion $f(x)$ hat für $x = x_0$ ein

Maximum oder ein Minimum, wenn die Differenz $f(x_0 + \delta) - f(x_0)$ für ein hinreichend kleines δ immer dasselbe Zeichen wie δ hat oder das entgegengesetzte." Dieser Satz wird in dem ersten Artikel benutzt. In dem zweiten beschäftigt sich der Verf. mit der Frage der extremen Werte einer Funktion

$$y = F(x) = k[\varphi(x) - a][\varphi(x) - b][\varphi(x) - c]\ldots,$$

wozu eine Note von Burali-Forti (F. d. M. **41**, 317, 1910) die Anregung gegeben hat. Diese Frage wird dann in der Note des Periodico allgemeiner behandelt; auf doppelte Weise wird der Satz bewiesen: „Es sei eine Funktion $F(x)$ von einer Funktion $\varphi(x)$ gegeben: $F(x) = f[\varphi(x)]$, und es seien die (relativen) Maxima und Minima der Funktionen $f(u)$ und $\varphi(x)$ bekannt; dann werden die (relativen) Maxima und Minima von $F(x)$ so bestimmt: a) $F(x)$ hat die Maxima und Minima von $f(u)$ stets, wenn die entsprechenden Punkte u in das Schwankungsgebiet von $\varphi(x)$ fallen. b) $F(x)$ hat außerdem als Maximal- und Minimalpunkte die Maximal- und die Minimalpunkte von $\varphi(x)$ in solcher Beziehung, daß einem Maximum (oder einem Minimum) von $\varphi(x)$ in x_1 ein Maximum oder ein Minimum (oder ein Minimum oder ein Maximum) von $F(x)$ entspricht, je nachdem $f(u)$ für $u = \varphi(x_1)$ im Wachsen oder im Abnehmen begriffen ist (vgl. F. d. M. **42**, 310, 1911)." Lp.

P. Cattaneo. Nuova dimostrazione di un noto teorema sui massimi e minimi. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 186-188.

Der Verf. vermißt bei den Beweisen für den bekannten Satz, daß, wenn die Summe mehrerer positiven Veränderlichen konstant ist, ihr Produkt den größten Wert erreicht, falls alle Veränderlichen gleich sind, einen schlüssigen Nachweis für die Existenz des Maximums, weil immer nur gezeigt werde, daß in dem Falle der Nichtgleichheit ein Maximum nicht stattfindet. Nur von D. Besso sei 1879 dieser Nachweis streng erbracht worden. Der vom Verf. hier abgedruckte Beweis sei von Frattini bereits anstatt dessen von Besso in die zweite Auflage der „Lezioni di algebra, geometria e trigonometria" aufgenommen worden. Von den Ergänzungen des angeführten Satzes nach den neuesten Erörterungen (F. d. M. **41**, 317, 1910 und **42**, 310, 1911) scheint der Verf. nichts erfahren zu haben. Lp.

C. Rosati. Sul metodo dei moltiplicatori nella ricerca dei massimi e minimi di un prodotto di fattori lineari. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 278-279.

Empfiehlt den Gebrauch des folgenden Satzes: „Es sei

$$f(x) = (a_1 x + b_1)^{n_1} (a_2 x + b_2)^{n_2} \ldots (a_r x + b_r)^{n_r}$$

ein Produkt von Potenzen linearer Funktionen von x mit lauter ganzzahligen positiven Exponenten, die in verschiedenen Punkten Null werden. Jede reelle Wurzel θ der Gleichung

$$\frac{a_1 n_1}{a_1 x + b_1} + \frac{a_2 n_2}{a_2 x + b_2} + \cdots + \frac{a_r n_r}{a_r x + b_r} = 0$$

ist ein Maximal- oder Minimalpunkt von $f(x)$, je nachdem $f(\theta) \gtrless 0$ ist." Lp.

L. Orlando. Sul massimo del prodotto di m numeri che hanno la somma costante. Suppl. al Period. **16**, 81.

Für den elementaren Unterricht zugestutzter Beweis. Lp.

I. L. Csada. Risoluzione della quistione 800. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 279-280.

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positive Veränderliche; die Minima der Funktion $\varphi = S/N$ zu finden, wo

$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,\ N = x_1^{1/a_1} . x_2^{1/a_2} \ldots x_n^{1/a_n}.$$

Lp.

R. Sturm. Zur Existenzfrage eines Maximums oder Minimums. Deutsche Math.-Ver. **22**, 43-44.

O. Perron. Zur Existenzfrage eines Maximums oder Minimums. Deutsche Math.-Ver. **22**, 140-144.

Die Aufforderung Sturms, einige geometrische Aufgaben anzugeben, in denen ein Maximum oder Minimum nicht existiert, beantwortet Perron mit mehreren instruktiven Beispielen. Unter anderem zeigt er die Hinfälligkeit der von J. Steiner bei Extremwertaufgaben angewandten Schlußweise: „Beim richtigen Schließen in der Mathematik kommt es immer darauf an, daß man sich zu den ausgesprochenen Voraussetzungen nichts Unausgesprochenes vielleicht unbewußt hinzudenkt, daß man von Vorkenntnissen absieht, Vorurteile abstreift.“ Sk.

R. Sturm. Existenzbeweis des Punktes kleinster Entfernungssumme von vier gegebenen Punkten. J. für Math. **143**, 241-249.

Wenn eine Ecke des Tetraeders der vier Punkte einen Exzeß (Überschuß der Summe der Flächenwinkel über 180°) besitzt, welcher $\geq 180°$, so ist ihr Scheitel der Punkt kleinster Entfernungssumme. In dem andern Falle gibt es einen Punkt dieser Eigenschaft im Innern des Tetraeders (vgl. R. Sturm, Maxima und Minima in der elementaren Geometrie, Leipzig 1910, § 8). Die Existenz dieses Punktes ist nicht selbstverständlich. Sie wird bewiesen, indem gezeigt wird, daß der Punkt der Schnittpunkt dreier Flächen höherer Ordnung ist. Zch.

R. Sturm. Minima bei projektiven Gebilden. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **21**, 97-103.

1. Minimalaufgaben für ineinanderliegende projektive Gebilde. 2. Kürzeste Strecke zwischen entsprechenden Punkten projektiver Punktreihen (mit sich kreuzenden oder sich schneidenden Trägern). 3. Diejenige Tangente eines Kreises zu finden, von der zwei feste Tangenten das kürzeste Stück abschneiden. Sk.

R. Sturm. Über Maxima und Minima bei Pyramiden und Prismen. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 204-207.

Ergänzungen zu dem Buche „Maxima und Minima in der elementaren Geometrie" (F. d. M. **41**, 315 u. 558, 1910) über Pyramiden und Prismen, die einer Kugel um- oder eingeschrieben sind, nach elementarer Methode behandelt.
Lp.

R. Sturm. Über das Maximum einer Entfernungssumme. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 207-208.

Es seien D, E zwei Punkte auf der Seite AB eines Dreiecks ABC, so daß die Reihenfolge $ADEB$ besteht; X ein Punkt im Innern oder auf dem Umfang von ABC. Das Maximum der Summe $DX + EX$ wird aufgesucht. Lp.

R. Sturm. Über Kreis- und Kugelsegmente. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 357-364.

Entwicklung von Sätzen über Maxima oder Minima bei diesen Segmenten, wenn eines ihrer Bestimmungsstücke gegeben ist, durch möglichst elementare Hülfsmittel, insbesondere durch das Verfolgen der Art ihres Wachstums bei Veränderung des variabel bleibenden zweiten Bestimmungsstücks. Beispiele: Bei festem Inhalt S eines Kreissegmentes fallen mit dem wachsenden Zentrumswinkel Radius und Sehne durchweg, der Bogen jedoch nur, solange es sich um spitzwinklige Segmente handelt; beim Halbkreis wird das Minimum $\sqrt{2S\pi}$ des Bogens erreicht, der dann bei den stumpfwinkligen Segmenten wiederum steigt bis zum Wert $2\sqrt{S\pi}$ beim Vollkreise. Bei festem Inhalt $K = 2a^2\pi$ einer Kugelkalotte geht der Kugelradius r von ∞ durch a bis $a/\sqrt{2}$, der Basisradius ϱ von $a\sqrt{2}$ durch a bis 0, während die Höhe h von 0 durch a (Halbkugel) bis $a\sqrt{2}$ (Vollkugel) wächst. Der Inhalt des Segments wächst, solange $h < a$, erreicht bei $h = a$ das Maximum $\frac{2}{3}a^3\pi$, sinkt dann bis zu $\frac{1}{3}a^3\pi\sqrt{2}$, dem Inhalt der Vollkugel.
Lp.

J. Sobotka. Eine Minimumseigenschaft des Oktaeders. Rozpravy **22**, Nr. 25, 8 S. (Böhmisch.) Bulletin international **18**, 206-214.

Die Betrachtungen beziehen sich auf Oktaeder, deren Diagonalen sich in einem Punkte schneiden und durch ihn halbiert werden. Dabei wird die Aufgabe gelöst, ein solches Oktaeder zwischen zwei parallelen Seitenflächen durch eine Ebene so zu schneiden, daß für das entstandene Sechseck der Umfang ein Minimum wird, und unter allen derartigen Sechsecken dasjenige zu ermitteln, dessen Inhalt ein Maximum ist.
Pe.

J. Sobotka. Eine besondere Art der einem gegebenen Dreieck ein- oder umgeschriebenen extremen Dreiecke. Rozpravy **22**, Nr. 33, 17 S. (Böhmisch.) Bulletin international **18**, 243-261.

Die Arbeit befaßt sich eingehend mit den Eigenschaften und der Konstruktion von Dreiecken, welche einem gegebenen Dreieck ein- oder umgeschrieben werden können, so daß sie einem zweiten gegebenen Dreieck ähnlich sind und ihr Flächeninhalt einen extremen Wert besitzt. Es werden die Beziehungen verfolgt, welche zwischen zwei derartigen ungleichsinnigen Dreiecken bestehen, und speziell wird gezeigt, daß die Fußpunkte der aus den isodynamischen Zentren eines gegebenen Dreiecks auf seine Seiten gefällten Lote die Ecken der kleinsten gleichseitigen Dreiecke sind, welche man dem gegebenen Dreiecke einschreiben kann. Zum Schluß werden die Konstruktionen auf spezielle Fälle angewendet und wird die Aufgabe, „durch einen Punkt die kürzeste Strecke zwischen den Schenkeln eines Winkels zu legen", konstruktiv gelöst und diskutiert. Pe.

J. Sobotka. Inhaltsbestimmung eines Vierseits mit Rücksicht auf sein Maximum oder Minimum. Rozpravy **22**, Nr. 34, 25 S. (Böhmisch.) Bulletin international **18**, 262-289.

R. Sturm befaßt sich in seinem Werke „Maxima und Minima in der elementaren Geometrie" eingehend mit konvexen Vierecken in Rücksicht auf gewisse Maxima und Minima und beweist den Satz: „Von allen Vierseiten mit gegebenem Inhalt und mit gegebenen Winkeln hat das Tangentenvierseit (eines Kreises) den kleinsten Umfang." Zu dem Zwecke leitet er eine neue Inhaltsformel für ein beliebiges konvexes Vierseit ab, ausgedrückt durch seine Seiten und Winkel. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit einigen andern Ableitungsarten dieser Formel und zeigt, wie die diesbezüglichen Betrachtungen zu erweitern sind, um auf irgendein Vierseit, sei es konvex, konkav oder überschlagen, angewendet werden zu können. Hierbei wird gezeigt, wie der Inhalt eines jeden derartigen Vierseits durch die algebraische Summe zweier mit ihm leicht zu verknüpfenden Tangentenvierseite in allen möglichen Fällen ausgedrückt werden kann, und es werden dann daraus Schlußfolgerungen auf die bezüglichen Maxima oder Minima solcher Vierseite gezogen. Pe.

J. Sobotka. Über extreme eingeschriebene Vielecke. Rozpravy **22**, Nr. 37, 28 S. (Böhmisch.) Bulletin international **18**, 290-320.

Es wird ein allgemeines einfaches Vieleck $A_1 A_2 \dots A_n$ und ein ihm in allgemeiner Weise eingeschriebenes Vieleck $B_1 B_2 \dots B_n$ betrachtet; die Seiten von $B_1 B_2 \dots B_n$ werden in bezug auf das Vieleck $A_1 A_2 \dots A_n$ orientiert, und zwar derart, daß zwei aufeinanderfolgende Seiten $B_{k-1} B_k$, $B_k B_{k+1}$ mit gleichen oder entgegengesetzten Vorzeichen behaftet werden, je nachdem sie sich auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten der Geraden $A_k A_{k+1}$, auf welcher ihre gemeinsame Ecke liegt, befinden. Wählt man also das Vorzeichen irgendeiner Seite von $B_1 B_2 \dots B_n$ beliebig, so ist hiermit das Vorzeichen aller nachfolgenden der Reihe nach bestimmt. Eine Nichtübereinstimmung kann hier bei der ersten und letzten Seite eintreten. In einem solchen Falle wird $B_1 B_2 B_3 \dots$ als ein $2n$-Eck von zwei zusammenfallenden Umläufen aufgefaßt, so daß jede Seite dieses Vielecks zwei verschiedene Vorzeichen besitzt, von denen das eine dem ersten, das andere dem zweiten Umlaufe angehört. Die algebraische Summe

der so orientierten Seitenlängen wird als Umfang des orientierten Vielecks definiert, und es werden derartige Polygone ermittelt, für welche der Umfang ein Minimum ist, und unter ihnen werden dann solche hervorgehoben, für welche der Inhalt einen extremen Wert besitzt. Die Betrachtungen werden alsdann auf diejenigen einfachen Vierseite angewendet, welche in einem vollständigen Kreisviereck enthalten sind, und schließlich wird auf diesem Wege die Bedingung zwischen den Seitenlängen der verschiedenen Tangentenvierseite eines Kreises einheitlich zum Ausdruck gebracht. Pe.

St. Straszewicz. O kole opisanym na danym zbiorze punktów (Über den einer Punktmenge umschriebenen Kreis). Wektor **2**, 282-286.

Es sei in der Ebene eine geschlossene Punktmenge gegeben, deren „Durchmesser", d. h. die größte Entfernung zweier Punkte, d sei. Es gibt einen einzigen Kreis, der alle Punkte im Innern oder auf der Peripherie enthält, und dessen Radius r ein Minimum ist. Außerdem hat man die Ungleichungen

$$\frac{d}{3} \leqq r \leqq \frac{d}{2}.$$

A. R.

M. Edler v. Leber. Le contenu du cercle et de la sphère comparé à celui d'autres formes géométriques. Ens. math. **15**, 369-384.

Um die Maximaleigenschaft des Kreises und der Kugel zu beweisen, nimmt der Verf. als Axiom an, daß es für den Inhalt einer ebenen Figur von gegebenem Umfang oder eines Körpers von gegebener Oberfläche eine gewisse obere Grenze gibt. Diese nennt er das absolute Maximum. Er untersucht die Bedingungen, welche die gesuchten Figuren erfüllen müssen, um ein Maximum zu liefern, wenn ein solches existiert, und findet, daß nur Kreis und Kugel jene Bedingungen erfüllen. Für das Problem der ebenen Geometrie gibt er unter jener Voraussetzung drei Beweise: der erste geht von dem Nachweis aus, daß die Figur, der die Maximaleigenschaft zukommt, keinen singulären Punkt und keine Unregelmäßigkeit der Krümmung besitzen dürfe, und schließt daraus, daß es nur der Kreis sein kann. Der zweite Beweis geht auf Steiner zurück. Der dritte Beweis beruht auf den beiden Hülfssätzen: 1. Unter allen isoperimetrischen n-Ecken ist das regelmäßige am größten, und 2. von zwei regelmäßigen Vielecken gleichen Umfangs ist dasjenige das größere, welches die größere Seitenzahl besitzt. Für das räumliche Problem gibt der Verf. nur einen Beweis, der dem ersten Beweise des Satzes vom Kreise nachgebildet ist. Zch.

S. Schicht. Über die mittlere Entfernung eines Punktes von einem Punktsysteme und die mittlere Entfernung zweier Punktsysteme voneinander. Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 236-247.

Als mittlere Entfernung des Punktes P vom Punktsystem $P_1, P_2, \ldots, P_n$ wird das arithmetische Mittel:

$$r = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_v P P_v$$

bezeichnet. Analog für zwei Punktsysteme:

$$s = \frac{1}{nm} \sum_{1}^{n}{}_v \sum_{1}^{m}{}_u P_v Q_u.$$

Die Hauptfrage ist die nach dem Minimum von r und s. Auf die Anwendung bei der Bestimmung der günstigsten Lage eines Verkehrszentrums wird hingewiesen.

Empirisch kann die Lage von P, die das Minimum von r liefert, auf mechanischem Wege durch gespannte Fäden bestimmt werden. Es existiert stets genau ein Minimum. Gibt es Symmetrieebenen, so trifft das Minimum darin ein. Für $n = 3$ erscheinen die drei Seiten des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ aus P unter gleichen Winkeln (ein bekannter Satz); für $n = 4$ erscheinen die vier Flächen des Tetraeders $P_1 P_2 P_3 P_4$ aus P unter kongruenten Dreikanten.

Die Flächen konstanter mittlerer Entfernung haben besondere Eigenschaften, die natürlich für $n = 2$ die entsprechenden Eigenschaften des (verlängerten) Rotationsellipsoids (oder der Ellipse, falls man sich hier auf einen ebenen Schnitt beschränkt) liefern.

Ähnlich wird der Fall zweier Punktsysteme behandelt. Doch ist dem Verf. wie er mitteilt, der Beweis der Eindeutigkeit des Minimums der mittleren Entfernung zweier Punktsysteme (von denen jedes in starrer Verbindung, aber gegen das andere frei beweglich zu denken ist) nicht geglückt. Schr.

J. Finsterbusch. Geometrische Maxima und Minima mit Anwendung auf die Optik. Proc. 5. Intern. Math.-Congr. **2**, 105-117.

Im ersten Paragraphen werden die maßgebenden Grundgedanken bei einer rein geometrischen Behandlung extremer Werte kurz zusammengestellt. Der zweite Paragraph dient zur Lösung einiger Aufgaben über ebene Vielecke. Der bekannte Satz, daß im spitzwinkligen Dreieck das Dreieck der Höhenfußpunkte den kleinsten Umfang hat, für den H. A. Schwarz den hübschen Beweis durch sechs Umklappungen geliefert hat, wird vom Verf. durch zwei solcher Umklappungen erbracht. Die Sätze über extreme Flächeninhalte der einem Kreise eingeschriebenen oder umgeschriebenen Vielecke werden auf eine andere Weise geführt als bei Steiner. Den breitesten Raum nimmt die Herleitung des Minimums der Ablenkung des Lichtes (§ 3) in Prismen ein, wobei jedoch die Rechnung nicht ganz vermieden ist. Lp.

Kiesling. Elementare Begründung des Reflexionsgesetzes. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 132-134.

Als Minimalaufgabe in altbekannter Weise behandelt. Lp.

E. Lampe. Über die Abhängigkeit der extremen Werte der Insolation von der Deklination der Sonne. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **12**, 62-64.

Zur Vereinfachung der Aufgabe werden folgende Annahmen gemacht: 1. Die Deklination der Sonne wird innerhalb eines Tages als konstant angesehen (Mittelwert). 2. Die Absorption und die Refraktion der Atmosphäre werden außer acht gelassen. 3. Der Abstand von der Sonne wird als konstant angenommen. 4. Die Sonnenstrahlen werden als parallel zu den vom Sonnenmittelpunkt ausgesandten Strahlen angenommen. Die Lösung der Frage hängt von einer transzendenten Gleichung ab. Verschiedene Zahlenbeispiele zeigen das Wandern der Extreme mit der Veränderung der Deklination. Auch einige Zusatzfragen erfahren eine rechnerische Beantwortung. Lp.

T. Kariya. A simple problem in differential calculus. Tokyo Math. Ges. (2) **7**, 43-46.

Zwei Punkte brechen gleichzeitig von zwei Ecken A und B eines regelmäßigen sphärischen Polygons $ABCD\ldots$ in den Richtungen AB, BC auf und durchlaufen den Umfang mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten V und v ($V > v$), bis ein Punkt den andern überholt. Die kleinsten Winkelabstände zwischen den beiden Punkten treten in den Zeiten T_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) ein, die durch die Gleichungen

$$\frac{\operatorname{tg}(a - V T_1)}{\operatorname{tg} v T_1} = \frac{\operatorname{tg}(2a - V T_2)}{\operatorname{tg}(v T_2 - a)} = \cdots = \frac{\operatorname{tg}(na - V T_n)}{\operatorname{tg}(v T_n - (n-1)a)} = \frac{v + V \cos\omega}{V + v \cos\omega},$$

wo ω ein Polygonswinkel, T_i die Zeit vom Anfang der Bewegung bis zum i-ten Minimalabstand, n die reelle Zahl der Minimalabstände bezeichnet. Auch die Summe aller Minimalabstände wird berechnet. Lp.

C. Somigliana. Sopra un criterio di classificazione dei massimi e dei minimi delle funzioni di più variabili. Proc. 5. Intern. Math.-Congr. **2**, 270-271.

Eine kurze Bemerkung über die analytische Fassung der Probleme des Kammweges und des Talweges als Probleme des Maximums und Minimums. A. K.

Kapitel 3.

Integralrechnung.

J. G. Leathem. Volume and surface integrals used in physics. Second edition, with two additional sections. Cambridge: University Press. 73 S. (Cambridge Tracts in Math. No. 1.)

Die erste Aufgabe dieses Büchleins wurde 1905 veröffentlicht (F. d. M. **36**, 358, 1905); die gegenwärtige unterscheidet sich von ihr nur durch die Einfügung zweier zusätzlichen Abschnitte. Der eine von ihnen handelt von dem G a u ß schen Satz des Oberflächenintegrals einer Normalkraft in der Theorie

der Anziehungen; er ist ein mit geringen Abänderungen versehener Neudruck einer Abhandlung des Verf. in Lond. M. S. Proc. (2) **8**, 200-212 (F. d. M. **41**, 856, 1910). Der andere betrifft einige Sätze der Hydrodynamik und schließt einen kurzen Bericht der Theorie der Saugkraft zwischen Körpern ein, die sich in einer Flüssigkeit bewegen. J. (Lp.)

W. H. Young. On the new theory of integration. Lond. Roy. Soc. Proc. **88**, 170-178.

In der Abhandlung „On a new method in the theory of integration (Lond. M. S. Proc. (2) **9**, 15-50; F. d. M. **41**, 325, 1910) hat der Verf. gezeigt, daß die Methode der monotonen Folgen es ermöglicht, auf die Lebesguesche Integration in anschaulicher Weise die Erweiterung von Ergebnissen zu erstrecken, von denen es bekannt ist, daß sie für Riemannsche Integrale gelten. In der vorliegenden Abhandlung wird kurz angegeben, wie die Methode der monotonen Sequenzen dazu führt, gleichzeitig die klassischen Theoreme, deren Verallgemeinerungen in Rede stehen, und diese Verallgemeinerungen zu beweisen. Zu diesem Zwecke wird eine geringe Abänderung des Ganges in der angeführten Arbeit angewandt. Um aber eine gewisse Bezeichnung nicht zu übergehen, die der Verf. einführt, und die bei der Vorliebe der Engländer für solche Dinge wohl später ohne Erklärung benutzt wird, fügen wir folgende Stelle wörtlich hinzu: Prinzip I. „Von einer Funktion sagt man, sie habe ein Integral, wenn sie als die (endliche oder unendliche mit bestimmtem Vorzeichen) Grenze einer monotonen Folge von Funktionen ausgedrückt werden kann, die zu einer Klasse von Funktionen gehören, deren Integrale schon definiert worden sind, vorausgesetzt nur, daß die Grenze der Integrale der Funktionen jeder solchen Folge dieselbe ist, und diese Grenze heißt das Integral der gegebenen Funktion. Bezeichnet man obere und untere halbstetige Funktionen durch die Buchstaben u und l (upper, lower), so wird man dazu geführt, die Natur der Funktionen zu prüfen, die als Grenzen monotoner Folgen von l-Funktionen und u-Funktionen entstehen. Eine absteigende Folge von den u gibt uns eine u, eine aufsteigende Folge von den l gibt uns eine l; aber eine aufsteigende Folge von den u gibt uns im allgemeinen eine neue Funktion, die wir lu nennen, und eine absteigende Folge von den l gibt uns eine neue Funktion, die wir ul nennen. Eine Wiederholung dieses Ganges führt einerseits auf ein Wiederauftreten der lu- und ul-Funktionen, andererseits auf zwei neue Typen von Funktionen, die wir lul- und ulu-Funktionen nennen können. Es ist klar, daß dieser Fortgang unbeschränkt ausgedehnt werden kann.“ Lp.

I. M. Azevedo do Amaral. Note sur la solution finie d'un problème de Newton. Ann. Ac. Pol. Porto 8, 207-209.

Es wird ein in recht verwickelter Form erscheinendes Integral behandelt und dann gezeigt, daß es die Lösung der Differentialgleichung für die Meridiankurve kleinsten Widerstandes von Newton in sich schließt. Lp.

S. Meyer. Lösung zu 376 (P. Stäckel). Arch. der Math. u. Phys. (3) **20**, 324.

Das Integral

$$\int \frac{(Ct\sqrt{2c} - \sqrt{f(1-t^2)})dt}{t\sqrt{(Ct\sqrt{2c} - \sqrt{f(1-t^2)})^2 - 8c}}$$

verwandelt sich durch die Substitution $x = t/\sqrt{1-t^2}$ oder $t = x/\sqrt{1+x^2}$ in ein anderes, das nur eine Irrationalität enthält, nämlich eine Quadratwurzel aus einem Trinom zweiten Grades. Hierdurch ist eine Vermutung Eulers in der Mechanica 1, § 1031-1032 bestätigt, daß dieses Integral durch elementare Funktionen ausdrückbar ist.

Lp.

M. d'Ocagne. Au sujet d'un article récent. Nouv. Ann. (4) **13**, 136-137.

Das von Garnier in Nouv. Ann. (4) **12**, 502-505 behandelte Integral von $d\theta/(1 + e\cos\theta)$ kann nach bekannten geometrischen Eigenschaften der Ellipse einfacher erhalten werden als in jenem Aufsatze (F. d. M. **43**, 362, 1912) geschehen ist.

Lp.

T. Kôno. Intégration de la différentielle transcendante: $\varphi(x)\log(a + \sqrt{b^2 + x^2})\,.\,dx$. Tôhoku Math. J. **3**, 158-164.

Da der Verf. $\varphi(x)$ als ein Polynom von Potenzen mit positiven ganzen Exponenten annimmt, stellt der Artikel nur eine Integrationsübung über die Anwendung der partiellen Integrationsmethode dar.

Lp.

E. B. Elliott. Notes on exact differential expressions and their integration without quadratures. Messenger (2) **43**, 87-92.

Es sei

$$D \equiv \frac{d}{dx} \equiv \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + y_2\frac{\partial}{\partial y_1} + y_3\frac{\partial}{\partial y_2} + \cdots,$$

wo y_r für $\frac{d^r y}{dx^r}$ steht. Die wohlbekannte notwendige und hinreichende Bedingung (von Euler) dafür, daß eine Funktion $F_n \equiv F(x; y, y_1, \ldots, y_n)$ ein exaktes Differential $D\varphi$ ist, lautet:

$$(0, n)F_n \equiv \left(\frac{\partial}{\partial y} - D\frac{\partial}{\partial y_1} + D^2\frac{\partial}{\partial y_2} - \cdots + (-1)^n D^n \frac{\partial}{\partial y_n}\right)F_n = 0.$$

Hierüber macht der Verf. einige Bemerkungen: Wenn die Bedingung von einer Funktion F^n von algebraischer Form in $y_1, y_2, \ldots, y_n$ erfüllt wird, kann F_n durch Differentialoperationen integriert werden. Andere Bemerkungen beziehen sich auf exakte Differentiale bei mehreren abhängigen Veränderlichen, abgekürzte Bezeichnungen, mehr als einmalige Integrabilität.

Lp.

H. B. Phillips. Directed integration. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 294-295.

Kapitel 4.
Bestimmte Integrale.

R. SUPPANTSCHITSCH. Eine Vereinfachung im Existenzbeweis des bestimmten Integrals. Deutsche Math.-Ver. 22, 36-39.

R. SUPPANTSCHITSCH. Eine Ergänzung zu meiner Note über eine Vereinfachung im Existenzbeweis des bestimmten Integrals. Deutsche Math.-Ver. 22, 214.

Es handelt sich um eine Vereinfachung bei der ersten Einführung des klassischen Integralbegriffes. Ltn.

D. KRYSCHANOWSKY. Über eine Verallgemeinerung des Grenzwertbegriffes und ihre Anwendung auf den Existenzbeweis des bestimmten Integrals. Deutsche Math.-Ver. 22, 209-213.

Der Verf. knüpft an die erste der vorstehenden Noten von Suppantschitsch an und gibt eine Verallgemeinerung der Definition des Grenzwertes, die eine weitere Vereinfachung bei der Einführung des Integralbegriffes ermöglicht. Ltn.

E. SCIOLETTE. Sulle condizioni che definiscono assiomaticamente l'integrale. Rom. Acc. L. Rend. 22_2, 558-561.

Nach Lebesgue ist die Integration eine Funktionaloperation, die bestimmte sechs Bedingungen erfüllt. Die vorliegende Note beschäftigt sich mit der Frage, wie weit die letzte der fraglichen Bedingungen von den übrigen unabhängig ist. Ltn.

B. H. CAMP. Singular multiple integrals, with applications to series. American M. S. Trans. 14, 42-64.

Im Anschluß an die Abhandlung von Lebesgue, Sur les intégrales singulières, werden in der vorliegenden Arbeit Integrale der Form

$$(1)\quad \int_E f(t, u, \ldots)\, \Phi\, (t, u, \ldots; m, n, \ldots)\, dE,$$

$$(2)\quad \int_E f(t, u, \ldots)\, \Theta\, (t, u, \ldots; x, y, \ldots; m, n, \ldots)\, dE$$

betrachtet, unter E ein beschränktes, meßbares i-dimensionales Gebiet verstanden. Für besondere Klassen von Funktionen f, Φ, Θ werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die Integrale (1) für unendlich wachsende $m, n, \ldots$ gegen Null, die Integrale (2) gegen $f(x, y, \ldots)$ konvergieren. Die gewonnenen Sätze werden auf gewisse Reihenentwicklungen nach Normalfunktionen angewendet. Ltn.

M. Pétrovitch. Théorème de la moyenne sans restriction. Nouv. Ann. (4) **13**, 400-406.

Beweis des Satzes: Sind u und v zwei reelle oder imaginäre Funktionen von $x, \chi(x) = u - v$,

$$V = \tfrac{1}{2}\int_a^b u^2\,dx + \tfrac{1}{2}\int_a^b v^2\,dx,$$

so ist

$$\int_a^b uv\,dx = V - \lambda\,\chi(c)^2,$$

wenn c zwischen a und b liegt, $|\lambda|$ nie über $\frac{1}{2}(b-a)$ hinausgeht und gleich $\frac{1}{2}(b-a)$ wird, falls u und v entweder den reellen oder den imaginären Teil gemeinsam haben. „Das Interesse an dieser Form des Mittelwertsatzes liegt darin, daß es auf die Zerlegung des Integrals $\int_a^b uv\,dx$ in zwei Integrale führt, von denen das eine nur von u, das andere nur von v abhängt; vom Fehlerglied kennt man eine obere und untere Grenze ohne eine andere Beschränkung über u und v als die, daß die Integrale einen Sinn haben."

Von dieser Formel werden einige Anwendungen gemacht. Lp.

A. M. Molinari. A proposito di un teorema sugli integrali definiti improprii. Ven. Ist. Atti **72** [(8) **15**], 1125-1131.

Sei $f(x)$ eine in einem endlichen oder unendlichen Intervalle (a, b) bedingt integrierbare Funktion. Es wird vorausgesetzt, daß das Integral, erstreckt über ein beliebiges Teilintervall (a_1, b_1) von (a, b), eine bestimmte Bedeutung hat. Der Verf. zeigt, daß es dann einen Wert M gibt, so daß

$$\left|\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx\right| < M.$$

Ltn.

G. Fichtenholz. Un théorème sur l'intégration sous le signe intégral. Palermo Rend. **36**, 111-114.

Es sei $f(x, y)$ für $a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d$ definiert, ferner für konstantes y von a bis b nach x integrierbar und umgekehrt, und in diesem Gebiet $|f(x, y)| \leqq K$ (eine Konstante). Dann existieren die beiden Integrale:

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx \quad \text{und} \quad \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$$

und sind einander gleich.

In einem Zusatz wird der Satz auf n Variabeln ausgedehnt. Schr.

E. Bortolotti. Sugli integrali definiti improprii. Palermo Rend. **35**, 345-383.

Um über die Existenz uneigentlicher Integrale der Funktion $f(x)$ zu entscheiden, hat man eine Reihe von Kriterien, die darauf hinauskommen, eine positive monotone Funktion $\varphi(x)$, die integrabel ist, aufzufinden und das asymptotische Verhalten von $\frac{|f(x)|}{\varphi(x)}$ zu untersuchen.

In Fällen, wo dieses Verhältnis oszilliert, kann man sich helfen, indem man (ähnlich wie Cesàro es macht, um divergente Reihen zu summieren), an seine Stelle einen Mittelwert

$$\frac{1}{a-b}\int_a^b \frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx$$

setzt (wo a, b dem speziellen Grenzübergang entsprechend zu wählen sind). Hierbei ergeben sich auch Aussagen über die Schnelligkeit der Konvergenz oder Divergenz; es hat nämlich der angegebene Mittelwert dieselbe Grenze wie das Verhältnis $\int_a^b f(x)\,dx : \int_a^b \varphi(x)\,dx$. Schr.

M. Plancherel. Zur Konvergenztheorie der Integrale: $\lim\limits_{z=\infty}\int_a^z f(x)\cos xy\,dx$. Math. Ann. **74**, 573-578.

„Wenn die Funktion $h(x)$ im Intervall (a, ∞), $a > 0$ quadratisch integrierbar und k irgendeine positive Zahl ist, so konvergiert $\lim\limits_{z=\infty}\int_a^z \frac{h(x)\cos xy}{x^k}\,dx$ fast überall", d. h. mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null. „Es sei $f(x)$ eine reelle im Intervall (a, ∞), $a > 0$ definierte Funktion. Wenn es eine positive Zahl p gibt, derart, daß $\int_a^\infty x^p f(x)^2\,dx$ endlich ist, dann existiert $\lim\limits_{z=\infty}\int_a^z f(x)\cos xy\,dx$ fast überall im Intervall $-\infty < y < < +\infty$ und stellt eine in diesem Intervall quadratisch integrierbare Funktion dar." Statt x^p kann auch noch $(\log x)^{2+p}$, $\log {}^2x(\log\log x)^{2+p}, \ldots$ eingesetzt werden. Schr.

G. H. Hardy. Notes on some points in the integral calculus. XXXVI. On the asymptotic values of certain integrals. Messenger (2) **43**, 9-13.

Der Verf. wendet in dieser Note die Ideen und Methoden des Infinitärkalkuls von P. du Bois-Reymond an, mit denen er sich ausführlich in der Schrift „Orders of infinity" beschäftigt hat (Cambr. Math. Tracts Nr. 12; F. d. M. **41**, 303, 1910). Vgl. auch „Properties of logarithmico-exponential functions" (F. d. M. **42**, 437, 1911) und „Oscillating Dirichlet's integrals" (F. d. M. **43**, 364, 1912). Gegenwärtig werden jene Methoden dazu benutzt, die asymptotischen Werte gewisser Integrale von der Art:

$$\int^{x} \varphi(t)\, e^{i\psi(t)}\, dt, \int_{x}^{\infty} \varphi(t)\, e^{i\psi(t)}\, dt$$

zu bestimmen, wo φ und ψ logarithmisch-exponentiale Funktionen sind. Die Betrachtung wird auf den Fall beschränkt, bei welchem das Integral mit der oberen Grenze ∞ divergiert oder oszilliert, so daß x als obere Grenze zu nehmen ist.

Lp.

G. H. Hardy. Notes on some points in the integral calculus. XXXVII. On the region of convergence of Borel's integral. Messenger (2) **43**, 22-24.

Borel's mit einer Potenzreihe (1) $\sum a_n x^n$ zusammenhängendes Integral ist

$$(2)\; f(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, u(tx)\, dt, \text{ wo } u(x) = \sum \frac{a_n x^n}{n!}.$$

Wenn die Potenzreihe (1) einen positiven Konvergenzradius hat, so ist der Konvergenzbereich des Integrals (2) das Borelsche Summabilitätspolygon. Das Integral ist überall innerhalb des Polygons und nirgends außerhalb desselben konvergent. Es stellt die in üblicher Weise durch die Reihe (1) definierte analytische Funktion dar.

Der Zweck der Note besteht darin, an Beispielen zu zeigen, daß Borels Integral in zwei verschiedenen Gebieten der Ebene, die nur den Nullpunkt als einen gemeinschaftlichen Grenzpunkt haben, konvergieren und in diesen beiden Gebieten zwei verschiedene analytische Funktionen darstellen kann.

Lp.

G. H. Hardy. Notes on some points in the integral calculus. XXXVIII. On the definition of an analytic function by means of a definite integral. Messenger (2) **43**, 29-33.

I. Es sei $f(x, y)$ eine Funktion der beiden komplexen Veränderlichen x und y, die stetig ist, wenn x sich längs einer regulären Kurve C ändert und y über ein Gebiet S weg. Ferner sei $f(x, y)$ für jeden einzelnen Wert von x durchweg analytisch in S. Dann ist

$$F(y) = \int_C f(x, y)\, dx$$

durchweg analytisch in S und

$$F(y) = \int_C \frac{\partial f}{\partial y}\, dx,$$

ein Satz, der schon in Osgoods Lehrbuch der Funktionentheorie **1**, 260 steht.

II. Es sei C eine solche Randkurve, daß die Randkurve $C(R, \delta)$, gebildet durch die Punkte von C, für welche $|x| \leqq R$, $|x - x_i| \geqq \delta$ ist, sich aus einer endlichen Anzahl regulärer Kurven zusammensetzt, deren jede im Verein mit dem Gebiet S und der Funktion $f(x, y)$ die Bedingungen von Satz I erfüllt.

Ferner sei das Integral $\int_C f(x, y)\, dx$ gleichmäßig konvergent in jedem Bereich innerhalb S. Dann gelten die Folgerungen von Satz I. Lp.

G. H. HARDY. Oscillating Dirichlet's integrals. Second paper. Quart. J. **44**, 242-263.

Fortsetzung der Abhandlung, über welche F. d. M. 43, 364-365, 1912, berichtet wurde. Verf. versucht eine strengere Darstellung der Du Bois-Reymondschen Untersuchungen über das Verhalten des Dirichletschen Integrals

$$J(\lambda) = \int_0^{\xi} \frac{\sin \lambda x}{x} f(x)\, dx \text{ für } \lambda = \infty$$

bei der Annahme, daß die Funktion $f(x)$ in der Umgebung des Punktes $x = 0$ oszilliert. Er setzt

$$f(x) = \varrho \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \sigma(x),$$

wo ϱ und σ zwei monotone Funktionen sind, von denen die letztere bei zu Null konvergierendem x unendlich wächst. Von den drei Hauptfällen:

A. $\sigma(x)$ wächst rascher als $\log \frac{1}{x}$,

B. $\sigma(x)$ wird von derselben Art unendlich wie $\log \frac{1}{x}$,

C. $\sigma(x)$ wächst langsamer als $\log \frac{1}{x}$,

} bei zu Null konvergierendem x

hat Verf. die Fälle A und B in der früheren Arbeit behandelt; in der vorliegenden Fortsetzung beschäftigt er sich mit dem Falle C, nachdem er einige erläuternde Bemerkungen zu der ersten Arbeit hinzugefügt hat. Im Falle C sind naturgemäß für die Konvergenz des Dirichletschen Integrals viel geringere Einschränkungen bezüglich des Verhaltens der Funktion $\varrho(x)$ an der Stelle $x = 0$ notwendig, als in den Fällen A und B. In bezug hierauf werden zwei sehr beachtenswerte Theoreme aufgestellt, welche er als Theoreme C und C′ bezeichnet. Die Wiedergabe derselben hier würde zu viel Platz beanspruchen, da derselben eine Erklärung der vom Verf. benutzten abkürzenden Zeichen vorausgehen müßte; wir begnügen uns daher hier mit der Anführung einiger bemerkenswerten Resultate, welche aus den Hardyschen Theoremen folgen:

Das Integral

$$A(\lambda) = \int_0^{\infty} x^{\nu} \sin\left(\frac{m}{x}\right) \frac{\sin \lambda x}{x}\, dx$$

ist konvergent, wenn $-2 < \nu < +2$. Für $\nu > -\frac{1}{2}$ konvergiert es mit unendlich wachsendem λ zu Null; für $\nu \leqq -\frac{1}{2}$ ist:

$$A(\lambda) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, m^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\, \lambda^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} \left\{\sin\left(2\sqrt{\lambda m} - \frac{\pi}{4}\right) + o(1)\right\}.$$

Das Integral

$$B(\lambda) = \int_0^\infty x^\nu \cos\left(\frac{m}{x}\right) \frac{\sin \lambda x}{x}\, dx$$

ist konvergent, wenn $-2 < \nu < +1$. Für $\nu > -\frac{1}{2}$ konvergiert es zu Null, und für $\nu \leqq -\frac{1}{2}$ ist:

$$B(\lambda) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, m^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\, \lambda^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} \left\{\cos\left(2\sqrt{\lambda m} - \frac{\pi}{4}\right) + o(1)\right\}.$$

A. K.

J. F. Steffensen. Ein Satz über Stieltjessche Integrale mit Anwendung auf Dirichletsche Reihen. Palermo Rend. **36**, 213-219.

Umkehrung eines Satzes von Stieltjes, der nach Borels Formulierung (Leçons sur les séries divergentes S. 68-70) lautet: Es sei $\Phi(\varrho)$ eine reelle, stetige, nicht negative Funktion, für die das „Stieltjessche" Integral $I(x) = \int_0^\infty \frac{\Phi(\varrho)}{\varrho + x} d\varrho$ konvergiert; dann ist

$$\Phi(a) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{I(-a - i\varepsilon) - I(-a + i\varepsilon)}{2\pi i}.$$

Die Umkehrung ist in der unter gewissen Bedingungen geltenden Formel

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{F(\varrho\, e^{-i\pi}) - F(\varrho\, e^{-i\pi})}{\varrho + s}\, d\varrho$$

enthalten.

Spezielle Fälle sind z. B.

$$s^{-x} = \frac{\sin \pi x}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\varrho}{(\varrho + s)\varrho^x}; \quad \left(\frac{0 < \Re(x) < 1}{-\pi < \text{Arg.}\, s < \pi}\right)$$

(für $s = 1$ folgt eine aus der Theorie der Gammafunktion bekannte Formel);

$$\frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\varrho}{(\varrho + s)\sqrt{\varrho}}. \quad (-\pi < \text{Arg.}\, s < \pi).$$

Die Anwendung auf Dirichletsche Reihen lautet: Es besitze die Dirichletsche Reihe $\Phi(x) = \sum_1^\infty \frac{a_n}{\omega_n^x}$ $(\omega_n > 0)$ innerhalb des Streifens $0 < \Re(x) < 1$

ein absolutes Konvergenzgebiet G; dann ist die Partialbruchreihe $B(\varrho) = \sum_1^\infty \frac{a_n}{\omega_n + \varrho}$ für $\varrho > 0$ absolut konvergent, und man hat die in G absolut konvergente Darstellung

$$\Phi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi} \int_0^\infty \varrho^{-x} B(\varrho)\, d\varrho.$$

Zum Beispiel ist

$$\zeta(x+1) = \frac{\sin \pi x}{\pi} \int_0^\infty \frac{C + \Psi(1+\varrho)}{\varrho^{x+1}} d\varrho \quad (0 < \Re(x) < 1)$$

(C Eulersche Konstante, Ψ Gaußsche Funktion). Schr.

B. Messik und G. Szegö. Lösung zu 427 (G. Pólya). Arch. der Math. u. Phys. (3) **22**, 80-82.

„Sei $f(x)$ stetig und wesentlich positiv, d. h. ihr Minimum sei auch positiv; man beweise, daß in den bekannten Ungleichungen, wo $\exp \alpha = e^\alpha$,

$$\frac{b-a}{\int_a^b \frac{dx}{f(x)}} \leqq \exp \frac{1}{b-a} \int_a^b \log f(x)\, dx \leqq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

der Fall der Gleichheit dann und nur dann eintritt, wenn $f(x)$ eine Konstante ist." Schr.

G. Szegö. Lösung zu 428 (G. Pólya). Arch. der Math. u. Phys. (3) **22**, 82-84.

„Unter allen stetigen und wesentlich positiven (d. h. nirgends verschwindenden) Funktionen $f(x)$, deren Integral einer gegebenen Größe A gleich ist: $\int_a^b f(x)\, dx = A$, ist diejenige zu suchen, die das Integral $\int_a^b f(x) \log f(x)\, dx$ zu einem Minimum, bzw. diejenige, die das Integral $\int_a^b p(x) \log f(x)\, dx$ zu einem Maximum macht ($p(x)$ eine stetige, wesentlich positive Funktion). Man weise noch nach, daß das Extrem in beiden Fällen nur für eine einzige unter allen zulässigen Funktionen erreicht wird."

Man findet $f(x) = \frac{A}{b-a}$ und $f(x) = \frac{A}{\int_a^b p(x)\, dx}$.

Schr.

G. Pólya. Lösung zu 427 und 428 (G. Pólya). Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 370-371.

Es sei $\varphi(y)$ zweimal differenzierbar in $u < y < v$ und $\varphi''(y) > 0$; dann ist

$$\frac{\int_a^b p(x)\varphi(f(x))\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx} \geqq \varphi\left(\frac{\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx}\right).$$

Hieraus folgen für

$$\varphi(y) = \log y, y\log y, \log y;\ p(x) = 1, 1, p(x);\ f(x) = f(x), f(x), \frac{f(x)}{p(x)}$$

die drei Sätze der beiden Aufgaben (s. die vorstehenden Referate). Schr.

H. Weber. Über die Gibbssche Erscheinung bei bestimmten Integralen. Math. Ann. **73**, 286-288.

Angeregt durch die Arbeit von Gronwall (Math. Ann. **72**), hat Weber die zuerst bei den Fourierschen Reihen bemerkte sogenannte Gibbssche Erscheinung sich an Integralen klargemacht und ist dabei auf das folgende einfache Beispiel gekommen: Es ist

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin\alpha\, x}{\alpha}\,d\alpha = -\frac{\pi}{2}, 0, +\frac{\pi}{2},$$

je nachdem $x < 0, = 0, > 0$ ist.

Setzt man

$$\int_0^x \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha = S(x), \text{ so ist } f(x) = \lim_{y=\infty} S(xy).$$

Die Kurve $\eta = S(x)$ hat ihre Extrema in $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ Das erste ist $\eta_1 = 1,85\ldots$, das zweite $\eta_2 = 1,57\ldots$; die folgenden liegen dazwischen, und es ist $\eta_2 < \frac{\pi}{2} < \eta_1$.

Konstruiert man nun für festes y die Kurve $\eta = S(xy)$, so bleiben für jedwedes y die Extrema dieselben, liegen aber für große y dichter und dichter an der Ordinatenachse. Die „Grenzkurve" für $\lim y = +\infty$ enthält also außer der Kurve $f(x)$ selbst noch die Strecken $\eta_2 \ldots \eta_1$ und $-\eta_1 \ldots -\eta_2$ der Ordinatenachse, und das ist eben die Gibbssche Erscheinung. K. K.

F. G. Teixeira. Sur une intégrale définie. Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 247-249.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{(\alpha\cos^2\omega+\beta\sin^2\omega)^n} = \frac{1}{(n-1)!}\frac{\pi}{2^n}(\alpha\beta)^{-\frac{1}{2}}\Bigg[\frac{1.3\ldots(2n-3)}{\alpha^{n-1}}$$
$$+\binom{n-1}{1}\frac{1.3\ldots(2n-5)}{\alpha^{n-2}}\frac{1}{\beta}+\binom{n-1}{2}\frac{1.3\ldots(2n-7)}{\alpha^{n-3}}\frac{1.3}{\beta^2}+\cdots$$
$$+\frac{1.3\ldots(2n-3)}{\beta^{n-1}}\Bigg].$$

Schr.

G. Fontené. Sur l'intégrale $\int_{M_0}^{M}\frac{dx}{\varepsilon\sqrt{ax^2+2bx+c}}$. Nouv. Ann. (4) **13**, 529-558.

Das Integral bedeutet, abgesehen von einem konstanten Faktor, den doppelten Flächeninhalt des Sektors $M_0\,\Omega\,M$ einer Ellipse oder einer Hyperbel vom Mittelpunkte Ω; M_0 und M sind Punkte der Kurve, im Falle der Hyperbel auf demselben Aste, $\varepsilon^2=1$. Die weitläufige Behandlung dieser Aufgabe zum Zwecke der geometrischen Deutung jedes Schrittes soll wohl die Parallelität der Kreisfunktionen und der Hyperbelfunktionen bei der Behandlung von Aufgaben über die Ellipse und die Hyperbel recht eindringlich dem Anfänger solcher Betrachtungen vorführen.

Lp.

R. Srinivasan. Question 17 257. Ed. Times (2) **24**, 66-67.

$$\int_0^{\pi}\frac{x\,\mathrm{cosec}\,x\,dx}{1+\sin x\sin\alpha}=\pi+\int_0^{\pi}\frac{x\cot x\cos x\,dx}{(1+\sin x\sin\alpha)^2}.$$

Lösungen von G. J. Nanson und A. M. Nesbitt.

Gd.

F. E. Relton. Question 17 276. Ed. Times (2) **23**, 42-43.

$$\int_0^{\pi}\mathrm{arc\,tg}(m\,\mathrm{tg}\,\theta)d\,\theta=\tfrac{1}{2}\pi^2.$$

Lösungen von F. Phillipps und Swaminarayan.

Gd.

K. J. Sanjana. Question 17 348. Ed. Times (2) **23**, 91; **24**, 104.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\sin\theta\cdot\log(\sin\theta+\sin 3\theta)\,d\theta=\tfrac{1}{2}\pi(\log 2)^2,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \sin \theta . \log (\cos \theta - \cos 3\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{2}\pi (\log 2)^2 + \frac{1}{16}\pi^3.$$

Beweis von C. M. Ross und T. L. Csada. Gd.

A. Buhl. Sur les applications géométriques des intégrales curvilignes. (Seconde note.) Nouv. Ann. (4) **13**, 251-262.

Der Zweck, den der Verf. mit seiner Arbeit verfolgt, ist in dem Referat über den ersten Teil durch wörtliche Wiedergabe der Einleitung gekennzeichnet worden (F. d. M. **43**, 645, 1912). Die behandelten Beispiele sind den Hochschullehrern als passende Erläuterungen zum Vortrag oder als Aufgaben für seminaristische Übungen zu empfehlen. In dem vorliegenden Teile wird das Volumen eines Zylinders behandelt, der an dem einen Ende von einer Ebene begrenzt wird, an dem anderen von einem Stück einer krummen Oberfläche; diese wird so bestimmt, daß das Doppelintegral sich in ein einfaches verwandelt. In dem zweiten Beispiel handelt es sich um solche Oberflächen, bei denen die Normale und die Ordinate eines Punktes M die Ebene XOY so in N und P schneiden, daß das Dreieck NOP einen konstanten Inhalt hat. — Am Schluß wird darauf hingewiesen, daß die in der bekannten Aufgabe des Viviani auftretenden drei Körperinhalte U_x, U_y, U_z die Werte haben $\frac{13}{45}r^3, \frac{22}{45}r^3, \frac{10}{45}r^3$, deren Summe r^3 ist. Lp.

Z. de Geöcze. Sur la quadrature des variétés. C. R. **157**, 910-912.

Sei P der p-dimensionale Würfel $0 \leq x_i \leq a$ $(i = 1, \ldots, p)$, $y_j = f_j(x_1, \ldots, x_p)$ $(j = 1, \ldots, q)$ $(q \geqq p)$ gewisse in $\overline{P}$ erklärte stetige Funktionen. Dem Würfel P entspricht in dem q-dimensionalen euklidischen Raume $y_1, \ldots, y_q$ eine Mannigfaltigkeit V_p^q. Dieser wird ein Wert C_p^q zugeordnet, der sich in den einfachsten Fällen auf die nach Lebesgue erklärte Länge eines Kurvenstückes oder den Inhalt eines Flächenstückes reduziert. Ltn.

N. Podtiaguine. Les conditions de convergence d'une intégrale multiple. S. M. F. Bull. **41**, 97-113.

In seinen „Leçons sur la théorie de la croissance" hat Borel eine allgemeine Methode zur Bestimmung der Konvergenzbedingung gewisser bestimmter Integrale angegeben und insbesondere das Doppelintegral

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \frac{dx\, dy}{(x^a + y^\beta)(x^{a_1} + y^{\beta_1})}$$

untersucht. Der Verf. dehnt diese Betrachtungen auf das Integral

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \cdots \int_l^\infty \frac{dx\, dy \ldots dt}{(x^\alpha + y^\beta + \cdots + t^\lambda)^{\alpha_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1} + \cdots + t^{\lambda_1})^{\alpha_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2} + \cdots + t^{\lambda_2})^{\alpha_3}}$$

aus.

Ltn.

A. Demoulin. Résolution d'un problème de calcul intégral. C. R. **157**, 1505-1508.

Der Verf. bestimmt in allgemeiner Weise n Funktionen $u_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n)$, die der Gleichung

$$\frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = F(x_1, \ldots, x_n)$$

genügen. Unter $F(x_1, \ldots, x_n)$ ist eine gegebene Funktion zu verstehen. Ltn.

G. Fubini. Sugli integrali doppii. Rom. Acc. L. Rend. (5) **22**$_1$, 584-589.

Umkehrung eines vom Verf. in denselben Sitzungsberichten (5) **16**, 608-614 (F. d. M. **38**, 343, 1907) ausgesprochenen Satzes. Der neue Satz lautet: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Doppelintegral einer meßbaren Funktion $f(x, y)$: $\int_\sigma dy \int f(x, y) dx$, erstreckt über ein begrenztes und meßbares Feld σ, als Oberflächenintegral $\int_\sigma f\, d\sigma$, erstreckt auf σ, betrachtet werden kann, besteht darin, daß das Integral $\int_\sigma dy \int f\, dx$, erstreckt über ein beliebiges (meßbares) Teilgebiet σ' von σ, existiert, aber dann und nur dann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: 1. Es existiert das Integral $\int_\sigma f\, d\sigma$, erstreckt auf σ; weswegen nach der früheren Note des Verf. 2. auch das andere Doppelintegral $\int_\sigma dx \int f(x, y)\, dy$ existiert und 3. das Oberflächenintegral und die beiden angegebenen Doppelintegrale gleich sind.

In der gegenwärtigen Note erkennt der Verf. die Priorität von Torelli für diesen Satz an (F. d. M. **40**, 338, 1909) und läßt die Fassung dieses Forschers abdrucken: Eine in der Oberfläche meßbare Funktion $f(x, y)$, für welche $\int_a^x dy \int_b^y |f(x, y)|\, dy$ existiert, ist in der Oberfläche (superficialmente) integrierbar, und es gilt für sie die Beziehung:

$$\int_a^x dx \int_b^y f(x, y) dy = \int_a^x \int_b^y f(x, y) dx\, dy = \int_b^y dy \int_a^x f(x, y) dx.$$

Lp.

L. ORLANDO. Sopra un nuovo aspetto della formula integrale di Fourier. Rom. Acc. L. Rend. (5) **22**$_1$, 65-66.

Es wird nach einer nicht veröffentlichten Handschrift von G. Giorgi und Laura Pisati eine Methode skizziert, wie man, von dem Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y\lambda^2}\, d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{y}}$$

ausgehend, zu der Formel gelangen kann:

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\lambda - \xi^2/4y}\, d\xi.$$

Lp.

F. GOLDSCHEIDER. Lösung zu 208 (P. Stäckel). Arch. der Math. u. Phys. (3) **20**, 323-324.

Durch die Reihenentwicklung von $1/(1-xy)$ erhält man leicht

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\,dy}{1-xy} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Der Wert $\pi^2/6$ für das Doppelintegral, wenn ohne Benutzung jener Reihenentwicklung gefunden, liefert daher einen Beweis für die Summenformel der reziproken Quadratzahlen. Solch ein Beweis wird von Goldscheider geliefert. Lp.

H. S. CARSLAW. Integral equations and the determination of Green's functions in the theory of potential. Edinb. Math. Soc. Proc. **31**, 71-89.

Der Ausdruck Greensche Funktionen bedeutet hier eine mit einer geschlossenen Oberfläche S zusammenhängende Funktion von folgenden Eigenschaften: 1. Im Innern von S genügt sie der Gleichung $\Delta^2 V = 0$. 2. An der Grenze von S verschwindet sie. 3. Im Innern von S ist sie endlich und stetig, ebenso ihre ersten und zweiten Derivierten, mit Ausnahme des Punktes x_1, y_1, z_1. 4. Im Punkt x_1, y_1, z_1 wird sie unendlich wie $1/4\pi r$, wenn r der Null zustrebt, wo r der Abstand von (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) ist. Nach dem Vorgange von Kneser bezeichnet der Verf. diese Funktion mit $K(0, 1)$ und erhält die Integralgleichung

$$\psi(1) = \lambda \iiint K(0, 1)\, \psi(0)\, dv,$$

wo $\psi(0)$ für $\psi(x, y, z)$ steh, $\psi(1)$ für $\psi(x, y, z)$, wenn ψ eine beliebige Lösung von $V^2\psi + \lambda\psi = 0$ ist und dv das Volumenelement in Punkt (0). Diese Integralgleichung führt auf den folgenden Ausdruck für die Greensche Funktion:

$$K(0, 1) = \frac{\psi_1(0)\, \psi_1(1)}{\lambda_1} + \frac{\psi_2(0)\, \psi_2(1)}{\lambda_2} + \cdots.$$

Der Verf. stößt so auf die Frage, ob diese Reihe konvergiert und die Funktion $K(0, 1)$ darstellt. Das Hauptziel der Arbeit ist der Nachweis, daß die obige Reihe tatsächlich die Greensche Funktion in den folgenden Fällen liefert: 1. Wenn der Bereich S von konzentrischen Kreiszylindern, Normalebenen zur Achse und axialen Ebenen begrenzt wird; 2. wenn die begrenzenden Oberflächen konzentrische Kugeln, axiale Ebenen und Kegel sind (Rev. sem. **22**$_1$, 69).

Lp.

G. Pólya. Über einige Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und über bestimmte Integrale. Math. és. phys. lapok **22**, 53-73, 163-219; auch Sonderausgabe Diss. 1912. (Ungarisch.)

Gewisse Wahrscheinlichkeiten sind in ungezwungener Weise durch n-dimensionale Rauminhalte oder durch ihr Verhältnis meßbar. Dies führt dazu, daß man die Methode der „fonctions génératrices", passend abgewandelt, zur Berechnung bestimmter Integrale anwenden kann. Die bemerkenswertesten Resultate der Abhandlung sind auch in Math. Ann. **74**, 204-209, erschienen. (Rev. sem. **22**$_2$, 105; vgl. das folgende Referat.)

Lp.

G. Pólya. Berechnung eines bestimmten Integrals. Math. Ann. **74**, 204-212.

Es handelt sich um das Integral

$$\int\int\cdots\int dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

erstreckt über das Gebiet $-a_i \leqq x_i \leqq a_i\ (i=1,2,\ldots,n)$; $-a_{n+1} \leqq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq a_{n+1}$. Durch Abzählung von Gitterpunkten findet Pólya $\frac{2^{n+1}}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin a_1 x \sin a_2 x \ldots \sin a_{n+1} x}{x^{n+1}}\,dx$ und durch Residuenrechnung

$$\frac{1}{n!}\Sigma'(-1)^\nu(\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_{n+1} a_{n+1})^n.$$

Hierin sind die ε alle ± 1, ν ist die Anzahl derjenigen, die gleich -1 sind, und Σ' bedeutet die Summation über die 2^n Ausdrücke $\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_{n+1} a_{n+1}$, die man erhält, indem man aus jedem Paare von Ausdrücken $\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_{n+1} a_{n+1}$ und $-\varepsilon_1 \cdot a_1 - \varepsilon_2 \cdot a_2 - \cdots - \varepsilon_{n+1} \cdot a_n$ einen nicht negativen beibehält. (Vgl. das vorangehende Referat.)

Schr.

B. Roussy. Théorie mathématique de la loi géométrique de la surface du corps humain de dimensions proportionnelles quelconques. C. R. **156**, 1171-1174.

Ausführungen und Genauigkeitsabschätzungen zu der C. R. **145**, 139 (F. d. M. nicht angezeigt) und C. R. **153**, 205-207 (F. d. M. **42**, 1911, 537) auseinandergesetzten Meßmethode.

Schr.

W. A. Stekloff. Sur une formule générale d'analyse et ses diverses applications. Annali di Mat. (3) **21**, 65-120.

Es handelt sich um die Formel

$$(A)\quad f(x) - f(x+h) = \frac{4}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x}^{x+h} f(\alpha) \cos \frac{(2k+1)\pi(\alpha - x)}{h}\, d\alpha,$$

auf deren Bedeutung durch die vorliegende Arbeit die Aufmerksamkeit gelenkt werden soll.

„Die Tragweite dieser Formel besteht hauptsächlich darin, daß sie als die gemeinsame Quelle mehrerer (zum Teil neuer) Formeln betrachtet werden kann, die ihrerseits als Spezialfälle die meisten derjenigen grundlegenden Formeln der Analysis enthalten, die seit Lagrange, Euler, Cauchy, Poisson, Fourier, Gauß u. a. klassisch geworden sind."

Dieses vielversprechende Programm löst die reichhaltige und wertvolle Arbeit vollauf ein:

Im ersten Teil werden drei ganz verschiedene Beweise der Formel gegeben, gemäß verschiedenartigen Voraussetzungen über $f(x)$. Der dritte und allgemeinste setzt nur voraus, daß $f(x)$ in $x \ldots x+h$ von beschränkter Schwankung sei.

Im zweiten Teil wird aus (A) eine sehr allgemeine Summenformel hergeleitet, die ihrerseits die klassischen Summenformeln von Poisson-Dirichlet und Euler-Maclaurin als Spezialfälle enthält; ferner ergibt sich aus (A) die Entwickelbarkeit jedweder Funktion von beschränkter Schwankung in eine Fourier-Reihe, sowie andere grundlegende Resultate der Theorie dieser Reihen.

Der dritte Teil ist Anwendungen speziellerer Art gewidmet, indem nun für $f(x)$ spezielle Funktionen herausgegriffen werden. Da ist es denn in der Tat erstaunlich, was alles nach mehr oder minder großen Umformungen aus der Formel (A) herausspringt, wenn sich auch nicht leugnen läßt, daß hierbei ein gut Teil der klassischen Analysis sich ziemlich ungeändert reproduziert. Selbst nur die Namen der Sätze und Formeln zu nennen, die in diesem dritten Teile der Arbeit als Folgerungen von (A) entwickelt oder wenigstens berührt werden, würde zu weit führen. Aus den Theorien der konvergenten und (Stieltjesschen) semikonvergenten Reihen, der Bernoullischen Zahlen, der Gammafunktion usw. finden sich die meisten Grundformeln hergeleitet und sollen doch nur Stichproben für die reiche Anwendbarkeit der Formel (A) geben.

K. K.

G. Peano. Resto nelle formule di quadratura espresso con un integrale definito. Rom. Acc. L. Rend. (5) **22**$_1$, 562-569.

Der Verf. stellt zuerst den Satz auf, daß für jede Formel der mechanischen Quadratur das Fehlerglied oder der Rest durch ein bestimmtes Integral ausdrückbar ist, und gibt dann die Form eines solchen Restgliedes an. Mit Hülfe seines Restintegrals berechnet er dann für einzelne bekannte Formeln das zugehörige Fehlerglied. Eine genauere Berichterstattung würde bei der knappen Form des Aufsatzes die ungekürzte Wiedergabe mehrerer Textseiten beanspruchen.

Lp.

PAOLINA QUARRA. Resto in alcune formule di quadratura. Torino Atti 48, 643-653.

Nach einer von Peano in einer Vorlesung gegebenen Vorschrift kann der Fehler einer Quadraturformel, die für ganze Funktionen $(n-1)$-ten Grades noch exakte Werte liefert, allgemein gefunden werden, indem man den Fehler für die Funktion von z: $\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(z-x)$, wo $\varphi(t)=1$ oder 0 ist, je nachdem $t >$ oder < 0 ist, bildet, das Resultat mit $f^{(n)}(x)$ multipliziert und von $-\infty$ bis $+\infty$ integriert. Es werden auch spezielle Fälle durchgeführt.

Die Verfasserin bedient sich der Begriffsschrift von Peano, allerdings mit beigefügter „Übersetzung".

Schr.

B. P. MOORS. Étude sur les formules (spécialement de Gauss) servant à calculer des valeurs approximatives d'une intégrale définie. Amst. Ak. Verh. **11**, 43 S.

Auseinandersetzung des Gedankens der approximativen Integration durch lineare Kombination von Funktionswerten. Gauß hat die Berechnung der Argumentwerte und der Gewichte auf 16 Dezimalen ausgeführt. Man kann den Argumentwerten (der bequemen Rechnung wegen) weniger geben, dies ist aber eine neue Fehlerquelle; ihr Einfluß wird untersucht.

Die Gaußschen Werte sind nicht die günstigsten, wenn sie in der Taylorschen Entwicklung des Integranden fehlen. Hier ist übersehen, daß sich überhaupt die günstigsten Werte ändern, wenn irgendein Koeffizient der Entwicklung einen bekannten Wert (nicht nur Null) hat. Die Frage ist auch nicht eingehend behandelt.

Schließlich wird die Berechnung der Gewichte, wenn die Argumentwerte schon bekannt sind, gelehrt.

Schr.

H. v. SANDEN. Ein Instrument graphischer harmonischer Analyse. Zs. f. Math. u. Phys. **61**, 430-433.

Um die Funktionswerte

$$y = a_1 \sin x + b_1 \cos x + a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x + \cdots + a_n \sin nx + b_n \cos nx$$

zu konstruieren, trage man die Koeffizienten $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ aneinander anschließend auf einer Geraden auf und verschaffe sich, am besten auf einer Schablone, die Richtungen, deren Winkel mit dieser Geraden die Tangenswerte $\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx$ haben. Der Wert von y ergibt sich dann durch Konstruktion der Senkrechten auf die Gerade in jedem Teilungspunkt und Einschaltung von geradlinigen, aneinander anschließenden Stücken dieser Richtungen zwischen diese Senkrechten.

Für x empfiehlt es sich, z. B. die Werte $\mu \cdot \frac{2\pi}{16}$ zu wählen.

Die harmonische Analyse geschieht genau nach demselben Verfahren, indem man z. B. a_λ durch:

$$\frac{1}{8}\sum_{\mu=0}^{15} y_\mu \,.\, \sin \lambda\mu \,.\, \frac{2\pi}{16}$$

approximiert.

Schr.

H. Slaby. Ein neues Verfahren zur harmonischen Analyse von Kurven. Arch. f. Elektrotechn. **2**, 19-26.

Um die Fourierschen Koeffizienten von $y = f(x)$ zu bestimmen, konstruiere man durch horizontale Verschiebung jedes Punktes (x, y) um das (variable) Stück $-\frac{c}{\lambda}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} kx$ die Hülfskurve

$$y = f\left(x - \frac{c}{\lambda}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} kx\right)$$

und planimetriere das Flächenstück zwischen beiden Kurven innerhalb einer Welle. Man findet als Fläche

$$\frac{c}{\lambda}\,\pi k a_k \text{ oder } -\frac{c}{\lambda}\,\pi k b_k.$$

Das Verfahren ist sehr bequem.

Schr.

S. D. Killam. A note on graphical integration of a function of a complex variable. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 522-524.

Die Note soll eine kürzere und rein graphische Methode für die graphische Integration geben, als in der Dissertation des Verf. „Über graphische Integrationen von Funktionen einer komplexen Variable mit speziellen Anwendungen." (Göttingen, 1912.)

Lp.

R. Rothe. Ein einfaches Modell des Amslerschen Polarplanimeters. Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 187-189.

Es handelt sich um ein Holzmodell in großem Maßstab zur Demonstration, bei dem alle konstruktiven Einzelheiten weggelassen sind, um das Prinzip des Apparates anschaulich zu machen.

Schr.

E. Pascal. Il planimetro a scure di Prytz trasformato in integrafo per una notevole equazione differenziale. Napoli Rend. (3) **19**, 23-29.

Das Planimeter von Prytz wird durch Hinzufügung eines Rädchens und eines Wagens ausgestaltet. Ähnlich wie bei Scribanti (vgl. die Referate S. 362-364) wird die Differentialgleichung der Kurve bestimmt, die der Apparat beschreibt, wenn der Fahrstift die Kurve $y = Q(x)$ durchläuft; sie lautet

$$y+\frac{ry'-s}{\sqrt{1+y'^2}}=Q\left(x+\frac{x+sy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right);$$

hier ist l die Länge des Planimeterschafts, α der Winkel des Schafts mit der Ebene des Rädchens und

$$r=l\cos\alpha,\ s=l\sin\alpha.$$

Schr.

E. Pascal. L'integrafo per la risoluzione grafica delle equazioni integrali. Napoli Rend. (3) **19**, 89-96.

Um das Integral $\int_0^x f(x)\,F(x)dx$ mechanisch auszuwerten, muß man den Integraphen, der zur Bestimmung von $\int_0^x f(x)\,dx$ dient, insofern abändern, daß das rechtwinklige Dreieck, dessen Katheten 1 und $f(x)$ waren, dafür $\frac{1}{F(x)}$ und $f(x)$ bekommt. Dies wird durch eine eigene tangential an der Hyperbel $xy=\frac{1}{4}$ verschiebbare Schiene, die also auf der Asymptoten reziproke Abschnitte bildet, erreicht. Der Drehpunkt der Hypotenuse ist somit beweglich; hiernach nennt Pascal seinen Apparat einen Integraphen mit beweglichem Drehpunkt.

Mit diesem Apparat kann man unter Zuhülfenahme eines nach der Kurve $x=\varphi(y)$ geschnittenen Kurvenlineals Gleichungen wie $y'=f(x+\varphi(y))\,F(x)$ integrieren, Kurven $y=c\exp\int F(x)dx$ zeichnen und schließlich auch Integralgleichungen vom Volterraschen Typus:

$$\int_0^t f(x)\,F(t-x)\,dx=f(t)-\varphi(t)$$

nach $f(x)$ auflösen.

Schr.

E. Pascal. I miei integrafi per equazioni differenziali. Napoli Rend. (3) **19**, 151-153.

Kurze Inhaltsangabe einer Abhandlung, die alle von Pascal ersonnenen Integraphen systematisch behandeln soll.

Schr.

E. Pascal. Integrafo per l'equazione differenziale dell' odografo relativo al movimento di un proiettile in un mezzo comunque resistente. Rom. Acc. L. Rend. $\mathbf{22}_1$, 749-756.

Mechanische Integration der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1-y^2}{\psi(e^x)-y},$$

bei der ψ eine willkürliche gegebene Funktion, die im wesentlichen den Widerstand des Mittels darstellt, bedeutet. Der Integraph ist einer mit beweglichem Drehpunkt (s. d. Referat auf S. 361). Schr.

E. Pascal. I miei integrafi per equazioni differenziali. (Sommario di una memoria). Batt. G. **51** [(4) **3**], 369-375.

Unter demselben Titel hat Verf. gleichzeitig eine Abhandlung in den Napoli Atti und darauf ein Bändchen von 137 Seiten in 16°-Format (Napoli, Pellerano, 1914) veröffentlicht. Aus beiden gibt er in der vorliegenden Arbeit die Einleitung, die Inhaltsangabe und einige der dort befindlichen 45 Figuren wieder, welche die verschiedenen Formen der bisher konstruierten Integraphen darstellen. Wbg.

C. Ajello. Sopra un' equazione differenziale che si integra con l'integrafo polare Pascal. Batt. G. **51** [(4) **3**], 161-165.

Pascal (Napoli Rend. (3) **17**, 1911; Batt. G. (3) **50**, 1912) hat einen von ihm so genannten Polarintegraphen erdacht, mit dem man graphisch die Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+s\,P(x)\,y}{r\,P(x)-my} \tag{1}$$

integrieren kann. Diese Gleichung reduziert sich für $m=0$ auf eine Bernoullische Gleichung, welche sich bekanntlich unmittelbar in eine lineare Gleichung transformieren läßt. Vorher hat Pascal (Rom. Acc. L. Rend. (5) **18**, 1909; Batt. G. (3) **48**, 1910; **49**, 1911) einen anderen Integraphen konstruiert, mit dem man eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d\zeta}{dt}=\frac{\zeta+am-Q}{m\,\zeta-a-mQ} \quad (a \text{ Konstante}) \tag{2}$$

integrieren kann; diese ist für $m=0$ eine lineare Gleichung, also eine Gleichung von der Form, in die sich (1) für $m=0$ transformieren läßt. Es erhebt sich nun die Frage, ob sich Gleichung (1) für jedes m in (2) transformieren läßt. Verf. zeigt, daß dies der Fall ist, und gibt zwei Transformationen an, eine in bezug auf die Funktion ganze und eine gebrochene lineare, welche zusammen mit einer Transformation der unabhängigen Veränderlichen die Aufgabe lösen. Wbg.

A. Scribanti. Il planimetro a lunule considerato come strumento cartesiano d'integrazione. Batt. G. **51** [(4) **3**], 169-191.

Der Verf. hat an dem Integrator von Prytz einige Verbesserungen angebracht und dadurch ein Instrument erhalten, das für alle Techniker recht brauchbar geworden ist. In der vorliegenden Arbeit wird das Instrument, das eine sehr einfache Zusammensetzung hat, beschrieben und seine Theorie auseinandergesetzt. Dann werden auch die verschiedenen Anwendungen beschrie-

ben, die es bei gewissen Klassen von Aufgaben findet (Quadratur, Schwerpunktsbestimmung usw.). Endlich werden die Zahlenergebnisse von wirklich ausgeführten Messungen mit theoretisch berechneten verglichen. Lp.

A. Scribanti. Complementi e varianti alla teoria del planimetro a scure considerato come apparecchio polare di quadratura. Nuovo Cimento (6) **5**, 329-350.

Die Theorie des Beilplanimeters von Prytz, die 1894 von Hill begründet wurde, geht davon aus, daß die Umlaufung eines Elementarsektors vom Radiusvektor r und der Öffnung $d\vartheta$ eine Richtungsänderung des Schaftes vom Betrag

$$d\lambda = (M - N\cos\varphi)d\vartheta$$

bewirkt. Hierbei ist φ der Winkel zwischen dem Schaft und dem Radiusvektor r, ferner

$$M = 1 + \frac{r}{l}\sin\text{hyp}\frac{r}{l} - \cos\text{hyp}\frac{r}{l},\ N = \frac{r}{l}\cos\text{hyp}\frac{r}{l} - \sin\text{hyp}\frac{r}{l},$$

wo l die Länge des Schaftes bedeutet.

Die hier vorgeführte Theorie ist nach eigener Angabe des Verf. nur eine Umarbeitung der bisherigen, enthält aber einzelne neue Ideen: die Einführung der Hyperbelfunktionen, den Übergang zu endlichen Sektoren u. a.

Eine vierstellige Tafel für M, N und die Werte $\Delta' = M - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^2$ und $\Delta'' = N - \frac{1}{3}\left(\frac{r}{l}\right)^3$, die als Korrekturen angesehen werden können, ist beigefügt. Das Argument $\frac{r}{l}$ durchläuft das Intervall von 0 bis 1 von Hundertstel zu Hundertstel.

Schr.

A. Scribanti. Il planimetro a scure considerato come integrafo per equazioni differenziali. Torino Atti **48**, 14-18.

Das Beilplanimeter von Prytz besteht aus einem Stab, der an dem einen Ende eine Spitze, dem andern eine in der Längsrichtung stehende Schneide trägt. Wird die Spitze auf der Kurve $y = f(x)$ geführt, so beschreibt die Schneide eine Kurve, die der Differentialgleichung

$$l\frac{\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}} + \eta = f(\xi + -\frac{l}{\sqrt{1+\eta'^2}} - l),$$

wo l die Länge des Stabes ist, genügt. Das Instrument kann daher als Apparat zur Lösung solcher Differentialgleichungen angesehen werden und leistet hierin mehr als E. Pascals Apparate (siehe F. d. M. **41**, 1910, 356 und **42**, 1911, 324).

Schr.

A. Scribanti. Ancora intorno al planimetro a scure applicato all' integrazione di equazioni. Torino Atti **48**, 799-814.

Werden aus der für das Beilplanimeter charakteristischen Differentialgleichung (s. das vorstehende Referat)

$$\eta = f\left(\xi + \frac{l}{\sqrt{1+\eta'^2}} - l\right) - l\frac{\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}}$$

die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \frac{\partial f}{\partial\xi}, \frac{\partial\eta}{\partial\eta'} = \frac{\partial f}{\partial\eta'} - \frac{l}{(1+\eta'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

entnommen und in $d\eta = \frac{\partial\eta}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial\eta}{\partial\eta'}d\eta'$ eingesetzt, so folgt

$$\eta' = \frac{\partial f}{\partial\xi} + \left[\frac{\partial f}{\partial\eta'} - \frac{l}{(1+\eta'^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\frac{d\eta'}{d\xi}.$$

Auch für solche Differentialgleichungen stellt sonach das Planimeter einen mechanischen Integrator dar.

Ferner behandelt man auch Differentialgleichungen vom Typus

$$\frac{du}{dt} = A\frac{\cos F(u)}{F'(u)} - B\frac{\sin F(u)}{F'(u)},$$

wo A, B, F beliebige Funktionen sind. Die Riccatische Gleichung läßt sich diesem Typus als spezieller Fall unterordnen. Schr.

Weitere Literatur.

B. H. Camp. The expression of a multiple integral as a simple integral. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 389.

N. M. Krylov. Über den Begriff des bestimmten Integrals und über den Beweis des Fundamentaltheorems bezüglich der Existenz des Integrals der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Petersb. Ann. des Bergw. Inst. $\mathbf{4}_2$, 67-73.

V. Láska. Poisson's Integral als eine direkte Folge des Integrals von Cauchy. Časopis **42**, 398-401. (Böhmisch).

K. Petr. Poisson's Integral als eine direkte Folge des Integrals von Cauchy. Časopis **42**, 556-558. (Böhmisch.)

N. J. Lennes. Note on Lebesgue and Pierpont integral. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 393.

B. P. Moors. Étude sur les formules (spécialement de Gauss) servant à calculer des valeurs approximatives d'une intégrale définie. Amsterdam: J. Müller. 43 S. 8°.

R. Vercellin. La regola di Simpson e le sue applicazioni. Suppl. al Period. **17**, 1-6.

Darstellung mit Anwendungen für den elementaren Unterricht. Lp.

Kapitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen und Funktionalgleichungen.

A. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

G. A. Bliss. Fundamental existence theorems. The Princeton Colloquium, 1-107.

Der Vortrag bildet den ersten Teil der „Lectures on mathematics delivered September 15 to 17, 1909, before members of the American Mathematical Society in connection with the summer meeting held at Princeton University, Princeton, N. J.“ New York published by the American Mathematical Society.

Die von der Amerikanischen Mathematischen Gesellschaft in größeren Zeitabständen als Kolloquien bezeichneten umfangreicheren Vorträge sollen, wie die in der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstatteten Berichte, einen Überblick über den zeitlichen Stand eines Gebietes geben. Die kurze Inhaltsangabe der von Bliss gehaltenen Vorlesungen im Bull. Amer. Math. Soc. (2) **16**, 106, 1909 lautet: Der erste Teil der Vorlesungen von Bliss war einer Übersicht über die Theorie der impliziten Funktionen gewidmet und schloß einen eingehenden Bericht über einige der jüngeren Entwicklungen innerhalb dieses Gebietes nebst ihren Anwendungen in der Variationsrechnung ein. Die Existenztheoreme für gewöhnliche Differentialgleichungen wurden vorgenommen mit besonderer Beziehung auf die Definition von Lösungen über ein ausgedehntes Gebiet („sheet“=Fläche) und ihr Verhalten als Funktionen der anfänglichen Konstanten. Ein kurzer Bericht über die geometrische Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung wurde erstattet, und unter diesem Gesichtspunkte wurden die bereits gewonnenen Ergebnisse dazu angewandt, die Existenz von Lösungen solcher Gleichungen zu erweisen, selbst wenn die die Lösung definierende Gleichung nicht analytisch ist. Die Theorie der impliziten Funktionen für reelle Veränderliche und einige Kenntnisse der Annäherungsmethoden von Cauchy und Picard für gewöhnliche Differentialgleichungen wurden als bekannt vorausgesetzt. Wir lassen das Inhaltsverzeichnis folgen.

Einleitung. Kap. I. Gewöhnliche Punkte impliziter Funktionen. 1. Das Fundamentaltheorem. 2. Gleichungen, bei denen die Funktionen analytisch sind. 3. Goursats Annäherungsmethode. 4. Bolzas Ausdehnung des Fundamentaltheorems. 5. Die einzige Fläche (sheet) von Lösungen, die mit einer Anfangslösung zusammenhängen. 6. Hülfssätze und Definitionen. 7. Ein Kriterium, daß eine Fläche von Lösungen einwertig ist. 8. Transformationen von n Veränderlichen und Modifikation eines Satzes von Schoenflies.

Kap. II. Singuläre Punkte impliziter Funktionen. Einleitung. 9. Der Vorbereitungssatz von Weierstraß. 10. Die Nullstellen von $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ oder ihrer Funktionaldeterminante. 11. Singuläre Punkte einer reellen Transformation zweier Veränderlichen. 12. Der Fall, daß die Funktionaldeterminante identisch verschwindet. 13. Eine Verallgemeinerung des Vorbereitungssatzes von Weierstraß. 14. Anwendungen der vorangehenden Theorie.

Kap. III. Existenztheoreme für Differentialgleichungen. Einleitung. 15. Die Konvergenz-Ungleichheit. 16. Die Cauchyschen Polygone und ihre

Konvergenz über ein beschränktes Intervall. 17. Die Existenz einer auf den Rand eines Bereiches sich erstreckenden Lösung. 18. Die Stetigkeit und die Differenzierbarkeit der Lösungen. 19. Ein Existenztheorem für eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die nicht notwendig analytisch ist. Lp.

J. Drach. Sur l'intégration logique des équations différentielles ordinaires. Proc. 5. Intern. Math.-Kongr. **1**, 438-497.

„Die logische Integration der Gesamtheit der gewöhnlichen Differentialgleichungen läuft darauf hinaus, diese Gesamtheit in irreduzible und in aufeinander irreduzible Typen zu verteilen und jeden dieser Typen zu kennzeichnen. Für eine bestimmte Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),$$

bei der die Funktion f einen Teil eines wohl definierten Rationalitätsbereiches bildet, kann man eine (unglücklicherweise in den allgemeinen Fällen theoretische) reguläre Methode angeben, um zu erkennen, welchem Typus sie angehört, d. h. im Grunde, welches die einfachsten Transzendenten sind, welche die Elemente der allgemeinen Lösung rational auszudrücken vermögen.

Allgemein, wenn man eine partielle Differentialgleichung betrachtet:

$$\text{(a)} \qquad X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n},$$

deren Koeffizienten Funktionen der $n+1$ Argumente $x, x_1, \ldots, x_n$ sind, die zu einem gewissen Rationalitätsbereiche $[\varDelta]$ gehören, wird das fundamentale Lösungssystem $z_1, z_2, \ldots, z_n$ der Gleichung (a), das man als das einfachste ansehen kann, durch Beziehungen:

$$\varOmega_i\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z_n}{\partial x_n}\right) = \alpha_i(x, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

definiert, in denen die ersten Glieder alle rationalen und rational verschiedenen Differentialinvarianten einer gewissen Gruppe von Transformationen $\varGamma$ der Elemente $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sind, angesehen als Funktion der nicht transformierten Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Die zweiten Glieder sind Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die dem Rationalitätsbereich $[\varDelta]$ angehören. Das vorausgehende System ist irreduzibel, d. h. jede mit den vorangehenden verträgliche Relation gleicher Art (die gerade wie diese letzteren mindestens durch ein Fundamentalsystem verifiziert wird) ist eine notwendige Folge davon; es ist in gleicher Weise primitiv, d. h. man kann die Ordnung der Gleichungen des Systems nicht erniedrigen oder die Anzahl dieser Gleichungen, die von einer gegebenen Ordnung sind, bei dem Übergang zu einem anderen Fundamentalsystem nicht erhöhen. Ich sage, die Gruppe $\varGamma$ sei die Rationalitätsgruppe der Gleichung, und die einfachsten Lösungen von (a) seien mit der Gruppe $\varGamma$ verknüpfte Funktionen von $n+1$ Argumenten $x, x_1, \ldots, x_n$; diese Funktionen sind im allgemeinen simultan definiert und können nicht getrennt werden. Man kann als Gruppe $\varGamma$ eine der a priori von S. Lie bestimmten Gruppen nehmen; aber die gegenwärtige

Theoric wird direkt und algebraisch errichtet, würde also jene Typen abermals geben, wenn es nötig wäre.

Sophus Lie hatte seine Theorie der Transformationsgruppen selbst auf die Forschung der Differentialgleichungen angewandt; allein seine Arbeiten, die von denen, um die es sich hier handelt, gänzlich verschieden sind, lassen sich nur auf besondere Gleichungen, unter denen anwenden, die wir untersuchen, und geben nur unvollständige Resultate, die zwar in einem ideell allgemeinen Falle gültig sind, aber nicht mehr mit Notwendigkeit für einen besonderen Fall bestehen bleiben. Die Gruppentheorie hatte also interessante Folgerungen für die Integration ergeben, schien aber nicht wesentlich für die Erforschung der Differentialgleichungen. Indem ich sie bei dem Ausgange von diesen Gleichungen wieder fand, hoffe ich festgestellt zu haben, daß sie eine von der Erforschung der Transzendenten der Integralrechnung untrennbare Lehre ist.

Zu beachten ist die tiefliegende Analogie dieser Resultate mit denen von Galois betreffs der logischen Auflösung der algebraischen Gleichungen. In der Tat ist es das Studium der algebraischen Galoisschen Theorie und der jetzt klassisch gewordenen bemerkenswerten Ausdehnung dieser Theorie auf die linearen Differentialgleichungen von Émile Picard (1887), die mit dazu geführt hat, die versteckten Gründe der Vollendung und des endgültigen Charakters dieser Theorien sowie die allgemeinsten Bedingungen aufzusuchen, unter denen diese Eigenschaften bewahrt werden können."

Nach der Wiedergabe dieser von starkem Selbstbewußtsein getragenen Einleitung der dickleibigen Arbeit wollen wir nur die Titel der einzelnen Abschnitte folgen lassen. Gleichung erster Ordnung. I. Typische Formen und zugehörige Gruppen. II. Rationalitätsgruppen. Hauptlösungen. III. Ausdehnung des Rationalitätsbereiches. Adjunktion von Transzendenten. IV. Bestimmung der Rationalitätsgruppe (typische Gruppe). Algebraische Integration der Gleichung erster Ordnung. V. Wie man aus der Kenntnis einer rationalen Relation Nutzen zieht, die durch eine Lösung der Gleichung $\frac{\partial z}{\partial x} + A\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ verifiziert wird. VI. Beispiele von Bestimmungen der typischen Rationalitätsgruppe. VII. Klassifizierung der singulären Punkte. Analytische Form der Integrale in der Umgebung der singulären Punkte.

Gleichung beliebiger Ordnung. I. Irreduzible reguläre Systeme. Rationalitätsgruppe. II. Normalform eines irreduziblen regulären Systems. III. Bildung der Resolventen. IV. Beispiele. Typische Rationalitätsgruppen. V. Reduktion der Rationalitätsgruppe.

Anwendungen. I. Gleichungen der zweiten Ordnung. Lineare Differentialgleichungen. II. Normalproblem von Lie. III. Unendliche einfache Gruppen. Allgemeinste ihnen entsprechende Gleichungen. IV. Vollständige Systeme linearer Gleichungen. V. Nicht lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. VI. Pfaffsches Problem. Lp.

J. Drach. Sur les équations différentielles de la géométrie. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 145-159.

„Die Integrationstheorie, die ich unter dem Namen der Rationalitätstheorie oder der logischen Integration entwickelt habe, gibt für die Differentialgleichungen der Geometrie reguläre Methoden, die es ermöglichen, Reduktionen bei der

Schwierigkeit der Integration vorauszusehen, d. h. eine Reduktion der Rationalitätsgruppe. Man führt somit klassische Sätze, die man dem Scharfsinn der Mathematiker verdankt, auf ihre gemeinschaftliche analytische Quelle zurück und kann unschwer neue angeben. Differentialgleichungen der Geometrie nenne ich solche, bei denen entweder willkürliche Funktionen auftreten oder aber Funktionen, die man als gegeben ansieht, deren transzendente Natur man jedoch nicht scharf bestimmt.

Der Bereich der Funktionen, die man als gegeben oder als bekannt betrachtet, setzt sich also aus den rationalen Funktionen gewisser Elemente zusammen, die durch ein explizites Zeichen dargestellt (ich werde sagen explizitet) sind, und dieser Bereich umfaßt immer neben einer Funktion $\varphi(x, y)$ z. B. von zwei Veränderlichen alle ihre Ableitungen $\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y, \ldots$. Mithin ist es wohl selbstverständlich, daß man nicht ein funktionales Operationszeichen explizitet: $\log u$ oder $\sin u$ bilden nicht notwendig einen Teil des Bereiches, der u umfaßt. Die einzigen Funktionen von u, die stets diesem Bereiche angehören, sind die rationalen Funktionen von u und seiner Derivierten, deren Koeffizienten in bezug auf die anderen Elemente des Bereiches rational sind.

Bei der Unsicherheit über die Natur der gegebenen Transzendenten gelangt man nicht zu scharfen Schlüssen über die Integration, abgesehen von dem allgemeinen Fall; nur wenn die Transzendenten durch ein irreduzibles System beim Ausgange von den absoluten rationalen Elementen definiert sind (Veränderliche und willkürliche Konstanten), kann die logische Integration bis ans Ende Anwendung finden. Es handelt sich also hier bloß um eine partikulare und partielle Anwendung der Rationalitätstheorie: die analytischen Sätze sind nicht von denen verschieden, die in dieser Theorie vorkommen.“ Lp.

A. Cohen. An introduction to the Lie theory of one-parameter groups, with applications to the solution of differential equations. Boston, New York, Chicago: D. C. Heath and Co., London: G. G. Harrap and Co., VII u. 248 S.

Dieses Buch wurde zwar schon 1911 in Amerika veröffentlicht, erschien aber in England erst 1913 (vergl. F. d. M. **42**, 708, 1911). Zweck des Buches ist, auf elementare Weise eine Einleitung der Lieschen Theorie einparametriger Gruppen zu geben, unter besonderer Bezugnahme auf ihre Anwendung zur Lösung von Differentialgleichungen, die gegenüber solchen Gruppen invariant sind. Inhalt: Die Liesche Theorie einparametriger Gruppen. Differentialgleichungen erster Ordnung. Vermischte Sätze und geometrische Anwendungen. Differentialgleichungen der zweiten und höherer Ordnungen. Partielle lineare Differentialgleichungen erster Ordnung. Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Berührungstransformationen. Anhang. J. (Lp.)

Fz. R. Berwald. Über angenäherte Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. **9**, Nr. 20, 13 S.

Bei gewissen Differentialgleichungen höheren Grades, besonders bei denen, die einen Schwingungsvorgang darstellen, werden in der Praxis häufig die nicht linearen Glieder vernachlässigt. Durch die Lösung der entstandenen Gleichung

behauptet man eine Annäherung an den wirklichen Verlauf zu erlangen. Zur Prüfung der Genauigkeit, mit der die ursprüngliche Gleichung durch die erhaltenen Integrale befriedigt wird, setzt man diese in die vernachlässigten Glieder niedrigsten Grades ein. Hierin kann man den Keim einer folgeweisen Annäherung erblicken. Von diesen Gedanken ausgehend, entwickelt der Verf. eine Methode, die sich im wesentlichen als eine Modifikation der von Picard und Fuchs stammenden Methoden erweist. Vgl. auch Painlevé (F. d. M. **30**, 280 u. 313, 1899). Im Gegensatz hierzu und zu der von Cotton angewendeten Methode (F. d. M. **39**, 393, 1908) bedient sich der Verf. aber bei jeder Stufe der Annäherung nur endlich ausführbarer Operationen. Die Annäherungsmethode wird an einer Differentialgleichung zweiter Ordnung entwickelt. Lp.

W. STEKLOFF. **Sur certaines questions d'analyse qui se rattachent à plusieurs problèmes de la physique mathématique.** St. Pétersb., Mém. Ac. (8) **31**, Nr. 7, 85 S.

Der Hauptinhalt dieser Abhandlung ist in einem vorläufigen Bericht schon angegeben (F. d. M. **43**, 491 u. 895, 1912). Die Methode ermöglicht die Lösung des dort bezeichneten Problems in ganzer Allgemeinheit, ohne daß auf die oft recht verwickelten und dem an sich aufgefaßten Problem fremden Betrachtungen zurückgegriffen wird, oder auf die Transformation der Differentialgleichungen auf neue Veränderliche, oder auf die Berechnung der asymptotischen Ausdrücke der Funktionen $V_k(x)$, was außerdem gewisse zusätzliche Bedingungen über die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ nötig macht. Die Frage nach der Möglichkeit der Entwicklung einer willkürlichen Funktion in eine nach den Fundamentalfunktionen $V_k(x)$ fortschreitende Reihe wird nach der früheren Methode gelöst, die mit gewissen Sätzen aus der Schließungstheorie zusammenhängt, die in der Abhandlung des Verf. „Sur la théorie de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales" (F. d. M. **42**, 433, 1911) unter ziemlich allgemeinen Annahmen entwickelt ist (Rev. sem. **22**$_1$, 111). Lp.

O. PERRON. **Über das Verhalten von $f^{(\nu)}(x)$ für $\lim \nu = \infty$, wenn $f(x)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung genügt.** Münch. Ber. 1913, 355-382.

N. E. Nörlund hat in seiner Arbeit „Fractions continues et différences réciproques" (Acta Math. **34**, 1-108; F. d. M. **32**, 247, 1911) unter anderem die Frage behandelt, wie sich die ν-te Ableitung $f^{(\nu)}(x)$ bei konstantem x für $\lim \nu = \infty$ verhält, wenn die Funktion $f(x)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung genügt; dabei werden die Koeffizienten der Differentialgleichung als rationale Funktionen von x vorausgesetzt, und die singulären Punkte sollen, außer allenfalls $x = \infty$, lauter sogenannte Stellen der Bestimmtheit sein. Nörlunds Methode besteht darin, daß er für $\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}$ eine lineare Differenzengleichung aufstellt, auf welche sich dann, da ihre Koeffizienten rationale Funktionen von ν sind, die sogenannte Laplacesche Transformation anwenden läßt.

Da aber bei der Laplaceschen Transformation immer eine Reihe von Ausnahmefällen bleibt, die eine gesonderte Überlegung erfordern, so hat diese Methode den Nachteil, daß sie zur Unterscheidung zahlreicher Sonderfälle zwingt, wobei die Gefahr sehr groß ist, doch den einen oder anderen entschlüpfen zu lassen. Obwohl Nörlunds Arbeit in der Erledigung dieser Sonderfälle sehr sorgfältig ist, erscheint es dem Verf. doch nicht überflüssig, in der vorliegenden Abhandlung das Problem nach einer, wie er glaubt, naturgemäßeren und jedenfalls einheitlicheren Methode zu behandeln.

Dabei gelangt er zu einer wesentlich präziseren Formulierung des Resultates und kann außerdem in zwei Punkten über die Nörlundschen Untersuchungen hinausgehen. Erstens hat nämlich Nörlund nur den Fall durchgeführt, daß in dem Integral $f(x)$ an einer singulären Stelle a höchstens die erste Potenz von $\log(x-a)$ auftritt, während Verf. alle Fälle behandelt. Zweitens aber brauchen bei dem Verf. die Koeffizienten der Differentialgleichung keine rationalen Funktionen von x zu sein. Es gelten dann die gleichen Resultate, während man für $\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}$ keine lineare Differenzengleichung mit in ν rationalen Koeffizienten angeben kann, sodaß die Verwendung der Nörlundschen Methode überhaupt nicht möglich wäre.

Zum Schluß setzt Verf. noch einige Anwendungen der von ihm erzielten Resultate auseinander. Insbesondere sei auf § 3 hingewiesen: die dort gegebene Herleitung der Übergangssubstitutionen für die Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichung scheint wesentlich einfacher als die seither bekannt gewordenen Methoden. Wbg.

O. Perron. Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reell ist. J. für Math. **142**, 254-270; **143**, 25-49.

In der ersten Arbeit untersucht Verf. unter anderem die Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + f_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + f_n(x)y = 0,$$

worin $\lim\limits_{x=\infty} f_\lambda(x) = a_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ ist. Bekanntlich hat H. Poincaré (American J. **7**, 203-264; F. d. M. **17**, 290, 1885) bewiesen, daß für das allgemeine Integral $\lim\limits_{x=\infty}\frac{y'}{y} = \varrho_1$ ist, und daß es für jede Wurzel ϱ_λ der „charakteristischen" Gleichung

$$\varrho^n + a_1\varrho^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (\Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_2) > \cdots > \Re(\varrho_n))$$

Partikularintegrale gibt, für welche $\lim\limits_{x=\infty}\frac{y'}{y} = \varrho_\lambda$ ist. Der Poincarésche Beweis ist sehr kompliziert und außerdem an die wesentliche Voraussetzung geknüpft, daß die Koeffizienten $f_\lambda(x)$ rationale Funktionen sind. Verf. gibt einen von dieser Voraussetzung freien und dabei viel einfacheren und naturgemäßeren Beweis des folgenden, die Ergebnisse von Poincaré enthaltenden Satzes: Es gibt ein Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der

Differentialgleichung (B), für welche die Beziehungen $\lim\limits_{x=\infty} \frac{y'_\lambda}{y_\lambda} = \varrho_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, n$) statthaben, und allgemeiner für $\varrho_\lambda \neq 0$:

$$\lim_{x=\infty} (y_\lambda : y'_\lambda : y''_\lambda : \ldots : y_\lambda^{(n)}) = 1 : \varrho_\lambda : \varrho_\lambda^2 : \ldots : \varrho_\lambda^n.$$

Ähnliche Fragen werden auch für etwas allgemeinere Systeme von Differentialgleichungen erörtert.

Während Verf. in der ersten Arbeit voraussetzt, daß die reellen Teile der Wurzeln der charakteristischen Gleichung alle voneinander verschieden sind, und nur an einem Beispiel zeigt, daß ohne diese Voraussetzung die erlangten Resultate nicht mehr durchweg Geltung behalten, unterzieht er in der zweiten Arbeit den allgemeinen Fall einer weiteren Untersuchung; dabei stützt er sich wie in der ersten Arbeit auf das „Existenztheorem" und das „Eindeutigkeitstheorem" (vgl. z. B. Goursat, Cours d'analyse **2**, ch. 19). Die Koeffizienten des Systems von n Differentialgleichungen

$$(1) \qquad y'_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\lambda,\mu}(x)\, y_\mu \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

mögen für $x \geqq x_0$ stetig sein; ferner mögen die endlichen Grenzwerte $\lim\limits_{x=\infty} f_{\lambda,\mu}(x) = a_{\lambda,\mu}$ existieren. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{12} \ldots a_{1n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn}-\varrho \end{vmatrix} = 0$$

seien $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$; sie brauchen nicht alle voneinander verschieden zu sein. Dann gilt der Satz: „Sind r, s irgend zwei reelle Zahlen, die den Ungleichungen $r > \Re(\varrho_\lambda) > s$ genügen, so gelten für jedes nicht identisch verschwindende Integralsystem von (1) die Beziehungen:

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_\lambda}{e^{rx}} = 0, \lim_{x=\infty} \frac{|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n|}{e^{sx}} = \infty."$$

Für das besondere System $z'_\lambda = \varrho_\lambda z_\lambda + \sum\limits_{\mu=\lambda+1}^{n} c_{\lambda,\mu} z_\mu + \sum\limits_{\mu=1}^{n} \varphi_{\lambda,\mu}(x) z_\mu$, wo die Funktionen $\varphi_{\lambda,\mu}(x)$ für $x \geqq x_0$ stetig sind und für $\lim x = \infty$ dem Grenzwert Null zustreben, gilt der Satz: „Falls $\Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_\lambda)$ ist für $\lambda = 2, 3, \ldots, n$, so hat dieses System n linear unabhängige Integralsysteme, für welche $\lim\limits_{x=\infty} \frac{z_\lambda}{z_1} = 0$ ist."

Dieser Satz kann verallgemeinert werden. Die Anwendung dieser Sätze auf eine Gleichung n-ter Ordnung liefert schließlich folgenden Satz: „Sind $r_1, r_2, \ldots, r_\sigma$ die voneinander verschiedenen reellen Teile der Wurzeln der charakteristischen Gleichung, und ist e_λ die Anzahl der Wurzeln mit dem reellen Teil r_λ, wobei mehrfache Wurzeln ihrer Vielfachheit entsprechend gezählt sind, so hat die Differentialgleichung (B) ein Fundamentalsystem von Integralen, die derart in σ Klassen zerfallen, daß für die Integrale der λ^{ten} Klasse und ihre linearen Verbindungen die Beziehungen statthaben:

$$\lim_{x=\infty} \frac{|y| + |y'| + \cdots + |y^{(n)}|}{e^{(r_\lambda+\varepsilon)x}} = 0, \lim_{x=\infty} \frac{|y| + |y'| + \cdots + |y^{(n)}|}{e^{(r_\lambda-\varepsilon)x}} = \infty,$$

wie klein auch die positive Zahl ε sei. Die Anzahl der Integrale der λ-ten Klasse ist dabei e_λ.“ Wbg.

H. Hoefer. Die Integration des zweiten Gliedes in linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Progr. Nr. 225. Friedr. Wilh.-Realgymn., Stettin 1913, 15 S. 4°.

Der Titel müßte wohl richtiger lauten: „Integration linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit zweitem Gliede“ („Störungsfunktion“). Verf. bemerkt zunächst, daß die Lagrange sche Methode der Variation der Konstanten meist umständliche Rechnungen erfordert und in das von willkürlichen Konstanten freie Partikularintegral (das sogenannte „Hauptintegral“) zuweilen überflüssige, mit Exponentialfaktoren behaftete Glieder einführt. Sodann zeigt er, wie man durch direkten Ansatz das Hauptintegral sofort finden kann, falls die Störungsfunktion ein Polynom, eine Exponentialfunktion, ein Produkt aus einem Polynom und einer Exponentialfunktion, eine Kosinus- oder Sinusfunktion oder ein Produkt aus einem Polynom und einer Kosinus- oder Sinusfunktion ist. Es ist indessen zu bemerken, daß die Methode des Verf. längst bekannt ist (vgl. z. B. Forsyth, Lehrbuch der Differentialgleichungen, und W. Heymann, Studien über die Transformation und Integration der Differential- und Differenzengleichungen. Leipzig, Teubner, 1891). — An mehreren Beispielen werden die Methoden der Variation der Konstanten und des direkten Ansatzes sowie die symbolische Methode auf ihre Einfachheit hin geprüft. Wbg.

D. Marin. Breve nota sobre la integración elemental de las ecuaciones diferenciales lineales completas. Rev. Soc. Mat. Esp. 2, 283-289.

Verf. gibt eine in etwas anderer Form längst bekannte Methode an, um eine lineare Differentialgleichung mit zweitem Gliede auf eine homogene zu reduzieren. Diese Methode besteht darin, die Differentialgleichung durch das zweite Glied zu dividieren und darauf zu differenzieren. Ist das zweite Glied von der Form $A \cos \beta x + B \sin \beta x$, so kann man sofort zweimal differenzieren und dann das wieder erscheinende zweite Glied eliminieren. Ist endlich das zweite Glied ein Polynom n-ten Grades, so kann man $(n+1)$-mal differenzieren. Beispiele. Wbg.

G. D. Birkhoff. Note on the expansion problems of ordinary linear differential equations. Palermo Rend. 36, 115-126.

Verf. hat in einer früheren Arbeit (American M. S. Trans. 9, 373-395; F. d. M. 39, 386, 1908) die Poincaré-Cauchy sche Methode zur Entwicklung einer willkürlichen Funktion in eine Reihe angewendet. Nach Tamarkines Meinung (Palermo Rend. 34, 345-382; F. d. M. 43, 397, 1912) entbehrt die Begründung der Hauptresultate des Verf. der nötigen Strenge. Verf. zeigt in der vorliegenden Arbeit, daß diese Ansicht Tamarkines unbegründet ist, und fügt noch einige interessante Einzelheiten hinzu. Wbg.

G. D. Birkhoff. Equivalent singular points of ordinary linear differential equations. Math. Ann. **74**, 134-139.

In einer früheren Arbeit (American M. S. Trans. **10**, 436-470, 1909; F. d. M. **40**, 352, 1910) hat Verf. den Begriff „äquivalenter singulärer Punkte" linearer Differentialgleichungen eingeführt; aber das aus diesem Begriff sich ergebende Klassifikationstheorem war wegen Übergehung gewisser Ausnahmefälle unvollständig. In der vorliegenden Arbeit beweist Verf. das Theorem in seiner Allgemeinheit; sein Beweis beruht auf einem von ihm in den Math. Ann. **74**, 122-133 (Referat in Abschn. VII, Kap. 1) aufgestellten funktionentheoretischen Hülfssatze. Sind zwei homogene lineare Differentialsysteme mit analytischen Koeffizienten durch eine lineare Transformation miteinander verbunden, deren Koeffizienten bei $x = \infty$ analytisch sind und sich für $x = \infty$ auf δ_{ij} reduzieren ($\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$), so sagt Verf., daß die beiden Systeme bei $x = \infty$ einen „äquivalenten singulären Punkt" besitzen. Alsdann lautet jetzt das Theorem: „Jedes lineare Differentialsystem der oben angegebenen Art mit einem singulären Punkt vom Range $q + 1$ bei $x = \infty$ ist bei $x = \infty$ einem kanonischen System von der Form

$$x \frac{dY_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(x)\, Y_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

äquivalent, in welchem $P_{ij}(x)$ Polynome von höchstens $(q + 1)$-tem Grade sind."

Wbg.

G. D. Birkhoff. On a simple type of irregular singular point. American M. S. Trans. **14**, 462-476.

Einen einfachen Typus eines irregulären singulären Punktes liefert die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x) y = 0,$$

in welcher die Koeffizienten $p(x)$ und $q(x)$ bei $x = \infty$ analytisch sind. Der Punkt $x = \infty$ ist dann ein irregulärer singulärer Punkt vom Range 1, wenn nicht $xp(x)$ und $x^2 q(x)$ für $x = \infty$ endlich bleiben. Ist $\lim_{x=\infty} p(x) = p_0$, $\lim_{x=\infty} q(x) = q_0$, und sind die Wurzeln b_1, b_2 der quadratischen Gleichung $b^2 + p_0 b + q_0 = 0$ voneinander verschieden, so führt die Transformation $y = e^{b_1 x} x^{c_1} \bar{y}$, $x = (b_2 - b_1)\bar{x}$ bei geeigneter Bestimmung der Konstante c_1 die Gleichung (1) in eine andere Gleichung derselben Form über, in welcher

$$(2) \qquad p(x) = -1 + \frac{p_1}{x} + \cdots, \; q(x) = \frac{q_2}{x^2} + \frac{q_3}{x^3} + \cdots$$

ist. Verf. untersucht nun die Lösungen von (1) in der Umgebung von $x = \infty$, falls $p(x)$ und $q(x)$ die Form (2) haben (vgl. Horn, J. für Math. **133**, 19-67; F. d. M. **38**, 354, 1907); dabei benutzt er im wesentlichen dieselbe Methode zur Untersuchung singulärer Punkte wie in einer früheren Arbeit (Trans. **10**, 436-470, 1909). In diesem besonderen Falle können aber die Resultate in einer präziseren Form angegeben werden; jedoch sind die beiden letzten Theoreme der vorliegenden Abhandlung neu und sehr verallgemeinerungsfähig. Die Unter-

suchung beruht auf einem Hülfssatze, der ein Spezialfall (für $n=2$) eines Satzes ist, für den Verf. zwei verschiedene Beweise gegeben hat (American M. S. Bull. **18**, 64, 1911; Math. Ann. **74**, 122-133, 1913 u. Trans. **10**, 438, 1909), und der seinerseits in einem allgemeineren wichtigen Satze von Hilbert (Gött. Nachr. 1905, 307-330) und Plemelj (Monatsh. f. Math. **19**, 211-222, 1908) enthalten ist. Wbg.

G. Rémoundos. Sur les singularités des équations différentielles. Proc. 5. Intern. Math.-Kongr. **1**, 372-374.

Das Studium der Differentialgleichung

$$x^2\frac{dy}{dx}=\alpha y+f(x,y)\quad(\alpha\neq 0)$$

hat bereits früher gezeigt, daß, wenn auch $f(x,y)$ für $x=y=0$ verschwindet, in der Umgebung dieses Punktes nicht immer eine für $x=0$ verschwindende Lösung zu existieren braucht, welche in der Umgebung des Punktes holomorph ist. Die betreffende Untersuchung wird auf die allgemeinere Differentialgleichung $y=\Phi(x,y,y',y'',\ldots,y^{(m)})$ ausgedehnt, unter Einführung eines neuen Begriffes „der Kraft" (force) des Ausdruckes Φ. In gewissen Fällen (ein Beispiel wird angegeben) entscheidet geradezu das Vorzeichen der Größe dieser „Kraft" darüber, ob eine solche holomorphe Lösung vorhanden ist oder nicht. In einer Anmerkung gibt Verf. an, daß Borel das Wort „Kraft" lieber durch „Gewicht" (poids) ersetzen möchte. A. K.

Fr. Rádl. Über Kaskaden-Transformation der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Rozpravy **22**, Nr. 32, 10 S.; Nr. 41, 18 S. (Böhmisch.)

Fr. Rádl. Eine Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Časopis **42**, 20-28. (Böhmisch.)

Es handelt sich hauptsächlich um wiederholte Transformation der linearen Differentialgleichung

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_ny=0$$

durch eine der beiden Substitutionen

$$y_1'=hy,\quad y_1''=H_1y'+H_2y.$$

Dabei ist $h=-p_n+p_{n-1}-p_{n-2}''+\cdots+(-1)^n p_1^{(n-1)}$; für H_1, H_2 hat man ähnliche Ausdrücke. Die transformierte Gleichung ist wieder eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit gleichem h (resp. mit gleichem H_1, H_2). Pe.

C. Krediet. L'intégration de l'équation differentielle $\frac{d^my}{dx^m}+a_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+a_{m-1}\frac{dy}{dx}+a_my=f(x)$. Wisk. Tijdschr. **9**, 148-155.

Die Integration geschieht durch stufenweise Verringerung der Ordnungszahl. Als neue Variable wird eingeführt

$$Y = \frac{dy}{dx} + \alpha_1 y$$

Schn.

C. Krediet. L'intégration de l'équation différentielle $x^m \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 x^{m-1} \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + P_m y = 0$. Wisk. Tijdschr. **9**, 193-196.

Es werden $m - 1$ neue Funktionen $y_1, \ldots, y_{m-1}$ eingeführt: $x\frac{dy}{dx} + \alpha_1 y = y_1, \ldots, x\frac{dy_{m-1}}{dx} + \alpha_m y_{m-1} = 0$, und die Werte $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ werden so bestimmt, daß bei Elimination von $y_1, \ldots, y_{m-1}$ die gegebene Differentialgleichung entsteht. Diese ist dadurch auf $m - 1$ Gleichungen erster Ordnung zurückgeführt.

Schn.

G. Hamel. Über die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Math. Ann. **73**, 371-412.

Es handelt sich um die reelle Differentialgleichung

$$\ddot{x} + M(t)x = 0,$$

wo M periodisch ist: $M(t + 2\pi) = M(t)$. Es gibt einen stabilen Typus, wie man seit den klassischen Untersuchungen von Hermite und Floquet weiß (Ann. de l'Éc. Norm. 1883/4). Beide Typen unterscheiden sich durch das Vorzeichen der Diskriminante einer algebraischen Gleichung. Diese Gleichung herzustellen hat man bis jetzt zwei Methoden: entweder entwickelt man irgend zwei Integrale in Potenzreihen nach t, die aber im ganzen Intervall von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ so gut konvergieren müssen, daß man das Vorzeichen einer gewissen Zahl sicher feststellen kann; dieses Verfahren ist mühsam, wenn nicht manchmal fast ungangbar. Oder man entwickelt nach einem geeigneten Parameter, sodaß man eine beständig konvergente Potenzreihe erhält; aber es treten bei ihr Glieder scheinbar säkularen Charakters auf, die in Wahrheit doch nur der schwer erkennbare Anfang der Potenzentwicklung einer periodischen Funktion sind. Verf. gibt eine neue Methode durch Hinzuziehung einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung, der „lösenden Differentialgleichung", deren Vorzug darin besteht, daß sie stets ein rein periodisches Integral besitzt; dieses kann man leicht durch eine Fouriersche Reihe herstellen. Der Typus wird dann durch das Vorzeichen einer Konstante bestimmt. Die Berechnung der Integrale der ursprünglichen Gleichung verlangt darauf nur noch eine Quadratur; scheinbar säkulare Glieder treten bei dem ganzen Prozeß nicht auf: man arbeitet beständig mit konvergenten Fourier-Reihen (§§ 1—4).

Um das periodische Integral der lösenden Differentialgleichung dritter Ordnung $\dddot{z} + 4M\dot{z} + 2\dot{M}z = 0$ zu finden, fügt Verf. zu M einen multiplikativen

Faktor λ, nach dem er entwickelt. Die Herstellung dieser Reihe für hinreichend kleine λ ist leicht; man kann aber durch geeignete Wahl der noch freigebliebenen multiplikativen Konstante für z als Funktion von λ eine beständig konvergente Potenzreihe in λ erhalten. Dazu bedarf es im allgemeinen der Bestimmung derjenigen ganzen transzendenten Funktion von λ, deren Nullstellen die Eigenwerte einer linearen Integralgleichung sind; doch gibt Verf. in den §§ 8, 9 für das einfache, aber wichtige Beispiel $M = a + b \cos t$ ein ganz einfaches Verfahren nebst Konvergenzbeweis (§§ 5-10). Liegt der instabile Typus vor, so kann doch noch „stabilité à la Poisson" herrschen, d. h. die Integrale können unendlich viele Nullstellen haben; wenn nicht, so besitzen die in bestimmter Weise normierten Integrale gar keine Nullstellen (beliebige Integrale höchstens eine). Als notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für das Eintreten des zweiten Falles gab kürzlich Levi-Cività (Ann. de l'Éc. Norm. (3) **28**, 325-376; F. d. M. **42**, 1007, 1911) an, daß der Integralmittelwert von M negativ sein muß. Verf. gibt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen (§ 11).

Diese Untersuchung führt den Verf. dazu, jetzt zu M einen additiven Parameter λ hinzuzufügen. Er beweist: die Anzahl der Nullstellen wächst mit λ. Man weiß schon, daß es unendlich viele, sich nur gegen unendlich häufende Eigenwerte λ gibt, für welche periodische Lösungen existieren (Bôcher, Mason und Tzitzéica, C. R. **140**, 1905). Diese Eigenwerte λ können einfach oder doppelt zählen: je nachdem ist nur ein Integral oder aber sind beide ganz oder halb periodisch ($M(t)$ heißt für das Intervall 0 bis 2π halbperiodisch, wenn $M(t + 2\pi) = - M(t)$ ist). Die einfach zählenden Eigenwerte teilen das Intervall $\lambda = - \infty$ bis $+ \infty$ in Teile, in denen abwechselnd der stabile und der instabile Typus herrscht. Es gibt ein kleinstes $\lambda = \lambda_0$, unterhalb dessen der Typus instabil ist und keine Nullstellen (bei den normierten Integralen) vorhanden sind. Oberhalb λ_0 gibt es stets unendlich viele Nullstellen. Die doppelten Eigenwerte λ fallen stets in ein Intervall von stabilem Typus. Es kann bei hinreichend regulärem M kein unendlicher Wechsel der Intervalle von stabilem und instabilem Typus vorkommen: für hinreichend große λ ist der Typus sicher stabil. Doch gilt dieser Satz nicht immer, wie an einem Beispiel gezeigt wird, wenn M eine Unstetigkeitsstelle hat. Endlich gibt Verf. eine asymptotische Darstellung für $\lambda = \infty$, wodurch die Untersuchungen Weyls (Math. Ann. **68**, 1911) eine Ergänzung finden; auch zeigt Verf. unter Ausdehnung eines Satzes von Liouville, daß $2\sqrt{\lambda}$ der asymptotische Wert für die Zahl der Nullstellen ist (§§ 12-16). Den Schluß bilden, außer einer Bemerkung über die lineare Differentialgleichung mit zweitem Glied, Beispiele, die einige Möglichkeiten erweisen sollen.

Die Anregung zu dieser mathematischen Untersuchung verdankt Verf. einem Schaukunststück: Ein Artist steht auf einer Kugel und trägt eine Stange vertikal, an der sich ein zweiter Artist produziert. Der Augenschein lehrt deutlich, daß der untere Artist das ganze System dadurch stabilisiert, daß er die Beine und dadurch auch die Kugel in kleine, aber schnelle Schwingungen versetzt. Diese Schwingungen erfolgen ganz „mechanisch" und unterscheiden sich dadurch wesentlich von den Bewegungen einer Hand, die einen Stab balanziert und ihm nachgehen muß. Es handelt sich um wirkliche Stabilität, und deren Möglichkeit wird durch die Theorie des Verf. erwiesen. Wbg.

R. G. D. RICHARDSON. Über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen eines K l e i n schen Oszillationstheorems. Math. Ann. **73**, 289-304.

Das Problem, mit dem der Verf. sich in der vorliegenden Arbeit hauptsächlich beschäftigt, ist folgendes: „Es seien drei Gleichungen

$$\text{(A)} \quad [p_i(x_i)u_i'(x_i)]' + q_i(x_i)u_i(x_i) + [\lambda A_{i_1}(x_i) + \mu A_{i_2}(x_i) + \nu A_{i_3}(x_i)]u_i(x_i) = 0 \quad (p_i > 0; i = 1, 2, 3)$$

gegeben; kann man dann die drei Parameter λ, μ, ν so bestimmen, daß Lösungen $u_1(x_1)$, $u_2(x_2)$, $u_3(x_3)$ existieren, die den Randbedingungen

$$u_1(a_1) = u_1(b_1) = 0, u_2(a_2) = u_2(b_2) = 0, u_3(a_3) = u_3(b_3) = 0$$

genügen und l-, bzw. m-, bzw. n-mal in ihren Intervallen oszillieren?" Ein Oszillationstheorem im Falle mehrerer Parameter hat zuerst K l e i n (Math. Ann. **18**, 410-427; F. d. M. **13**, 407, 1881) bewußt und ausdrücklich besprochen; es behandelt den Fall, daß q_i und A_{ij} besondere Funktionen sind. Den von K l e i n skizzierten Beweis hat B ô c h e r (American M. S. Bull. **4**, 307; F. d. M. **29**, 285, 1898) in analytische Form gesetzt. Später hat H i l b (Deutsche Math.-Ver. **16**, 279, 1907) das Problem von zwei Gleichungen mit zwei Parametern gelöst, welches allgemeinere Voraussetzungen über die Funktionen A behandelt. — In der vorliegenden Arbeit stellt und beantwortet Verf. allgemein die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Funktionen A, damit ein Oszillationstheorem der oben angegebenen Form besteht. Im § 1 wird ein Oszillationstheorem abgeleitet für den Fall einer Gleichung mit einem Parameter, die weder orthogonal, noch polar ist. Die Oszillationstheorie für die allgemeine Gleichung mit zwei und drei Parametern wird in den §§ 2 und 3 aufgestellt. Im § 4 wird der Hauptsatz aufgestellt: es werden nämlich einerseits notwendige, anderseits hinreichende Bedingungen (die beinahe identisch sind) für die Existenz von Lösungen der Gleichungen (A) abgeleitet. Ferner wird die Normalform der Gleichungen angegeben und ein Eindeutigkeitssatz (der auch ein Existenzsatz ist) bewiesen. In § 5 ist der Zusammenhang dieser Ergebnisse mit der K l e i n - B ô c h e r schen Theorie angedeutet. Den Fall zweier Gleichungen mit zwei Parametern, für den besondere Vereinfachungen eintreten, hat Verf. bereits 1912 (American M. S. Trans. **13**, 22-34; F. d. M. **34**, 400) behandelt.

Wbg.

M. PÉTROVITCH. Fonctions implicites oscillantes. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 295-302.

Der Verf. dehnt die bekannten S t u r m schen Oszillationssätze auf allgemeine Klassen von Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung aus. Zu ihnen gehören unter anderem die Differentialgleichungen von der Form $0 = y'' + y\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$, wo φ eine Funktion von vorher genau definierten Eigenschaften, insbesondere nach unten oder nach oben begrenzt ist. Hierüber werden zwei Hauptsätze aufgestellt, bezüglich auf ein gegebenes System von Differentialgleichungen, das den betreffenden Wert $\Delta(y)$ der zweiten Derivierten eines Integrales y als eine nach oben oder nach unten begrenzte Funktion φ bestimmt.

(a) Die Funktion φ sei nach unten durch eine in dem Intervall (a, b) end-

liche und stetige Funktion $\lambda(x)$ begrenzt; u sei ein beliebiges Integral der Gleichung $u'' - \lambda(x)u = 0$. Zwei einfache Folgenullstellen von u innerhalb (a, b) enthalten höchstens eine Nullstelle von y; zwei einfache Nullstellen von y enthalten mindestens eine Nullstelle von u. Wenn y und u eine gemeinschaftliche Nullstelle $x = \alpha$ haben, so erreicht die Variable x beim Zunehmen von $x = \alpha$ an zuerst eine Nullstelle von u und dann eine Nullstelle von y.

(b) Die Funktion φ sei nach oben begrenzt durch eine in (a, b) endliche und stetige Funktion $\mu(x)$; v sei ein beliebiges Integral der Gleichung $0 = v'' - \mu(x)v$. Zwei einfache in (a, b) enthaltene Nullstellen von v enthalten mindestens eine Nullstelle von y; zwei einfache Folgenullstellen von y enthalten höchstens eine Nullstelle von v. Wenn y und v eine gemeinschaftliche Nullstelle $x = \alpha$ haben, so erreicht die Variable x beim Zunehmen von α aus zuerst eine Nullstelle von y und dann eine Nullstelle von v.

Durch besondere Annahmen über die Vergleichsfunktionen u und v werden dann Beispiele gebildet zur Erläuterung der Anwendung jener Sätze. Lp.

M. Petrovitsch. Integrale einer gewissen Klasse von Differentialgleichungen, die als Funktionen der Integrationskonstante betrachtet werden. Belgrad Ak. **87**, 161-189. (Serbisch.) 1912.

Reihen $\sum a_n C^n$ (wo $a_n = \int_L uv^n\,dx$, u und v Funktionen von x), die durch das längs einem gegebenen Bogen genommene Integral $\int y dx$ erzeugt sind, wobei $y(x, C)$ das allgemeine Integral einer ausgedehnten Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung $f(x, y, y') = 0$ ist (Rev. sem. **22**$_1$, 112). Lp.

N. Haponowicz. Studyum nad całkowaniem równań liniowych przez kwadratury (Untersuchungen über Integration von linearen Differentialgleichungen durch Quadraturen). Wiad. mat. **16**, 99-108 (1912).

Die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0 \tag{1}$$

läßt sich in der symbolischen Gestalt

$$\left(\frac{d}{dx} + A\right)\left(\frac{d}{dx} + B\right)y = 0 \tag{2}$$

schreiben. Die Funktion B genügt dabei der Riccatischen Gleichung

$$\frac{dB}{dx} = Q - PB + B^2. \tag{3}$$

Die Funktionen A und B können entsprechend angenommen werden. Wird B

beliebig angenommen, dann erhält man zu jeder Funktion Q die entsprechende Funktion P, so daß (1) durch Quadraturen lösbar ist. Einfache Beispiele.

Durch Multiplikation mit einem Faktor μ kann (1) in die Gestalt

$$(4) \qquad M\frac{d^2 y}{dx^2} + N\frac{dy}{dx} + Ry = 0$$

übergeführt werden, wo

$$R - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2 M}{dx^2} = 0$$

ist, und daher (1) durch Quadraturen lösbar ist. Es genügt dabei μ einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. So entspricht jeder durch Quadraturen lösbaren Gleichung (1) eine zweite ebenso zu lösende Gleichung.

Diese Methode, verbunden mit der Einführung neuer Veränderlichen, läßt sich mannigfach anwenden. Als Beispiel dient die Laplacesche Gleichung

$$(5) \qquad (a_1 x + b_1)\frac{d^2 y}{dx^2} + (a_2 x + b_2)\frac{dy}{dx} + (a_3 x + b_3)y = 0.$$

A. R.

A. Loewy. Über lineare homogene Differentialsysteme und ihre Sequenten. Heidelb. Ak. Sitzber. 1913, 20 S.

Verf. gibt einen Bericht über vornehmlich algebraische Untersuchungen aus der Theorie der Differentialsysteme, die er angestellt hat. Sie bezwecken, vor allem dem Zusammenhang nachzugehen, der zwischen einem System linearer homogener Differentialausdrücke erster Ordnung für n Funktionen und einem einzelnen linearen homogenen Differentialausdruck n-ter Ordnung für eine Funktion, vom Verf. Sequente genannt (§ 4), besteht. Im übrigen beziehen sich die Untersuchungen des Verf. auf den Artbegriff bei einzelnen Differentialausdrücken und bei Differentialsystemen sowie auf die Irreduzibilität und vollständige Reduzibilität bei Differentialsystemen in einem zugrunde gelegten Rationalitätsbereich (wegen der Definition desselben vgl. z. B. des Verf. Arbeit Math. Ann. **62**, 89-117, S. 90; F. d. M. **37**, 332, 1907). Im allgemeinen verlangen die vom Verf. aufgestellten Sätze und ihre Beweise nicht die Integralexistenz; sie sind daher auch über das Gebiet der Differentialsysteme hinaus einer Verallgemeinerung fähig, indem man einen in abstrakter Weise definierten Rationalitätsbereich zugrunde legt. Es ist unmöglich, diese Sätze hier im einzelnen anzuführen, da sie eine Reihe von zum Teil neu eingeführten Begriffen voraussetzen. Auf die Resultate, die man für Differentialsysteme mit n Funktionen L. Schlesinger (Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Teubner, Leipzig und Berlin 1908) bereits verdankt, macht Verf. in § 4, § 6 und § 7 aufmerksam. Die Beweise sowie eine weitere Ausgestaltung und Fortführung behält Verf. einer ausführlichen Publikation vor. Wbg.

G. Hronyecz. Herleitung der Fuchsschen Periodenrelationen für lineare Differentialsysteme. Ung. Ber. **27**, 181-213.

L. Fuchs (J. für Math. **76**, 1874); Werke **1**, 415 ff., 1904; Berl. Ber. 1892; Werke **3**, 141 ff., 1909) hat aus dem Abel-Jacobischen verallgemeinerten Vertauschungssatze für lineare Differentialgleichungen Relationen hergeleitet, die denjenigen analog sind, die Weierstraß aus dem Satze über die Vertauschung von Parameter und Argument für die Perioden der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung gewonnen hat. Die Fuchsschen Relationen stellen Beziehungen dar, die die Integrale, erstreckt über die Lösungen einer linearen Differentialgleichung des Fuchsschen Typus zwischen den Verzweigungspunkten als Grenzen, mit den Koeffizienten der Fundamentalsubstitutionen der Monodromiegruppe jener Differentialgleichung verknüpfen. L. Schlesinger (Handbuch der Theorie der lin. Diffgl. II [1897], XII. Abschn.) hat diese Fuchsschen Relationen in Verbindung gesetzt mit der von ihm gegebenen Verallgemeinerung des Abel-Jacobischen Vertauschungssatzes, und A. Hirsch (Math. Ann. **54**, 202 ff., 1900; F. d. M. **31**, 338-340) hat die gedachten Relationen hergeleitet und verallgemeinert, indem er von den Schlesingerschen Untersuchungen über die Eulersche Transformierte Anwendung machte. — Von Schlesinger dazu angeregt, stellt Verf. in der vorliegenden Arbeit die analogen Relationen für die Integralmatrizen schlechthin kanonischer linearer Differentialsysteme erster Ordnung auf. Die darin befolgte Methode stimmt im wesentlichen mit der von Fuchs überein. Sie stützt sich einerseits auf die von Schlesinger in seinen „Vorlesungen über lin. Diffgl.“ (Leipzig, Teubner, 1908) entwickelten Methoden der Theorie der linearen Differentialsysteme, anderseits auf die von Schlesinger in seinem Handbuch (II_1, §§ 257-259) gegebene Darstellung der in Rede stehenden Fuchsschen Resultate, außerdem auf schriftliche Aufzeichnungen und mündliche Mitteilungen desselben. Wbg.

J. Horn. Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle. J. für Math. **143**, 212-240.

Die im J. für Math. **120**, 1-26 u. **122**, 73-83 (1899 u. 1900) unter gleichem Titel erschienenen Arbeiten des Verf. werden in der vorliegenden Abhandlung im Hinblick auf wichtigere neuere Untersuchungen von Watson über asymptotische Reihen (Lond. Phil. Trans. (A) **211**, 279-313, 1911) weitergeführt. In dem früheren Aufsatz (**120**, 1 ff.) wurde die lineare Differentialgleichung

$$\text{(D)} \qquad x^{k+1}\frac{dy}{dx}+g(x)y=h(x)$$

betrachtet, worin $k>0$ eine ganze positive Zahl, $g(x)=1+a_1x+\cdots+a_kx^k$ und $h(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$ eine konvergente Potenzreihe von x ist. Die Gleichung (D) wird formell befriedigt durch die i. a. divergente Reihe $S=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, deren Koeffizienten sich in einfacher Weise durch die a_i und b_i ausdrücken lassen. A. a. O. sind dann k ausgezeichnete, durch Quadraturen erhaltene Integrale η_m der Gleichung (D) betrachtet worden. Setzt man

$$\eta_m=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n+\gamma_nx^{n+1} \quad (n=0,1,2,\ldots),$$

so bleibt $|\gamma_n|$ unter einer endlichen Größe, wenn $|x|$ hinreichend klein angenommen wird, während x innerhalb eines gewissen Sektors bleibt; oder anders ausgedrückt: die Funktion η_m wird in dem bezeichneten Sektor durch die Reihe S asymptotisch dargestellt. — Nach Watson ist es wichtig, die Abhängigkeit des Reihenkoeffizienten c_n und der im Restglied enthaltenen Größe γ_n vom Index n zu untersuchen oder, wie Watson sagt, die „Charakteristiken" der asymptotischen Reihe zu bestimmen. Dies wird für die Reihe S in § 1 durchgeführt. Das Laplacesche Integral, welches sich im Falle $k = 1$ nach der Theorie von Borel und Watson aus der asymptotischen Reihe S herleiten läßt, kann auch unmittelbar aus der Differentialgleichung (D) erhalten werden, wie in § 2 gezeigt wird; für den Fall $k > 1$ ergibt sich in § 3 eine Abänderung der Laplaceschen Integraldarstellung. In § 4 wird andeutungsweise gezeigt, wie sich für die Integrale η_m konvergente Fakultätenreihen aufstellen lassen (vgl. den Aufsatz des Verf. Math. Ann. **71**, 510-532, 1912, und Watson, Palermo Rend. **34**, 1-48, 1912). Wbg.

A. del Re. Su certe proprietà geometriche collegate con le equazioni del tipo di quella di Riccati. Napoli Rend. (3) **19**, 207-211.

Verf. untersucht einige weitere Eigenschaften der von Pascal (Rom. Acc. L. Rend. $\mathbf{18}_2$; F. d. M. **40**, 370, 1909) betrachteten Differentialgleichung

$$y' = c_0(x) + c_1(x)\,y + \cdots + c_n(x)y^n.$$

Die Tangenten an die Integralkurven in den Punkten einer Geraden $x =$ konst. umhüllen eine Kurve erster Klasse. Anwendungen und Ausdehnung auf ein System von zwei Gleichungen derselben Form. Sk.

E. Pascal. Sopra una classe di equazioni differenziali di grado n e di ordine $n-1$ da considerarsi come estensioni delle equazioni di Riccati. Annali di Mat. (3) **20**, 43-48.

Verf. betrachtet diejenigen Differentialgleichungen n-ten Grades und $(n-1)$-ter Ordnung, welche aus einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit der unabhängigen Veränderlichen x und der abhängigen Variable y durch die bekannte Transformation

$$y = e^{\int z dx}$$

hervorgehen. Zwischen $2n$ Partikularintegralen derselben besteht eine einfache Determinantenbeziehung, die leicht in eine solche zwischen den anharmonischen Verhältnissen der Partikularlösungen umgewandelt werden kann. Daraus folgt, daß das allgemeine Integral bekannt ist, wenn man $2n-1$ Partikularintegrale kennt; die Gleichung, von der das allgemeine Integral abhängt, ist in den willkürlichen Konstanten linear und aus anharmonischen Verhältnissen gebildet. Daher führt eine linear gebrochene Substitution der abhängigen Variable die betrachtete Differentialgleichung in eine derselben Art über. Für $n = 2$ ergibt sich die Riccatische Differentialgleichung. — Die Resultate des Verf. sind nicht neu; vgl. Koenigsberger, Allgemeine Untersuchungen aus der

Theorie der Differentialgleichungen (Teubner, Leipzig 1882), S. 99 u. Math. Ann. **30**; Wallenberg, Über Riccatische Differentialgleichungen höherer Ordnung, J. für Math. **121**, 196-199; **130**, 80. Wbg.

R. Garnier. Sur la rationalisation des coefficients d'une équation différentielle algébrique. S. M. F. Bull. **41**, 146-148.

Es sei vorgelegt eine Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(1) \qquad y''' = R(y'', y', y; x),$$

wo R rational in y'' und y', algebraisch in y, analytisch in x ist, und deren allgemeines Integral feste Verzweigungspunkte besitzt. Verf. zeigt, daß man immer eine algebraische Relation

$$(2) \qquad f(y, z; x) = 0$$

derart finden kann, daß die Koeffizienten der rationalen Funktion R von y'' und y' in y und z rational sind, und daß die durch (2) definierte Funktion $z(x)$, in welcher man y durch das allgemeine Integral von (1) ersetzt hat, ebenfalls feste Verzweigungspunkte besitzt. Wbg.

P. Boutroux. Recherches sur les transcendantes de M. Painlevé et l'étude asymptotique des équations différentielles du second ordre. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **30**, 255-375.

Painlevé hat bekanntlich die Typen der Differentialgleichungen zweiter Ordnung $y'' = R(y', y, x)$ (R rational in y', algebraisch in y und analytisch in x) angegeben, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen oder insbesondere eindeutige Funktionen sind; die von ihm aufgestellte Tabelle ist in einem wesentlichen Punkte von Gambier vervollständigt worden. Der erste Typus z. B. lautet $y'' = 6y^2 - 6x$; das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist eine eindeutige Funktion von x und definiert eine wesentlich neue Transzendente. In der vorliegenden umfangreichen Arbeit beschäftigt Verf. sich eingehend mit diesen Transzendenten und kommt zu dem folgenden Resultat: Wenn man die Painlevéschen Transzendenten transformiert, indem man $y = x^m Y$, $X = x^l$ setzt und die Exponenten m, l in geeigneter Weise wählt, dann sind die so entstehenden Funktionen „asymptotisch" zu den doppeltperiodischen Funktionen, d. h. man kann die entfernten Gebiete der X-Ebene in Zellenbereiche teilen, in denen ein „Integralzweig" $Y(X)$ jeden vorgegebenen Wert nur eine endliche (gegebene) Anzahl von Malen annimmt, und die sich bei hinlänglicher Entfernung Periodenparallelogrammen beliebig annähern. Die Painlevéschen Transzendenten verhalten sich daher zu den elliptischen Funktionen ähnlich wie die meromorphen Besselschen Funktionen zu den Kreisfunktionen. — Zum Zweck der Untersuchung führt Verf. in die von ihm betrachteten Painlevéschen Differentialgleichungen einen Parameter μ ein, den er von 0 an variieren läßt, derart, daß die so gewonnenen allgemeineren Gleichungen für $\mu = 0$ in die Differentialgleichung zweiter Ordnung der elliptischen Funktionen, für $\mu = 1$ in die Painlevéschen Differentialgleichungen übergehen. Für die Entwicklungen im einzelnen, deren Wiedergabe auf dem hier

zur Verfügung stehenden Raume unmöglich ist, muß auf die von der Pariser Akademie der Wissenschaften preisgekrönte Arbeit selber verwiesen werden.

Wbg.

P. Boutroux. Le problème de l'intégration des équations différentielles. S. M. F. C. R. 1913, 44-46.

„Wenn man es mit Integralen $f(x)$ zu tun hat, die Funktionen mit unendlich vielen Zweigen sind, so wird die von Painlevé gegebene allgemeine Definition der Integration der Differentialgleichungen vielleicht als nicht ausreichend erscheinen. Wenn ich jedoch ein Mittel liefere, einen angenäherten Wert eines beliebigen Zweiges von $f(x)$ für einen beliebigen Wert von x zu berechnen und außerdem alle Zweige zu bestimmen, die zu einem und demselben Integrale gehören, wenn die Formen der von mir gebrauchten analytischen Darstellung alle singulären Punkte von $f(x)$ hervortreten lassen und annähernd ihren Platz feststellen, den Mechanismus des Überganges dieser Zweige ineinander bloßlegen, schließlich nach dem Ausdruck von Painlevé die Rolle der Anfangsbedingungen angeben, so glaube ich wohl im Rechte zu sein, die Integrale als bekannt anzusehen.“ Die beiden Aufgaben: I. Untersuchung der Integralzweige, II. Erkennung der Zweige, die einem und demselben Integral angehören, werden in der Note besprochen. Lp.

H. Dulac. Sur une forme de l'intégrale générale d'une équation différentielle dans le voisinage de certaines valeurs singulières. Darboux Bull. (2) **37**, 186-192, 215-223.

Es sei vorgelegt die Differentialgleichung

$$(1) \qquad (px + \cdots)dy + (qy + \cdots)dx = 0$$

(nur die Glieder niedrigster Dimension stehen da),

wo p und q positive ganze Zahlen und die Koeffizienten von dx und dy Polynome oder ganze Potenzreihen in y und x sind; die zugehörige partielle Differentialgleichung lautet:

$$(2) \qquad (px + \cdots)F'_x - (qy + \cdots)F'_y = 0.$$

Man kann in einem besonderen Falle (dem Falle eines „Mittelpunktes“) die Gleichung (2) durch eine Entwicklung von der Form

$$(3) \qquad F \equiv x^q y^p + \cdots$$

erfüllen. Diese Funktion F läßt sich überdies in diesem Falle stets in die Form $F \equiv A^q B^p$ setzen, wo $A = y\,x + \cdots, B = y + \cdots$ ist. Im allgemeinen ist es dagegen unmöglich, eine Lösung von der Form (3) für die Gleichung (2) zu bestimmen. Verf. zeigt nun in der vorliegenden Arbeit, daß man in allen Fällen eine Lösung von der Form

$$(4) \qquad F \equiv \frac{A^{rq} B^{rp}}{1 + C + A^{rq} B^{rp} \log A^a B^b}$$

finden kann, wo r eine ganze Zahl ist, a und b bestimmte Konstanten sind, A und B Reihen der oben angegebenen Form sind; C ist eine ganze Potenzreihe in x und y ohne konstantes Glied. Die Reihen A und B können immer für hinreichend kleine $|x|$ und $|y|$ als konvergent angenommen werden; dagegen kann die Reihe C divergent sein, wie Verf. an einem Beispiel zeigt. — In dem Falle, wo C konvergent ist, beweist Verf. mittels des Integrals (4), das vor allen bisher bekannten Integralformen den Vorzug der größten Einfachheit und der weitesten Geltung besitzt, folgendes Theorem: „Wenn man irgendeine Lösung der Gleichung (1) in der Umgebung von $x = 0, y = 0$ betrachtet, so kann man gleichzeitig x und y gegen Null konvergieren lassen." Übrigens gilt dieses Theorem in allen Fällen, wie Verf. bereits früher bewiesen hat.

Wbg.

J. Malmqvist. Sur les fonctions à un nombre fini de branches définies par les équations différentielles du premier ordre. Acta Math. **36**, 297-343.

Painlevé hat in seinen „Leçons de Stockholm" und in einer in dem Buche von P. Boutroux, „Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre" (Paris 1908) enthaltenen Note das Problem behandelt, die Eigenschaften der Integrale einer algebraischen Differentialgleichung zu untersuchen, deren sämtliche Integrale höchstens n-deutig sind. Seine Methode besteht in der Untersuchung des allgemeinen Integrals als Funktion der Anfangswerte, und er gelangt leicht zum Ziel, wenn er voraussetzt, daß jedes Integral dieselbe Anzahl von Zweigen besitzt, abgesehen von etwaigen Ausnahmeintegralen, die eine abzählbare Menge bilden. Um zu beweisen, daß die Ausnahmeintegrale wirklich eine abzählbare Menge bilden, hat er zwei verschiedene Methoden versucht, aber nur besondere Fälle betrachtet, und es hat nicht den Anschein, als ob seine Methoden die Lösung des Problems im allgemeinen Falle geben könnten.

In der vorliegenden Arbeit behandelt Verf. dasselbe Problem nach einer ganz anderen Methode, nämlich durch Anwendung der Resultate von P. Boutroux (a. a. O.) über das Anwachsen der Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung; er gelangt so nicht nur zu einer endgültigen Lösung des Painlevéschen Problems, sondern auch zu einem allgemeinen Ergebnis über die Natur gewisser singulärer Punkte.

Im ersten Abschnitt werden der Vollständigkeit halber die Resultate von Boutroux abgeleitet, während der zweite Abschnitt ihre Anwendung auf das in Rede stehende Problem enthält, wobei Verf. sich auf die Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

beschränkt, in welcher P und Q Polynome in x und y sind. Das Hauptresultat des Verf. spricht sich in den folgenden Sätzen aus:

Theorem 1. „Wenn die Differentialgleichung (1) keine Riccatische ist, so ist jedes eindeutige Integral eine rationale Funktion." (Vgl. M. Petrovitsch in É. Picard, Traité d'Analyse, 3, 356.)

Theorem 2. „Wenn die Differentialgleichung (1) sich nicht durch eine Transformation von der Form:

$$z = \frac{y^n + \alpha_2' y^{n-2} + \cdots + \alpha_n'}{y^{n-1} + \alpha_2 y^{n-2} + \cdots + \alpha_n}$$

in eine Riccatische Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = az^2 + bz + c$$

transformieren läßt, wo die Koeffizienten $a, b, \alpha_\nu, \alpha_\nu' (\nu = 2, \ldots, n)$ rationale Funktionen von x sind, so ist jedes endlich-vieldeutige Integral eine algebraische Funktion.“ Für den besonderen Fall der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = P(x, y)$ hat Verf. diesen Satz (Theorem 2′) bereits im Jahre 1912 in den Ber. d. 2. skand. Math.-Kongr., 73-79 (F. d. M. **43**, 402) bewiesen. — Zum Schluß betrachtet Verf. kurz den Fall, daß die Differentialgleichung (1) sich durch die oben angegebene Transformation in eine Riccatische Differentialgleichung transformieren läßt, und verallgemeinert dann die von ihm vorher gewonnenen Resultate derart, daß sie auch für einen Integralzweig Geltung behalten. Wbg.

W. v. Dyck. Über den Verlauf der Integralkurven einer homogenen Differentialgleichung erster Ordnung. Münch. Abhdlg. **26**, Nr. 10, 49 S.

Für die Untersuchung der durch eine homogene Differentialgleichung $f(\frac{y}{x}, y') = 0$ definierten Kurvensysteme legt Verf. die Eigenschaften der „Leitkurve“ $f(t, z) = 0$ zugrunde, die entsteht, wenn $\frac{y}{x} = t, y' = z$ als Koordinaten eines Punktes in einer (t, z)-Ebene gedeutet werden. Dieses Verfahren läßt hier, wo es sich um Kurven handelt, die in bezug auf den Nullpunkt zueinander ähnlich sind, das Verhalten derselben in der Umgebung der singulären Stelle auf die einfachste und doch als Annäherung genügend allgemeine Weise übersehen und ist auch geeignet zur Aufstellung einfachster Typen von Differentialgleichungen erster Ordnung mit vorgeschriebenen Singularitäten. Dabei läßt sich, weil sich hier die ganze Diskussion auf die Eigenschaften einer einzigen Kurve $f(t, z) = 0$ stützt, in übersichtlichster Form das Prinzip benutzen, in die Differentialgleichung geeignete Parameter einzuführen und in den so hergestellten Systemen von Differentialgleichungen auf gewisse Übergangsfälle (Auftreten geschlossener Kurvenzweige, Fälle algebraischer Integrale u. a.) zu achten, von denen ausgehend die Änderungen im Gesamtverlauf der Integralkurven sich übersehen lassen. Es ergeben sich dabei analoge, aber weit mannigfaltigere Möglichkeiten der Umgestaltung, wie sie bei Auflösung singulärer Stellen für die Gestaltänderung einer einzelnen Kurve eintreten. Vor allem können, und das ist bei den sogenannten Stabilitätsfragen von Bedeutung, von solchen Übergangsfällen aus die Zweige einer Kurve bei infinitesimaler Änderung der Parameter zum Teil in benachbarte, zum Teil aber in durchaus getrennte, den Zweigen anderer Integralkurven benachbarte Kurvenzweige übergehen. Die Einschränkung auf homogene Differentialgleichungen, die für die Betrachtung singulärer Punkte naturgemäß ist, läßt sich weiterhin durch geeignete Transformationen der Ebene (oder der zur Darstellung eines Kurvensystems

herangezogenen Flächen) aufheben. So ergeben sich u. a. auf diesem Wege einfachste Beispiele für das Auftreten von „Grenzzyklen", die im Anschluß an die im § 5 erörterten Schließungsprobleme kurz berührt werden. Um alle diese Fragen anschaulich hervortreten zu lassen, hat Verf. zahlreiche Beispiele mit ihrer graphischen Darstellung eingefügt. Zum Schluß beschreibt er einen Integraphen zur mechanischen Integration der homogenen Differentialgleichungen.

Wbg.

O. Blumenthal. Über asymptotische Integration von Differentialgleichungen mit Anwendung auf die Berechnung von Spannungen in Kugelschalen. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 319-327.

Die Aufgabe, an welche die hier in Betracht gezogene Näherungsmethode, in der Form einer asymptotischen Integration, anknüpft, ist die Lösung der gewöhnlichen, linearen und homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung

$$M'''' + a_2 M'' + a_1 M' + (b^4 + a_0)M = 0,$$

aus welcher M als Funktion von θ zu bestimmen ist, wenn die Koeffizienten die folgenden sind:

$$a_2 = -\frac{3}{2}\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{5}{2}, \; a_1 = \frac{3\cos\theta}{\sin^3\theta}, \; a_0 = -\frac{63}{16}\frac{1}{\sin^4\theta} + \frac{9}{8}\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{9}{16}.$$

Wächst bei festem $\theta > 0$ der Parameter b beliebig an, so werden die Funktionen a_0, a_1, a_2 immer mehr gegen b^4 verschwinden. Man kann daraus schließen, daß die Integrale M näherungsweise mit den Lösungen der vereinfachten Gleichung $M'''' + b^4 M = 0$ übereinstimmen. Die Theorie der asymptotischen Integration hat die Aufgabe, diesen Schluß genau zu begründen und den Fehler der Näherung abzuschätzen. Die Aufgabe wurde durch ein elastisches Problem, die Berechnung von Spannungen in Kugelschalen, geliefert.

A. K.

P. Zervos. Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés d'équations différentielles. J. für Math. **143**, 300-312.

D. Hilbert hat in seiner Arbeit „Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen" (Math. Ann. **73**, 95-108, 1912) gezeigt, daß die Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ keine „integrallose Lösung" von der Form

$$x = \varphi(t, w, w_1, \ldots, w_r), \; y = \psi(t, w, w_1, \ldots, w_r), \; z = \chi(t, w, w_1, \ldots, w_r)$$

besitzt, wo w eine willkürliche Funktion von t und w_k die k-te Ableitung von w nach t bedeutet, und hat angegeben, wie dieser Satz sich auf allgemeinere Differentialgleichungen ausdehnen läßt. Die Wichtigkeit dieses Satzes tritt besonders hervor, wenn man die allgemeine Form von n Funktionen untersucht, die durch weniger als n Differentialgleichungen miteinander verbunden sind. — In der vorliegenden Arbeit benutzt Verf. die Hilbertsche Methode, um analoge Sätze für allgemeinere Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung zu beweisen. Ferner sucht er auch andere von Hilbert in der genannten Abhandlung ausgesprochene Sätze zu verallgemeinern, welche sich

auf Gleichungen beziehen, die sich durch Einführung von Hülfsvariabeln auf unbestimmte Systeme von der Form

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; d\,x_1, dx_2, \ldots, dx_{n+1}) = 0 \; (i < n-1)$$

zurückführen lassen, wo die f_i in bezug auf $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n+1}$ homogene Funktionen sind. Für $i = n-1$ ergibt sich der von Goursat (S. M. F. Bull. 33, 1905: Sur un problème de Monge) untersuchte Fall (vgl. Zervos 146, 1081-1085, 1908; W. Groß, Math. Ann. 73, 109-172, 1912). Im zweiten Kapitel der vorliegenden Arbeit verfolgt Verf. diese Untersuchung weiter, in der Absicht, die von ihm a. a. O. gewonnenen Ergebnisse zu verallgemeinern.

Wbg.

O. Perron. Über Differentialgleichungen erster Ordnung, die nicht nach der Ableitung aufgelöst sind. Deutsche Math.-Ver. **22**, 356-368.

Ist $F(x, y, y')$ z. B. eine ganze rationale Funktion n-ten Grades von y' und zerlegt man F in Linearfaktoren:

$$F(x, y, y') \equiv (y' - f_1(x, y))\,(y' - f_2(x, y)) \ldots (y' - f_n(x, y)),$$

so wurde bisher allgemein angenommen, daß man, um alle Integrale der Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ zu erhalten, nur nötig hat, die n Gleichungen $y' = f_\nu(x, y)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ zu integrieren. Verf. zeigt an einfachen Beispielen, daß man auf diese Weise nicht notwendig alle Integrale erhält, und stellt Kriterien dafür auf, daß dies der Fall ist. Zunächst ergibt sich, daß durch jedes reguläre Linienelement $\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0\right)$ keine anderen Integralkurven von $F = 0$ gehen als die, welche auch der „aufgelösten" Gleichung $y' = f(x, y)$ genügen; insbesondere gehen durch einen Punkt, der nicht der Diskriminantenkurve angehört, keine anderen Integralkurven. Schwieriger ist die Sachlage, wenn es sich um ein singuläres Linienelement handelt. In diesem Falle kann man vermuten, daß keine weiteren Integrale existieren, wenn die Differentialgleichung in y' algebraisch und in x, y wenigstens analytisch ist. Der Beweis ist dem Verf. nur unter einigen einschränkenden Voraussetzungen gelungen, und er beschränkt sich in der vorliegenden Arbeit, um das Prinzip darzulegen, auf Gleichungen zweiten Grades, für die er zwei Kriterien aufstellt.

Wbg.

Th. de Donder. Sur un théorème de Jacobi. C. R. **156**, 440-442.

Verf. stellt ein Theorem über Integralinvarianten eines Systems von n Differentialgleichungen auf und folgert daraus einen Satz über Multiplikatoren, der den bekannten Satz von Jacobi über den „letzten Multiplikator" als besonderen Fall enthält. Auch die elegante symmetrische Form, die Appell diesem Satze für den Fall $n = 3$ gegeben hat (C. R. **54**, 1037-1040; F. d. M. **43**, 813, 1912), läßt sich mittels des vom Verf. aufgestellten Theorems verallgemeinern.

Wbg.

M. Bôcher. Applications and generalizations of the conception of adjoint systems. American M. S. Trans. **14**, 403-420.

Der äußerst fruchtbare Begriff adjungierter Paare linearer Systeme, von denen jedes aus einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung und aus n homogenen linearen Randbedingungen besteht, wurde in expliziter und allgemeiner Weise zuerst von Birkhoff (Trans. 9, 373, 1908) eingeführt. Verf. macht in der vorliegenden Arbeit eine Anwendung dieses Gedankens auf eine wichtige Frage in der Theorie der linearen Randwertprobleme, welche bisher nur in sehr speziellen Fällen behandelt worden ist (Mason, Trans. 7, 340-344, 1906: Das selbst-adjungierte System zweiter Ordnung). — Im § 1 wird der Begriff des adjungierten Systems sowie der Begriff der k-fachen Kompatibilität eines homogenen linearen Systems auseinandergesetzt, und es werden vier diesbezügliche, zum Teil bereits bekannte Hülfssätze aufgestellt. Im § 2 sind die Hauptresultate enthalten, nämlich Theorem I, in welchem aus der k-fachen Kompatibilität eines homogenen Systems die des adjungierten Systems gefolgert wird, und Theorem II, in welchem die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Lösungen eines nicht-homogenen Systems angegeben wird; diese Sätze gelten sowohl für eine komplexe als auch für eine reelle unabhängige Veränderliche. Beide Theoreme werden im einzelnen auf die Gleichung zweiter Ordnung angewandt, wobei die Beziehung zu den Ergebnissen Masons (a. a. O.) klar hervortritt. Im § 3 wird kurz die Ausdehnung auf Systeme von Gleichungen beliebiger Ordnung angegeben und ein etwas verallgemeinerter Typus einer Differentialgleichung betrachtet. Im § 4 endlich wird der Begriff des adjungierten Systems auf den Fall ausgedehnt, wo die Zahl der Randbedingungen von der Ordnung der Differentialgleichung verschieden ist.

Wbg.

S. Pincherle. Sull' operazione aggiunta di Lagrange. Annali di Mat. (3) **21**, 143-151.

Schon in früheren Arbeiten hat Verf. die zu einer gegebenen linearen Operation „adjungierte Operation" behandelt (Bologna Rend. 1898; Pincherle u. Amaldi, Le operazioni distributive, Kap. IX, Bologna 1901). In der vorliegenden Arbeit führt er diesen Begriff in etwas allgemeinerer Weise ein und gibt einige Anwendungen, insbesondere auf Integraloperationen, auf Differentialoperationen, wobei sich die bekannte „Lagrangesche Adjungierte" einer linearen Differentialform mit ihren Haupteigenschaften ergibt, sowie auf Differenzenoperationen.

Wbg.

Weitere Literatur.

M. Bôcher. An application of the concept of adjoint systems. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 507-508.

Frz. R. Berwald. Über angenäherte Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Berlin: R. Friedländer u. Sohn. 15 S.

H. J. Ettlinger. On a generalization of a Sturmian boundary problem. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 502-503.

C. E. Love. On the asymptotic solutions of linear differential equations. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 302.

C. E. LOVE. Irregular integrals of the linear differential equation of the third order. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 452.

E. MEISSNER. Über graphische Integration von totalen Differentialgleichungen. Zürich: Rascher u. Co. 8 S.

W. L. MISER. On the solutions of linear homogeneous differential equations with elliptic function coefficients. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 448-449.

R. G. D. RICHARDSON. Oscillation theorems for a system of n linear self-adjoint partial differential equations of the second order with n parameters. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 510-511.

J. SLEPIAN. On the functions of a complex variable defined by a differential equation of the first order and the first degree. Amer. Math.. Soc. Bull. (2) **19**, 505-506.

H. WACKER. Über Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typus mit einem Parameter und ihre Reduzibilität. Diss. Straßburg. 96 S. 8°.

J. YOSHIKAWA. Über eine Parametrix. Kyôto Mem. Coll. Univ. **3**, 277-280 (1912).

J. YOSHIKAWA. Miszellen aus dem Gebiete der Oszillationsaufgaben. Kyôto Mem. Coll. Univ. **4**, 97-115.

Fortsetzung der Untersuchungen in Gött. Nachr. 1910 (F. d. M. **41**, 361-363).

B. Funktionalgleichungen.

N. E. NÖRLUND. Sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies par des séries de facultés. Palermo Rend. **35**, 177-216.

In der Absicht, die Theorie der linearen Differenzengleichungen auf einen ähnlichen Grad der Vollkommenheit zu bringen, wie dies L. Fuchs für die linearen Differentialgleichungen getan hat, betrachtet Verf. folgende Form der Gleichung:

$$\sum_{i=0}^{i=k} P_i(x)\, \Delta^i_{-\omega}\, u(x) = 0; \tag{1}$$

darin ist

$$\Delta^i_\omega u(x) = \frac{u(x+i\omega) - \binom{i}{1} u(x+(i-1)\omega) + \cdots + (-1)^i u(x)}{\omega^i},$$

wo ω eine beliebige komplexe Zahl bedeutet. Die Koeffizienten $P_i(x)$ sind solche Funktionen, daß die $x^{-i}\, P_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ in Fakultätenreihen von der Form

$$a_{i_0} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s!\, a_{i_{s+1}}}{x(x+\omega)\cdots(x+s\omega)} \quad (a_{k_0} \neq 0)$$

entwickelt werden können. (Kap. I bringt das Notwendigste über Fakultätenreihen.) Es existiert ein Fundamentalsystem von Lösungen, welche sich durch Entwicklungen von der Form

$$(2)\quad u_i(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\varrho}\left(\varphi_0(x)+\varphi_1(x)\log\left(\frac{1}{x}\right)+\cdots+\varphi_n(x)\log^n\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

darstellen lassen; darin sind $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ Fakultätenreihen, die in einer gewissen Halbebene $\Re\left(\frac{x}{\omega}\right) >$ const. konvergieren, während die Zahl ϱ durch eine „determinierende Gleichung" bestimmt wird (Kap. II). Diese Differenzengleichungen sind die einfachsten ihrer Art und bilden eine wohlbestimmte Klasse; in der Tat beweist Verf. im Kap. IV, daß die Differenzengleichungen (1) die allgemeinsten sind, welche Lösungen von der Form (2) besitzen. Wenn ω gegen Null konvergiert, geht die Differenzengleichung (1) in eine Differentialgleichung derselben Ordnung über, für die $x=\infty$ ein regulärer singulärer Punkt ist. — Der Ausdruck (2) stellt $u_i(x)$ nur in einem Teil seines Existenzbereiches dar; Verf. zeigt im Kap. III, wie man $u_i(x)$ analytisch fortsetzen kann. Wird $P_k(x)=1$ vorausgesetzt, und sind $\beta_1, \beta_2, \ldots$ die singulären Punkte der übrigen Koeffizienten $P_0(x), \ldots, P_{k-1}(x)$, so ergibt sich, daß die Lösungen $u_i(x)$ keine anderen singulären Punkte besitzen als die Punkte

$$\beta_i - s\omega\ (i=1,2,3,\ldots;\ s=k, k+1, k+2, \ldots),$$

in deren Umgebung sie sich wie rationale Funktionen der Koeffizienten $P_i(x)$ verhalten. Dazu tritt noch der Punkt $x=\infty$, dessen Singularität von komplizierterer Natur ist; im Kap. V wird das Verhalten der Lösungen $u_i(x)$ im Unendlichen eingehend untersucht. Im Kap. VI werden einige Beispiele behandelt. — Als Hülfsmittel der Untersuchung benutzt Verf. einerseits gewisse Sätze über Fakultätenreihen, die von Jensen, Nielsen, Pincherle, Landau und ihm selbst aufgestellt worden sind, anderseits einige Kunstgriffe, wie sie L. Fuchs und Frobenius bei der Untersuchung der Lösungen linearer Differentialgleichungen benutzt haben, insbesondere den Gedanken von Frobenius, die oben erwähnte Zahl ϱ als Hülfsvariable einzuführen. — Ein Auszug der vorliegenden Arbeit erschien in den C. R. **149**, 841-843 (F. d. M. **40**, 387, 1909). Wbg.

N. E. Nörlund. Sur les équations linéaires aux différences finies. C. R. **156**, 51-54.

Verf. betrachtet eine lineare Differenzengleichung von der Form

$$(1)\qquad \Sigma\, P_i(x)\, u(x+i)=0 \quad (i=0,1,2,\ldots,n),$$

wo die $P_i(x)$ Polynome sind, und zwar $P_0(x)$ und $P_n(x)$ von gleichem Grade p, der von den anderen Koeffizienten nicht überschritten wird. Es existiert ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (1) von der Form

$$(2)\qquad u(x)=\int t^{x-1}\nu(t)\,dt,$$

wo $\nu(t)$ eine Lösung einer linearen Differentialgleichung p-ter Ordnung ist und

das Integral auf geeignetem Wege erstreckt wird. In einer früheren Note (C. R. **155**, 1485-1487, 1912) hat Verf. für einen besonderen Fall der Gleichung (1) durch gliedweise Integration in (2) die Lösungen in konvergente Fakultätenreihen entwickelt. In dem allgemeinen Falle werden diese Reihen divergent; sie genügen formell der Gleichung (1) und stellen die Lösungen asymptotisch dar; sie können aber durch eine Transformation, die in den Untersuchungen von Mittag-Leffler (Acta Math. **29**, 101-182; F. d. M. **35**, 469, 1905) eine große Rolle spielt, konvergent gemacht werden. Durch geeignete Wahl eines anderen Integrationsweges ergibt sich ein zweites Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (1), gültig in einer linken Halbebene, während das erstere in einer rechten Halbebene gilt. Für beide Systeme wird das Verhalten im Unendlichen in ihren entsprechenden Halbebenen ermittelt. Zwischen den beiden Fundamentalsystemen bestehen Beziehungen, die äußerst wichtig sind und für die linearen Differenzengleichungen dieselbe Rolle spielen wie die Monodromiegruppe für die linearen Differentialgleichungen. Durch diese Beziehungen, in Verbindung mit den obigen Untersuchungen, ist nunmehr das Verhalten der Lösungen von (1) im Unendlichen in der ganzen Ebene bestimmt. Wbg.

N. E. Nörlund. Sur une classe d'intégrales définies. Journ. de Math. (6) **9**, 77-88.

Verf. betrachtet zwei Klassen von Differenzengleichungen, welche der Pochhammerschen Differentialgleichung (J. für Math. **71**, 317, 1870; Jordan, Cours d'Analyse [Paris 1896], t. III, 240) analog sind, und bildet Fundamentalsysteme von Lösungen derselben, die sich durch gewisse bestimmte Integrale, erstreckt über Produkte von Gammafunktionen, darstellen lassen.

Wbg.

N. E. Nörlund. Sur le problème de Riemann dans la théorie des équations aux différences finies. C. R. **156**, 200-203.

Ähnlich wie Riemann die Integrale der Gaußschen Differentialgleichung untersucht Verf. eine Klasse von Funktionen, die er durch vier charakteristische Eigenschaften bestimmt; sie lassen sich durch hypergeometrische Fakultätenreihen darstellen und genügen einer linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung, deren Grenzfall die Gaußsche Gleichung ist. Wbg.

G. D. Birkhoff. The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations. American Acad. Proc. **49**, 521-568; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 508-509.

Riemann hat bekanntlich zuerst die Forderung aufgestellt, eine Funktion durch einfache deskriptive Eigenschaften ohne Benutzung von Definitionsgleichungen zu charakterisieren, und die Formulierung einer solchen Funktions-

bestimmung für die algebraischen Funktionen und die durch lineare Differentialgleichungen ohne irreguläre singuläre Punkte definierten Funktionen durchgeführt. In beiden Fällen schließt die Funktionsbestimmung eine Anzahl charakteristischer Konstanten ein, und Riemann hat auch das nach ihm benannte Problem aufgestellt, diese Konstanten willkürlich zu wählen. Verf. hat seit einigen Jahren entdeckt, daß das von Riemann aufgestellte Programm nach mehreren Richtungen einer Erweiterung fähig ist, und löst in der vorliegenden Arbeit das verallgemeinerte Riemannsche Problem für lineare Differentialgleichungen mit irregulären singulären Punkten, für lineare Differenzengleichungen und für lineare q-Differenzengleichungen. Die vom Verf. angewandte Methode ist die der sukzessiven Näherungen. Vgl. Birkhoff, American M. S. Trans. **10**, 436-470, 1909; **12**, 243-284, 1911; Nörlund, Mém. de l'Acad. R. d. Sc. de Danemark (7) **6**, 309-326, 1911; C. R. **156**, 200-203, 1913, Referat vorstehend. Wbg.

Th. Erb. Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differenzengleichungen durch Potenzreihen. Diss. Univ. München 1913, 58 S.

Auf Grund der Untersuchungen von Poincaré (American J. **7**, 213 ff., 1885) hat J. Horn (J. für Math. **138**, 159-191, 1910) für die Lösungen einer homogenen linearen Differenzengleichung

$$y_{x+n} + x^k p_x^{(1)} y_{x+n-1} + x^{2k} p_x^{(2)} y_{x+n-2} + \cdots + x^{nk} p_x^{(n)} y_x = 0,$$

deren Koeffizienten

$$p_x^{(\lambda)} = a_0^{(\lambda)} + \frac{a_1^{(\lambda)}}{x} + \frac{a_2^{(\lambda)}}{x^2} + \cdots \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

konvergente oder asymptotische Potenzreihen von $1/x$ sind, im allgemeinen (abgesehen von einem Faktor) asymptotische, nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihen aufgestellt. Durch eine Arbeit von O. Perron (Acta Math. **34**, 109-137, 1911) angeregt, verallgemeinert Verf. die Entwicklungen von Horn dahin, daß er die eine arithmetische Progression bildenden Zahlen $k, 2k, \ldots, nk$ durch beliebige Zahlen ersetzt und die Koeffizienten $p_x^{(\lambda)}$ nach gebrochenen Potenzen von $1/x$ fortschreiten läßt. In den §§ 1—3 wird gezeigt, daß die so verallgemeinerte Differenzengleichung, abgesehen von einem Faktor, durch Reihen, die nach gebrochenen Potenzen von $1/x$ fortschreiten, formal befriedigt wird; in den §§ 4—10 wird dann bewiesen, daß die Differenzengleichung ein Fundamentalsystem von n Lösungen besitzt, die sich durch diese Reihen asymptotisch darstellen lassen. (Vgl. Nörlund, Diss. Kopenhagen 1910 u. Acta Math. **34**, 1-108, 1911). Wbg.

K. P. Williams. The solutions of non-homogeneous linear difference equations and their asymptotic form. American M. S. Trans. **14**, 209-240.

Verf. beweist die Existenz gewisser Hauptlösungen eines Systems nichthomogener linearer Differenzengleichungen, welches ohne Beschränkung der Allgemeinheit in folgender Form geschrieben werden kann:

$$(1)\quad \begin{cases} g_i(x+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) g_j(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ g_n(x+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(x) g_j(x) + b(x+1), \end{cases}$$

und gibt ihre asymptotischen Reihenentwicklungen an. Die Funktionen $a_{ij}(x)$ und $b(x)$ werden rational vorausgesetzt mit Polen im Unendlichen, deren Ordnung höchstens μ, bzw. ν ist. Die vom Verf. angewandte Methode ist die der Variation der „Konstanten" (s. Wallenberg u. Guldberg, Theorie der linearen Differenzengleichungen. Leipzig u. Berlin, 87 ff., 1911).

Im § 1 werden die fundamentalen Existenztheoreme von Birkhoff (Trans. **12**, 243-284, 1911) für ein homogenes System angegeben. Im § 2 wird das Problem auf die Betrachtung einer einfachen nichthomogenen linearen Differenzengleichung erster Ordnung zurückgeführt, von welcher zunächst 4 formale Lösungen aufgestellt werden: zwei direkte „Summen" („nach rechts" und „nach links") und zwei Formen des von Carmichael (Trans. **12**, 99-134, 1911) modifizierten Guichardschen Konturenintegrals, das eine nach rechts und das andere nach links erstreckt. Im § 3 wird unter der Voraussetzung $\mu > 0$ eine direkte Summation nach rechts dazu benutzt, eine erste Hauptlösung von (1) abzuleiten: $g_{11}(x), g_{21}(x), \ldots, g_{n1}(x)$. Diese Lösung ist in der ganzen endlichen Ebene analytisch mit Ausnahme von Polen in bestimmten Punkten in der Nähe der negativen reellen Achse. Im § 4 wird gezeigt, daß in der rechten Halbebene diese Lösung asymptotisch durch die dem System (1) formal genügende Reihe dargestellt wird. Im § 5 wird bewiesen, daß die im § 3 benutzte formale Lösung des Systems (1) von dem Fundamentalsystem von Lösungen des entsprechenden homogenen Systems, das zu ihrer Bestimmung dient, unabhängig ist, und dieser Umstand wird im § 6 dazu benutzt, die asymptotische Form der ersten Lösung in der linken Halbebene zu bestimmen. Eine Summation mittels eines nach links erstreckten Konturenintegrals wird im § 7 angewandt, um eine zweite Hauptlösung $g_{12}(x), g_{22}(x), \ldots, g_{n2}(x)$ zu bestimmen, welche mit Ausnahme von Polen in bestimmten Punkten in der Nähe der positiven reellen Achse analytisch ist; diese Lösung wird durch die formale Reihe in der linken Halbebene asymptotisch dargestellt. Im § 8 wird die zwischen den beiden Hauptlösungen bestehende Relation aufgestellt. Im § 9 wird gezeigt, daß im Falle $\mu < 0$ dieselbe Theorie gilt, nur daß die rechte und linke Halbebene ihre Rollen vertauschen. Ähnliche Resultate werden im § 10 für den Grenzfall $\mu = 0$ bewiesen mit Ausnahme gewisser extremer Fälle. Im § 11 endlich wird eine Anwendung der allgemeinen Theorie auf eine einzelne nichthomogene lineare Differenzengleichung n-ter Ordnung gemacht. Wbg.

P. Lévy. Sur l'intégration des équations aux dérivées fonctionnelles partielles. C. R. **156**, 1515-1517, 1658-1660.

In der ersten Note definiert Verf. die Begriffe der „partiellen funktionalen Ableitungen" und der „gewöhnlichen funktionalen Ableitung" einer „Funktionale" Φ, welche von einer geschlossenen ebenen Kurve C und einer Funktion $u(s)$ der Bogenlänge s, bzw. von C oder u allein abhängt, und betrachtet die Gleichung mit partiellen funktionalen Ableitungen erster Ordnung:

$$(1) \qquad \Phi'_n(s) = F \,|\, (C, u, \Phi'_u; \Phi, s) \,|.$$

Mittels des Begriffes der „Adjungierten" einer linearen Funktionale stellt er die notwendige und hinreichende Bedingung für die vollständige Integrabilität der Gleichung (1) auf. Sodann werden die „Charakteristiken erster Art" einer Gleichung (1) definiert; auf diese lassen sich die Hauptsätze von Cauchy über Charakteristiken ausdehnen. Es ergibt sich, daß die Integration einer vollständig integrablen Gleichung (1) sich auf die eines Systems von Gleichungen mit gewöhnlichen funktionalen Ableitungen zurückführen läßt. — In der zweiten Note wird das „vollständige Integral" der Gleichung (1) und mittels des Begriffes der „Enveloppe" auch das „singuläre Integral" und das „allgemeine Integral" definiert. Den Schluß bilden Anwendungen. Wbg.

F. Schürer. Über eine lineare Funktionaldifferentialgleichung. Leipz. Ber. **65**, 139-143.

Verf. betrachtet die Funktionaldifferentialgleichung

$$(1) \quad c_0 f(x) + c_1 f'(x) + c_2 f''(x) + \cdots + c_n f^{(n)}(x) = f(x-1),$$

wo $c_n \neq 0$ und $n \geqq 1$ ist; die c mögen reell sein. Die Gleichung (1) soll für alle endlichen reellen x gelten, und als Lösungen sollen nur solche Funktionen betrachtet werden, die für alle endlichen reellen x eindeutig, reell, n-mal differenzierbar und samt ihren ersten $n-1$ Ableitungen endlich sind. Unter der Voraussetzung, daß die Gleichung

$$c_0 + c_1 \varrho + \cdots + c_n \varrho^n \equiv \varDelta(\varrho) = 0$$

nur reelle Wurzeln hat, gelten dann folgende Sätze:

I. Es gibt nur endlich viele linear unabhängige Lösungen der Gleichung (1), für die $\lim\limits_{x=-\infty} f(x)\, e^{-\alpha x} = 0$ ist, wo $\alpha + i\beta$ eine Wurzel der transzendenten Gleichung (2) $\varDelta(\varrho) = e^{-\varrho}$ ist.

II. Jede Lösung von (1), für die $\lim\limits_{x=-\infty} f(x)\, e^{-\alpha x} = 0$, ist ein lineares Aggregat der Lösungen $e^{\varrho x}, x e^{\varrho' x}, x^2 e^{\varrho'' x}, \ldots,$ wo ϱ alle mindestens einfachen, ϱ' alle mindestens zweifachen usw. Wurzeln der Gleichung (2) durchläuft, deren Realteil algebraisch größer als α ist.

III. Die Anzahl der in irgendeinem Intervall von der Länge 1 gelegenen Nullstellen jeder Lösung $f(x)$ von (1), für die $\lim\limits_{x=-\infty} f(x)\, e^{-\alpha x} = 0$ ist, liegt unterhalb einer nur von n und der Wurzel $\alpha + i\beta$ abhängigen Grenze. Der Beweis dieser Sätze, den Verf. ganz im Reellen führen kann, wird in der vorliegenden Arbeit nur in großen Zügen angegeben und soll in einer späteren Abhandlung ausführlich dargestellt werden. — Vgl. die Arbeiten von Erh. Schmidt (Math. Ann. **70**, 499-524, 1911, insbes. S. 503) und dem Verf. (Leipz. Ber. **64**, 167-236; F. d. M. **43**, 416 ff., 1912). Wbg.

F. Schürer. Bemerkungen zu meiner Arbeit „Über die Funktionaldifferentialgleichung $f'(x+1) = a f(x)$". Leipz. Ber. **65**, 239-246.

In der im Titel genannten Arbeit des Verf. (Leipz. Ber. **64**, 167-236; F. d. M. **43**, 416, 1912) sind einige Druckfehler unbemerkt geblieben. Auch weist die Arbeit noch andere Versehen auf, die allerdings die Resultate nicht beeinträchtigen. Diese beiden Mängel werden in der vorliegenden Arbeit berichtigt. Dann werden noch Erweiterungen zweier Sätze der genannten Arbeit angegeben, die sich nach den dort angewandten Beweismethoden leicht finden lassen.

Wbg.

F. Schürer. Über Analogien zwischen den Lösungen der Gleichung $f'(x+1) = af(x)$ und den ganzen Funktionen komplexer Veränderlicher. Leipz. Ber. **65**, 247-263.

Während seiner Untersuchungen über die Gleichung $f'(x+1) = af(x)$ (Leip. Ber. **64**, 167-236; **65**, 1913, 239-246, s. d. vorang. Referat) ist dem Verf. aufgefallen, daß die meisten Sätze über Lösungen dieser Gleichung eine Analogie mit Sätzen über ganze Funktionen einer komplexen Veränderlichen aufweisen. Diese Analogien werden in der vorliegenden Arbeit auseinandergesetzt. Dabei gelangt Verf. zu dem folgenden neuen Satze: „Gibt es in der Ebene der komplexen Variable z Kreise um den Punkt $z = 0$ von beliebig großem Radius, auf denen der Realteil (oder Imaginärteil) einer g a n z e n Funktion von z dieselbe Anzahl, z. B. $2n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) Zeichenwechselstellen hat, so ist die ganze Funktion eine ganze rationale Funktion n-ten Grades von z.“ Wbg.

C. B. Hennel. Transformations and invariants connected with linear homogeneous difference equations and other functional equations. American J. **35**, 431-452; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **10**, 299.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, hauptsächlich für die Differenzengleichungen (Teil I) und auch für einen allgemeinen Typus von Funktionalgleichungen (Teil II) die Frage nach den Funktionen zu diskutieren, die für einen gewissen Typus von Transformationen ungeändert bleiben. Die Resultate nehmen eine sehr einfache und elegante Form an. — Im § 1 wird gezeigt, daß die allgemeinste Punkttransformation, welche eine homogene lineare Differenzengleichung in eine ebensolche derselben Ordnung überführt, von der Form $x = u(\xi), y = \lambda(\xi)\eta_\xi$ ist, wo $u(\xi)$ einer der beiden Relationen $u(\xi+1) - u(\xi) = \pm 1$ genügt. Im § 2 wird der Gruppencharakter dieser Transformationen und die Existenz einer Untergruppe, die $+1$ entspricht, nachgewiesen. Im § 3 werden einige im folgenden gebrauchte Definitionen aus der Invariantentheorie gegeben. In den §§ 4—7 werden gewisse Fundamentalsysteme von Seminvarianten, Invarianten, Semikovarianten und Kovarianten bestimmt. In den §§ 8—9 wird ein allgemeiner Typus von Funktionalgleichungen angegeben, auf den die vorhergehenden Untersuchungen ausgedehnt werden können. Im § 8 wird die allgemeinste Punkttransformation bestimmt, welche eine homogene lineare Funktionalgleichung von dem betrachteten Typus in eine andere von demselben Typus und derselben Ordnung überführt, und der Gruppencharakter dieser Transformationen sowie die Existenz einer Untergruppe nachgewiesen. Im § 9 werden Fundamentalsysteme von Seminvarianten, Invarianten, Semikovarianten und Kovarianten bestimmt. Wbg.

A. E. Jolliffe and S. T. Shovelton. The application of the calculus of finite differences to certain trigonometrical series. Lond. M. S. Proc. (2) **13**, 29-42.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, die bekannten Entwicklungen von $\cos m\theta$, $\frac{\sin m\theta}{\cos\theta}$, $\sin m\theta$ und $\frac{\cos m\theta}{\cos\theta}$ in Reihen, die nach Potenzen von $\sin\theta$ ansteigen, aus zwei zentralen Differenzenformeln abzuleiten. Die Untersuchung der Reste führt zu interessanten Beweisen für die Entwicklungen von $\sin x$ und $\cos x$ in unendliche Produkte. Die Methode der Verf. ist der von W. F. Sheppard (Lond. M. S. Proc. (1) **31**, 453 u. 469; F. d. M. **31**, 273, 1900) entgegengesetzt, bei welcher die Differenzenformeln aus den Entwicklungen von $\sinh n\varphi$ und $\cosh n\varphi$ nach Potenzen von $\sinh\varphi$ abgeleitet werden. Zum Schluß wird gezeigt, daß man die obigen Reihen auch ohne die Theorie der Differenzen erhalten kann, indem man die Reste in Integralform schreibt und die Reduktionsformeln aufstellt. Wbg.

P. Stäckel. Sulla equazione funzionale

$f(x+y)=\sum_{i=1}^{n} X_i(x)\,Y_i(y)$. Rom. Acc. L. Rend. $\mathbf{22}_2$, 392-393.

Verf. gibt eine neue, sehr einfache Ableitung der eleganten, von Levi-Civita (Rom. Acc. L. Rend. $\mathbf{22}_2$, 181-183, 1913; Ref.: Abschn. VII, Kap. 1) gefundenen Lösung der im Titel angegebenen Funktionalgleichung, welche übrigens bereits von C. Stéphanos (Math.-Kongr. Heidelberg 1904, 200; Palermo Rend. **18**, 360-362; F. d. M. **35**, 391, 1904) behandelt worden ist. Wbg.

O. Sudô. On some classes of functional equations. Tôhoku Math. J. **3**, 47-61.

Verf. behandelt einige Beispiele von Funktionalgleichungen mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen, welche leicht unter den gewöhnlichen Bedingungen gelöst werden können, nämlich unter der Voraussetzung der Eindeutigkeit, Stetigkeit, Differenzierbarkeit usw. der in den Gleichungen auftretenden Funktionen. Wbg.

T. Hayashi. On solution of functional equations. Tôhoku Math. J. **3**, 62-63.

Verf. stellt einen allgemeinen Satz über die Lösung einer Funktionalgleichung für eine unbekannte Funktion einer unabhängigen Veränderlichen auf, welcher besagt, daß man unter gewissen Voraussetzungen über die Form der Funktionalgleichung aus einer Lösung, die den gewöhnlichen Bedingungen der Stetigkeit, Differenzierbarkeit usw. genügt, die allgemeinste stetige Lösung erhält, indem man die unabhängige Veränderliche mit einem konstanten Faktor multipliziert. Wbg.

G. Giraud. Sur certaines équations fonctionnelles, et sur les transformations permutables. C. R. **156**, 197-200.

Verf. behandelt eine Verallgemeinerung der in der Note C. R. **156**, 49-51 (Ref. Abschn. VII, Kap. 1) betrachteten Funktionalgleichungen und gibt außerdem eine Eigenschaft dieser Gleichungen an, die sich auf die untereinander vertauschbaren Transformationen bezieht, sowie eine Folgerung für diese Transformationen selber. Wbg.

R. D. Carmichael. Linear mixed equations and their analytic solutions. American J. **35**, 151-162.

Verf. betrachtet das System gemischter Gleichungen

$$D_i f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \psi_{ij}(x) f_j(x) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

wo $\psi_{ij} = \psi'_{ij} x^{-2} + \psi''_{ij} x^{-3} + \cdots$ für $|x| \geqq R$ konvergiert und das Symbol D_i für $i = 1, \ldots, k$ Differentiation nach x bedeutet, für $i = k + 1, \ldots, n$ mit dem Symbol Δ der Differenzenrechnung identisch ist. Im Teil I werden zwei formale Entwicklungen aufgestellt, welche willkürliche Konstanten und willkürliche periodische Funktionen enthalten und beide formal dem gegebenen System gemischter Gleichungen genügen. Im Teil II beweist Verf. die Konvergenz der formalen Entwicklungen in passend bestimmten Gebieten und erhält fundamentale Existenztheoreme in zwei Formen, wodurch eine bemerkenswerte Dualität in den Lösungen gemischter Gleichungen zutage tritt. In einer kurzen Anmerkung wird eine Methode zur Anwendung dieser Resultate auf eine einzelne Gleichung höherer als der ersten Ordnung angegeben. Teil III enthält eine Anwendung der vorhergehenden Theoreme auf ein System von Differenzengleichungen: es ergeben sich zwei Fundamentalsysteme von Lösungen. Im Teil IV deckt Verf. einen wesentlichen Unterschied zwischen gemischten und Differential- sowie Differenzengleichungen auf, der sich aus der bemerkenswerten Art ergibt, in welcher die willkürlichen Elemente in die Lösung der gemischten Gleichungen eingehen. Wbg.

R. D. Carmichael. On the theory of linear difference equations. American J. **35**, 163-182.

Im ersten Teile der vorliegenden Arbeit gibt Verf. einen neuen direkten Beweis des bekannten Satzes von Guichard, daß die lineare Differenzengleichung erster Ordnung $u(x+1) - u(x) = G(x)$, wo $G(x)$ eine ganze Funktion ist, eine ganze Funktion als Partikularlösung besitzt. Zu diesem Zweck wird in § 1 für $u(x)$ eine Potenzreihe angesetzt und direkt in die obige Gleichung substituiert: dann ergibt sich für die Bestimmung der Koeffizienten der Reihe ein unendliches System linearer Gleichungen, welches durch eine bemerkenswerte Methode mittels Cauchy scher Konturenintegrale derart gelöst wird, daß die entsprechende Potenzreihe in der ganzen endlichen Ebene konvergiert. Im § 2 werden die Eigenschaften von $u(x)$ bestimmt, falls $G(x)$ außerhalb eines gegebenen Kreises mit etwaiger Ausnahme des Unendlichen analytisch ist; in § 3 und § 4, falls $G(x)$ innerhalb eines Kreises oder eines Kreisringes analytisch

ist. — Im zweiten Teile zeigt Verf. mit Benutzung einer früheren Arbeit (Americ. M. S. Trans. **12**, 99-134, 1911), daß eine homogene lineare Differenzengleichung n-ter Ordnung, deren Koeffizienten Polynome sind und die „von einfachem Charakter" ist (d. h. die Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichung sind voneinander und von Null verschieden), ein Fundamentalsystem von Lösungen besitzt, die ganze Funktionen sind. Im dritten Teile beweist Verf. für nichthomogene Gleichungen folgenden Satz: „Ist

$$P_0(x) H(x+n) + P_1(x) H(x+n-1) + \cdots + P_n(x) H(x) = \varphi(x)$$

eine Differenzengleichung von einfachem Charakter, deren Koeffizienten Polynome sind, während $\varphi(x)$ in der ganzen endlichen Ebene mit Ausnahme von Polen analytisch ist, so kann ihre allgemeine Lösung $H(x)$ in der Form

$$H(x) = M(x) + p_1(x) E_1(x) + \cdots + p_n(x) E_n(x)$$

geschrieben werden, wo $E_1(x), \ldots, E_n(x)$ ganze Funktionen, $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ willkürliche periodische Funktionen von der Periode 1 sind und $M(x)$ in der endlichen Ebene mit Ausnahme von Polen analytisch ist." Ist $\varphi(x)$ eine ganze Funktion und entweder $P_0(x) = 1$ oder $P_n(x) = 1$, so ist auch $M(x)$ eine ganze Funktion.

Wbg.

H. Bateman. Some equations of mixed differences occurring in the theory of probability and the related expansions in series of Bessel's functions. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 291-294.

Gemischte Differential- und Differenzengleichungen wurden wohl zuerst bei dem Studium der Saitenschwingungen in Betracht gezogen. Im besonderen wurde die Gleichung

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = k^2(u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n)$$

bei Hinzunahme gewisser Nebenbedingungen mit Hülfe partikularer Lösungen von der Form $u_n = f(n)\, e^{ipt}$ zu lösen gesucht; hier werden partikulare Lösungen von der Form $u_n(t) = I_{2(n-m)}(2kt)$ benutzt, und dies ist in vielen Fällen weit zweckmäßiger. Für die Gleichung

$$\frac{dF_n}{dx} = \frac{1}{2}\left[F_{n-1}(x) + F_{n+1}(x) - 2F_n(x)\right]$$

wird die partikulare Lösung $\frac{1}{i^n} I_n(ix)$ benutzt, und es werden Anwendungen auf einzelne in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommende Probleme gegeben.

A. K.

N. Nielsen. Recherches sur les nombres de Bernoulli. Danske Vidensk. Selsk. Skr. (7) **10**, 285-366.

Der Kern der in dieser tiefgehenden Studie zugrunde gelegten Methode ist im wesentlichen der folgende: Bezeichnet man mit $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ die Bernoullischen Polynome, welche den Differenzengleichungen:

$$\varphi_n(x) - \varphi_n(x-1) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

genügen, so ist das allgemeinste Polynom, welches der Differenzengleichung:

$$f(x) - f(x-1) = \sum_{s=0}^{s=n-1} a_{n,s}\, x^{n-s-1} \quad (n \geqq 1)$$

genügt, von der Form:

$$f(x) = K + \sum_{s=0}^{s=n-1} a_{n,s}(n-s-1)!\, \varphi_{n-s}(x),$$

wo K eine willkürliche Konstante ist. Bezeichnet man mit $\chi_0(x)$, $\chi_1(x)$, $\chi_2(x), \ldots$, $\chi_n(x), \ldots$ die Eulerschen Polynome, welche den Differenzengleichungen

$$\chi_n(x) + \chi_n(x-1) = \frac{x^n}{n!} \quad (n \geqq 0)$$

genügen, so ist das einzige Polynom, welches der Differenzengleichung:

$$g(x) + g(x-1) = \sum_{s=0}^{s=n} c_{n,s}\, x^{n-s}$$

genügt, das folgende:

$$g(x) = \sum_{s=0}^{s=n} c_{n,s}(n-s)!\, \chi_{n-s}(x).$$

Diese zwei Sätze werden zur Ableitung einer großen Zahl von Entwicklungen, im besonderen von linearen und nicht linearen Rekursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen verwandt, die teilweise bereits bekannt, teilweise aber neu sind. Die interessantesten Formeln sind am Schlusse in einer Tabelle (von 107 Rekursionsformeln) zusammengestellt; für die mit dem großen Fermatschen Problem zusammenhängenden Untersuchungen wird die Beachtung vieler dieser Rekursionsformeln oft bequem sein. A. K.

M. Fréchet. Pri la funkcia ekvacio $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Ens. math. **15**, 390-393.

Der Verf. scheint das Verlangen gehabt zu haben, den von ihm in Nouv. Ann. (4) **9**, 145-162 (F. d. M. **40**, 389, 1909) behandelten Gegenstand noch einmal zu behandeln und dabei zu zeigen, daß er in einer schwerer verständlichen Phantasiesprache, die als Weltsprache wohl gelten soll, Übungsstücke schreiben kann. Lp.

L. Tits. Une application de la théorie des suites récurrentes. Mathesis (4) **3**, 57-61.

Der Verf. betrachtet eine Aufgabe der linearen Rekurrenz mit konstanten Koeffizienten ohne rechte Seite der Gleichung. Dem Artikel ist eine Note von Mansion hinzugefügt (Rev. sem. $\mathbf{21}_2$, 19). Lp.

Ł. Böttcher. Zasady rachunku iteracyjnego (Grundlagen der Iterationsrechnung). Wektor **1**, 501-513 (1912).

Iterationen von Funktionen, deren Additions- und Multiplikationsprinzip sowie ihr Assoziationsprinzip. Anwendungen auf die einfachsten Funktionen, insbesondere auf die linear gebrochenen Funktionen einer Variable. A. R.

Ł. Böttcher. Przyczynek do rachunku iteracyj funkcyi algebraicznej wymiernej całkowitej (Ein Beitrag zur Berechnung der Iterationen einer ganzen rationalen algebraischen Funktion). Wiad. matemat. **16**, 201-206.

Wenn die ganze rationale Funktion $F(z)$ n-ten Grades eine ν-te iterierte Funktion p-ten Grades besitzt, wo $\nu < 1$, $n^\nu = p$ ist, dann muß diese Funktion $F_\nu(z)$ mit der Funktion $F(z)$ vertauschbar sein, sonst ist die ν-te iterierte Funktion transzendent. A. R.

J. Puzyna. Zarys teoryi równań całkowych (Grundzüge der Theorie der Integralgleichungen). Wektor **2**, 356-370.

Der Inhalt von vier Vorträgen, die der Verf. 1913 auf einem Ferienkurs für Mittelschulprofessoren in Lemberg hielt: Die Fredholmsche Gleichung für den besonderen Kern

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{n} A_i(s)\, B_i(t),$$

der lösende Kern, Eigenwerte und Eigenfunktionen in diesem Falle. Auflösung der allgemeinen Fredholmschen Gleichung für kleine Werte des Parameter λ. Die Fredholmsche Methode in dem allgemeinen Falle. A. R.

J. Puzyna. Anwendung der Integralgleichungen zur Bildung der ordinären Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung und der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Krakau Anz. (A) 1913, 1-45.

Die Arbeit geht von der Möglichkeit aus, auf den Kurven einer einfach unendlichen Schar $g(x, y, s) = 0$ einen Parameter t so einzuführen, daß längs der Transversalkurven $t =$ const irgend eine Bedingung, z. B. $dy/dx =$ const $= \varphi(s)$, erfüllt ist. Typisch für ihre Fragestellung ist dann die Aufgabe, solche Kurvenscharen zu bestimmen, die noch etwas künstlich gewählten Bedingungen genügen ($x = x(s, t)$ gegeben, $y(s, a) = \varphi(s)$). Dabei werden verwendet einige vorweg hergeleitete Sätze über „intermediäre Integralgleichungen", wie der Verf. die aus der Integralgleichung zweiter Art

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b k(st)\, \varphi(t) dt \qquad (a \leqq s \leqq b) \tag{1}$$

z. B. durch Verkleinerung des Integrationsintervalles entstehende Gleichung

$$(2) \qquad f(s, t_1) = \varphi(s) - \lambda \int_a^{t_1} k(s, t)\, \varphi(t) dt \qquad (a \leqq s \leqq b; \quad t_1 < b)$$

nennt; sie bestehen im wesentlichen in einer Aufzählung der verschiedenen Möglichkeiten, die sich hinsichtlich des Verschwindens von $f(s, t_1)$ ergeben, wenn man mit einer Lösung φ von (1) in (2) eingeht, je nachdem λ Eigenwert der einen oder der andern Gleichung ist oder nicht.

Ähnliche Entwicklungen folgen für Scharen von ∞^2 Flächen und ∞^2 Kurven. Hng.

F. Riesz. Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Paris: Gauthier-Villars, VI + 182 S. 8°. (Collection Borel.)

Die Theorie der unendlichvielen Veränderlichen, ursprünglich ein Nebenprodukt der Theorie der Integralgleichungen, wird hier zum erstenmal zum Gegenstand einer selbständigen Monographie gemacht. Die beiden ersten ihrer sechs Kapitel sind der „vorfredholmschen" Theorie, wie man es wohl kurz bezeichnen kann, insbesondere also der Theorie der unendlichen Determinanten gewidmet; die Namen Fourier, Fürstenau, Kötteritzsch, Appell, Hill, Poincaré, von Koch charakterisieren die Stellen, an denen der Verf. verweilt, um jeweils den wesentlichen Gedanken des betreffenden Autors knapp und scharf wiederzugeben.

In den Kapiteln 3 und 4 werden die Systeme von unendlichvielen linearen Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten behandelt. Die allgemeinste Theorie, die das Minimum an Voraussetzungen heranzieht, die von E. Schmidt (Pal. Rend. **25**, 53-77; F. d. M. **39**, 401 ff., 1908), wird an die Spitze gestellt und ausführlich entwickelt. Der Satz von Toeplitz (F. d. M. 38, 156 ff., 1907) wird zuerst daraus abgeleitet; die direkten Beweise von Toeplitz und Hilb (F. d. M. **39**. 407 ff., 1908) folgen dann. An dieser Stelle vermag der Ref. mit besonderem Nachdruck zu bezeugen, daß der Verf. die Absicht des Autors in der treffendsten Weise wiederzugeben versteht; trotzdem ist es dem Verf. entgangen, daß die invertierte Jacobische Transformation, deren sich Toeplitz bedient, mit dem Orthogonalisierungsverfahren von Schmidt formal übereinstimmt. Die Hilbertsche Theorie der vollstetigen Gleichungssysteme folgt als Schlußglied dieser Entwicklungen; auf der Grundlage der Toeplitz-Hilbschen Betrachtung gibt er eine Darstellung dieser Theorie, für deren Grundidee er A. C. Dixon (Cambr. Trans. **19**, 190-233; F. d. M. **33**, 448) zitiert, und die am ehesten wohl derjenigen Entwicklung verwandt ist, die man erhält, wenn man die Theorie von E. Schmidt (Math. Ann. **64**, 161-174; F. d. M. **38**, 378, 1907) von Integralgleichungen auf unendlichviele Veränderliche analogisiert. — Die Betrachtungen des 3. Kapitels fordern von den Unbekannten übrigens nicht notwendig konvergente Quadratsumme, sondern allgemeiner Konvergenz von $\sum |x_\alpha|^p$, wo $1 < p < \infty$ (sogar die Grenzfälle $p = 1, p = \infty$ werden noch erörtert), eine Erweiterung, auf die der Verf. beträchtlichen Wert zu legen scheint, ohne ihre tiefere analytische Bedeutung näher zu motivieren.

Kapitel 5 ist der Eigenwerttheorie der reellen quadratischen Formen von

unendlichvielen Veränderlichen gewidmet, vornehmlich der Hilbertschen Theorie der Formen mit Streckenspektrum. Der Verf. hat den Gedanken seiner Note (Gött. Nachr. 1910, 190-195; F. d. M. **41**, 382) zu einer außerordentlich eleganten Herleitung der grundlegenden Integraldarstellungsformel aus Hilberts vierter Mitteilung ausgestaltet. Dann bricht er mit einer Andeutung über die Hellingerschen Differentiallösungen und die Dissertation von Hellinger die weitere Entwicklung ab, die diese Theorie in Hellingers Habilitationsschrift durch die vollständige Zerspaltung der quadratischen Formen gefunden hat (F. d. M. **40**, 393, 1909). Wegen einer unzutreffenden Anmerkung über die Zweckmäßigkeit des Hellingerschen Integralbegriffs sei übrigens auf F. d. M. **43**, 421, 1912 verwiesen.

Kapitel 6 enthält drei Anwendungen der Theorie: 1. die Anwendung der unendlichen Determinanten auf lineare Differentialgleichungen nach von Koch; 2. der Zusammenhang mit den Integralgleichungen, dem die Theorie der unendlichvielen Veränderlichen ihre Entstehung verdankt, und an dessen Vertiefung der Verf. als der eine Entdecker des Fischer-Rießschen Satzes einen erheblichen Anteil hat; 3. die neueren Untersuchungen von Carathéodory über die Fouriersche Entwicklung positiver Funktionen in derjenigen algebraischen Entwicklungsart, in der sie Toeplitz aus seiner Theorie der L-Formen gewonnen hat. T.

H. von Koch. On regular and irregular solutions of some infinite systems of linear equations. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 352-365.

Unter Voraussetzung der Konvergenz der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11}, A_{12}, \ldots \\ A_{21}, A_{22}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

hat das System von linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots &= 0, \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ganz ähnliche Eigenschaften wie endliche Systeme linearer Gleichungen einer endlichen Zahl von x, aber immer nur unter der Voraussetzung gewisser zusätzlicher Bedingungen bezüglich der Koeffizienten A_{ik}. Werden solche zusätzlichen Bedingungen, wie z. B. $|x_k| <$ endl. konst., nicht vorausgesetzt, so verschwindet die Analogie mit endlichen Systemen, und es können ganz neuartige Lösungen sich ergeben. Es wird dies an gewissen Systemen von dem Typus

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots &= c_1, \\ x_2 + a_{23}x_3 + \cdots &= c_2, \\ x_3 + \cdots &= c_3, \\ \ldots\ldots \end{aligned}$$

beleuchtet. A. K.

H. v. Koch. Über das Nichtverschwinden einer Determinante nebst Bemerkungen über Systeme unendlich vieler linearer Gleichungen. Deutsche Math.-Ver. **22**, 285-291.

Ist in einer n-reihigen Determinante $A = | a_{ik} |$ jedes Diagonalglied a_{ii} absolut genommen größer als die Summe der absoluten Beträge aller übrigen Elemente seiner Zeile,

$$| a_{i1} | + \cdots + | a_{i,i-1} | + | a_{i,i+1} | + \cdots + | a_{i,n} | \leqq \varepsilon \, | a_{ii} | \text{ (wo } \varepsilon < 1),$$

so ist $A \neq 0$ [soweit steht der Satz, wie der Verf. nachträglich bemerkt, schon bei Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes, p. 13-14] und genauer

$$| A | \geqq | a_{11} \ldots a_{nn} | \, e^{s} (1-\varepsilon)^{s/\varepsilon}, \text{ wo } s = \sum_{i \neq k} \left| \frac{a_{ik}}{a_{ii}} \right| .$$

Der Satz ist so formuliert, daß er für unendliche Determinanten, die „normal" sind, seine Gültigkeit behält. Der Beweis beruht auf der Fredholmschen Entwicklung der Determinante $\left| \frac{a_{ik}}{a_{ii}} \right|$. Auch die Neumannsche Entwicklung (geometrische Reihe) dieser Determinante konvergiert unter der obigen Voraussetzung stets, woraus Folgerungen über die eindeutige Auflösbarkeit des linearen Gleichungssystems mit den Koeffizienten a_{ik} gezogen werden. T.

R. Palmqvist. Sur les conditions pour qu'un déterminant infini soit de genre un. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. 8, Nr. 32, 4 S.

H. von Koch hat in C. R. **116**, 179-181 (F. d. M. **25**, 521, 1893) den Satz ausgesprochen: Damit eine unendliche Determinante (1) $[A_{ik}]$ $(i, k = 1, 2, \ldots, \infty)$ und alle ihre Minoren absolut konvergieren, genügt es, indem man $A_{ii} = 1 + a_{ii}$, $A_{ij} = a_{ij}$ $(i \neq j)$ setzt, daß die Reihen konvergieren:

$$(2) \qquad \sum_{i} | a_{ii} |, \; \sum_{i,j,k} | a_{ij} \, a_{jk} |, \; \sum_{ijkl} | a_{ij} \, a_{jk} \, a_{kl} | .$$

Da die zweite aus der Reihe (2) geschrieben werden kann $\sum_{j} (\sum_{i} | a_{ij} | \sum_{k} | a_{ik} |)$, so sieht man, daß alle Reihen $\sum_{i} | a_{ij} |$ und alle Reihen $\sum_{j} a_{ij}$ konvergieren. Wenn sie außerdem alle kleinere Werte haben als eine endliche Größe, so zieht die Konvergenz der zweiten aus der Reihe (2) die Konvergenz der dritten nach sich. Das ist auch der im allgemeinen vorkommende Fall. Man kann daher fragen, ob in allen Fällen die Konvergenz der zweiten Reihe die der dritten nach sich zieht. Das ist aber nicht der Fall. Lp.

A. Pellet. Des systèmes infinis d'équations. S. M. F. Bull. **41**, 119-126.

Der Verf. überträgt seine Majorantenmethode von Systemen mehrerer Gleichungen mit mehreren Unbekannten (F. d. M. **40**, 456, 1909) auf Integralgleichungen vermöge des gewohnten Grenzübergangs (nach Art von Hilberts erster Mitteilung) und auf solche linearen Differentialgleichungen, wie sie von Koch mit Hülfe der unendlichen Determinanten behandelt hat. T.

L. Lichtenstein. Sur les fonctions fondamentales des équations différentielles linéaires du second ordre et sur le développement d'une fonction arbitraire. Application de la théorie des formes quadratiques à une infinité de variables. C. R. **156**, 993-996.

Voranzeige einer unterdessen in Pal. Rend. 38 (1914, 2) erschienenen ausführlichen Abhandlung. Hng.

W. F. de Groot. De theorie der kwadratische vormen van oneindig vele veranderlijken en hare toepassing op de lineaire integraalvergelijkingen. (Die Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen und ihre Anwendung auf die Theorie der linearen Integralgleichungen). E. J. Brill, Leiden. (Diss. Leiden.)

Der Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, die Theorie der Integralgleichungen in einer zugänglicheren Form darzustellen, als dies bisher in den Originalabhandlungen geschehen ist. Insbesondere werden verschiedene Hülfssätze bewiesen, die dort nur angegeben wurden, oder deren Beweis nur im Prinzip angedeutet wurde. Zur Einführung in das Studium der Integralgleichungen erscheint die Schrift sehr geeignet. Schn.

Ch. Platrier. Sur les mineurs de la fonction déterminante de Fredholm et sur les systèmes d'équations intégrales linéaires. (Thèse.) Journ. de Math. (6) **9**, 233-304.

Bekanntlich sind die ν-reihigen Determinanten, die man aus den $(n-1)$-reihigen Unterdeterminanten einer gegebenen n-reihigen Determinante bilden kann, bis auf eine Potenz der Determinante gleich den $(n-\nu)$-reihigen Unterdeterminanten der gegebenen Determinante selbst. Diese Sätze werden auf die Fredholmsche Determinante übertragen und in mannigfacher Weise verwendet, insbesondere für Integralgleichungen dritter Art und Systeme von mehreren solchen. T.

Ch. Platrier. Sur les variations de la déterminante et de la résolvante de Fredholm avec le champ d'intégration. Nouv. Ann. (4) **13**, 183-186.

Es handelt sich um Differentiation nach der oberen Integrationsgrenze. T.

Ch. Platrier. Sur des solutions holomorphes de certaines équations intégrales linéaires de troisième espèce. C. R. **156**, 1825-1828.

Ch. Platrier. Sur des solutions méromorphes de certaines équations intégrales linéaires de troisième espèce. C. R. **157**, 28-31.

Neuer Beweis und Fortführung der Resultate von Picard (F. d. M. **42**, 371, 1911) und Platrier (F. d. M. **43**, 429, 1912). T.

A. KORN. Sur les équations intégrales à noyau asymétrique. C. R. **156**, 1965-1967.

Der Verf. erweitert seine Untersuchungen über pseudosymmetrische Kerne (F. d. M. **42**, 370, 1911) auf den Fall mehrfacher Pole. T.

O. TOEPLITZ. Über eine bei den Dirichletschen Reihen auftretende Aufgabe aus der Theorie der Potenzreihen von unendlichvielen Veränderlichen. Gött. Nachr. 1913, 417-432.

Eine Potenzreihe konvergiert bekanntlich in dem ganzen Kreise durch die dem Entwicklungszentrum nächste Singularität, und zwar überall darin absolut. Anders eine Dirichletsche Reihe: es ist seit langem bekannt, daß sich bei einer solchen der Halbebene absoluter Konvergenz nach links zu noch ein Parallelstreifen bedingter Konvergenz anschließen kann, dessen Breite bis zu 1 betragen kann. Die Frage nun, ob auch die „Halbebene der Beschränktheit" der dargestellten Funktion, ebenfalls abweichend vom Verhalten bei Potenzreihen, über die Halbebene der absoluten Konvergenz nach links hinausreichen kann, hatte Bohr (Gött. Nachr. 1913, 441-488) auf eine Aufgabe über Potenzreihen von unendlichvielen Veränderlichen zurückgeführt, und er hatte auf diesem Wege sofort schließen können, daß der Streifen, um den die Halbebene der Beschränktheit über die Halbebene der absoluten Konvergenz hinausragt, höchstens die Breite ½ haben kann. Daß er aber überhaupt vorhanden sein kann, und zwar eine Breite haben kann, die an ¼ wenigstens beliebig nahe heranreicht, zeigt der Verf., indem er nicht eine allgemeine Potenzreihe, sondern speziell eine quadratische Form von unendlichvielen Veränderlichen konstruiert, die die Bohrschen Erfordernisse erfüllt. Diese quadratische Form wird konstruiert aus quadratischen Formen von n Veränderlichen, die bei einem ganz heterogenen Gegenstande, nämlich beim Hadamardschen Determinantensatze, eine Rolle spielen.

Mit denselben algebraischen Hülfsmitteln wird ein Beispiel einer quadratischen Form von unendlichvielen Veränderlichen konstruiert, die beschränkt und sogar vollstetig ist, ohne absolut beschränkt zu sein. T.

E. H. MOORE. On the fundamental functional operation of a general theory of linear integral equations. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 230-255.

In der Gleichung

$$\xi(s) = \eta(s) - z\, J_t\, \varkappa(s, t)\, \eta(t)$$

versteht der Verf. unter J_t sehr allgemeine Operationszeichen, welche Operationen mit einer Funktion $\varkappa(s, t)$ zweier Variabeln und einer Funktion $\eta(t)$ einer Variable solcher Art andeuten, daß das Resultat von J_t eine Funktion von s allein ist, z. B.

$$J_t\, \varkappa(s, t)\, \eta(t) = \sum_{t=1}^{n} \varkappa(s, t)\, \eta(t),\ \sum_{t=1}^{\infty} \varkappa(s, t)\, \eta(t),\ \int_a^b \varkappa(s, t)\, \eta(t)\, dt,$$

sodaß die Gleichungen die linearen Integralgleichungen:

$$\xi(s) = \eta(s) - z\int_a^b \varkappa(s,t)\,\eta(t)\,dt$$

als speziellen Fall umfassen. In einer früheren Abhandlung (F. d. M. **43**, 424, 1912) hat Verf. bereits eine Anzahl von Definitionen, Bezeichnungen usw. für solche Verallgemeinerungen eingeführt, welche auch hier verwandt werden. Das Ganze ist eine Verallgemeinerung der Theorie der linearen Integralgleichungen, deren Wert sich erst durch die Anwendung auf bestimmte Beispiele wird erweisen lassen. A. K.

F. S. Zarlatti. Sur quelques équations intégrales singulières. C. R. **157**, 198-201.

E. Goursat. Sur quelques équations intégrales singulières. C. R. **157**, 843-846.

Wie schon früher Picard (Ann. de l'Éc. Norm. (3) **28**, 313-324) einzelne Integralgleichungen im Intervall $-\infty$ bis $+\infty$ betrachtet und bemerkt hatte, daß die Resolvente $\varphi(s) = f(s) + \lambda\int K(s,t;\lambda)\,f(t)\,dt$ für spezielle $f(s)$ nicht alle Eigenwerte oder Spektrumsteile tatsächlich zu Polen zu haben braucht, macht auch Zarlatti die gleiche Erfahrung an einigen Beispielen (Kern e^{ixy} u. a.) und glaubt darin das Kennzeichen einer besonderen Singularität erblicken zu müssen. Goursat dagegen, der sich mit ähnlichen Gleichungen befaßt, bemerkt (übrigens ohne dabei Z. zu erwähnen) mit Recht, daß dieses Vorkommnis auch bei jeder noch so regulären Fredholmschen Integralgleichung mit endlichen Grenzen eintritt, worauf auch F. d. M. **42**, 370, 1911 schon hingewiesen war.

Im übrigen bildet Goursat im Anschluß an Picard (F. d. M. **41**, 387, 1910) singuläre Integralgleichungen, deren Spektrum eine beliebige Kurve in der λ-Ebene bildet, Vorkommnisse, die Hilbert und seinen Schülern vom Standpunkte der unendlichvielen Veränderlichen seit langem in ihrer vollen Allgemeinheit genau vertraut sind (vergl. etwa F. d. M. **38**, 158, 1907). T.

C. Cailler. Sur un cas particulier du problème de l'élimination entre plusieurs équations intégrales. Ens. math. **15**, 33-47.

Der wesentliche Teil der Arbeit, mit dem der Rest methodisch nur lose zusammenhängt, handelt von der Reduktion eines Systems $\sum_{\beta=1}^{\nu}\int k_{\alpha\beta}(s,t)\,\varphi_\beta(t)\,dt = f_\alpha(s)$ $(\alpha = 1,\ldots,\nu)$ von Integralgleichungen erster Art auf einzelne Integralgleichungen erster Art unter der besonderen Voraussetzung, daß die Funktionen $k_{\alpha\beta}(s,t)$ nur von $t-s$ abhängen, $k_{\alpha\beta}(s,t) = h_{\alpha\beta}(t-s)$. Die Symbolik, deren sich der Verf. dabei bedient, glaubt der Ref. am besten folgendermaßen darstellen und zugleich verallgemeinern zu können. Sind die Elemente einer Determinante nicht Zahlen, sondern n-reihige Matrizen, die aber alle miteinander vertauschbar sind, so kann man die Elemente der Determinantentheorie und

der Auflösung der linearen Gleichungen auf ein solches System ohne weiteres übertragen: die Determinante z. B. ist dann keine Zahl, sondern selbst eine n-reihige Matrix usw. Vollzieht man jetzt von einem derartigen System aus denselben Grenzübergang zu $n = \infty$, durch den man stets von einem System von n linearen Gleichungen zu einer Integralgleichung gelangt ist (vergl. z. B. Hilberts erste Mitteilung), so erhält man den Fall des Verf.: aus den ν^2 Matrizen werden die ν^2 Kerne $k_{\alpha\beta}(s, t)$, und man erkennt, weshalb der Verf. Erfolg hat, wenn er diese Kerne lediglich von $t - s$ abhängen läßt und nicht als allgemeine Funktionen von s, t annimmt: man überzeugt sich nämlich leicht, daß je zwei Kerne dieser speziellen Art vertauschbar sind. Diese Vertauschbarkeit ist also das Wesentliche an der besonderen Form der Kerne, die der Verf. voraussetzt.
T.

L. Brand. On infinite systems of linear integral equations. Annals of Math. (2) **14**, 101-118.

Die Arbeit handelt von der Lösung des Gleichungssystems $\int\limits_a^b \varphi_i(x)\,\varphi(x)\,dx = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, wo $\varphi(x)$ gesucht ist. Vor Erscheinen der Arbeit veröffentlichte, wie der Verf. bemerkt, F. Riesz (Math. Ann. **69**, 451-469, 1910) eine Untersuchung über denselben Gegenstand und bemerkte darin beiläufig, daß die Methode von E. Schmidt (Pal. Rend. **25**) auch auf dieses Problem angewendet werden kann, ohne das im übrigen selbst zu tun. Die Methode von Brand „hat im Vergleich zu der von Riesz vorgeschlagenen alle die Vorteile, welche die Behandlung in der Arbeit von Bôcher und Brand in diesen Annalen (F. d. M. **43**, 420, 1912) gegenüber der ursprünglichen Behandlung der Systeme linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten durch Schmidt hat“.
T.

J. G. Rutgers. Toepassingen van Sonine's uitbreiding van Abel's integraalvergelijking. Amst. Ak. Versl. **22**, 265-272.

Sonine hat (Acta Math. **4**, 171-176; F. d. M. **16**, 354, 1884) ein Verfahren angegeben, um Kerne von zwei sich gegenseitig auflösenden Integralgleichungen der Form

$$f(x) = \int\limits_a^x \psi(x - \xi)\, u(\xi)\, d\xi, \quad u(x) = \int\limits_a^x \sigma(x - \xi)\, f'(\xi)\, d\xi$$

als Potenzreihen in $x - \xi$ zu erhalten. Das einfachste Beispiel ist die Abelsche Integralgleichung; von einem der andern Beispiele Sonines zeigt die vorliegende Arbeit, daß es ebenfalls auf dieselbe Integralgleichung hinauskommt. Weiterhin werden zwei neue Beispiele angegeben, bei denen sich ψ durch eine Besselsche Funktion ausdrückt.
Hng.

G. Bratu. Sur les équations intégrales non linéaires. S. M. F. Bull. **41**, 346-350.

Die Untersuchungen von E. Schmidt (Math. Ann. **65**, 370-399; F. d. M. **39**, 399, 1908) werden für den Fall der Gleichung

$$\Phi(x, \varphi(x)) = \lambda \int_0^1 K(x, y)\, F(y, \varphi(y))\, dy,$$

wo $\varphi(x)$ die unbekannte Funktion ist, verfolgt, insbesondere unter der Annahme, daß alle gegebenen Funktionen Polynome sind. T.

H. Galajikian. On certain non-linear integral equations. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 282; 342-346.

Der Verf. betrachtet Integralgleichungen vom Schlage:

$$y(x) = g\left\{x, \int_{x_0}^{x} f_1\,(x, t, y(t))\, dt, \ldots, \int_{x_0}^{x} f_m(x, t, y(t)\, dt)\right\}.$$

Mittels der Methode der folgeweisen Annäherungen ist er zu dem Ergebnis gelangt, daß in einem genügend kleinen Intervall unter gewissen Stetigkeitsbedingungen und den Lipschitzschen Bedingungen über die gegebenen Funktionen eine stetige Lösung existiert. In der abgedruckten Note werden nur zwei Existenztheoreme für $m = 2$ bewiesen. Lp.

N. Kryloff. Sur quelques propriétés des équations intégrales à noyau non symétrique. C. R. **156**, 1587-1589.

In Übertragung bekannter algebraischer Sätze, für die Verf. Hurwitz Math. Ann. **46** zitiert, und die dem Ref. als Satz von Bendixson bekannt sind, zeigt der Verf.: Ist $K(s, t)$ ein reeller unsymmetrischer Kern, und ist der Kern $H = \frac{1}{2}[K(s, t) + K(t, s)]$ positiv (definit), so sind die reellen Teile der Eigenwerte von K alle positiv. Er behauptet ferner, daß, falls der Kern H nicht nur positiv, sondern auch im Hilbertschen Sinne abgeschlossen ist, alle Eigenwerte reell sind. Diese Behauptung ist falsch; der Rechenfehler in dem Beweis kommt auch in dem der vorangehenden richtigen Behauptung vor; kombiniert man beide Überlegungen und eliminiert jenes Versehen, so erhält man den Beweis der ersten Behauptung und des etwas vollständigeren Satzes, der die Übertragung des Satzes von Bendixson auf Integralgleichungen bildet. T.

D. Pompéiu. Sur une classe de fonctions d'une variable complexe et sur certaines équations intégrales. Palermo Rend. **35**, 277-281.

D. Pompéiu. Sur une équation intégrale. Math. Ann. **74**, 275-277.

Anschließend an frühere Untersuchungen (F. d. M. **43**, 481, 1912) definiert der Verf. die „areolare Ableitung" einer Funktion $f(z) = u + iv$ so als $\varphi(z) = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)$, daß $\int_C f(z)\, dz = \iint_D \varphi(z)\, d\omega$ ist, wo C die Kontur eines einfach zusammenhängenden Bereiches D ist, $d\omega$ dessen Flächenelement.

Er wird dadurch auf die Integralgleichung $\varphi(z) = h(z) + \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{\varphi(z)}{z-\zeta} d\omega$ geführt und beweist, daß sie keine überall in D analytische Lösung besitzen kann.

T.

M. Bottasso. Il teorema di Rouché-Capelli per i sistemi di equazioni integrali. Torino Atti **48**, 19-42.

Der Verf. setzt die Betrachtungen von G. Greggi (F. d. M. **43**, 428, 1912) fort für den Fall, daß die Anzahl der Integralgleichungen nicht gleich der Anzahl der unbekannten Funktionen ist, sondern größer oder kleiner. T.

K. Popoff. Sur les équations de Fredholm de première espèce. C. R. **157**, 1395-1397.

Die Entwicklungen der Note beruhen auf dem (wie unmittelbar zu erkennen) falschen Schluß, daß aus identischem Verschwinden des Integrales $\int_0^1 k\,(x, y)\,dy$ identisches Verschwinden von $k(x, y)$ folgt, sind daher durchweg unzutreffend.

Hng.

V. Volterra. Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, professées à la Faculté des sciences de Rome en 1910, publiées par M. Tomassetti et F. S. Zarlatti. Paris: Gauthier-Villars. VI + 164 S. 8°. (Collection Borel.)

Der vorliegende Band der Borelschen Monographiensammlung, der von Tomassetti und Zarlatti nach Vorlesungen von Volterra in Rom, 1910, bearbeitet ist, gibt eine Darstellung einzelner Kapitel der Theorie der Integralgleichungen; seine unmittelbare Wirkung wird dadurch erhöht, daß vorzugsweise die Gegenstände eigener Arbeiten Volterras in Betracht gezogen sind, von denen bekanntlich die über die Integralgleichungstheorie aus den neunziger Jahren für die Entwicklungsgeschichte der Integralgleichungstheorie große Bedeutung besitzen und die der letzten Jahre sie wiederum in eigenartiger Richtung wesentlich gefördert haben. Den Ausgangspunkt (Kap. I) bildet ein Abriß der Theorie der Funktionen von Funktionen und von Kurven, wie sie Volterra seit den achtziger Jahren untersucht hat; es handelt sich hier namentlich um die Untersuchung der verschiedenen möglichen Abhängigkeitstypen sowie die Übertragung der aus der gewöhnlichen Funktionentheorie geläufigen Begriffe, insbesondere des Begriffes der Ableitung; und das Problem der Umkehrung des funktionalen Zusammenhanges zwischen Funktionen führt schließlich zur Aufstellung speziell von Integralgleichungen. Das zweite Kapitel gibt eine Entwicklung der klassischen Theorie der linearen Volterraschen Integralgleichung zweiter und erster Art mit ihren Ausgestaltungen in verschiedenen Richtungen (mehrere Veränderliche, Systeme, Modifikation der Integrationsgrenzen und dergl.). Das dritte Kapitel handelt von der Fredholmschen Auflösung der allgemeinen Integralgleichung zweiter Art, wobei auch einige Anwendungen erörtert werden; auf die Hilbertsche Eigenwerttheorie des symmetrischen Kernes wird nicht eingegangen. In dem letzten

Kapitel endlich werden einige der wichtigsten Ergebnisse von Volterras neueren Untersuchungen über Integraldifferentialgleichungen und vertauschbare Kerne vorgetragen, über die in diesem Jahrbuch bei dem Erscheinen der Originalabhandlungen ausführlich berichtet worden ist. Hng.

V. Volterra. Leçons sur les fonctions de lignes, professées à la Sorbonne en 1912, recueillies et rédigées par J. Pérès. Paris: Gauthier-Villars, VI u. 230 S. 8° (Collection Borel).

Vgl. S. 458 die Anzeige aus Archiv der Math. u. Phys. (3) **23**, 146-147, von A. K.

V. Volterra. Sopra equazioni integro-differenziali aventi i limiti costanti. Rom. Acc. L. Rend. **22**$_2$, 43-49.

Im Falle der Integraldifferentialgleichung mit einer ungeraden Anzahl unabhängiger Veränderlicher vom Typus

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 u(x,y,z\,|\,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\int_0^1\left\{\frac{\partial^2 u(x,y,z\,|\,\tau)}{\partial x^2}f(t,\tau)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\varphi(t,\tau)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\psi(t,\tau)\right\}d\tau=0$$

stellt sich der Anwendung der von Volterra (Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 95-99; F. d. M. **42**, 377, 1911) gegebenen Methode insofern eine besondere Schwierigkeit entgegen, als die Grundlösung

$$v=c\left(\frac{x^2}{1+m_1}+\frac{y^2}{1+m_2}+\frac{z^2}{1+m_3}\right)^{-1/2}$$

der zugehörigen Differentialgleichung

$$(1+m_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+m_2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(1+m_3)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

keine rationale Funktion der Parameter m_1, m_2, m_3 mehr ist. Ersetzt man daher m_1, m_2, m_3 durch die (vertauschbaren) Kerne f, φ, ψ, die Multiplikationen usw. durch die entsprechenden Kompositionen, so geht v in die Grundlösung von (1)

$$V(t)=\frac{1}{r}F(t)+\int_0^1 F(\tau)\,\pi(x,y,z\,|\,t,\tau)\,d\tau$$

über, wobei aber π (entsprechend der in v auftretenden Wurzeloperation) durch eine quadratische Integralgleichung bestimmt wird. Die notwendige Untersuchung, ob und wann diese Integralgleichung eine samt ihren Ableitungen mit f, φ, ψ vertauschbare Lösung besitzt, stellt Volterra nur für den Fall dar, daß diese Kerne als Aggregate endlichvieler Funktionen von s und t allein gegeben sind; da wird das Problem zu einem rein algebraischen für die endlichen Koeffizientenmatrizen der Entwicklungen (vergl. Volterra, Rom. Acc. L. Rend. (5) **20**$_1$, 521-527; F. d. M. **42**, 376, 1911). Hng.

V. Volterra. Sopra equazioni di tipo integrale. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 403-406.

Verf. erinnert an seine ersten Untersuchungen über Linienfunktionen im Jahre 1887, an seine Untersuchungen über lineare Integralgleichungen und Integraldifferentialgleichungen und geht dann im besonderen auf seine Definition der Zusammensetzung zweier Funktionen ein, welche ihn zu der Theorie der permutablen Funktionen geführt hat. Zu den vielen fruchtbaren Anwendungen dieser Untersuchungen fügt er hier ein neues Beispiel, die Integration der Integralgleichung von transzendentem Typus hinzu:

$$\Phi(u \mid x, y) = f(u \mid x, y) + \int_a^b F'(u \mid u_1)\, f(u_1 \mid x, y)\, d\, u_1$$
$$+ \int_a^b \int_a^b F''(u \mid u_1, u_2)\, f(u_1, u_2 \mid x, y)\, du_1\, du_2$$
$$+ \int_a^b \int_a^b \int_a^b F'''(u \mid u_1, u_2, u_3)\, f(u_1, u_2, u_3 \mid x, y)\, du_1, du_2, du_3 + \cdots,$$

in der $f(u \mid x, y)$ die Unbekannte ist. Weitere Beispiele werden angedeutet.
A. K.

G. C. Evans. Some general types of functional equations. Proc. 5. Intern Math. Congr. 1, 387-396.

Bei allgemeinen Untersuchungen über Integraldifferentialgleichungen und Funktionen, die von anderen Funktionen abhängen, $u = F[\Phi_a^b(\tau)]$ bei den Bezeichnungen Volterras, hatte Verf. mit impliziten Funktionalgleichungen zu tun, bei Vorhandensein einer einzigen unbekannten Funktion von der Form:

$$u(x, y, z, t) = F[u\,(\underset{S}{\xi, \eta, \zeta}, \overset{t}{\underset{t_0}{\tau}},)],$$

wobei aus der Schreibweise zu entnehmen ist, daß die Funktion u in einem Raume S der x, y, z oder ξ, η, ζ und zwischen den Grenzen t_0 und t des vierten Argumentes t zu betrachten ist. Um Fragen bezüglich der Existenz und Eindeutigkeit solcher Probleme zu erörtern, muß man offenbar über die Natur der durch F angedeuteten Abhängigkeit gewisse zusätzliche Voraussetzungen machen. In dieser Abhandlung sind zwei hierfür sehr geeignete Grundbedingungen von solcher Art angegeben, daß man beim Bestehen dieser Bedingungen die Existenz und Eindeutigkeit des genannten Problemes nachweisen kann. Der I. Abschnitt beschäftigt sich mit einer Funktionalgleichung für eine unbekannte Funktion, der II. Abschnitt mit Verallgemeinerungen auf Systeme von Funktionalgleichungen mit mehreren unbekannten Funktionen. A. K.

P. Lévy. Sur les équations intégro-différentielles définissant des fonctions de lignes. J. de l'Éc. Pol. (2) 17, 1-120.

Die vorliegende Abhandlung (identisch mit der Pariser Thèse, 1911) untersucht, anschließend an Hadamardsche Begriffsbildungen, eine ganz andere Art von Integraldifferentialgleichungen, als es die von Volterra mit diesem

Namen bezeichneten Bildungen sind. Als Unbekannte tritt eine Funktion Φ der ebenen Kurve $\mathfrak{C}$ auf, und die Gleichung besteht in der Forderung, daß die funktionale Ableitung von $\mathfrak{C}$ (in Volterras Sinn) identisch für alle Kurven $\mathfrak{C}$ gleich einer gegebenen Funktion von Φ und der Kurve $\mathfrak{C}$ wird; z. B. etwa, daß

$$(1) \qquad \delta\Phi = \int_{\mathfrak{C}} f_{\mathfrak{C}}(\Phi, M)\, \delta n\, ds,$$

wo δn die Verschiebung von $\mathfrak{C}$ in normaler Richtung bei Bildung von $\delta\Phi$ bedeutet, und f in gegebener Weise von der Kurve $\mathfrak{C}$, insbesondere von ihrem Verhalten an der Stelle M des Linienelementes ds, und von Φ abhängt. Außerdem kann Φ noch von gewissen Parametern, z. B. von den Koordinaten der Punkte A, B abhängen; das ist z. B. der Fall bei den typischen Beispielen solcher Integraldifferentialgleichungen:

$$\delta\Phi_{AB} = -\int_{(\mathfrak{C})} \frac{\partial\Phi_{AM}}{\partial n}\frac{\partial\Phi_{MB}}{\partial n}\,\delta n\, ds \quad \text{oder} \quad \delta\Phi_{AB} = \int_{(\mathfrak{C})} \Phi_{AM}\Phi_{MB}\,\delta n\, ds,$$

wie sie Hadamard für die Greenschen Funktionen von $\Delta u = 0$ oder $\Delta\Delta u = 0$ oder für die mit ihnen zusammenhängenden Funktionen aufgestellt hat.

Die Entwicklungen Lévys gehen von der offenbaren Analogie zwischen diesen Integraldifferentialgleichungen und den totalen Differentialgleichungen aus, deren Übersetzung ins Gebiet unendlichvieler Veränderlichen jene sind. Beschränkt man sich auf die Betrachtung der Werte Φ für die Kurven einer einparametrigen Schar, so kann man Φ für alle diese Kurven aus (1) sofort angeben, wenn man es für eine von ihnen $\mathfrak{C}_0$ kennt. Daß die so für ein beliebiges $\mathfrak{C}$ durch Benutzung verschiedener einparametriger Scharen aus einem einmal angenommenen $\Phi_{\mathfrak{C}_0}$ entstehenden Werte aber übereinstimmen, führt zu den Integrabilitätsbedingungen (genau wie bei den totalen Differentialgleichungen), und es sind nun, je nachdem sie identisch erfüllt sind oder nicht, die von dort bekannten Fallunterscheidungen in dieses entsprechend schwierigere Gebiet zu übertragen.

Die Arbeit führt diese Untersuchungen, namentlich für einige die Hadamardschen Ansätze unmittelbar verallgemeinernde Typen von Integraldifferentialgleichungen, ausführlich durch; man vergl. auch die Referate über die in den C. R. veröffentlichten Voranzeigen des Verf. (F. d. M. **41**, 372, 387, 1910 und **42**, 426, 1911).

Hng.

G. Lauricella. Sopra l'algebra delle funzioni permutabili di 2ª specie. Annali di Mat. (3) **21**, 317-351.

Die Arbeit zieht solche komplexen symmetrischen Kerne (die zudem samt ihrem Quadrat integrabel sind) in Betracht, deren sämtliche Eigenfunktionen (einschließlich der zum Eigenwert ∞ gehörigen) aus den Funktionen eines reellen Orthogonalsystems bestehen, während die Eigenwerte komplex sein können; auf solche Funktionen sind die bekannten Sätze aus der Theorie reeller symmetrischer Kerne unmittelbar übertragbar. Im Bereich dieser Kerne soll die symbolische Gleichung $K^n(x, y) = H(x, y)$ bei gegebenem H gelöst werden (K^n bedeutet den n-fach iterierten Kern); notwendige und hinreichende Be-

dingung für die Lösbarkeit wird, daß $\sum_{(\mu)} \frac{1}{|\sqrt{\lambda_\mu}|^2}$ konvergiert, wenn λ_μ die Eigenwerte von H durchläuft, und K hat zu Eigenwerten die Werte $\sqrt[n]{\lambda_\mu}$ — mit willkürlicher Verfügung über die hinzutretende Einheitswurzel —, zu Eigenfunktionen im wesentlichen die von H.

Formal ganz entsprechend der Lagrangeschen Lösung der entsprechenden algebraischen Gleichungen, läßt sich hierauf die Lösung der Gleichungen

$$K^2 + pK + q = 0, \quad K^3 + pK + q = 0$$

zurückführen, wo die Multiplikation wiederum symbolisch als Zusammensetzungsoperation der Kerne zu verstehen ist; p und q sollen symmetrische Kerne der geschilderten Art sein, und die Auflösung beruht auf der Bemerkung, daß sie miteinander und mit K vertauschbar sein müssen (daß also alle drei Kerne dasselbe Eigenfunktionensystem haben), wenn die Gleichungen überhaupt eine symmetrische Lösung besitzen sollen. Hng.

G. Lauricella. Sopra le funzioni permutabili di 2ª specie. Rom. Acc. L. Rend. 22_1, 331-346.

Die Bedingung der Vertauschbarkeit zweier Kerne $p(x, y), q(x, y)$ $(a \leqq x, y \leqq b)$ läßt sich so ausdrücken: Sind $\varphi_i(x), \psi_i(y)$ die Paare adjungierter Eigenfunktionen von $p(x, y)$, λ_i die zugehörigen Eigenwerte, und ergänzen $\theta_i(x)$ die $\varphi_i(x)$ und $\tau_i(y)$ die $\psi_i(y)$ zu einem vollständigen Orthogonalsystem, so muß $q(x, y)$, im Quadrat $a \leqq x, y \leqq b$ betrachtet, orthogonal zu den sämtlichen Funktionen:

$$(1) \qquad \frac{\varphi_i(x)\,\varphi_j(y)}{\lambda_j} - \frac{\psi_i(x)\,\psi_j(y)}{\lambda_i}, \quad \psi_i(x)\,\tau_j(y), \quad \theta_i(x)\,\varphi_j(y)$$

sein; damit ist die Möglichkeit gegeben, für alle mit einem gegebenen p vertauschbaren Kerne q eine Entwicklung in eine im allgemeinen konvergente Reihe nach Orthogonalfunktionen anzugeben, die aus der Reihe (1) durch Orthogonalisierung entstehen. Sind p, q symmetrisch, so ergeben sich speziell die bekannten Resultate. Hng.

L. Silla. Sui sistemi di equazioni integrali di prima specie. Rom. Acc. L. Rend. 22_2, 13-20.

Das Picardsche Kriterium für die Auflösbarkeit einer Integralgleichung erster Art und die anschließenden Entwicklungen von Lauricella werden auf Systeme von Integralgleichungen erster Art übertragen, und zwar auf Grund der bekannten Tatsache, daß sich jedes solche System in eine einzige Integralgleichung zusammenfassen läßt. Hng.

J. Pérès. Sulle equazioni integrali. Rom. Acc. L. Rend. 22_1, 66-70.

Volterra hat gelegentlich darauf hingewiesen, daß sich seine Ansätze zur Auflösung von aus vertauschbaren Kernen aufgebauten nichtlinearen In-

tegralgleichungen (Rom. Acc. L. Rend. **19**$_1$, 169; F. d. M. **41**, 400, 1910) auch auf nichtvertauschbare Kerne ausdehnen lassen. Verf. folgt diesem Gedanken, indem er Potenzreihengleichungen $\zeta = \varphi[\zeta_1, \ldots, \zeta_n; \zeta]$ in den als nicht kommutativ angesehenen Veränderlichen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \zeta$ formal nach ζ auflöst (der Konvergenzbeweis wird unter passenden Voraussetzungen durch Majorantenmethode geführt) und alsdann für $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \zeta$ nichtvertauschbare Kerne $f_1, \ldots, f_n, f$, für ihre Multiplikation deren Komposition erster Art einsetzt; so erhält er die Lösung der nichtlinearen Volterraschen Integralgleichung $f = \varphi[f_1, f_2, \ldots, f_n, f]$ mit der unbekannten Funktion f. Hng.

J. Pérès. Détermination de toutes les fonctions permutables de première espèce avec une fonction donnée. C. R. **156**, 378-381.

Volterra hat gezeigt, wie man alle mit einem gegebenen Kern $f(x, y)$ „von erster Art vertauschbaren", d. h. der Funktionalgleichung

$$\int_x^y f(x, \xi)\,\varphi(\xi, y)\,d\xi = \int_x^y \varphi(x, \xi)\,f(\xi, y)\,d\xi$$

genügenden Kerne φ mit Hülfe einer Integraldifferentialgleichung bestimmen kann, wenn f von erster oder zweiter Ordnung ist (Rom. Acc. L. Rend. (5) **19**$_1$, 425 und **20**$_1$, 296; F. d. M. **41**, 385, 1910 und **42**, 377, 1911). Die vorliegende Note deutet an, wie man dasselbe Verfahren für Kerne beliebiger Ordnung n (d. h. alle Ableitungen bis zur Ordnung $n-2$ einschließlich verschwinden für $x = y$, die der Ordnung $n-1$ aber nicht) durchführen kann. Hng.

J. Pérès. Résolution des problèmes aux limites relatifs à une équation intégro-différentielle de M. Volterra. Palermo Rend. **35**, 253-264.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Lösung der „Randwertaufgaben" für die Integraldifferentialgleichung

$$(1) \qquad \Delta u(x, y, z \mid t, a) + \int_a^t \left\{ \frac{\partial^2 u(x, y, z \mid \tau, a)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right\} d\tau = 0,$$

die Volterra zuletzt in Acta Math. **35**, 295 (F. d. M. **43**, 431, 1912) gestellt, und für die er die Eindeutigkeitstheoreme bewiesen hat. Pérès überträgt in völlig konsequenter Fortbildung der Volterraschen Methoden die Begriffe des Potentials einer einfachen oder doppelten Flächenbelegung auf die Gleichung (1), die also aus den entsprechenden Begriffen der eigentlichen Potentialtheorie genau so entstehen, wie die Volterrasche „Grundlösung" von (1) aus der Funktion $\frac{1}{r}$; so hat das Potential einer einfachen Belegung auf der Fläche σ die Form:

$$V(x, y, z \mid t, a) = \int\limits_{(\sigma)} \frac{\varrho(x_0, y_0, z_0 \mid t, a)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}\, d\sigma_0 + \int\limits_{(\sigma)} \int\limits_a^t (\ldots)\, \varrho(x_0\, y_0\, z_0 \mid \tau, a)\, d\sigma_0\, d\tau.$$

Für das Verhalten dieser „Potentiale" an der Fläche σ ergeben sich Formeln ganz analog denen der Potentialtheorie; daher lassen sich die Forderungen der Randwertaufgaben unmittelbar durch Integralgleichungen zweiter Art für die Flächendichte $\varrho(x_0, y_0, z_0 \mid t, a)$ ausdrücken, in denen nebeneinander Integrationen über die ganze Fläche und nach τ (zwischen a und t) vorkommen. Diese Integralgleichungen werden entsprechend bekannten Methoden vollständig behandelt und damit die Randwertaufgaben (sowohl für den Außen- wie für den Innenraum) vollständig gelöst. Hng.

L. Sinigallia. Sulle funzioni permutabili di seconda specie. Nota IV. Rom. Acc. L. Rend. $\mathbf{22}_1$, 70-76.

Die Untersuchungen der dritten Note gleichen Titels (F. d. M. **43**, 435, 1912) werden beendet und wiederum für das (im wesentlichen algebraische) Problem ausgedeutet, die sämtlichen mit einem gegebenen Kerne $F(x, y) = \sum\limits_{r=1}^{n} \frac{\varphi_r(x)\, \psi_r(y)}{\lambda_r}$ vertauschbaren Kerne der Form $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, \varphi_i(x)\, \psi_k(y)$ anzugeben.

Hng.

G. Andreoli. Sulle equazioni integrali. Rom. Acc. L. Rend. $\mathbf{22}_1$, 776-781.

Die Integralgleichung

$$\varphi(x) + \lambda \int\limits_0^{g(x)} N(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x)$$

wird nach dem Muster der Volterraschen Gleichung, in die sie für $g(x) = x$ übergeht, behandelt, insbesondere für $g(x) = x^m$, wo $0 \leqq m \leqq 1$ u. a. m. T.

G. Andreoli. Sulle espressioni lineari integro-differenziali. Rom. Acc. L. Rend. $\mathbf{22}_2$, 409-414.

Lineare Integraldifferentialgleichungen vom Typus

$$\sum_0^m a_r(x)\, \psi^{(r)}(x) + \int\limits_0^x \sum_0^n b_r(x, s)\, \psi^{(r)}(s) ds + \int\limits_0^1 \sum_0^p c_r(x, s)\, \psi^{(r)}(s)\, ds = f(s)$$

können offenbar in gewöhnliche Integralgleichungen (erster, zweiter oder dritter Art) übergeführt werden, indem man die höchste auftretende Ableitung als neue Unbekannte einführt und die andern Ableitungen mit Hülfe partieller Integration durch sie ausdrückt; die verschiedenen möglichen Fälle werden aufgezählt.

Hng.

J. Soula. Sur les fonctions permutables de 2ième espèce. Rom. Acc. L. Rend. 22_1, 222-225.

Die Hauptfunktionen eines Kernes $N(x, y)$ sind wiederum Hauptfunktionen (möglicherweise allerdings auch zum Eigenwert unendlich gehörige) eines jeden mit ihm vertauschbaren Kernes $K(x, y)$. Der Beweis dieses in der Theorie der endlichen Matrizen geläufigen Satzes wird mit Hülfe der Partialbruchzerlegung der Resolvente von N auf die einfache Bemerkung zurückgeführt, daß, falls $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, \psi_i(y)$ mit $K(x, y)$ vertauschbar ist, die $\varphi_i(x)$ Hauptfunktionen von K sind.

Hng.

G. C. Evans. Sul calcolo della funzione di Green per le equazioni differenziali e integro-differenziali di tipo parabolico. Rom. Acc. L. Rend 22_1, 855-860.

Die bekannte Hilbertsche Methode (Gött. Nachr. 1904, 2. Mitt.; F. d. M. **35**, 386, 1904), die Greensche Funktion einer Differentialgleichung $L(u) + \lambda u = 0$ aus derjenigen von $L(u) = 0$ zu erhalten, wird auf die parabolische Differentialgleichung oder Integraldifferentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t) \cdot u(x, t), \quad \text{bzw.} = \int_{t_x}^{t} A(x, t, \tau)\, u(x, \tau)\, d\tau$$

angewandt; so entstehen deren Greensche Funktionen als lösende Kerne von Integralgleichungen, deren Kerne durch die Greensche Funktion von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ gegeben sind.

Hng.

A. Viterbi. Sulla risoluzione approssimata delle equazioni integrali di Volterra e sulla applicazione di queste allo studio analitico delle curve. Lomb. Ist. Rend. (2) **45**, 1027-1060 (1912).

Der erste Teil enthält Fehlerabschätzungen für die Lösung von Volterraschen Integralgleichungen und von Systemen von solchen nach einer Majorantenmethode, der zweite Teil ist einer Anwendung der linearen Volterraschen Integralgleichung zur Bestimmung der Richtungskosinus der Tangente, Hauptnormale, Binormale und der kartesischen Koordinaten der Punkte einer in Parameterdarstellung durch die Bogenlänge gegebenen Raumkurve gewidmet. Geodätische Anwendungen.

T.

H. S. Carslaw. Functions of positive type and their application to the determination of Green's functions. Messenger (2) **42**, 135-140.

Die Note macht einige physikalische Anwendungen eines Theorems von Mercer betreffs der Funktionen von positivem Typus in der Theorie der Integralgleichungen (vgl. Lond. Phil. Trans. (A) **209**, 415-446; F. d. M. **40**, 408, 1909); sie soll zeigen, wie diese Anwendungen darauf hindeuten, daß jenes

Theorem möglicherweise auf den Fall singulärer Integralgleichungen, bei denen der Kern in gewisser Weise unendlich wird, ausgedehnt werden kann. Die Anwendungen beziehen sich auf die Greensche Funktion bei der linearen, zwei- und dreidimensionalen Wärmeströmung. Lp.

A. Hoborski. Zastosowanie teoryi równań całkowych do pewnego zagadnienia Neumann'a (Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf ein Problem von Neumann). Wektor **3**, 74-80.

Es sei eine geschlossene Fläche S gegeben, D der Innenraum, D' der Außenraum. Es handelt sich um die Integration der Differentialgleichung (1) $0 = \Delta w - m^2 w$ im Innenraum oder im Außenraum, wobei die Werte φ der Funktion w auf der Oberfläche S gegeben sind. Das verallgemeinerte Neumannsche Problem verlangt, daß die Funktion w als verallgemeinertes Potential einer Doppelbelegung $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ auf der Fläche S in der Gestalt

$$(2) \qquad v(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)} \sigma(\xi, \eta, \zeta)\frac{e^{-mr}(mr+1)}{r^2}\cos\alpha\, ds$$

darstellbar sei, wo α den Winkel zwischen der Innennormale oder der Außennormale und der Richtung vom Punkte ξ, η, ζ zum Punkte x, y, z bedeutet. Allgemeiner kann man nach derjenigen Doppelbelegung fragen, die der Bedingung genügt:

$$(3)\ v_i - v_e = \lambda(v_i + v_e) + 2\varphi,$$

wobei v_i, v_e die Grenzwerte von (2) an der Innenseite und an der Außenseite von S bedeuten und λ ein variabler Parameter ist.

Das Problem führt auf eine Integralgleichung, die der Verf. in dem Falle untersucht, wo S eine Kugel ist. Da der Kern unstetig ist, muß das Iterationsverfahren angewendet werden. Es ergibt sich, daß, falls m positiv ist, alle Eigenwerte der Integralgleichung größer als 1 sind, daher sowohl das Innenproblem, als das Außenproblem lösbar sind. Falls m gleich Null ist, ist das Innenproblem lösbar, da $\lambda = -1$ kein Eigenwert ist; dagegen ist es das Außenproblem nur in dem Falle, wo das über S erstreckte Integral

$$(4) \qquad \int\limits_{(S)} \varphi\, ds$$

gleich Null ist. A. R.

L. Koschmieder. Anwendung der Integralgleichungen auf eine thermoelastische Aufgabe. J. für Math. **143**, 285-293.

Die Arbeit enthält die vollständige Durchrechnung eines besonders einfachen Beispiels für die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen eines unsymmetrischen Kernes. Die Aufgabe ist dem linearen Falle der Duhamelschen Gleichungen für die Wärmeleitung unter Berücksichtigung der elastischen Verrückung der Moleküle entnommen; die Eigenfunktionen

sind $1 - \cos n\pi x$ oder $- \cos n\pi x$ für den transponierten Kern. Nach einer auf derartige Probleme bereits vielfach angewandten, auf Cauchy zurückgehenden Methode werden die Entwicklungen erhalten, indem der aus den Differentialgleichungen gewonnene lösende Kern Γ als Funktion des komplexen Parameters λ angesehen und mit Hülfe des Cauchyschen Residuensatzes seine Partialbruchdarstellung hergeleitet wird:

$$\Gamma(\lambda, x, y) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} - \frac{\cos n\pi x \cdot (1 - \cos n\pi y)}{n^2 \pi^2 - \lambda};$$

hieraus ergibt sich unmittelbar die Entwicklung des ursprünglichen Kernes (für $\lambda = 0$) und der durch Integrale über ihn darstellbaren Funktionen.

Hng.

É. Picard. Application de la théorie des équations intégrales à certains problèmes de la théorie analytique de la chaleur, dans l'hypothèse d'un saut brusque de température à la surface de séparation des corps en contact. C. R. **156**, 1119-1124.

Bekanntlich ist es möglich, Randwertaufgaben für Systeme von Differentialgleichungen, bei denen in die Randbedingungen simultan die verschiedenen unbekannten Funktionen eingehen, genau wie solche für einzelne Differentialgleichungen mit der Methode der Integralgleichungen zu behandeln (vgl. etwa Hilbert, 5. und 6. Mitteil.; F. d. M. **37**, 358, 1906; **41**, 348, 1910). Ein besonderes Problem dieser Art behandelt die vorliegende Arbeit: Die Wärmeleitung zwischen zwei Körpern S, S', an deren gemeinsamer Grenzfläche ein Temperatursprung $V' - V$ gemäß der Poissonschen Bedingung

$$- k_1 \frac{\partial V}{\partial n} = k_2 \frac{\partial V'}{\partial n'} = q(V' - V)$$

stattfindet. Es wird angedeutet, wie man den Fall des stationären Wärmegleichgewichtes unter der Wirkung einer in S vorhandenen konstanten Wärmequelle durch Darstellung von V, V' durch Potentiale der Grenzflächen von S, S' auf simultane Integralgleichungen vom Fredholmschen Typus für die Flächendichten zurückführen kann, indem man V, V' als Potentiale von Belegungen der Grenzflächen von S, S' darstellt; aus einfachen potentialtheoretischen Umformungen wird geschlossen, daß die zugehörigen homogenen Gleichungen keine nichttriviale Lösung haben, wodurch die Lösbarkeit der Aufgabe verbürgt ist. Ganz analog wird der Fall der Wärmeleitung bei beliebig gegebenem Anfangszustand angesetzt; hier treten Integralgleichungen mit einem Parameter λ auf, und es werden die Koeffizienten der Entwicklung der Anfangswerte von V, V' nach den Eigenfunktionen formal bestimmt und demnach die formalen Reihen für die Lösungen angegeben.

Hng.

É. Picard. Remarque au sujet d'une équation intégrale considérée par M. Charlier. C. R. **157**, 813-814.

Charlier hat bemerkt, daß die Integralgleichung erster Art mit dem Kern $\frac{1}{\sqrt{1-x^2y^2}}$ (im Intervall 0 bis 1) für die Theorie der Refraktion von Bedeutung ist. Zu ihrer Lösung würde die Kenntnis der Eigenwerte und Eigenfunktionen dieses Kernes jedenfalls ausreichen, wie auch Picard (F. d. M. **40**, 400, 1909) bemerkt hat. Picard spricht nun in der vorliegenden Note die Hoffnung aus, daß der Reihenansatz $\varphi(y) = \sum A_n y^n$ ein System von unendlichvielen linearen Gleichungen für $A_0, A_1, \ldots$ liefern möchte, dessen abschnittsweise numerische Behandlung sich günstig gestaltet. T.

Ch. Müntz. Solution directe de l'équation séculaire et de quelques problèmes analogues transcendants. C. R. **156**, 43-46.

Ch. Müntz. Sur la solution des équations séculaires et des équations intégrales. C. R. **156**, 860-862.

Ist $A(x, x)$ eine definite quadratische Form, und wendet man auf irgendeine Stelle $x_1, \ldots, x_n$ die Substitution A, die dasselbe Koeffizientensystem hat wie jene Form, iterierend an, so konvergiert das Verfahren gegen die zum kleinsten Eigenwert gehörige Hauptachse; der Quotient der Quadratsummen homologer Zeilen von $A^{(n)}$ und $A^{(n+1)}$ konvergiert gegen das Quadrat des kleinsten Eigenwerts. Diese und einige weitere ähnliche Bemerkungen werden ohne Beweis mitgeteilt. T.

Weitere Literatur.

P. M. Batchelder. The divergent series satisfying linear difference equations of the second order. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 500-501.

P. M. Batchelder. The hypergeometric difference equation. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 501-502.

A. R. Schweitzer. Remarks on functional equations. Am. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 72.

K. P. Williams. Concerning second order difference equations and the Schwarzian difference. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 454-455.

R. D. Carmichael. On series of iterated linear fractional functions. Amer. M. S. Bull. (2) **20**, 63-64.

R. D. Carmichael. Some theorems on the convergence of series. Amer. M. S. Bull. (2) **20**, 64.

R. D. Carmichael. On non-homogeneous linear equations with an infinite number of variables. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 281.

G. C. Evans. On the reduction of certain types of integro-differential equations. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 289.

G. C. Evans. The Cauchy problem for integro-differential equations. Amer. M. S. Bull. (2) **20**, 67-68.

W. A. Hurwitz. Mixed linear integral equations with an infinite number of variables. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 281-282.

L. Ingold. Note on systems of integral equations. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 226.

A. C. Lunn. Integral equations in the kinetic theory of gases. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 455.

A. C. Lunn. An integral functional equation in the theory of Brownian movements. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 456.

E. B. Lyttle. Note on iterable fields of integration. Amer. M. S. Bull. (2) **20**, 61-62.

T. E. Mason. The character of the solutions of certain functional equations. Amer. M. S. Bull. (2) **20**, 65.

E. H. Moore. On nowhere negative kernels. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 287-288.

E. H. Moore. On a class of continuous functional operations associated with the class of continuous functions on a finite linear interval. (Preliminary communication.) Amer. M. S. Bull. (2) **20**, 70-71.

M. Sono. On permutable kernels of integral equations. Kyôto Univ. Mem. **5**, 83-96.

V. Volterra. Some integral equations. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 170-171.

E. J. Wilczynski. A new type of integral equations. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 450.

Kapitel 6.

Partielle Differentialgleichungen.

K. Ogura. Note on the integral curves of Pfaff's equation. Tôhoku Math. J. **4**, 10-15.

Der Verf. knüpft an den Lieschen Satz an, daß alle durch einen Punkt gehenden Kurven eines linearen Komplexes in diesem Punkte die Schmiegungsebene gemein haben. Er fragt nämlich nach allen Pfaffschen Gleichungen: $\xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz = 0$, deren Integralkurven diese Eigenschaft besitzen. Er findet 3 lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, denen ξ, η, ζ genügen müssen; die linearen Komplexe bilden darunter einen Spezialfall, der besonders einfach gekennzeichnet werden kann. Der Verf. betrachtet dann die Integralkurven der Pfaffschen Gleichung als die senkrechten Trajektorien der Kurvenkongruenz $dx/\xi = dy/\eta = dz/\zeta$ und drückt das gewonnene ana-

lytische Ergebnis geometrisch aus, indem er den von v. Lilienthal (F. d. M. **30**, 345, 1899) eingeführten Begriff geodätische Krümmung einer Trajektorie hinsichtlich der Kurvenkongruenz benutzt. El.

T. Yoshie. Über die charakteristische Mannigfaltigkeit der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Tokyo Journ. Coll. of Sc. **32**, 18 S.

Eine Fortsetzung der F. d. M. **34**, 380, 1903 besprochenen Arbeit. Die Differentialgleichungen der charakteristischen Mannigfaltigkeiten eines Systems: $F_\mu(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung werden durch Variation des Integrals:

$$\int_{t_0}^{t_1} [\lambda(z' - \sum_i^{1,\ldots,n} p_i x_i') + \sum_x^{1,\ldots,m} \lambda_x F_x] \, dt$$

gewonnen, wobei die Akzente Differentiationen nach t bedeuten. El.

T. Yoshie. Über die charakteristischen Streifen eines Systems der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit mehreren abhängigen Variablen. Tokyo Journ. Coll. of Sc. **36**, 6 S.

Der Verf. betrachtet ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit n unabhängigen Veränderlichen und m unbekannten Funktionen und gewinnt ähnlich wie in der vorstehend angezeigten Arbeit die Differentialgleichungen der Charakteristiken des Systems durch Variation eines Integrals. Er zeigt, daß die gefundenen Differentialgleichungen mit den von Hamburger in einem besonderen Falle und mit den von v. Weber im allgemeinen Falle aufgestellten übereinstimmen. El.

G. Kowalewski. Bemerkung über die Transformation der Laplaceschen Gleichung. Monatsh. f. Math. u. Phys. **24**, 183-184.

Die linke Seite der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta_2 \varphi = 0$ tritt als Faktor auf in dem Zuwachse, den das Volumenelement bei einer infinitesimalen Transformation von der Form:

$$Xf = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}$$

erhält. Da nun leicht zu übersehen ist, wie sich die Form von Xf bei dem Übergange von den rechtwinkligen zu beliebigen orthogonalen Koordinaten ändert, so läßt sich auch die neue Form, die $\Delta_2 \varphi$ dabei erhält, ohne weiteres hinschreiben. El.

K. Żorawski. Über Eigenschaften eines vielfachen Integrals, welche Verallgemeinerungen zweier Sätze der Theorie der Wirbelbewegung sind. Monatsh. f. Math. u. Phys. **24**, 277-299.

Ein Auszug aus einer 1902 erschienenen Arbeit des Verf., über die F. d. M. **33**, 357, 1902 kurz berichtet ist. Es werden die Bedingungen dafür aufgestellt, daß ein r-faches Integral in $n > r$ Veränderlichen bei einer infinitesimalen Transformation invariant bleibt. Sodann wird ein System von r Pfaffschen Gleichungen und die kovariante Schar von infinitesimalen Transformationen betrachtet: zu beiden steht ein gewisses r-faches Integral in Beziehung, das bei einer auf das Pfaffsche System ausgeführten Punkttransformation in einer ganz bestimmten, charakteristischen Weise transformiert wird; der Ausdruck unter den Integralzeichen multipliziert sich nämlich mit einem gewissen Faktor. Es ist das die Verallgemeinerung eines Satzes, den der Verf. 1900 in Bd. 34 der Krakauer Abhandlungen in der Arbeit: „Über die Erhaltung der Wirbelbewegungen" veröffentlicht hat. Schließlich wird die Frage behandelt, welche r-fachen Integrale bei einer vorgelegten Schar: $\varrho_1 X_1 f + \cdots + \varrho_{n-r} X_{n-r} f$ von infinitesimalen Transformationen (die ϱ_x sind willkürliche Funktionen) invariant bleiben. Es stellt sich heraus, daß dann die Gleichungen: $X_1 f = 0, \ldots, X_{n-r} f = 0$ ein $(n-r)$-gliedriges vollständiges System bilden müssen, und daß der Ausdruck unter den Integralzeichen den Lieschen Multiplikator dieses vollständigen Systems als Faktor enthält. El.

P. Zervos. Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre à trois variables indépendantes. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 415-417.

Wie man der Integration jeder partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln die Integration einer Mongeschen Gleichung $f(x, y, z, y', z') = 0$ zuordnen kann, so zeigt Verf., daß man auch einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit drei unabhängigen Variabeln eine Mongesche Gleichung zweiter Ordnung zuordnen kann, indem man von einem vollständigen Integral der Gleichung ausgeht. A. K.

Montel. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles au point de vue des variables réelles. S. M. F. C. R. 1913, 51-52.

Baire hat die Frage aufgeworfen, ob für eine partielle Differentialgleichung außer den Lösungen, die durch die klassischen Methoden geliefert werden, welche die Stetigkeit der benutzten Derivierten voraussetzen, noch eine andere Lösung existiere. Für die Differentialgleichung

$$F(z) = A(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}$$

hat Baire bewiesen, daß unter der Voraussetzung, daß die Funktion in bezug auf den Inbegriff der beiden Veränderlichen stetig ist, es keine andere Lösung gibt als die klassische. Der Verf. zeigt, daß dies allgemein gilt. Lp.

F. Sibirani. Sull' integrazione di un tipo di equazioni alle derivate parziali. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 271-276.

Fortsetzung der Existenzbeweise für Lösungen partieller Differentialgleichungen von besonderer Art (vgl. F. d. M. **39**, 425, 1908 u. **40**, 423, 1909). Für ein System von Gleichungen des früheren Typus, bei welchem die Ableitungen, für die sie gelöst sind, von der Form $\frac{\partial^2 r_i z_i}{\partial x^{r_i} \partial y^{r_i}}$ sind, beweist der Verf. hier die Existenz eines Systems von Lösungen, die nebst den Ableitungen $\frac{\partial^2 p_i z_i}{\partial x^{p_i} \partial y^{p_i}}$ mit vorgegebenen Funktionen auf zwei zu den Achsen parallelen Geraden zusammenfallen; außerdem die Einzigkeit dieses Systems von Lösungen, wenn die Lipschitzsche Bedingung für die beiden Seiten der Gleichungen erfüllt ist."

Lp.

M. Janet. Sur les caractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles. C. R. **156**, 118-121.

Verf. untersucht, was man unter den charakteristischen Mannigfaltigkeiten bei einem System von partiellen Differentialgleichungen verstehen soll, weil dies bei dem Existenzbeweis für das allgemeine Integral von Wichtigkeit ist.

Fs.

M. Janet. Existence et détermination univoque des solutions des systèmes d'équations aux dérivées partielles. C. R. **157**, 697-700.

Verf. zeigt die Existenz der Lösungen eines beliebigen Systems von partiellen Differentialgleichungen, die zum ersten Male in dem Buche von Riquier (Les systèmes d'équations aux dérivées partielles. Paris: Gauthier-Villars, 1909; F. d. M. **40**, 411) bewiesen worden ist, durch ein Rekursionsverfahren. Die Eindeutigkeit der Lösungen bei gewissen Anfangsbedingungen, die bisher nur für lineare Cauchysche Systeme bewiesen war, wird für allgemeine lineare Systeme erhärtet.

Fs.

E. Vessiot. Sur la réductibilité des systèmes différentiels. C. R. **157**, 1053-1055.

Verf. zeigt, wie die Theorie der Reduktibilität der Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial t} = W(t \mid x_1, x_2, \ldots, x_n, z \mid p_1, p_2, \ldots, p_n), p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i},$$

die er schon früher (C. R **148**; F. d. M. **40**, 356, 1909) gegeben hat, mittels der neuen Gedanken, die er über die Reduktibilität vollständig integrierbarer Pfaffscher Systeme (C. R. **150**, 1662-1664; F. d. M. **41**, 419, 1910 und Ann. de l'Éc. Norm. (3) **29**, 209-278; F. d. M. **43**, 376, 1912) gegeben hat, direkt in Angriff genommen werden kann.

Fs.

Ét. Delassus. Sur les systèmes de Lagrange à paramètre principal. S. M. F. Bull. **41**, 126-146.

Ein System S_2 von n Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die n Parameter $a, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ als Funktionen von t definieren, soll zum „Hauptparameter" a gehören, wenn es n erste Integrale $\theta_1 = C_1, \ldots, \theta_n = C_n$ von der Art besitzt, daß darin die Nebenparameter b nur in ihren Ableitungen b' vorkommen. Die Elimination der b' aus diesen Gleichungen liefert die Hauptgleichung $F(a, a', t, C_1, \ldots, C_n) = 0$. Verf. beschäftigt sich mit dem Falle, wo die Hauptgleichung von t unabhängig ist, welcher Fall bei den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen auftritt, wenn das System solchen Kräften unterliegt, die nur von der Lage abhängen. Fs.

Gunther. Sur les caractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles. C. R. **156**, 1147-1150.

Verf. bemerkt, daß sich nicht alle Systeme partieller Differentialgleichungen nach den Methoden behandeln lassen, die Delassus in seinen beiden Abhandlungen angegeben hat: „Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles" und „Sur les systèmes algébriques et leurs relations avec certains systèmes d'équations aux dérivées partielles". Ausgehend von den Systemen S im Kap. X des Buches von Riquier „Les systèmes d'équations aux dérivées partielles", beschäftigt er sich mit der Erweiterung des Begriffes der Charakteristiken für das Integralsystem, das zu einem System von partiellen Differentialgleichungen gehört. Fs.

Robinson. Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles. C. R. **157**, 106-108.

Im Anschluß an die Note von Gunther (Referat vorstehend) zeigt der Verf. die Existenz einer kanonischen Form, die allgemeiner ist als die von Delassus, und in die jedes System von partiellen Differentialgleichungen übergeführt werden kann. Sodann beschäftigt er sich mit der Überführung des Ausdrucks $E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$ in $dx^2 + 2\dfrac{\partial w_3}{\partial x}dx\,dy + 2\dfrac{\partial w_3}{\partial y}dy^2$, wo w_3 eine zu bestimmende Funktion bedeutet. Fs.

L. B. Robinson jr. Passivity conditions of systems of partial differential equations. Johns Hopkins Univ. Circ. 1913, Nr. 7, 47-50.

Verf. gibt die Ausdehnung eines Satzes von Riquier (aus dem Buche „Les systèmes d'équations aux dérivées partielles". Paris: Gauthier-Villars 1909, p. 470) über die Frage nach der notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, daß ein System von partiellen Differentialgleichungen regulär ist. Es wird der Fall, daß nicht alle abhängigen Variablen verschieden sind, behandelt. Fs.

G. Sannia. Caratteristiche multiple di un' equazione alle derivate parziali in due variabili indipendenti. Torino Atti **48**, 236.

G. Sannia. Propriétés nouvelles des caractéristiques des équations partielles linéaires du premier ordre en deux variables. C. R. **156**, 605-608.

Verf. zeigt, wie ein Satz von Darboux (Leç. sur la théorie générale des surfaces 2, 3) als spezieller Fall eines allgemeineren Theorems angesehen werden kann. — a) Das nicht harmonische Doppelverhältnis von 4 Charakteristiken der Ordnung $m \geqq 1$ für die Gleichung $P(x, y, z)\, p_{10} + Q(x, y, z)\, p_{01} - R(x, y, z) = 0$, die ein und dieselbe Charakteristik der Ordnung $m-1$ enthalten, ist konstant. b) Wenn 4 Flächen einer Kurvenkongruenz eine Berührung der Ordnung $m - 1 \geqq 0$ längs einer Kurve der Schar aufweisen, so ist das nicht harmonische Doppelverhältnis der Elemente m-ter Ordnung der 4 Flächen längs dieser Kurve konstant. — Im Falle $m = 1$ ergibt sich das Theorem von Darboux. — Die Theoreme gelten auch noch für eine Gleichung n-ter Ordnung, wenn $m - 1 \geqq n$ ist. Fs.

J. H. Peek. On an elementary method of deducing the characteristics of the partial differential equation of the second order

$$T_1 t_1 + T_2 t_2 + T_3 t_3 + S_1 s_1 + S_2 s_2 + S_3 s_3 + U_1(t_2 t_3 - s_1^2) + U_2(t_3 t_1 - s_2^2) + U_3(t_1 t_2 - s_3^2) + U_4(t_1 s_1 - s_2 s_3) + U_5(t_2 s_2 - s_3 s_1) + U_6(t_3 s_3 - s_1 s_2) + V = 0.$$

Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 422-430.

In der Gleichung sind x, y, z die drei unabhängigen Variablen, und wenn h die gesuchte Funktion bedeutet,

$$p = \frac{\partial h}{\partial x}, q = \frac{\partial h}{\partial y}, r = \frac{\partial h}{\partial z}, t_1 = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, t_2 = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2},$$
$$t_3 = \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}, s_1 = \frac{\partial^2 h}{\partial y\, \partial z}, s_2 = \frac{\partial^2 h}{\partial z\, \partial x}, s_3 = \frac{\partial^2 h}{\partial x\, \partial y};$$

die Koeffizienten sind Funktionen von x, y, z, p, q, r. Es wird gezeigt, daß die Lösung von der Form ist: $h = \Phi(u, v, w)$, wo u, v, w die Integralfunktionen eines Charakteristikensystems vorstellen. Die Existenz der Lösung ist an mehrere Bedingungen gebunden, welche für die Koeffizienten bestehen müssen. A. K.

P. E. Gau. Sur les transformations les plus générales des équations aux dérivées partielles du second ordre. C. R. **156**, 116-118.

Verf. geht aus von den Funktionen x, y, z, x', y', z' der beiden Variablen u und v und von einem System von Gleichungen $F_\alpha(x, y, z, \xi, \eta, \zeta;\, x', y', z', \xi', \eta', \zeta') = 0$, wo durch die griechischen Buchstaben die Ableitungen bis zu einer endlichen Ordnung hin angedeutet sind. Durch das System wird jeder

Fläche S', $z' = z'(x, y)$ eine Schar von Flächen S, $z = z(x, y)$ zugeordnet. Um sie zu erhalten, setzt man z. B. $x' = u$, $y' = v$, so wird aus dem Gleichungssystem ein System von partiellen Differentialgleichungen für die Funktionen x, y, z der beiden Variablen x', y'. Jede Lösung dieses Systems wird eine Fläche S darstellen. Ebenso kann man jedem S eine Schar von S' zuordnen. Im allgemeinen wird das Gleichungssystem und unter gewissen Bedingungen (E'), bzw. (E) beim Übergang von S zu S' eine Lösung zulassen. Verf. nimmt hier an, daß die Systeme (E) und (E') nur je eine Gleichung $f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ und $f'(x', y', z', p', q', r', s', t') = 0$ enthalten, und diskutiert diese allgemeine Transformation von zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Fs.

J. Clairin. Sur les invariants des caractéristiques des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. C. R. **156**, 760-762.

Verf. vervollständigt ein Resultat von Gau (Journ. de Math. (6) **7**, 139; F. d. M. **42**, 389, 1911). Er bestimmt die Form des Nenners desjenigen Ausdrucks, in den jede Invariante eines Charakteristikensystems der Gleichung $v + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0$, deren Ordnung 3 nicht übersteigt, gebracht werden kann. Fs.

J. Clairin. Sur la transformation d'Imschenetsky. S. M. F. Bull. **41**, 206-228.

Es handelt sich um die genauere Ausführung einer in der Note (C. R. **154**, 1579-1581; F. d. M. **43**, 445, 1912) kurz erörterten Aufgabe: Gibt es Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln, aus denen mit Hülfe Bäcklundscher Transformationen erster Art eine doppelt unendliche Reihe analoger Gleichungen abgeleitet werden kann, ähnlich wie es die Laplacesche Transformation für lineare Gleichungen leistet? Es wird nur der Fall behandelt, daß bei der Transformation die unabhängigen Variablen erhalten bleiben. Fs.

J. Clairin. Sur quelques points de la théorie des transformations de Bäcklund. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **30**, 173-192.

Weitere Ausgestaltung der in den C. R. **153**, 39-40 (F. d. M. **42**, 390, 1911) gefundenen Ergebnisse. Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen, die ein System von Charakteristiken erster Ordnung besitzt, kann mittels einer Bäcklundschen Transformation (B_1) erster Ordnung hergeleitet werden. Die Definitionsgleichungen dieser (B_1) enthalten zwar willkürliche Funktionen, doch ändert sich die Transformation nicht, wenn die willkürlichen Funktionen geändert werden, oder besser die Änderung der willkürlichen Funktionen entspricht nur einer Berührungstransformation. Eine Ausnahme bilden diejenigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die ein von einer willkürlichen Funktion abhängiges Zwischenintegral erster Ordnung besitzen. Sk.

T. LEVI-CIVITA. Sulla trasformazione delle equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine. Ven. Ist. Atti **72** [(8) **15**], 1331-1357.

Verf. beschäftigt sich mit dem Gleichungstypus

$$\sum_1^n {}_{rs} A^{(rs)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_r \, \partial x_s} + \sum_1^n {}_r B_r \frac{\partial u}{\partial x_r} = 0.$$

Die schon von Cotton (Ann. de l'Éc. Norm. (3) **17**, 211-244; F. d. M. **31**, 379, 1900) behandelten Aufgaben, die Invarianten der Gleichung gegenüber jeder Transformation der unabhängigen Variablen anzugeben und die Äquivalenz zwischen zwei Gleichungen derselben Form durch Transformation der unabhängigen Variablen zu untersuchen, wird mit neuen Methoden wieder aufgenommen. Fs.

J. R. WILTON. Note on the solution of a certain partial differential equation. Messenger (2) **42**, 134*-137*.

In manchen Fällen kann man aus einem vollständigen Integral einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, d. h. einem solchen, das fünf willkürliche Konstanten enthält, die allgemeine Lösung erhalten; ein solches Beispiel ist

$$\Phi(r,\ s,\ t,\ p - rx - sy,\ q - sx - ty,\ 2z - 2px - 2qy + rx^2 + 2s\,xy + ty^2) = 0,$$

wo Φ eine willkürliche funktionale Form ist. Dies wird näher begründet. Lp.

J. R. WILTON. Note on the solution of the differential equation $r = f(t)$. Messenger (2) **43**, 58-63.

„Es ist mir unmöglich gewesen, irgendeine Hinweisung auf Lösungen der Differentialgleichung $\partial^2 z/\partial x^2 = f(\partial^2 z/\partial y^2)$, d. h. $r = f(t)$ zu finden, mit Ausnahme einiger besonderer Fälle. Obgleich die allgemeine Lösung ein verwickeltes Aussehen hat, ist sie doch sehr einfach zu erhalten, und man kann schwerlich glauben, sie sei der Beobachtung entgangen; aber es findet sich in keinem Buche oder Artikel, die mir zugänglich sind, ein Hinweis auf die Deutung. Doch habe ich die Legendresche Originalabhandlung über die Gleichung $f(r, s, t) = 0$ in L'Histoire de l'Académie des Sciences für 1787 nicht eingesehen." Die Rechnung folgt der Methode von Legendre. Lp.

J. R. WILTON. On the solution of an equation of the form $F(r, s, t) = 0$. Messenger (2) **43**, 92-96.

Zuerst werden die Ergebnisse aufgezählt, die F. de Boer in seiner Abhandlung „Toepassing van de methode van Darboux op de differentiaalvergelijking $s = f(r, t)$" gewonnen hat (F. d. M. **23**, 399, 1891). Danach wird gezeigt, daß die Gleichung, welche durch Elimination von m aus $r + ms = f(m)$, $t + m/s = g(m)$ entsteht, wo f und g willkürliche Funktionen des Argumentes m

sind, nach derselben Methode lösbar ist, obwohl sie nicht in der de Boerschen Liste enthalten ist; sie müsse daher unter einer Reihe von Resultaten dieser Liste enthalten sein, deren endgültige Form daselbst nicht aufzufinden sei.

Lp.

C. Guichard. Sur une classe particulière d'équations de M. Moutard. C. R. **156**, 748-751.

Bei der Aufsuchung der Gleichungen von der Form $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = M\theta$, mit 6 Lösungen $\theta_1, \ldots, \theta_6$, welche die Bedingungen

$$\Sigma\theta_i^2 = 1,\ \Sigma\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial u}\right)^2 = 0,\ \Sigma\left(\frac{\partial^2\theta_i}{\partial u^2}\right)^2 = 0,\ \Sigma\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial v}\right)^2 = 0,\ \Sigma\left(\frac{\partial^2\theta_i}{\partial v^2}\right)^2 = 0$$

erfüllen, geht der Verf. von einer gewissen Determinante aus, zwischen deren Elementen Beziehungen bestehen, und die als Funktionen von u und v gewissen Differentialgleichungen genügen. Die Bedeutung der Lösung wird geometrisch im 6-dimensionalen Raum verfolgt.

Fs.

E. Pasquino. Sulla integrazione col metodo delle caratteristiche delle equazioni differenziali a derivate parziali del 2° ordine a n variabili indipendenti. Batt. G. **51**, [(3) **4**], 127-148.

Die vorliegende Dissertation beschäftigt sich mit der Theorie der Zwischenintegrale bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Hülfe der Charakteristiken erster Ordnung. Im ersten Kapitel werden die Gleichungen der Charakteristiken für eine lineare Gleichung zweiter Ordnung aufgestellt; dabei wird eine Eigenschaft der Systeme von Charakteristiken erörtert und eine Anwendung auf eine Gleichung mit drei unabhängigen Variablen gemacht. Im zweiten Kapitel folgt die Behandlung einer nichtlinearen Gleichung zweiter Ordnung mit 3 unabhängigen Variablen; die erhaltenen Resultate werden mit den von Vivanti auf anderem Wege erhaltenen verglichen.

Fs.

E. Pasquino. Sulle equazioni a derivate parziali di Monge-Ampère a n variabili indipendenti. Lomb. Ist. Rend. (2) **46**, 968-980.

Die Arbeit knüpft an die vorstehend besprochenen Untersuchungen an und zeigt, wie durch analoge Methoden für eine nichtlineare Gleichung zweiter Ordnung mit n Variablen vom Monge-Ampèreschen Typus zwei Systeme von Charakteristiken erster Ordnung erhalten werden können. Die Resultate werden mit den von Goursat auf anderem Wege erhaltenen verglichen.

Fs.

A. M. Molinari. Sopra alcuni diversi casi d' integrazione della $\Delta^2 = 0$ nel parallelepipedo rettangolo e nella piastra isotropa. Batt. G. **51** [(3) **4**], 1-40.

Im ersten Teil werden einige Betrachtungen über die Methode der Spiegelung von Lord Kelvin angestellt, und es wird eine der Greenschen analoge Funktion unter allgemeinerer Voraussetzung aufgestellt. Alsdann wird mit der Methode der Spiegelung die Greensche Funktion für ein rechtwinkliges Parallelepiped durch eine dreifache konvergente Reihe dargestellt, und es werden für dasselbe Problem Funktionen angegeben, die der ersten Hülfsfunktion analog sind. Fs.

T. Astuti. Sull' integrazione della Δ_4. Rom. Acc. L. Rend. **22**$_1$, 145-146.

Die Methode von Orlando, durch welche die Integration von Δ_4 auf die von Δ_2 und die Lösung einer Fredholmschen Integralgleichung zurückgeführt wird, hält, wie schon E. E. Levi bemerkt hat, der Kritik nicht völlig stand. Verf. will in der vorliegenden Note andeuten, wie die Methode in einfacher Weise streng gestaltet werden kann. Fs.

G. Tzitzéica. Sur les réseaux réciproquement dérivés. C. R. **156**, 666-689.

Es seien $x_1, \ldots, x_{n+1}$ Funktionen, die der Laplaceschen Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} + a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v} + cx = 0$$

genügen. Sei

$$(2) \qquad x' = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial x}{\partial v} + rx.$$

Die rechte Seite dieser Beziehung möge für zwei partikulare Lösungen von (1) identisch verschwinden. Dem Punkte mit den projektiven Koordinaten $x_1, \ldots, x_{n+1}$ läßt (2) einen Punkt mit den projektiven Koordinaten $x'_1, \ldots, x'_{n+1}$ entsprechen. Es gilt

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 x'}{\partial u\, \partial v} + a'\frac{\partial x'}{\partial u} + b'\frac{\partial x'}{\partial v} + c'x' = 0,\quad a' - a + \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial v} = 0,$$
$$b' - b + \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial u} = 0.$$

Der Verf. untersucht den besonderen Fall, daß neben (1) und (2) Beziehungen der Form

$$(4) \qquad x_i = p'\frac{\partial x'_i}{\partial u} + q'\frac{\partial x'_i}{\partial v} + r'x'_i \quad (i = 1, \ldots, n+1)$$

bestehen, wobei die rechte Seite für zwei partikulare Lösungen von (3) identisch verschwindet. Ltn.

M. Kössler. Über die zonale harmonische Funktion. Časopis **42**, 337-343. (Böhmisch.)

Das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0$$

kann man darstellen als ein bestimmtes Integral in der Form

$$\varphi(r,z)=\int\limits_0^\pi \Phi_1(r\sin\vartheta,z)\,d\vartheta,$$

wobei $\Phi_1(r,z)$ eine beliebige harmonische Funktion der Veränderlichen r, z ist.

Pe.

H. Block. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à caractéristiques multiples. Troisième note. Ark. f. Math., Astr. och Fys. **8**, Nr. 23, 51 S.

Fortsetzung zweier Abhandlungen gleichen Titels in Bd. **7**, Nr. 13 u. 21 desselben Archivs (F. d. M. **43**, 455, 1912). Dort wurde die Grundlösung der Gleichungen von der Form

$$(1)\qquad \frac{\partial^p z}{\partial x^p}+A\frac{\partial^q z}{\partial z^q}=0$$

unter der Voraussetzung untersucht, daß p und q keinen Faktor gemeinschaftlich haben. Jetzt wird von dieser Voraussetzung abgesehen. Ist $\varkappa$ der größte gemeinsame Teiler von p und q, also $p=m\varkappa$, $q=n\varkappa$ $(m>n)$, so wäre nun die bloße Behandlung der Gleichung (1) eine unnötige Beschränkung. Die Gleichung ist ein Sonderfall der allgemeineren:

$$(2)\quad \frac{\partial^p z}{\partial x^p}+A_1\frac{\partial^{p-m+n} z}{\partial x^{p-m}\,\partial y^n}+A_2\frac{\partial^{p-2m+2n} z}{\partial^{p-2m} n\,\partial^{2n} y}+\cdots+A_n\frac{\partial^q z}{\partial y^q}=0.$$

Diese Gleichung bildet den Gegenstand der Untersuchung des ersten Kapitels, die von dem Verfahren von Green ausgeht und die Ergebnisse der früheren Noten benutzt. Unter den hierher gehörigen Gleichungen ist die in der Elastizitätstheorie vorkommende Gleichung $\partial^4 z/\partial x^4+\partial^2 z/\partial y^2=0$ zu nennen.

Um die früher erhaltenen Ergebnisse näher zu beleuchten, wendet der Verf. sie im zweiten Abschnitt auf besondere Fälle an. Die Gleichungen mit doppelten Charakteristiken werden bei der Gleichung für die Fortpflanzung der Wärme behandelt, wenigstens wenn die Gleichung nur ein System doppelter Charakteristiken besitzt und außerdem reelle und einfache Charakteristiken. Ohne diesen Fall zu berücksichtigen, geht der Verf. auf die linearen Gleichungen mit dreifachen Charakteristiken ein und beschränkt sich unter ihnen auf die Gleichungen dritter Ordnung. Durch eine passende Wahl der unabhängigen Veränderlichen werden die Charakteristiken auf die Geraden $y=$ const. zurückgeführt, und die Gleichung nimmt die Form an:

$$(18)\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+d\frac{\partial z}{\partial x}+e\frac{\partial z}{\partial y}+f,$$

wo $a, b, \ldots, f$ Funktionen von x und y sind.

Von den unter (18) enthaltenen Gleichungen behandelt der Verf. folgende Fälle:

1. $b = c = 0$, $e \neq 0$. Die Gleichung (19) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial z}{\partial y}$ ist ein typischer Fall.

2. $b \neq 0$, $c = 0$. Dieser Typus wird vertreten durch (20) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

3. $b = 0$, $c \neq 0$. Einfachste Gleichung (21) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Für jede dieser Gleichungen werden einige Integrationsprobleme gelöst, die zwar nicht die allgemeinsten möglichen Probleme sind, aber doch eine gute Vorstellung von der Natur der in Rede stehenden Gleichungen geben.

Lp.

H. Block. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à caractéristiques multiples. Quatrième note. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. **9**, Nr. 8, 15 S.

In der vorstehend angezeigten Abhandlung ist die Grundlösung der Differentialgleichung (2) unter der Annahme hergeleitet, daß die Gleichung

$$a^k + A_1 a^{k-1} + \cdots + A_k = 0$$

nur einfache Wurzeln besitzt. Doch ist dabei ein Fall unbeachtet geblieben, wenn nämlich bei ungeradem m und n diese Gleichung imaginäre Wurzeln hat. Diese Lücke der Behandlung wird nun ausgefüllt.

Lp.

M. Gevrey. Sur la nature des solutions de certaines équations aux dérivées partielles. C. R. **156**, 528-531.

M. Gevrey. Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique. Journ. de Math. (6) **9**, 305-471; **10**. 105-148 (1914); Thèse Paris: Gauthier-Villars. 211 S. 4°.

Die vorliegende Arbeit enthält die Ausführung der vom Verf. in mehreren Noten (C. R. **151**, 428-431, 1910; **152**, 1564-1566, 1911; **154**, 1785-1788, 1912; **156**, 528-531) gegebenen Sätze über partielle Differentialgleichungen vom parabolischen Typus; das vorliegende Journalheft enthält die drei ersten Kapitel. — Es werden drei Gleichungsformen betrachtet:

$$(E) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x} + cz + f,$$

$$(E_1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$(E_2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Das Verhalten von $\frac{\partial z}{\partial x}$, und für (E_2) auch von $\frac{\partial z}{\partial y}$, am Rande des betrachteten Gebietes wird untersucht. Durch eine Transformation $x' = \frac{l[x - X_1(y)]}{X_2(y) - X_1(y)}$ können die Gleichungen in solche derselben Form übergeführt werden, während der Rand C des Gebietes in ein Rechteck $A_1 A_2, x' = 0, x' = l$ übergeht. Dadurch wird die Frage vereinfacht; aus diesem Grunde hat Verf. hinter das dritte Kapitel seiner Arbeit eine Spezialnote über rechteckige Begrenzungen gestellt. Die Bedingungen (sie werden (A) genannt) dafür, daß die Ableitungen $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial Z}{\partial y}$ der Funktion Z existieren und die Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y)$ erfüllen, werden erörtert, und dann wird eine Ausdehnung des Symbols $\delta Z = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{\partial Z}{\partial y}$ gegeben. Wenn Z einfach integrierbar ist, genügt Z Wachstumsbedingungen, die den von Dini im Falle des Potentials gegebenen analog sind.

Die Lösung der Gleichung (E) mit Grenzbedingungen wird durch eine Integraldifferentialgleichung gegeben, die sich in gewissen Fällen in eine gewöhnliche Integralgleichung umwandeln läßt. Durch diese Betrachtungen sind auch die Grundlagen für die Behandlung von (E_1) geschaffen. Die Schwierigkeiten, die die Methode der sukzessiven Annäherungen bei (E_2) darbietet, wird durch die Methode der „accroissements" gelöst; sie hat Ähnlichkeit mit der beim elliptischen Typus von Bernstein angewendeten, bei der $f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ in die Form $r + t = \varphi(x, y, z, p, q, r, s, t)$ gebracht wird.

Die regulären Lösungen der Gleichung der Wärmeleitung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$ sind in bezug auf x analytisch, in bezug auf y von einer gewissen Natur, die Verf. durch die Bezeichnung „Funktionen H" ausdrückt, und die Holmgren bei der Fortsetzung der Lösungen dieser Gleichung verwendet hat. Verf. zeigt, daß, wenn die Koeffizienten von (E) in y von der Natur H sind, sich jede ihrer regulären Lösungen derselben Eigenschaft erfreut, und daß dasselbe auch für die Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz + f = 0$ gilt, wenn b ein konstantes Zeichen behält. Wenn die Koeffizienten dieser Gleichung in x und y von der Natur H sind, so nimmt jede reguläre Lösung auf einer Kurve $x = X(y)$, wo X eine Funktion H ist, Werte an, die eine Funktion H von y definieren. Eine solche Kurve wird eine Kurve H genannt. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Lösung z, die in einem Gebiete regulär ist, das teilweise von einer Kurve H begrenzt wird, über diese Kurve hinaus fortgesetzt werden kann, ist die, daß z auf dieser Kurve eine Wertenfolge hat, die eine Funktion H von y darstellt. Die Koeffizienten der Gleichung werden dabei von der Natur H angenommen. Diese Resultate stützen sich auf die Lösung des Cauchyschen Problems. Am Schlusse des 3. Kapitels zeigt Verf., daß die Aufgabe, eine in x und y analytische Lösung der Wärmeleitungsgleichung zu finden, die auf zwei sich schneidenden Kurven eine analytische Wertenfolge annimmt, im allgemeinen nicht lösbar ist, im Gegensatze zu der entsprechenden Aufgabe bei einer großen Anzahl anderer Gleichungen. Fs.

M. Gevrey. Sur les fonctions indéfiniment dérivables de classe donnée et leur rôle dans la théorie des équations partielles. C. R. **157**, 1121-1124.

Eine nebst ihren Ableitungen aller Ordnungen in dem Intervalle (α, β) stetige Funktion $\varphi(x)$ gehört daselbst der Klasse λ an, wenn

$$\left|\frac{d^n\varphi}{dx^n}\right| < M\,\frac{\Gamma(\lambda n)}{R^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ist, unter Γ die Eulersche Gammafunktion verstanden. Eine Funktion der Klasse λ gehört zugleich allen Klassen der Ordnung $> \lambda$ an. Funktionen der Klasse 1 sind analytisch; Funktionen einer Klasse $\lambda < 1$ sind ganze transzendente Funktionen der Ordnung $\leqq \frac{1}{1-\lambda}$. Ist die Funktion $\Phi(x_1, \ldots, x_p)$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiete D nebst ihren partiellen Ableitungen aller Ordnungen stetig, und ist

$$\left|\frac{\partial^{n_1+n_2+\cdots+n_p}\Phi}{\partial x_1^{n_1}\partial x_2^{n_2}\ldots\partial x_p^{n_p}}\right| < M\,\frac{\Gamma(\lambda_1 n_1)\ldots\Gamma(\lambda_p n_p)}{R_1^{n_1}\ldots R_p^{n_p}},$$

so gehört Φ in bezug auf $x_1, x_2, \ldots, x_p$ entsprechend den Klassen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ an. Ist λ die größte der Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, so ist einfach Φ von der Klasse λ in bezug auf die Gesamtheit der unabhängigen Variabeln.

Der Verf. gibt einige Sätze an über den analytischen Charakter der Lösungen partieller Differentialgleichungen vom elliptischen und parabolischen Typus:

$$(1) \qquad r + t = F(x, y, z, p, q),$$

$$(2) \qquad r - q = f(x, y, z, p, q),\; p = \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Gehört z. B. F in bezug auf x der Klasse $\alpha \geqq 1$ an, in bezug auf y der Klasse $\beta \geqq 1$, in bezug auf die Gesamtheit der Variabeln z, p, q der Klasse $\gamma = \operatorname{Min}(\alpha, \beta)$, so ist jede nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung der Differentialgleichung (1) in bezug auf x von der Klasse α, in bezug auf y von der Klasse β. Ltn.

T. H. Gronwall. Some special boundary problems in the theory of harmonic functions. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 227-233.

In der Abhandlung „Le problème de Dirichlet dans une aire annulaire“ (Palermo Rend. **33**, 134-174; F. d. M. **43**, 490, 1912) ist Villat zu folgendem Ergebnis gelangt: Wenn $u(\varrho, \theta)$ eine eindeutige und regelmäßige harmonische Funktion innerhalb des Kreisringes $R > \varrho > r$ ist mit den Grenzbedingungen $u(R, \theta) = \Phi(\theta)$, $u(r, \theta) = \Psi(\theta)$, wo $\Phi(\theta)$ und $\Psi(\theta)$ für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ integrierbar sind und der Bedingung $\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\,d\theta$ genügen, die für die Eindeutigkeit von $u(\varrho, \theta)$ notwendig ist, so wird diese Funktion gegeben durch:

$$u(\varrho, \theta) + iv(\varrho, \theta) = \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \Phi(\alpha) \frac{\sigma'}{\sigma} \left(\frac{\omega}{i\pi} \log \frac{\varrho}{R} + \frac{\omega}{\pi}(\theta - \alpha)\right) d\alpha$$

$$- \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \Psi(\alpha) \frac{\sigma_3}{\sigma_3} \left(\frac{\omega}{i\pi} \log \frac{\varrho}{R} + \frac{\omega}{\pi}(\theta - \alpha) \, d\alpha,\right.$$

wo σ und σ_3 die elliptischen Sigmafunktionen von Weierstraß sind; die Perioden ω und ω' genügen den Bedingungen: ω und ω'/i sind reell, $\omega'/i\omega = \frac{1}{\pi} \log \frac{R}{r}$. Villats Beweis beruht auf einer etwas umständlichen Erörterung der beiden Integrale in jener Darstellung und ähnelt der gewöhnlichen Behandlung des Poissonschen Integrals. Fejér hat das Dirichletsche Problem für einen Kreisring ohne Benutzung des Poissonschen Integrals gelöst („Untersuchungen über trigonometrische Reihen". Math. Ann. 58, 61-69; F. d. M. **34**, 287, 1903). In der vorliegenden Arbeit erweitert der Verf. das Verfahren von Fejér, um zu den Ergebnissen von Villat (und den entsprechenden im dreidimensionalen Raum) zu gelangen; dies gelingt auf einem beträchtlich kürzeren Wege als bei Villat. Lp.

H. Lebesgue. Sur l'équivalence du problème de Dirichlet et du problème du calcul des variations considéré par Riemann. S. M. F. C. R. 1913, 48-50.

An die Stelle des Dirichletschen Problems, eine harmonische Funktion in einem beschränkten Bereiche D zu finden, die auf dem Rande F von D gegebene stetige Werte annimmt, hat Riemann die Untersuchung einer in D und auf F stetigen Funktion gesetzt, die in D differenzierbar ist, auf F gegebene Werte annimmt und ein Integral zu einem Minimum macht, das in dem Falle zweier Veränderlichen so aussieht:

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = I(f).$$

Hadamard hat einen Fall angegeben, in welchem die beiden Probleme nicht gleichwertig sind, nämlich den, wo das Riemannsche Integral für keine der Funktionen des betrachteten funktionalen Gebietes einen Sinn hat. Bei den anderen Fällen sind die beiden Probleme zwar gleichwertig, aber der klassische Beweis ist nicht ganz genügend; er benutzt nämlich die auf den Bereich D angewandte Greensche Formel, und dies setzt voraus, daß F eine Normale hat, und daß die Funktionen, mit denen man es zu tun hat, gewisse Derivierte auf F haben. Der Verf. hat auf diese Schwierigkeit schon in Palermo Rend. hingewiesen und zeigt hier, wie man sie beseitigen kann. Lp.

Ch. Riquier. Sur l'existence d'intégrales satisfaisant à des conditions données le long d'un contour. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **30**, 9-52.

Die Abhandlung beschäftigt sich mit Lösungen der Systeme analytischer und regulärer linearer partieller Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln, die nebst einer Anzahl ihrer partiellen Ableitungen in der Richtung der Normale auf einer gegebenen geschlossenen analytischen und regulären Linie S vorgeschriebene analytische und reguläre Werte annehmen und sich in einem S enthaltenden ringförmigen Gebiet $\mathfrak{T}$ regulär verhalten. Das System der Normalen kann man durch eine beliebige Schar von Kurven ersetzen, die mit S von Null verschiedene Winkel einschließen.

Sei k_i $(i = 1, \ldots, g)$ die Ordnung des Systems in bezug auf die Funktion u_i $(i = 1, \ldots, g)$. Zerfällt eine gewisse leicht angebbare Form der Variabeln X und Y vom Grade $k_1 + k_2 + \cdots + k_g$ in lauter imaginäre Geraden, so haben die vorliegenden Differentialgleichungen ein und nur ein System von Lösungen, die nebst ihren partiellen Ableitungen in der Richtung der Normale bis zur Ordnung $k_i - 1$ $(i = 1, \ldots, g)$ einschließlich auf S vorgeschriebene analytische und reguläre Werte annehmen und sich in $\mathfrak{T}$ regulär verhalten. Ist insbesondere $g = 1$, liegt also eine Differentialgleichung

$$A_0 \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} + A_1 \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n-1} \partial y} + \cdots + A_n \frac{\partial^{2n} u}{\partial y^{2n}} + \cdots = 0$$

vor, so lautet die charakteristische Form

$$A_0 X^{2n} + A_1 X^{2n-1} Y + \cdots + A_{2n} Y^{2n} = 0.$$

Ltn.

L. Lichtenstein. Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Die erste Randwertaufgabe für analytische Gebiete mit Ecken. Acta Math. **36**, 345-386.

Es sei T ein einfach zusammenhängendes, durch eine endliche Anzahl von Stücken analytischer und regulärer Kurven begrenztes Gebiet ohne nach außen gerichtete Spitzen. Es mögen A, B, C, F stetige Funktionen von X und Y bezeichnen; A und B haben in T und auf dem Rande S von T stetige partielle Ableitungen erster Ordnung; C und F erfüllen in T die Hölder sche Bedingung:

$$| C(X+h, Y+h') - C(X, Y) | < \beta [| h | + | h' |]^\lambda \quad (0 < \lambda < 1, \beta \text{ konstant}).$$

Die Abhandlung beschäftigt sich mit der Bestimmung derjenigen beschränkten, in T nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetigen Lösung der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + A \frac{\partial U}{\partial X} + B \frac{\partial U}{\partial Y} + CU = F,$$

die auf S eine vorgeschriebene, abteilungsweise stetige Wertfolge annimmt. Das Randwertproblem wird, wie bereits in einer in den C. R. **149**, 624-627 (F. d. M. **40**, 422, 1909) erschienenen Note kurz berichtet ist, durch eine geeignete Modifikation der von Hilbert und Picard zuerst eingeführten Methode der teilweisen Integration auf die Auflösung einer linearen Integralgleichung mit unstetigem Kerne zurückgeführt. Es ist im vorliegenden Falle nicht möglich, durch wiederholte Iteration zu einem stetigen Kerne zu gelangen. Nichtsdestoweniger führt die Fredholm sche Methode zum Ziele. Der Behandlung

der Integralgleichung, insbesondere der genauen Durchführung der Iteration ist ein beträchtlicher Teil des ersten Kapitels gewidmet. In dem zweiten Kapitel wird die Green sche Funktion der Differentialgleichung (1) gebildet; sodann wird ihr Verhalten bei einer unendlich kleinen Änderung der Form des Gebietes untersucht. Schließlich wird, in diesem Umfange zum ersten Male, die Fundamentalformel bewiesen, welche die Lösung als Funktion ihrer Randwerte angibt.
Ltn.

L. Lichtenstein. Randwertaufgaben der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. II. Abteilungsweise stetige Koeffizienten. Das zweite Randwertproblem. Gemischte Randbedingungen. J. für Math. **143**, 51-105.

In dem ersten Kapitel der vorliegenden zweiten Abhandlung wird noch einmal das erste Randwertproblem einer linearen elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Normalform betrachtet. Von den Koeffizienten wird vorausgesetzt, daß sie nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung abteilungsweise stetig sind. Diese Voraussetzung ist neu und für das folgende wesentlich. Auf die Ergebnisse des ersten Kapitels gestützt, gelingt es in dem zweiten Kapitel, die Auflösung des zweiten Randwertproblems auf die erste Randwertaufgabe zurückzuführen. In dem dritten, dem Schlußkapitel, wird die Randwertaufgabe mit gemischten Randbedingungen erledigt. Ltn.

L. Lichtenstein. Intégration de l'équation $\Delta_2 u = ke^u$ sur une surface fermée. C. R. **157**, 1508-1511.

Es sei T eine analytische und reguläre geschlossene Fläche, deren Punkte auf ein System isothermer Parameter (p, q) bezogen sind. Es sei ds das Linienelement, $\Delta_2 u$ der zweite Beltrami sche Differentialparameter der Fläche:

$$ds^2 = \varrho(dp^2 + dq^2),\ \Delta_2 u = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}\right).$$

Es sei $k(p, q)$ eine in T nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige positive Funktion, $k(p, q) \geqq k_0 > 0$. In der Theorie der automorphen Funktionen spielt das folgende Problem eine Rolle:

Es ist diejenige in T, außer in den vorgegebenen Punkten

$$(p_i, q_i)\ (i = 1, \ldots, m), \quad (p'_i, q'_i)\ (i = 1, \ldots, n),$$

nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta_2 u = ke^u$$

zu bestimmen, die sich in der Umgebung jener Punkte entsprechend wie

$$\alpha_i \log r_i,\ r_i^2 = (p - p_i)^2 + (q - q_i)^2 \quad (\alpha_i > -2),$$
$$-2 \log r'_i - 2 \log |\log r'_i|, \quad r'^2_i = (p - p'_i)^2 + (q - q'_i)^2$$

verhält. Die entsprechend in der Umgebung der Punkte $(p_i, q_i), (p'_i, q'_i)$ erklärten Ausdrücke:

$$u - \alpha_i \log r_i, \quad u_i + 2 \log r_i' + 2 \log | \log r_i' |$$

sollen beschränkt sein. Es wird endlich vorausgesetzt

$$\sum_i^{1,\ldots,m} \alpha_i - 2\, m' < 0.$$

In der vorliegenden, als vorläufige Mitteilung gedachten Note werden die Grundzüge eines neuen, mit unendlich vielen Variabeln operierenden Verfahrens zum Existenzbeweis der Lösung angegeben. Ltn.

M. Picone. Teoremi di unicità nei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche e paraboliche. Rom. Acc. L. Rend. **22**$_2$, 275-282.

Sei

$$(1) \quad L(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y}\right) + 2h \frac{\partial u}{\partial x} + 2k \frac{\partial u}{\partial y} + Au = 0$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen oder parabolischen Typus, deren Koeffizienten nebst den Ableitungen $\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial k}{\partial y}$ sich in einem Gebiete Γ der Ebene (x, y) stetig verhalten.

Sei ferner

$$(2) \quad T(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\theta \frac{\partial u}{\partial x} + t \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(t \frac{\partial u}{\partial x} + \tau \frac{\partial u}{\partial y}\right) + Bu = 0$$

eine sich selbst adjungierte partielle Differentialgleichung vom elliptischen oder parabolischen Typus, deren Koeffizienten in Γ stetig sind. Ist im Innern und auf dem Rande c eines Gebietes C in P

$$(3) \quad \begin{cases} a \geqq \theta, c \geqq \tau, (a - \theta)(c - \tau) - (b - \tau)^2 \geqq 0, \\ A - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial y} \leqq B, \end{cases}$$

und hat (1) eine nicht identisch verschwindende Lösung u, die in $C + c$ stetig ist, in C stetige partielle Ableitungen der beiden ersten Ordnungen hat und auf c gleich Null wird, so kann es keine in C nebst ihren partiellen Ableitungen der ersten und zweiten Ordnung stetige Lösung v der Gleichung (2) geben, so daß u/v sich in C stetig verhält, außer wenn in C gilt:

$$\theta \frac{\partial v}{\partial x} + t \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \; t \frac{\partial v}{\partial x} + \tau \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Von diesem Hülfssatze ausgehend, leitet der Verf. eine Anzahl von Unitätssätzen ab. Ltn.

M. Picone. Sul teorema d'esistenza in un problema dei valori al contorno per le equazioni del tipo parabolico. Rom. Acc. L. Rend. **22**$_2$, 321-327.

Die Abhandlung beschäftigt sich mit der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung vom parabolischen Typus

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = f. \tag{1}$$

Sei s ein analytisches, doppelpunktfreies Kurvenstück, das die beiden Punkte $A(x_0, k)\, B(x_1, k)$, $(x_0 \leqq x_1)$ miteinander verbindet. Ist $b(x, y) < 0$ $(b(x, y) > 0)$ in dem von s und der Strecke AB begrenzten Gebiete C, und ist $y \leqq k$ $(\geqq k)$ auf s, so hat die Differentialgleichung (1) nicht mehr als eine Lösung, die auf s vorgeschriebene Werte annimmt.

Von diesem Resultate ausgehend, gibt der Verf. eine Anzahl weiterer Unitätssätze. Ltn.

G. Bouligand. Sur la fonction de Green du cylindre indéfini. C. R. **156**, 1361-1363; S. M. F. C. R. 1913, 50-51.

Es sei C ein beiderseits unbegrenzter Zylinder, dessen Erzeugende der Z-Achse parallel verlaufen, und dessen Normalschnitt von einer geschlossenen, doppelpunktlosen, stetig gekrümmten Kurve begrenzt ist. Es mögen $M(\xi, \eta, \zeta)$ und $P(x, y, z)$ zwei beliebige Punkte in C bezeichnen. Die Greensche Funktion $G(M, P)$ ist eine durch folgende Festsetzungen eindeutig erklärte Funktion von (x, y, z): $G(M, P) - 1/MP$ ist eine im Innern von C reguläre, auf seiner Begrenzung verschwindende Potentialfunktion. Im Unendlichen wird die Funktion G nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung gleich Null.

In der vorliegenden Note werden einige Eigenschaften der Funktion $G(M, P)$ angegeben, die insbesondere ihren Zusammenhang mit der Greenschen Funktion $g(P, Q)$ des Normalschnittes betreffen. Die Funktion $G(M, P)$ besitzt ein integral-differentiales Additionstheorem. Ltn.

J. Hadamard. Observation à propos de la Note précédente. C. R. **156**, 1364.

An die vorstehende Note schließt Hadamard einige weitere Bemerkungen an. Ltn.

G. Bouligand. Sur le problème de Dirichlet dans un cylindre indéfini. C. R. **157**, 1124-1127; S. M. F. C. R. 1913, 56-58.

G. Bouligand. Rectification à la note „Sur le problème de Dirichlet pour le cylindre indéfini". C. R. **157**, 1397-1398.

Es sei C ein beiderseits ins Unendliche sich erstreckender Zylinder, dessen Erzeugende der Z-Achse parallel sind. Der Normalschnitt von C heiße $\sum_0$, s sei, wie üblich, die Bogenlänge auf $\sum_0$, x ein reeller Parameter. Gesucht wird diejenige in C reguläre, im Unendlichen nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung verschwindende Lösung der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \mu u,$$

die auf C eine vorgeschriebene Wertfolge $H(s, z)$ annimmt. Es wird angenommen, daß $H(s, z), \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial z}$ im Unendlichen gleichmäßig verschwinden, $\iint\limits_C H(s,z)\, ds\, dz$ konvergiert. Der Verf. zeigt, daß das vorliegende Problem von der analogen Randwertaufgabe für einen beiderseits begrenzten Zylinder wesentlich verschieden ist. So hat beispielsweise das Problem für alle μ höchstens eine Lösung. Die etwa vorhandene Lösung genügt einer gewissen singulären Integralgleichung.
Ltn.

S. Zaremba. Sur une classe de problèmes mixtes relatifs à l'équation des ondes sphériques. Krakau Anz. (A) 1913, 386-417.

Es sei D^* ein im Endlichen gelegenes Gebiet im Raume der reellen Variabeln x, y und z. Seine Begrenzung heiße S^*. Es möge die Funktion $f(x, y, z)$ in einem Gebiete erklärt sein, das D^* ganz in seinem Innern enthält, und sie sei daselbst nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig und genüge der Beziehung

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \leqq 1.$$

Die vorliegende Abhandlung ist der Lösung des folgenden Problems gewidmet:

Es ist diejenige für alle (x, y, z) in D^* und alle $t > f(x, y, z)$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

zu bestimmen, die den folgenden Bedingungen genügt:

Für alle (x, y, z) in D^* und $t = f(x, y, z)$ erhalten die Funktion $u(x, y, z, t)$ und ihre Ableitung in der Richtung der „Konormale“ $\partial u/\partial \nu$ an den vierdimensionalen Zylinder, dessen Erzeugende der t-Achse parallel sind, und dessen Basis das Gebiet D^* ist, bestimmte vorgeschriebene Werte.

Für alle (x, y, z) auf S^* und alle $t > f(x, y, z)$ ist $h' \partial u/\partial \nu = hu + \varphi$, unter φ eine gegebene Funktion, h' die Zahl 0 oder 1, h eine auf S^* erklärte stetige Funktion verstanden. Ist $h' = 0$, so ist h auf S^* von Null verschieden. Ltn.

Weitere Literatur.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Éd. française. Rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de J. Molk. Tome II (4. vol.). Équations aux dérivées partielles. Réd. dans l'éd. allemande sous la direction de H. Burkhardt et W. Wirtinger. Leipzig: B. G. Teubner. S. 1-160. gr. 8°.

M. Bôcher. Boundary problems in one dimension. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 163-195 (F. d. M. **43**, 375, 1912).

J. P. Dolbnia. Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Petersb. Ann. des Bergw.-Inst. 4_1, 1-3. (Russisch.)

R. G. D. Richardson. Oscillation theorems for linear homogeneous self-adjoint partial differential equations with one parameter. Amer. Math. Soc. Bull (2) **19**, 391.

L. B. Robinson. Notes on the theory of systems of partial differential equations. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 391.

E. J. Wilczynski. On a certain completely integrable system of linear partial differential equations. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 293.

Kapitel 7.
Variationsrechnung.

E. Swift. Note on the existence of a minimum of $\int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} P\, dx + Q\, dy$. Annals of Math. (2) **14**, 137-138.

Damit eine der zu dem im Titel genannten Integrale gehörenden Eulerschen Gleichung $P_y = Q_x$ genügende Kurve ein Minimum liefere, ist notwendig, daß auf ihr $\frac{\partial}{\partial y}(P_y - Q_x) \geqq 0$, hinreichend, daß dieser Ausdruck > 0 ist. Hn.

A. Dresden. On the second variation, Jacobi's equation and Jacobi's theorem for the integral $\int F(x, y, x', y')\, dt$. Annals of Math. (2) **15**, 78-83; Amer. M. S. Bull. (2) **18**, 276-277 (1912).

Auf Grund eines vom Verf. an anderer Stelle (Annals of Math. (2) **13**, 149; F. d. M. **43**, 191, 1912) entwickelten Kriteriums für die Reduzierbarkeit eines Systems von n linearen Differentialformen von $n+1$ Veränderlichen auf ein ebensolches von n Veränderlichen, die Linearkombinationen der ursprünglichen Veränderlichen sind, wird die Theorie der zweiten Variation und der Jacobischen Gleichung für das Variationsproblem $\int F(x, y, x', y')\, dt$ in systematischerer Weise dargestellt, als dies sonst geschieht. Die vom Verf. a. a. O. entwickelten Formeln zeigen nämlich fast unmittelbar, daß, wenn mit Ω die Glieder zweiter Ordnung in der Taylorschen Entwicklung von F bezeichnet werden, jede der beiden Differentialformen der zwei Veränderlichen ξ, η:

$$\psi_1 \equiv \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega}{\partial \xi'}, \quad \psi_2 \equiv \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega}{\partial \eta'}$$

auf eine Form der einen Veränderlichen $\mathfrak{r} = x' y - \eta' \xi$ reduziert werden kann, und zwar, unter Benutzung der bekannten Bezeichnungsweise:

$$\psi_1 \equiv y'(F_1 \mathfrak{r}'' + F_1' \mathfrak{r}' - F_2 \mathfrak{r}), \quad \psi_2 \equiv - x'(F_1 \mathfrak{r}'' + F_1' \mathfrak{r}' - F_2 \mathfrak{r}).$$

Hn.

E. E. Levi. Sui criterii sufficienti per il massimo e per il minimo nel calcolo delle variazioni. Annali di Mat. (3) **21**, 173-218.

Diese Arbeit bringt die ausführliche Durcharbeitung eines vom Verf. schon früher angegebenen Gedankens (F. d. M. **42**, 398, 1911), dessen Zweck es ist, die hinreichenden Bedingungen für ein starkes Extremum ohne Benutzung eines Extremalenfeldes zu erlangen. Es beweist, zunächst für das einfachste Problem mit festen Endpunkten, durch einfache Umformung der Integraldifferenz, daß in der Formel:

$$(1) \quad \varDelta I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x, \eta, \eta')dx = \int_{x_1}^{x_2} E(x, y, \eta' + v\, u', y')dx + R,$$

wo $y = \eta(x)$ eine Extremale, u eine im Integrationsintervalle nicht verschwindende Lösung der zugehörigen Jacobischen Gleichung bedeutet, und $y - \eta = v \cdot u$ gesetzt ist, der Rest R für hinlänglich kleines $| y - \eta |$ gegen das davorstehende Integral über die E-Funktion verschwindet. (Vom Standpunkte der Weierstraßschen Theorie: es stellt $y = \eta(x) + \alpha \cdot u(x)$ in erster Annäherung ein Extremalenfeld dar; vernachlässigt man bei Umformung von $\varDelta I$ den Unterschied zwischen dieser Kurvenschar und einem Extremalenfelde, so begeht man bei Beschränkung auf eine hinlänglich kleine Nachbarschaft der Extremale nur einen verschwindenden Fehler.) Aus (1) können nun unschwer die bekannten hinreichenden Bedingungen sowie der Osgoodsche Satz hergeleitet werden. Die Methode wird auch auf den Fall variabler Endpunkte übertragen. — Durch Anwendung desselben Gedankens auf das Problem $\int f(x, y, y', \ldots, y^{(p)})\, dx$ beweist der Verf. außer den bereits bekannten hinreichenden Bedingungen folgendes Theorem, das eine wesentliche Bereicherung unserer Kenntnisse bedeutet: Es genüge die Extremale $y = \eta(x)$ der Jacobischen Bedingung; es sei auf ihr für alle $y^{(p-1)}, y^{(p)}$:

$$f''_{y^{(p)}, y^{(p)}}(x, \eta, \eta', \ldots, \eta^{(p-2)}, y^{(p-1)}, y^{(p)}) > 0,$$

und es sei für alle von $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(p-1)}$ hinlänglich wenig verschiedenen $y, y', \ldots, y^{(p-2)}$ und alle $y^{(p-1)}, \bar{y}^{(p)}, y^{(p)}$:

$$E(x, y, y', \ldots, y^{(p-2)}, y^{(p-1)}, \bar{y}^{(p)}, y^{(p)}) > 0 \quad (\bar{y}^{(p)} - y^{(p)} \neq 0).$$

Ist dann R beliebig groß gegeben, so gibt es ein $r = 0$, so daß die Extremale $y = \eta(x)$ ein Minimum liefert gegenüber allen Vergleichskurven, für die:

$$| y - \eta | < r, | y' - \eta' | < r, \ldots, | y^{(p-2)} - \eta^{(p-2)} | < r, | y^{(p-1)} - \eta^{(p-1)} | < R.$$

An einem Beispiele wird gezeigt, daß hierbei die einschränkende Bedingung $| y^{(p-1)} - \eta^{(p-1)} | < R$ nicht weggelassen werden darf. Hn.

H. Hahn. Über die hinreichenden Bedingungen für ein starkes Extremum beim einfachsten Probleme der Variationsrechnung. Palermo Rend. **36**, 379-385.

E. E. Levi hat (Rend. Linc. $\mathbf{20}_2$, 466; F. d. M. **42**, 399, 1911) folgenden Satz ausgesprochen: Ein der Legendreschen und Jacobischen Bedingung im strengen Sinne genügender Extremalenbogen $y = y(x)$ liefert ein starkes Minimum, wenn (bei hinlänglich kleinem positiven r):

$$E(x, y, y'(x), \bar{y}') > 0 \text{ ist für } |y - y(x)| < r, \bar{y}' \neq y'(x).$$

Es wird an einem Beispiele gezeigt, daß dieser Satz unrichtig ist. Der Integrand dieses Beispieles ist folgender: $f(x, y, y') = \varphi(y') - y^2$, wo $\varphi(y') = y'^2$ für $y' \leqq 2$ und $\varphi(y') = \frac{1}{y'}$, für $y' \geqq 3$, während $\varphi(y')$ für $2 < y' < 3$ beliebig bleibt. (Im Texte steht versehentlich $(\varphi(y'))^2$ statt $\varphi(y')$). — Mittlerweile hat auch E. E. Levi selbst in der vorstehend besprochenen Arbeit (Anm. (*) auf S. 182) darauf hingewiesen, daß aus seinen Überlegungen nicht das eingangs zitierte, sondern lediglich das Theorem folgt, das aus jenem entsteht, wenn die Bedingung $E(x, y, y'(x), \bar{y}') > 0$ ersetzt wird durch $E_1(x, y, y'(x), \bar{y}') > \mu > 0$, wo, wie gewohnt, $E_1(x, y, y', \bar{y}') = \frac{E(x, y, y', \bar{y}')}{(\bar{y}' - y')^2}$ gesetzt ist. Hn.

H. Hahn. Ergänzende Bemerkung zu meiner Arbeit über den Osgoodschen Satz in Band 17 dieser Zeitschrift. Monatsh. f. Math. u. Phys. **24**, 27-32.

In einer früheren Arbeit (F. d. M. **37**, 392, 1906) hatte der Verf. den Osgoodschen Satz für das einfachste Problem in Parameterdarstellung unter den üblichen Bedingungen eines starken Minimums in folgender Form bewiesen: Es existiert eine Nachbarschaft U des Extremalenbogens von folgender Eigenschaft: U' sei eine beliebige, in U enthaltene Nachbarschaft des Extremalenbogens, die nur der einen Einschränkung unterliegt, daß die Verlängerung unseres Extremalenbogens über seinen Anfangs- und Endpunkt hinaus keinen nicht zu U' gehörigen Punkt von U enthält; es gibt eine positive Zahl ε derart, daß jede ganz in U, aber nicht ganz in U' verlaufende Vergleichskurve dem Integrale einen um mindestens ε größeren Wert erteilt als der Extremalenbogen. Hier nun wird gezeigt, daß jene die Nachbarschaft U' betreffende Einschränkung fallen gelassen werden kann. Hn.

L. Tonelli. Sul caso regolare nel calcolo delle variazioni. Palermo Rend. **35**, 49-73.

Ist das Variationsproblem $\int F(x, y, x', y')dt$ regulär in einem Gebiete A (d. h. ist daselbst etwa $F_1 > 0$), so ist daselbst das angeschriebene Integral eine unterhalb stetige Funktion der Integrationskurve in folgendem Sinne: für jede der Kurve C hinlänglich benachbarte Kurve C_1 ist $\int\limits_{C_1} F\,ds > \int\limits_{C} F\,ds - \eta$

($\eta > 0$ beliebig). Wird nur vorausgesetzt $F_1 \geqq 0$, so gilt dies nur mehr für alle Kurven C_1, deren Länge unter einer (beliebig vorgegebenen) Schranke liegen; setzt man aber außer $F_1 \geqq 0$ noch voraus $F > 0$, so gilt es wieder ohne Einschränkung. Auf Grund dieses Satzes können nun die vom Verf. in einer früheren Arbeit (F. d. M. **42**, 400, 1911) unter den Voraussetzungen $F > 0, F_1 > 0$ bewiesenen Existenztheoreme auf den Fall $F > 0, F_1 \geqq 0$ ausgedehnt werden. Weiter folgt, im regulären Falle, daß für alle der Kurve C hinlänglich benachbarten Kurven C_1, deren Längen um mindestens δ größer als die von C sind, $\int\limits_{C_1} F\,ds - \int\limits_{C} F\,ds > \varrho\ (> 0)$ bleibt; und hieraus ergibt sich ohne weiteres folgende auch im Falle $F > 0, F_1 \geqq 0$ gültige Erweiterung des Osgoodschen Satzes: Liefert $\overline{C}$ ein eigentliches Minimum, so gehört zu jeder Umgebung U von $\overline{C}$ ein $\mu > 0$, so daß für jede hinlänglich benachbarte, aber nicht ganz in U liegende Vergleichskurve C gilt: $\int\limits_{C} F\,ds - \int\limits_{\overline{C}} F\,ds > \mu$. Alle bewiesenen Sätze können ohne Schwierigkeiten auf den Raum übertragen werden. Hn.

L. Tonelli. Sull' esistenza della soluzione in problemi di calcolo delle variazioni. Rom. Acc. L. Rend. **22**$_1$, 860-866.

Alle bisher bekannten Theoreme über die Existenz eines Minimums in der Variationsrechnung setzen den Integranden als positiv voraus; hier wird für einen speziellen Typus von Problemen, deren Integrand lediglich nicht negativ ist, und zu dem das Problem der kleinsten Rotationsfläche als Spezialfall gehört, die Existenz des Minimums nachgewiesen, nämlich für die Probleme $\int f(y)ds$, wo $f(y)$ eine stetige, nicht negative, monoton wachsende Funktion bedeutet: unter allen zwei gegebene Punkte verbindenden, rektifizierbaren Kurven eines abgeschlossenen, von endlich vielen analytischen Kurvenbogen begrenzten Bereiches gibt es eine, die dem Integral den kleinsten Wert erteilt. — Ferner wird die Existenz eines Minimums für einen Typus von Problemen bewiesen, für den die bisher stets festgehaltene Voraussetzung, der Integrand sei geschränkt, nicht zutrifft, und zu dem das Problem der Brachistochrone (wenn die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$ ist) gehört, nämlich für das Problem $\int f(x, y)ds$, wo $f(x, y)$ positiv und stetig ist, abgesehen von den Punkten einer gewissen Menge E, in denen $\lim f(x, y) = +\infty$ ist: unter allen, zwei gegebene Punkte verbindenden rektifizierbaren Kurven eines abgeschlossenen geschränkten Bereiches, für die das Integral überhaupt einen Sinn hat, gibt es mindestens eine, die ihm den kleinstmöglichen Wert erteilt. Hn.

C. Carathéodory. Sur les points singuliers du problème du calcul des variations dans le plan. Annali di Mat. (3) **21**, 153-171.

In einer früheren Arbeit (F. d. M. **37**, 396, 1906) hat der Verf., unter der Voraussetzung, daß die zwei von ihm mit $\Omega(x, y)$ und $\Psi(x, y)$ bezeichneten Invarianten nicht verschwinden, nachgewiesen, daß auf zwei sich im Punkte P schneidenden Extremalen, die daselbst die Erdmannsche Eckenbedingung erfüllen, eine Vertauschung der starken und schwachen Extrema stattfindet. Unter Festhaltung der Voraussetzung $\Psi(x, y) \neq 0$ wird nun das Verhalten zweier im Punkte P der Erdmannschen Bedingung genügenden Extremalen in dem Falle studiert, daß in diesem Punkte $\Omega(x, y) = 0$ ist. Ist $x = x(s)$, $y = y(s)$ eine dieser Extremalen, so kann für ihre in der Umgebung von P liegenden Punkte durch Betrachtung der Funktion $\Omega(x(s), y(s))$ erkannt werden, ob sie stark oder schwach ist. Sei θ_0 die Richtung unserer Extremale im Punkte P, $\bar{\theta}_0$ die zusammen mit θ_0 die Erdmannsche Bedingung erfüllende Richtung. In allen P benachbarten Punkten gibt es dann zwei der Erdmannschen Bedingung genügende Richtungen θ und $\bar{\theta}$, die im Punkte P in θ_0 und $\bar{\theta}_0$ übergehen. Ist noch die Richtung der Extremale $x = x(s)$ $y = y(s)$ im Punkte x, y, so steht das Verhalten von $\Omega(x(s), y(s))$ in engstem Zusammenhange mit dem der E-Funktion $E(x, y, \vartheta, \bar{\theta})$ entlang unserer Extremale. Statt, wie es bisher geschehen, die Funktion $\Omega(x, y)$ entlang unserer Extremale zu betrachten, genügt es, sie entlang jener durch P hindurchgehenden Kurve zu betrachten, die in jedem ihrer Punkte die Richtung θ hat. — Anwendungen dieser Resultate auf die Theorie der diskontinuierlichen Lösungen einerseits, auf die Theorie der kontinuierlichen Lösungen im Falle des außerordentlichen Verschwindens der E-Funktion andrerseits werden in Aussicht gestellt.

Hn.

W. Behaghel. Analogon der Weierstraßschen Relation zwischen der E-Funktion und der Funktion F_1 für das räumliche Variationsproblem. Math. Ann. **73**, 596-599.

Die von Weierstraß abgeleitete Beziehung

$$E(x, y; \cos\vartheta, \sin\vartheta; \cos\tilde{\vartheta}, \sin\tilde{\vartheta}) = [1 - \cos(\tilde{\vartheta} - \vartheta)]\, F_1(x, y; \cos\vartheta^*, \sin\vartheta^*)$$

wird für räumliche Variationsprobleme folgendermaßen verallgemeinert: Es sei $\omega\,[0 < \omega \leqq \pi]$ der Winkel zwischen den Vektoren (p, q, r), $(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r})$

$$Q(\xi, \eta, \zeta; p, q, r) = F_{x'x'}\,\xi^2 + 2F_{x'y'}\,\xi\,\eta + \cdots + F_{z'z'}\,\zeta^2,$$

so ist

$$E(p, q, r; \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}) = (1 - \cos\omega)\frac{Q(p, q, r; p^*, q^*, r^*)}{\sin^2\tau^*} \qquad (0 < \tau^* < \omega),$$

wenn $p^* \sin\omega = p\sin(\omega - \tau^*) + \tilde{p}\sin\tau^*$ usf. für $\omega \neq \pi$,

$$p^* = p\cos\tau^* + \tilde{p}\sin\tau^* \text{ für } \omega = \pi.$$

Gs.

J. Hadamard. La construction de Weierstrass et l'existence de l'extremum dans le problème isopérimétrique. Annali di Mat. (3) **21**, 251-287.

Während für das einfachste Problem der Variationsrechnung die Frage nach der Existenz eines absoluten Extremums in weitem Umfange geklärt ist, ist dies für isoperimetrische Probleme bisher nicht der Fall. Anknüpfend an eine frühere Arbeit (F. d. M. 38, 404, 1907), behandelt der Verf. diese Fragen für isoperimetrische Probleme folgender Form. In dem einen Integrale $I = \int f(x, y, x', y')dt$ ist der Integrand sowie die zugehörige E-Funktion positiv-definit, das andere Integral hat die Form: $J = \int P(x, y)dx + Q(x,y)\,dy$, und im weiteren Verlauf der Untersuchung wird noch vorausgesetzt, es sei $M = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$ von einerlei Zeichen. Es wird verlangt, zwei hinlänglich nahe Punkte A und B durch eine Extremale des isoperimetrischen Problems zu verbinden, auf der sei es I, sei es J vorgeschriebene, hinlänglich kleine Werte hat (erste oder zweite Konstruktion). Die Überlegungen beruhen auf der Tatsache, daß die Extremalen (im Sinne des freien Extremes) von $I - lJ$ für große $|l|$ der Indikatrix von I ähnlich werden, in positivem oder negativem Sinne durchlaufen, je nach dem Zeichen von l. Eine solche Extremale kann durch den Winkel ϑ ihrer Tangente mit der x-Achse eindeutig als Parameter ausgedrückt werden, und für den zum Punkte ϑ_0 im Sinne des freien Extrems von IlJ konjugierten Punkt ist $\vartheta - \vartheta_0$ nahe gleich π, für den im Sinne unseres isoperimetrischen Problemes konjugierten Punkt ist $\vartheta - \vartheta_0$ nahe gleich 2π. Es bezeichne noch I_0 das absolute Minimum von I zwischen A und B. Sind A und B hinlänglich nahe, so sind die erste und die zweite Konstruktion ausführbar durch eine Extremale, auf der es keinen konjugierten Punkt im Sinne des freien Extrems von $I - lJ$ gibt, wenn für die vorgeschriebenen Integralwerte $\frac{I}{I_0}$ hinlänglich wenig von 1 oder $\frac{|J|}{I_0^2}$ hinlänglich wenig von 0 verschieden ist. Sind ε und η beliebige positive Zahlen, so sind die beiden Konstruktionen für hinlänglich nahe Punkte A, B ausführbar durch Extremalen, auf denen $\vartheta - \vartheta_0 < 2\pi - \varepsilon$ bleibt (die also keinen konjugierten Punkt im Sinne des isoperimetrischen Problems enthalten), wenn $I < \frac{\overline{AB}}{\eta}$, $J < \frac{\overline{AB}^2}{\eta}$ ist, und zwar gibt es bei der ersten Konstruktion zwei Extremalen (eine mit positivem, eine mit negativem l), bei der zweiten Konstruktion nur eine. Endlich läßt sich ganz allgemein die Lösbarkeit jeder der beiden Konstruktionen durch mindestens eine Extremale dartun, wenn nur A und B hinlänglich nahe, I und $|J|$ hinlänglich klein sind. Nachdem so die Möglichkeit der Weierstraßschen Konstruktion im Kleinen dargetan ist, kann nach einer bekannten Methode die Existenz des absoluten Extrems im Großen dargetan werden. Hn.

L. Tonelli. Sul problema degli isoperimetri. Rom. Acc. L. Rend. 22_1, 424-430.

Diese Arbeit beschäftigt sich, wie die vorstehend besprochene von Hadamard, mit der Existenz eines Extremums für die isoperimetrischen Probleme, die sich an die beiden Integrale:

$$I = \int P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy, \quad J = \int F(x, y, x', y')\, dt$$

knüpfen. Es werden lediglich die Voraussetzungen gemacht: In dem betrachteten Gebiet A seien P und Q stetig, und es sei dort $F > 0$, $F_1 \geqq 0$. Aus der S. 442 besprochenen Arbeit des Verf. in Palermo Rend. **35** ergibt sich unmittelbar, daß dann das Integral I eine stetige, das Integral J eine unterhalb stetige Funktion der Integrationskurve ist, woraus mit größter Leichtigkeit die Existenztheoreme folgen: Unter allen Kurven von A, die dem Integrale I einen festen Wert erteilen, macht mindestens eine das Integral J zu einem Minimum. Unter allen Kurven von A, die dem Integrale J einen festen Wert erteilen, macht mindestens eine das Integral I zu einem Minimum (Maximum). Unter Hinzunahme der Voraussetzung, daß P und Q stetig differenzierbar sind, wird bewiesen, daß die das Extremum liefernden Kurven, soweit sie im Innern von A verlaufen, Extremalen sind. Hn.

L. Tonelli. Sui problemi isoperimetrici. Palermo Rend. **36**, 333-344.

Es sei das zwischen zwei gegebenen Punkten eines Gebietes A zu erstreckende Integral $\int f(x, y) ds$ zu einem Minimum zu machen unter der isoperimetrischen Nebenbedingung: $\int g(x, y)\, ds = G$. Es seien die beiden Voraussetzungen erfüllt: α) in A ist $g(x, y)$ positiv, β) von jedem Punkte (x_1, y_1) von A geht ein zu A gehöriger Kurvenbogen aus, auf dem die Ungleichung erfüllt ist: $\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \leqq \frac{f(x_1, y_1)}{g(x_1, y_1)}$. Dann gibt es unter allen der isoperimetrischen Nebenbedingung genügenden Kurven von A mindestens eine, die das Integral $\int f(x, y)\, ds$ zu einem Minimum macht. [Daß ohne die Bedingung β) dieser Satz nicht gilt, hatte Hadamard an einem Beispiele gezeigt.] Wird in Bedingung β) das Ungleichheitszeichen umgekehrt, so folgt die Existenz eines Maximums. Ist auch $f \geqq 0$, so gilt folgendes Reziprozitätsprinzip: Eine Kurve, die unter Festhaltung des zweiten Integrales das erste zu einem Maximum macht, macht unter Festhaltung des ersten das zweite zu einem Minimum. Am Schlusse werden noch andere Probleme angeführt, bei denen die Existenz eines Extrems nach derselben Methode bewiesen werden kann, unter anderem das Problem des Gleichgewichtes eines schweren homogenen Fadens, auf dem reibungslos ein Massenpunkt beweglich ist. Hn.

A. Patuschka. Ein Problem der Variationsrechnung. Progr. (978). Realgymn. Altenburg. 19 S.

Der Verf. behandelt die isoperimetrische Aufgabe, „von allen ebenen Kurven, die durch zwei gegebene Punkte gehen und mit den Ordinaten dieser Punkte Flächen gleichen Inhaltes umschließen, diejenige zu bestimmen, die bei Drehung um die x-Achse den Körper kleinster Oberfläche erzeugt", und zwar ist in dem vorliegenden Teile der Arbeit bloß die Diskussion der Gestalt der Extremalen in ganz elementarer Weise durchgeführt. Gs.

O. Bolza. Über zwei Eulersche Aufgaben aus der Variationsrechnung. Annali di Mat. (3) **20**, 245-255.

Sei $\mathfrak{K}_0$ eine fest gegebene, die beiden Punkte P_0 und P_1 der Ebene verbindende Kurve und $\mathfrak{C}$ eine beliebige, dieselben Punkte verbindende Kurve, $I_{\mathfrak{C}}$ die Länge von $\mathfrak{C}$, $K_{\mathfrak{C}}$ der (mit Vorzeichen versehene) Flächeninhalt, den $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{K}_0$ einschließt (d. h. der Wert des Integrales $\frac{1}{2}\int(xy' - y\,x')\,dt$, erstreckt über $\mathfrak{C}$ von P_0 nach P_1, sodann über $\mathfrak{K}_0$ von P_1 nach P_0). Unter derVoraussetzung, daß der Flächeninhalt, den die geradlinige Strecke $P_0\,P_1$ mit R_0 einschließt, positiv sei (ist er negativ, so sind im folgenden die Worte „Maximum" und „Minimum" zu vertauschen), werden die beiden folgenden Aufgaben behandelt: (1) Den Quotienten $K_{\mathfrak{C}}\,/I_{\mathfrak{C}}$ zu einem Maximum zu machen, (2) das Produkt $I_{\mathfrak{C}}\cdot K_{\mathfrak{C}}$ zu einem Minimum zu machen; und zwar handelt es sich nur um das relative Extremum (gegenüber benachbarten Vergleichskurven), da ein absolutes nicht vorhanden ist. Da die Lösung bei festgehaltenem $I_{\mathfrak{C}}$ in der Aufgabe (1) $K_{\mathfrak{C}}$ zu einem Maximum, in der Aufgabe (2) zu einem Minimum machen muß, kann sie nur ein Kreisbogen sein. Bezeichnet b^2 den von der Strecke $P_1\,P_0$ mit $\mathfrak{K}_0$ eingeschlossenen Flächeninhalt, a die halbe Länge dieser Strecke, so gibt es bei der Aufgabe (1) keine oder eine (und zwar nur eine) Lösung, je nachdem $\frac{b^2}{a^2} \leqq \frac{\pi}{2}$ oder $> \frac{\pi}{2}$. Besteht die Kurve $\mathfrak{K}_0$ aus den Ordinaten von P_0 und P_1 und dem zwischenliegenden Striche der x-Achse, so besagt bei gegebenem P_1 die Bedingung für die Existenz einer Lösung, daß P_0 im Innern einer gewissen Ellipse liegen muß. — Ganz ähnliche Resultate gelten für die Aufgabe (2). Hn.

O. Bolza. Über den „Anormalen Fall" beim Lagrangeschen und Mayerschen Problem mit gemischten Bedingungen und variablen Endpunkten. Math. Ann. **74**, 430-446; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 66.

Der Verf. beweist in dieser Arbeit die Lagrangesche Multiplikatorenmethode für das Problem, den Ausdruck

$$\int_{t_0}^{t_1} f(y_1,\ldots,y_n;y_1',\ldots,y_n')\,dt + G(y_{10},\ldots,y_{n0};\,y_{11},\ldots,y_{n1})$$

zu einem Extremum zu machen, mit der Nebenbedingung, daß die in Parameterdarstellung vorausgesetzten zulässigen Kurvenbogen

$$y_i = y_i\,(t)\;\;(t_0 \leq t \leq t_1)$$

p Differentialgleichungen $\varphi_\alpha(y_1,\ldots,y_n;y_1',\ldots,y_n') = 0$
und q endlichen Gleichungen $\psi_\beta(y_1,\ldots,y_n) = 0$ $\Big\}(p+q<n-1)$

genügen sollen, während die Koordinaten $(y_{10},\ldots,y_{n0}), (y_{11},\ldots,y_{n1})$ der beiden Endpunkte der zulässigen Kurvenbogen r Bedingungsgleichungen

$$\chi_r(y_{10},\ldots,y_{n0};\,y_{11},\ldots,y_{n1}) = 0$$

genügen. Hierbei ergeben sich einige, jedoch nicht tiefeinschneidende Verein-

fachungen seiner Verallgemeinerung (F. d. M. 38, 406, 1907) der Hilbertschen Methode.

Nach dieser führt er das Variationsproblem auf das gewöhnliche Extremalproblem zurück, den Ausdruck

$$U(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{q+r+1}) = \int_{t_0}^{t_1} f(\mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_n; \mathfrak{Y}_1', \ldots, \mathfrak{Y}_n')\, dt$$

$$+ G(\mathfrak{Y}_1(t_0), \ldots, \mathfrak{Y}_n(t_0); \mathfrak{Y}_1(t_1), \ldots, \mathfrak{Y}_n(t_1))$$

zu einem Extrem zu machen unter den Nebenbedingungen

$$\psi_\beta(\mathfrak{Y}_1(t_0), \ldots, \mathfrak{Y}_n(t_0)) = 0;\ \chi_\gamma(\mathfrak{Y}_1(t_0), \ldots, \mathfrak{Y}_n(t_0); \mathfrak{Y}_1(t), \ldots, \mathfrak{Y}_n(t_1)) = 0,$$

wobei $\mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_n$ gewisse Funktionen von $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{q+r+1}$ sind. Besonderen Wert legt nun der Verf. darauf, daß die Anfangsbedingungen reduziert sind, d. h. daß sie die $2q$ Gleichungen enthalten: $\overset{0}{\psi}_i = \psi_i(y_{10}, \ldots, y_{n0})$, $\overset{1}{\psi}_i = \psi_i(y_{11}, \ldots, y_{n1})$ und daß (mit Ausschluß des Falles „singulärer Endpunkte") die Matrix $\dfrac{\partial(\overset{0}{\psi}_1, \ldots, \overset{1}{\psi}_1, \ldots, \chi_1, \ldots, \chi_r)}{\partial(y_{10}, \ldots y_{n0}, y_{11}, \ldots y_{n1})}$ vom Range $2q + r \leqq 2n$ ist. Unter Zugrundelegung reduzierter Anfangsbedingungen liegt der normale oder der anormale Fall vor, je nachdem es möglich ist, $q + r + 1$ Funktionensysteme $\overset{\sigma}{\eta}_1, \ldots, \overset{\sigma}{\eta}_n$ so zu wählen, daß die Matrix

$$\left.\frac{\partial(\overset{0}{\psi}_1, \ldots, \overset{0}{\psi}_q, \chi_1, \ldots, \chi_r)}{\partial(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{q+r+1})}\right|_{\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_{q+r+1} = 0}$$

vom Range $q + r$ ist, oder nicht. Die η sind dabei zweimal stetig differenzierbare Funktionen, die den $p + q$ Differentialgleichungen ($\alpha = 1, \ldots, p + q$)

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_i} \overset{\sigma}{\eta}_i + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_i'} \overset{\sigma}{\eta}_i{}' = 0 \quad [\varphi_{p+\beta} = \sum_i \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y^i} y_i']$$

genügen. Mit Hülfe dieser Verschärfung der zuerst von Hahn stammenden Unterscheidung zeigt der Verf. nun, daß, wenn man beim Lagrangeschen Problem mit festen Endpunkten den Fall gemischter Bedingungen auf den Fall reiner Differentialbedingungen zurückführt, man im allgemeinen nicht auf den anormalen Fall kommt, wie dies nach der früheren Definition der Fall war. Er weist auch nochmals darauf hin, daß man das Mayersche Problem als Spezialfall des Lagrangeschen Problems mit einer frei variablen Endkoordinate auffassen kann.

Der Zusatz S. 443 ist unrichtig, im anormalen Falle sind ja im allgemeinen die Hilbertschen Multiplikatoren $l_0, l_1, \ldots, l_{q+r}$ in ihren Verhältnissen nicht eindeutig bestimmt, und es kann wohl auch eintreten, daß sich ein System von Multiplikatoren findet, bei dem $l_0 \neq 0$. Gs.

D. Hölder. Neues Verfahren zur Herleitung der Differentialgleichung für das relative Extremum eines Integrals. Annali di Mat. (3) **20**, 171-184.

Es sollen auf einem neuen Wege die Bedingungen erster Ordnung für ein Extremum des Integrals $I = \int G(t, x, y, x', y')dt$ unter der Nebenbedingung $H(t, x, y, x', y') = 0$ hergeleitet werden. Der Verf. nimmt zunächst in der vorliegenden Arbeit ohne weitere Prüfung an, daß dabei die Nebenbedingung $H = 0$ durch die in den Variationen lineare Bedingung $\delta H = 0$ ersetzt werden kann. Für δx wird eine Variation angesetzt von der Art, wie man sie bei Begründung des Du Bois-Reymondschen Lemmas verwendet: δx ist überall $= 0$, auch in der Umgebung zweier Stellen t_0 und t_1; in jeder dieser Umgebungen hat δx einerlei Zeichen. Läßt man diese Umgebungen auf die Stellen t_0 und t_1 zusammenschrumpfen, so kann das Verhalten der aus $\delta H = 0$ zu berechnenden Variation δy leicht überblickt, insbesondere das Verschwinden von δy im Endpunkte der Integration einfach angesetzt werden. (Besonders übersichtlich gestaltet sich die Rechnung, wenn die Nebenbedingung $H = 0$ die Größen x und y nicht explizit enthält.) Man erhält so die gesuchte Bedingung erster Ordnung für das Extremum von I in einer von der durch die Lagrangesche Multiplikatorenmethode gelieferten, etwas abweichenden Form: man erhält eine Differentialgleichung mit einer willkürlichen Konstante. Hn.

J. Rosenberg. Über das Verhalten von Extremalenbogen, die den zum Anfangspunkt konjugierten Punkt enthalten, beim Lagrangeschen Problem der Variationsrechnung. Monatsh. f. Math. u. Phys. **24**, 65-86.

Die von H. Hahn auf Grund der Methode der gebrochenen Extremalen für das räumliche Variationsproblem durchgeführten Untersuchungen (F. d. M. **41**, 436, 1910) werden auf das allgemeine Lagrangesche Problem übertragen ($\int f(x, y_1, \ldots, y_n)\, dx$ mit Nebenbedingungen). Wie dort, ergibt sich auch hier ein sehr einfacher Beweis der Jacobischen Bedingung. Auch hier zeigt sich aber, daß, wenn der Endpunkt x_1 der Integration über den zum Anfangspunkt x_0 konjugierten Punkt x_0^* hinausrückt, zunächst (bei positiv definitem Zeichen der E-Funktion) noch ein „partielles" Minimum in folgendem Sinne stattfindet: In jeder Nachbarschaft der Extremale finden sich Gebiete derart, daß gegenüber jeder hinlänglich benachbarten Vergleichskurve, die auch nur einen Punkt eines solchen Gebietes enthält, immer noch Minimum stattfindet. Kann ein solches Gebiet so gewählt werden, daß es (in der Umgebung eines Punktes der Extremale) eine durch diesen Punkt hindurchgehende, zur x-Achse senkrechte lineare Mannigfaltigkeit von p Dimensionen, nicht aber von mehr Dimensionen enthält, so erniedrigt sich diese Zahl p jedesmal um $n - r$ Einheiten, wenn der Endpunkt x_1 eine Nullstelle der Mayerschen Determinante $\Delta(x, x_0)$ wachsend durchschreitet, in der diese Determinante vom Range r ist. Sobald sich auf diesem Wege die Dimensionszahl p auf 0 reduziert, oder sobald x_1 den zu x_0^* konjugierten Punkt überschreitet, hört das geschilderte partielle Minimum auf. Hn.

E. Vessiot. Sur la propagation par ondes et sur le problème de Mayer. Journ. de Math. (6) **9**, 39-76.

Ist in einem Medium jedem Punkte durch die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} F(t;\ x_1, \ldots, x_n, dx_1, \ldots, dx_n) = dt, \\ F_i(t; x_1, \ldots, x_n, dx_1, \ldots, dx_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, \alpha) \end{cases}$$

(F, F_i sind homogene Funktionen der ersten Dimension in $dx_1, \ldots, dx_n$) eine Elementarwelle zugeordnet, so ist die Ausbreitung der Wellen in diesem Medium nach dem Huygensschen Prinzip in der Art bestimmt, daß von einem bestimmten „datierten" Flächenelement $(t; x_1, \ldots, x_n; q_1, \ldots, q_n)$ sich die Welle längs einer bestimmten Kurve fortpflanzt, einer „Charakteristik" oder „Transversale" des Wellenproblems, die den Gleichungen genügt:

$$(2)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial G}{\partial q_i}, \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial x_i} - q_i \frac{\partial G}{\partial t} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Hierbei ist $G(t; x_1, \ldots, x_n, q_1, \ldots, q_n)$ eine in den q homogene Funktion erster Dimension, die als Tangentialgleichung der durch $F(t; x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 1$, $F_i(t; x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0$ im p-Raume dargestellten Mannigfaltigkeit erhalten wird, wenn man die q so normiert, daß $\sum_1^n {}_i\, p_i q_i = 1$.

Der Verf. zeigt nun, daß man zu diesen „Charakteristiken" gelangt, wenn man nach jenen Lösungen des Mongeschen Gleichungssystems (1) fragt, die das Element $t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0$ enthalten, und für die t_1 im Punkte $x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$ ein Minimum wird. Sind die Gleichungen (1) von t unabhängig, so gelangt man zu einem Lagrangeschen Problem, ein Fall, den der Verf. schon früher behandelt hat (F. d. M. **43**, 466, 1912). Sind sie aber von t abhängig, so liegt ein Mayersches Problem vor. Der Verf. zeigt sodann, daß tatsächlich ein schwaches Minimum eintritt, wenn in jedem entsprechend datierten Punkte der Charakteristik die Elementarwelle [in den $p_i = \frac{dx_i}{dt}$, q_i ausgedrückt] konkav ist gegen den Ursprung in der Umgebung des dem Punkte zugehörigen Flächenelementes $[p_i, q_i]$; die Existenz eines Feldes ergibt sich hierbei ohne weiteres, wenn das einem Punkte der Charakteristik zugehörige Flächenelement nicht durch die Tangente der Charakteristik in jenem Punkte geht. Als Transversalenflächen des Feldes erhalten wir hierbei eine „Familie" von Wellenflächen. Gs.

G. Vivanti. Sul calcolo delle variazioni degli integrali multipli. Annali di Mat. (3) **20**, 49-64.

In dieser Arbeit verallgemeinert der Verf. mit Hülfe der formalen Sätze über lineare partielle Differentialgleichungssysteme die von Radon (F. d. M. **42**, 406, 1911) und ihm (F. d. M. **43**, 472, 1912) aufgestellte Bedingung dafür, daß ein n-faches Integral in Parameterform, welches auch erste Ableitungen unter den Integralzeichen enthält, von der Wahl der Parameter unabhängig ist, auf den Fall, daß auch zweite Ableitungen unter dem Integralzeichen auftreten. Führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{\partial x_i}{\partial v_h} = x_{ih}, \frac{\partial^2 x_i}{\partial v_h \partial v_k} = x_{ihk}, \ \xi_i = (-1)^{n+1-i} \frac{\partial(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})}{\partial(v_1, \ldots, v_n)},$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \xi_i x_{irs} = \Omega_{rs}, \; M_{ijh} = (-1)^{i+j-1} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_{jh}},$$

$$S_{ij} = \sum_{h=1}^{n} \Omega_{hh} M_{ijh}^2 + \sum_{\overline{h \pm k}}^{1,\ldots,n} \Omega_{hk} M_{ijh} M_{ijk} \quad (i < j),$$

so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung, damit das Integral

$$\int^{(n)} \Phi(x_i, x_{ih}, x_{ihk})\, dv_1 \ldots dv_n$$

gegenüber Parametertransformationen ($\Delta > 0$) invariant sei, darin, daß Φ eine Funktion von x_i, ξ_i, S_{ij} ist, die in $\xi_i, \sqrt[3]{S_{ij}}$ positiv-homogen vom ersten Grade ist.

Der Verf. zeigt dann noch, daß die $(n+1)$ Euler-Lagrangeschen Gleichungen des Problems untereinander äquivalent sind, und streift sodann kurz die Bedingungen, unter denen sich die Euler-Lagrangeschen Gleichungen auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung reduzieren. Gs.

L. Lichtenstein. Sur quelques applications de la notion des fonctions d'une infinité de variables au calcul des variations. C. R. **157**, 629-632.

Sei T ein geschränkter, von endlich vielen analytischen Kurven S begrenzter Bereich, und sei $P(x, y, u)$ für alle endlichen u in T und auf S positiv, und die Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial u}, \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}$ seien daselbst geschränkt. Es wird die Aufgabe behandelt, unter allen auf S verschwindenden, in T und auf S zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $u(x, y)$ das Integral:

$$I = \iint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + P(x, y, u)\right] dx\, dy$$

zu einem Minimum zu machen. Es bezeichne zu dem Zwecke $u_n (n = 1, 2, \ldots)$ eine Minimalfolge. Seien $\mathfrak{x}_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ die normierten auf S verschwindenden Eigenfunktionen von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0$ und λ_i die zugehörigen Eigenwerte. Es wird gesetzt:

$$u_n = \sum_i \frac{t_{in}}{\sqrt{\lambda_i}} \mathfrak{x}_i;$$

aus der Folge der u_n kann eine Teilfolge so herausgegriffen werden, daß für die zugehörigen Koeffizienten der Grenzwert $\lim_{n=\infty} t_{in} = \vartheta_i$ für alle i existiert. Es sind $\frac{\vartheta_i}{\sqrt{\lambda_i}}$ die Fourier-Koeffizienten der gesuchten Lösung, die auch gleichzeitig die auf S verschwindende Lösung von:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}P(x, y, u)$$

ist. Die Beweise sind nicht durchgeführt. Hn.

Th. de Donder. Sur le théorème d'indépendance de Hilbert. C. R. **156**, 609-611, 868-870.

In der ersten Note verallgemeinert der Verf. auf Grund zweier einfachen Bemerkungen über Integralinvarianten den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz auf Variationsprobleme, die auch die zweiten Ableitungen der unbekannten Funktionen enthalten, in folgender Form:

$$I \equiv \sum_1^n{}_i \left(\frac{\partial F}{\partial y_i^{(1)}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y_i^{(2)}}\right)\delta y_i + \Sigma_i \frac{\partial F}{\partial y_i^{(2)}}\delta y_i^{(1)} \equiv \sum_1^n{}_i \,(M_i\,\delta y_i + Q_i\,\delta y_i^{(1)})$$

ist eine einfache relative Integralinvariante der Differentialgleichungen der Extremalen von $\delta\int\limits_{t_1}^{t_2} F\,dt=0$. Genügen diesen Gleichungen die n Funktionen $\bar{y}_1^{(1)},\dots \bar{y}_n^{(1)}$ von $y_1,\dots, y_n, t$, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß

$$\bar{I}' \equiv \sum_1^n{}_i\left(\overline{M}_i+\sum_1^n{}_k\,\overline{Q}_k\frac{\partial\bar{y}^{(1)}}{\partial y_i}\right)\delta y_i + \left[\overline{F}-\sum_1^n{}_i\left(\overline{M}_i+\sum_1^n{}_k\,\overline{Q}_k\frac{\partial\bar{y}_k^{(1)}}{\partial y_i}\right)\bar{y}_i^{(1)}\right]\delta t$$

ein vollständiges Differential ist, die, daß

$$\bar{I} \equiv \sum_1^n{}_i\left(\overline{M}_i+\sum_1^n{}_k\,\overline{Q}_k\frac{\partial\bar{y}_k^{(1)}}{\partial y_i}\right)\delta y_i$$

ein solches sei. Für $n=1$ ist daher $\bar{I}'$ stets ein vollständiges Differential. Durch die Querstriche ist die Substitution der $\bar{y}_i^{(1)}$ angedeutet. Diese Methode ist der Ausdehnung fähig für den Fall, daß Ableitungen höherer Ordnung auftreten.

In der zweiten Note wird mit Hülfe der Theorie einfacher relativer Integralinvarianten totaler Differentialgleichungen (vgl. C. R. **133**, 453-455; F. d. M. **32**, 360, 1902) der Unabhängigkeitssatz auf den Fall verallgemeinert, daß die Zahl der unabhängigen Veränderlichen >1 ist. Der Verf. führt dies an dem Falle zweier unabhängigen Veränderlichen und zweier Ableitungen aus. Gs.

G. Fubini. Alcuni nuovi problemi di calcolo delle variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differenziali. Annali di Mat. (3) **20**, 217-244.

In § 1 wird die Existenz einer nicht identisch verschwindenden Lösung der nichtlinearen Integralgleichung:

$$(1) \qquad f(x_1)=\lambda\int\limits_0^1\int\limits_0^1 K(x_1, x_2, x_3)\,f(x_2)\,f(x_3)\,dx_2\,dx_3$$

bewiesen, wo der Kern $K(x_1, x_2, x_3)$ symmetrisch in seinen drei Veränderlichen ist: werden mit d und $-d$ obere und untere Grenze der Werte von

$$(2)\qquad \int_0^1\int_0^1\int_0^1 K(x_1, x_2, x_3)\, u(x_1)\, u(x_2)\, u(x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

bei normiertem u (d. h. $\int_0^1 u^2(x)\, dx = 1$) bezeichnet, so wird durch Betrachtung einer Minimalfolge $u_n(x)$ eine normierte Funktion $F(x)$ gewonnen, für die das Integral (2) gleich d wird, und diese Funktion genügt der Gleichung (1) für $\lambda = 1/d$. In § 2 wird die Eulersche Gleichung für folgendes Variationsproblem aufgestellt: unter allen Funktionen $u(x)$, die für $x=0$ und $x=1$ vorgeschriebene Werte annehmen, das Integral

$$(3)\qquad \int_0^1\int_0^1 \varphi(u(x), u'(x), u(X), u'(x, X)\, dx\, dX$$

zu einem Extremum zu machen. In § 3 wird speziell der Fall betrachtet, daß φ in seinen ersten vier Argumenten eine quadratische Form ist; die Eulersche Gleichung hat dann die Gestalt:

$$(4)\quad 0 = p(x)\, u(x) + q(x)\, u'(x) + r(x)\, u''(x) + \int_0^1 \{\sigma(x,\xi)\, u(\xi) + \tau(x,\xi)\, u'(\xi)\}\, d\xi,$$

wo p, q, r, σ, τ sich aus den Koeffizienten der Form φ zusammensetzen. Ist diese Form positiv definit, so kann die Existenz eines Minimums von (3) durch Betrachtung eines Minimalsatzes direkt eingesehen werden. In § 4 wird die Eulersche Gleichung für folgendes Variationsproblem aufgestellt: Unter allen Funktionen $u(x, y, t)$, die für jeden Wert von t des Intervalles $(0, 1)$ am Rande des Gebietes G gegebene Werte annehmen, das Integral

$$\int_0^1\int_0^1 dt\, d\tau \iint_{(G)} \Big[\left(\frac{\partial u(t)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(t)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(\tau)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(\tau)}{\partial y}\right)^2$$
$$+ 2\varphi_1(x, y, t, \tau)\, \frac{\partial u(t)}{\partial x}\frac{\partial u(\tau)}{\partial x} + 2\varphi_2(x, y, t, \tau)\, \frac{\partial u(t)}{\partial y}\frac{\partial u(\tau)}{\partial y}\Big]\, dx\, dy$$

zu einem Minimum zu machen, wo φ_1 und φ_2 in t und τ symmetrisch sind. Die Eulersche Gleichung ist von ähnlicher Gestalt wie (4), enthält aber die partiellen Ableitungen von u nach x und y. In § 5 wird wieder durch Betrachtung eines Minimalsatzes die Existenz eines Minimums für dieses Variationsproblem nachgewiesen; doch ergibt dies keinen Existenzbeweis für die zugehörige Eulersche Gleichung. In § 6 wird ein Satz folgender Art bewiesen: Sind die über ein gegebenes Gebiet erstreckten Integrale $\iint \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\, dy$ für alle u einer Funktionenklasse gleichmäßig geschränkt, so kann man, unter gewissen Bedingungen, aus einer Funktionenklasse eine Folge u_n herausgreifen, derart, daß die Fourier-Konstanten der als Funktionen von y betrachteten Ausdrücke $v_n(x, y) = u_n(x, y) - u_n(x, 0)$ stetige Funktionen $v_n(x)$ von x zur Grenze haben, die selbst

die Fourier-Konstanten einer nach y samt ihrem Quadrat integrierbaren Funktion $V(x,y)$ sind, der noch in ihrem Verhältnisse zur Folge der $v(x,y)$ gewisse Eigenschaften gliedweiser Integrabilität zukommen. Hn.

E. J. Miles. Some properties of space curves minimizing a definite integral with discontinuous integrand. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 11-19.

In der Abhandlung „A problem in the calculus of variations in which the integrand is discontinuous" (F. d. M. **37**, 402, 1906) haben Bliss und Mason das Problem der Variationsrechnung behandelt, bei dem die Integrandenfunktion eine endliche Unstetigkeit längs einer gegebenen ebenen Kurve hat, welche die beiden festen Endpunkte verbindet. Danach gaben sie in der Arbeit „The properties of curves in space which minimize a definite integral" (F. d. M. **39**, 441, 1908) eine systematische Erweiterung der Weierstraßschen Theorie der Variationsrechnung auf räumliche Probleme. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, durch Anwendung der in der zuerst angeführten Abhandlung benutzten Methode auf den Fall eines bei dem Raumprobleme vorkommenden unstetigen Integranden die Ergebnisse festzustellen. Das behandelte Problem kann so ausgesprochen werden: Unter allen Kurven, welche die auf entgegengesetzten Seiten einer Oberfläche S liegenden Punkte 1 und 3 verbinden und S nur einmal durchqueren, soll die eine gefunden werden, welche die Summe der beiden Integrale

$$J = \int F(x, y, z, x', y', z')\, dt,\; j = \int f(x, y, z, x', y', z')\, dt$$

zum Minimum macht; das erste Integral wird von Punkt 1 bis nach S, das zweite von S nach Punkt 3 genommen. § 1. Gleichungen, welche die Minimumskurve definieren. § 2. Die dritte notwendige Bedingung. § 3. Die Systeme der Extremalen für j, bestimmt durch die von J und Bedingung III. § 4. Die Jacobische Bedingung. § 5. Hinreichende Bedingungen. Lp.

E. J. Miles. Some inverse problems in the calculus of variations. Amer. Math. Monthly **20**, 117-123.

Besondere Beispiele über Kettenlinien und Kegelschnitte zur Veranschaulichung des Theorems von Darboux (Rev. sem. $\mathbf{22}_1$, 4). Lp.

E. Vessiot. Sur la mise en équations des problèmes de calcul des variations. S. M. F. C. R. 1913, 41-44.

„Das Aufsuchen des Maximums oder des Minimums eines Doppelintegrals hängt, wie das entsprechende Problem bei einem einfachen Integral, mit der Theorie der Wellenausbreitung zusammen. Für das auf ein Stück (S) einer beliebigen Oberfläche $z = f(x, y)$ erstreckte Integral:

$$J = \iint V(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$$

besteht nämlich folgende Deutung: Bei der Art der Ausbreitung, die durch das System der Wellenflächen mit laufender Tangentialebene

$$pX + qY - Z - V(x, y, z, p, q) = 0$$

definiert wird, überfegt die als Anfangszustand einer Welle betrachtete Fläche (S) das Volumen $J\delta t$, gerechnet von der Anfangslage aus, innerhalb der unendlich kleinen Zeit δt. Man könnte J die Fegungsgeschwindigkeit der Oberfläche (S) bei der betrachteten Ausbreitungsart nennen. Die Variation dieser Geschwindigkeit bei der nämlichen Ausbreitungsbewegung wird durch die Formel gegeben:

$$\delta J = \delta t \iint V \left[\frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{d}{dy}\frac{\partial V}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial z}\right] dx\, dy.$$

Es genügt also, hinzuschreiben, daß diese besondere Variation Null ist für jedes Stück der Oberfläche (S), um die Gleichung von Lagrange zu erhalten, die ausdrückt, daß die Variation von J in dem Falle beliebiger unendlich kleiner Variationen Null ist." Diese Art des Ansatzes wird in der Mitteilung genauer untersucht. Lp.

A. R. Crathorne. The total variation in the isoperimetric problem with variable endpoints. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 461-462, 519-522.

Bei dem einfachen Problem der Variationsrechnung, $\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, x', y')\, dt$ zum Minimum zu machen, kann die totale Variation als ein Integral ausgedrückt werden, dessen Integrand die Weierstraßsche E-Funktion ist. Die vorliegende Note hat den Zweck, in ähnlicher Art die totale Variation für solche isoperimetrischen Aufgaben auszudrücken, bei denen die sogenannte Weierstraßsche Konstruktion möglich ist. Lp.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Édition française. Tome II. 6e volume, 1er fascicule: Calcul des variations. Compléments. Par A. Kneser, E. Zermelo, H. Hahn et M. Lecat. Paris: Gauthier Villars. Leipzig: B. G. Teubner. 128 S. 8°.

M. Lecat. Bibliographie du calcul des variations (1850-1913). Gand: Hoste; Paris: A. Hermann & Fils. IV + 113 S. 8°.

Mit Zusätzen erweiterte (ungedruckte) Preisschrift der belgischen Akademie vom Jahre 1912. Das mit peinlicher Sorgfalt angefertigte Werk enthält ein alphabetisches und ein chronologisches Verzeichnis von mehr als 1000 Abhandlungen oder Büchern, eine Autorentabelle (Adresse, Geburts- und Todeszeit). Mn, (Lp.)

Siebenter Abschnitt.

Funktionentheorie.

Kapitel 1.

Allgemeines.

H. Lebesgue. Sur des cas d'impossibilité du problème de Dirichlet. S. M. F. C. R. 1913, 17.

Im Raume gibt es einfach zusammenhängende Bereiche, welche von Drehflächen begrenzt werden, deren Meridiankurve eine einen einzigen singulären Punkt besitzende analytische Kurve ist, und für welche das Dirichletsche Problem unmöglich ist. Lp.

R. d'Adhémar. Leçons sur les principes de l'analyse. Avec une note de Serge Bernstein. Tome II: Fonctions synectiques, méthodes des majorantes. Équations aux dérivées partielles du premier ordre. Fonctions entières. Paris: Gauthier-Villars. VIII + 297 S. 8°.

Der nun vorliegende zweite Band folgt in Form und Darstellung dem ersten (F. d. M. **43**, 475, 1912). Es handelt sich nicht um eine Kritik der Prinzipien oder deren exaktlogische Vertiefung, sondern um einen frischen Streifzug in das große Gebiet der gesamten Analysis. Ohne allzu wählerisches Bedenken werden diese Gebiete berührt, jene übergangen, und bei den Beweisen wird mehr auf elegante Kürze als auf pedantische Exaktheit Gewicht gelegt. „Mir scheint, man darf auch in der Mathematik, wie anderwärts, gelegentlich unvollständig sein, wofern der Leser nur gewarnt ist.“

Nach diesem Prinzip wird durchgängig verfahren: In flottem, wechselreichem Zuge wird man durch reiche Gefilde geführt; in diesem zweiten Bande zieht die ganze Funktionentheorie an dem Leser vorüber, mit manchen Abstechern nach rechts und links bis hinauf zu den neueren Untersuchungen über ganze Funktionen, zu den Abelschen Integralen u. a. m. Und überall wird man bis zu den modernsten Problemen herangeführt, so daß die Zitate unter dem Text meist Arbeiten aus den letzten fünf Jahren zu nennen haben.

Bei dieser flotten und großzügigen Anlage des Werkes darf man bezüglich der Einzelheiten nicht kleinlich sein. Es ist zweifellos bei der fast unübersehbaren Weite des modernen mathematischen Forschungsgebietes ein großes Verdienst, in so konzentrierter Form einen Überblick über das Ganze zu geben. Bezüglich der Einzelheiten sei aber doch erwähnt, daß das Tempo und die

Eleganz zwar Unvollständigkeiten, nicht aber sachliche Fehler zu entschuldigen vermögen, die leider etwas zu oft durchschlüpfen.

Eine schöne und wertvolle Ergänzung hat das Buch durch eine Note von S. Bernstein bekommen, in der er einige Hauptergebnisse seiner hochinteressanten Untersuchungen über „Entwicklungen nach Polynomen" zusammenstellt und in Kürze beweist. K. K.

K. Knopp. Funktionentheorie. Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Zweiter Teil. Anwendungen der Theorie zur Untersuchung spezieller analytischer Funktionen. Berlin u. Leipzig: G. J. Göschen. 142 S. u. 9 Fig., 116 S. u. 10 Fig. 12mo (Samml. Göschen. 668 u. 703.)

Während sonst die schwierigeren Teile der Mathematik nur in dickleibigen Folianten behandelt zu werden pflegen, ist hier mit vollem Gelingen der Versuch unternommen, die Grundlehren der Funktionentheorie auf knappstem Raume darzustellen. Vor allem den Studenten der Mathematik werden diese Büchlein sehr willkommen sein, und sie verdienen die weiteste Verbreitung; denn in vorbildlicher Weise sind hier die Haupteigenschaften eines guten Lehrbuches vereinigt: Kürze, Strenge und Lesbarkeit.

Über den Inhalt und Lehrgang werden am besten die Überschriften unterrichten. I. Grundlegende Begriffe. 1. Punktmengen. 2. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. II. Integralsätze: 1. Das Integral einer stetigen Funktion. 2. Der Integralsatz von Cauchy. III. Reihen und Reihenentwicklungen analytischer Funktionen. 1. Reihen mit veränderlichen Gliedern. 2. Die Entwicklung in Potenzreihen. 3. Analytische Fortsetzung. 4. Ganze transzendente Funktionen. IV. Singuläre Stellen. 1. Die Laurentsche Entwicklung. 2. Die verschiedenen Arten singulärer Stellen. 3. Residuen.

Ferner im zweiten Bändchen: I. Ganze transzendente Funktionen. II. Meromorphe Funktionen. III. Die Γ-Funktion. IV. Periodische Funktionen. V. Anwendungen des Residuensatzes.

Vielleicht dürfte man sich noch ein drittes derartiges Bändchen wünschen über das logarithmische Potential und über konforme Abbildung, Gegenstände, die in letzter Zeit so viel leichter zugänglich geworden sind. Bl.

P. Dienes. Leçons sur les singularités des fonctions analytiques; professées à l'Université de Budapest. Paris: Gauthier-Villars, VIII + 172 S. 8°.

Die zahlreichen Untersuchungen über die Singularitäten der analytischen Funktionen bilden ein wichtiges Kapitel der neueren Funktionentheorie, über das bis jetzt keine zusammenfassende Darstellung veröffentlicht worden ist. Der Verf., der selbst mit Erfolg an der Erweiterung unserer Kenntnisse auf diesem Gebiete gearbeitet hat, gibt in dem vorliegenden Werke eine Einführung in den Gegenstand, bei der nur geringe Vorkenntnisse verlangt werden, und die doch bis zu dem gegenwärtigen Stande der Forschung vordringt. Es werden

der Reihe nach behandelt: der Begriff der Ordnung eines singulären Punktes, die Singularitäten auf dem Konvergenzkreise einer Potenzreihe, das Verfahren der exponentiellen Summation, das Verfahren von Mittag-Leffler, das allgemeine Problem der Singularitäten. St.

V. Volterra. Leçons sur les fonctions de lignes, professées à la Sorbonne en 1912, recueillies et rédigées par J. Pérès. Paris: Gauthier-Villars. IV + 230 S. 8°.

Diese Vorlesungen ergänzen in vieler Beziehung die Vorlesungen über die Integralgleichungen und Integral-Differentialgleichungen, die S. 410 dieses Bandes angezeigt sind. Unter Linienfunktionen sind solche Funktionen verstanden, die durch andere Funktionen, und zwar durch den ganzen Verlauf dieser anderen Funktionen zwischen festen oder variablen Grenzen, bestimmt sind. Nach einer geschichtlichen Einleitung, die ganz allgemein die Entwicklung des Infinitesimalkalküls und die sich in der allerjüngsten Zeit geltend machenden Ideen behandelt, setzt der Verf. sehr ausführlich die Begriffe der Linienfunktion, ihrer Ableitung, ihrer ersten Variation auseinander. Die Begriffe der Ableitung und der ersten Variation lassen ja einen gewissen Spielraum für die exakten Definitionen, und es handelt sich darum, die zweckmäßigsten Definitionen zu wählen. Es sei hier beiläufig bemerkt, daß der Volterrasche Begriff der Ableitung einer Linienfunktion von Hadamard und Fréchet etwas abgeändert wurde; im besonderen hat Fréchet in demselben Jahre in der Sommerversammlung der Amerikanischen Mathematischen Gesellschaft diesen Begriff zum Gegenstand einer scharfsinnigen Kritik gemacht. Die betreffende Untersuchung ist in Trans. Amer. Math. Soc. **15**, 135-161, 1914, erschienen. Im Grunde handelt es sich hier um Untersuchungen, die schon stets im Gebiet der eigentlichen Variationsrechnung eine große Rolle gespielt haben; dank den scharfsinnigen Untersuchungen Volterras und Hadamards wird aber hier etwas bessere Ordnung geschaffen. Der Ausgangspunkt für alle diese Untersuchungen war für Volterra die Theorie der Integralgleichungen und der zuerst von Volterra untersuchten Integraldifferentialgleichungen, und so ist es selbstverständlich, daß in diesem Gebiet die wesentlichsten Anwendungen der allgemeinen Theorie zu suchen sind. Im besonderen lassen diese neuen analytischen Hülfsmittel Anwendungen auf die theoretische Physik in den Fällen zu, in denen mit hereditären Eigenschaften der Materie gerechnet wird, wenn man also annimmt, daß gewisse Konstanten der Materie, z. B. elastische Konstanten oder andere Größen, die in den elektrischen Theorien eine Rolle spielen, nicht bloß von dem augenblicklichen Zustande, sondern auch von allen früheren Zuständen der Materie abhängen, wo also der Einfluß der Heredität durch bestimmte analytische Bedingungen gegeben ist. Wir heben von diesen Anwendungen im besonderen die Behandlung der grundlegenden elastischen Probleme unter Annahme der Heredität hervor und verweisen in bezug auf weitere Einzelheiten auf das grundlegende Volterrasche Werk: „Drei Vorlesungen über neuere Fortschritte der mathematischen Physik" (Berlin und Leipzig: B. G. Teubner. 1914). A. K.

H. Burkhardt. Theory of functions of a complex variable. Authorized translation from the 4th German edition with the addition of figures and exercises, by E. L. Rasor. London: D. C. Heath and Company (G. G. Harrap and Co.). XIII u. 432 S.

Diese vortreffliche Übersetzung der vierten Auflage von Burkhardts „Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen" (F. d. M. **43**, 477, 1912) ist bereichert durch Zusatznoten des Übersetzers, zahlreiche Übungsaufgaben usw. J. (Lp.)

H. Burkhardt. Mathematische Miszellen aus der Vorlesungspraxis. Deutsche Math.-Ver. **22**, 221-226.

1. Einfacher Beweis des Satzes, daß bei der projektiven Erzeugung der Kurven zweiter Ordnung oder Klasse die Mittelpunkte der erzeugenden Büschel keine ausgezeichnete Rolle spielen.

2. Bemerkungen über die asymptotische Integration von Differentialgleichungen der Form

$$y'' + K(x)y = 0,$$

in der $K(x)$ für hinlänglich große positive Werte von x positiv und der Grenzwert von $K(x)$ für unendliches positives x gleich 1 ist (vgl. F. d. M. **40**, 513, 1909).

3. Anwendung des Verfahrens von Laplace zur Bestimmung eines angenäherten Wertes des Integrals

$$\int_a^b \varphi^n(u)\,\psi(u)du$$

für große Werte von u auf das Integral

$$\int_0^\infty u^n\, e^{-u}\, du.$$

4. Bemerkungen über eine Anordnung der Theorie der Eulerschen Integrale, durch welche die von Pringsheim (F. d. M. **20**, 429, 1888) gegebene Darstellung vereinfacht wird.

5. Bestimmung der Koeffizienten in einer Entwicklung

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \lambda_n x,$$

die für alle positiven x konvergiert und sich gliedweise integrieren läßt.

6. Bestimmung der Koeffizienten bei der Umkehrung von gewöhnlichen Potenzreihen. St.

S. Kakeya. Notes on theory of functions of real variables. Tôhoku Math. J. **3**, 137-150.

I. Bedingungen für die Stetigkeit von Funktionen, die sich als Summe einer unendlichen Reihe stetiger Funktionen darstellen. II. Ein Beispiel einer Reihe stetiger Funktionen, welche überall ungleichmäßig konvergiert. III. Über ein gewisses System von Integralgleichungen (Integralgleichungen von der Form:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, x^k\, dx = a_k \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n).$$

IV. Die Lösung der Integralgleichung

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, x^k\, dx = a^k \quad (k = 0, 1, 2).$$

V. Minimumintegral eines Polynoms unter gewissen Bedingungen. (Lösung des Problems:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = Mi$$

unter der Voraussetzung, daß alle Wurzeln der Gleichung

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

ihrem absoluten Werte nach größer oder gleich 1 sind.) A. K.

E. Borel. Définition et domaine d'existence des fonctions monogènes uniformes. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 133-144.

Vortrag über die historische Entwicklung des Begriffes der analytischen Funktionen in den Abschnitten: I. Die Anfänge der Vorstellung von einer Funktion. II. Die Theorie von Cauchy. III. Die Grenzen der Theorie von Cauchy-Weierstraß. IV. Die Theorie von Cauchy-Riemann. V. Die Bereiche von Cauchy. VI. Die Fortsetzung durch die divergenten Reihen. VII. Die dem Cauchyschen Integral entsprechenden Doppelintegrale. VIII. Die Eigenschaften der monogenen Funktionen.

Schlußwort. „Die Umformung des Cauchyschen Integrals in ein Doppelintegral entspricht der physikalisch ganz natürlichen Hypothese, daß es keine unendlichen Massen gibt, sondern nur singuläre Gebiete, in denen die Dichte sehr hoch steigen kann, oder, wenn man dies vorzieht, endliche Wirkungssphären, mit denen jeder singuläre Punkt behaftet ist. Die nicht analytischen monogenen Funktionen entsprechen dem Falle, bei welchem diese singulären Gebiete gleichzeitig äußerst klein und äußerst zahlreich sind. Ich habe schon lange auf die Beobachtung hingewiesen, daß bei gewissen, arithmetisch einfachen Verfügungen über solche singulären Gebiete die Stetigkeitslinien, die neben diesen Gebieten laufen, ohne in sie einzudringen, sich so verhalten können, daß ihre Eigenschaften ganz eng mit der numerischen Einfachheit ihrer Richtungskoeffizienten verbunden sind." Lp.

S. Catania. Sul concetto di funzione monodroma e su quelli che da essa derivano. Rom. Acc. L. Rend. $\mathbf{22}_2$, 546-551.

S. Catania. Sul concetto di funzione monodroma e su quelli che da essa derivano. Rom. Acc. L. Rend. $\mathbf{22}_2$, 639-642.

Ankündigung einer ausführlichen Veröffentlichung über den allgemeinen Begriff der Funktion. Die Ergebnisse werden in Peanoscher Begriffsschrift mitgeteilt, die dem Berichterstatter unverständlich ist. St.

R. D. Carmichael. On transcendentally transcendental functions. Amer. Math. Soc. Trans. **14**, 311-319.

Eine transzendente Funktion $y(x)$ wird algebraisch oder transzendental transzendent genannt, je nachdem sie einer Differentialgleichung $0 = H(x, y, y', \ldots, y^{(k)})$ genügt, in welcher H ein Polynom von $x, y, y', \ldots, y^{(k)}$ mit konstanten Koeffizienten bedeutet oder nicht. Ein Beispiel einer transzendental transzendenten Funktion ist die Γ-Funktion. Für den Zweck, transzendental transzendente Funktionen in beliebiger Anzahl zu konstruieren, wird ein Theorem abgeleitet, welches eine Ausdehnung eines früheren Satzes von Hurwitz darstellt. Besondere Spezialtypen solcher Funktionen werden aufgestellt, welche einfachen Funktionalgleichungen genügen. A. K.

G. Sannia. Osservazioni sulle funzioni continue. Rom. Acc. L. Rend. $\mathbf{22}_1$, 594-596.

Setzt man $z = g(f(x)) = F(x)$, so folgt aus der Stetigkeit der Funktionen f und g in gewissen Intervallen auch die Stetigkeit von F in diesen Intervallen. Es wird die Frage untersucht, welche Stetigkeitsfolgerungen sich für f aus Stetigkeitsvoraussetzungen über g und F ergeben, oder für g aus Stetigkeitsvoraussetzungen über f und F. A. K.

H. Cipolla. Sul postulato di Zermelo e la teoria dei limiti delle funzioni. Atti Acc. Gioenia (5) **6**, Nr. V, 13 S.

In der Funktionentheorie macht man entweder ausdrücklich oder stillschweigend von dem folgenden Postulat Gebrauch: Für jede Klasse Σ von Mengen S besteht eine Beziehung, die jede S einem einzigen Elemente von S entsprechen läßt (Auswahlpostulat). Der Verf. zeigt, wie man den Gebrauch dieses Postulates dadurch vermeiden kann, daß man den Grenzwertbegriff auf eine Klasse von Mengen ausdehnt und die grundlegenden Sätze der Mengenfolgen erweitert (Rev. Sem. $\mathbf{23}_1$, 64). Lp.

A. Thue. Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen. Christiania Vidensk. Selsk. Skr. 1912, **1**, Nr. 1, 67 S.

Die Zeichen bedeuten willkürliche Begriffe. Unendliche, zweifach unendliche oder geschlossene und offene Reihen. Reduktible und irreduktible Reihen. Zeichenreihenverzweigung. Zeichenreihen aus zwei und mehreren Arten von Zeichen. Reihen, die in bezug auf vier Zeichen reduktibel sind. Reihen, die in bezug auf n Arten von Zeichen reduktibel sind. (Rev. sem. **23**$_1$, 79.) Lp.

W. Sierpiński. Niemetryczna definicya ciągłości jednostajnej funkcyi (Nichtmetrische Definition der gleichmäßigen Stetigkeit einer Funktion). Wektor **2**, 353-355.

Beweis des sehr einfachen Satzes: In jeder beschränkten Punktmenge einer Geraden ist eine Funktion dann und nur dann gleichmäßig stetig, wenn jeder konvergenten Punktfolge eine konvergente Wertefolge der Funktion entspricht. Die dieser Eigenschaft entsprechende neue Definition der gleichmäßigen Stetigkeit einer Funktion läßt sich auf allgemeine abstrakte Mengen übertragen. A. R.

W. Sierpiński. O funkcyi nieciągłej różniczkowalnej (Über eine unstetige differenzierbare Funktion). Wektor **3**, 145-147.

F. Lukács hat in Math. Ann. **70** (F. d. M. 42, 420, 1911) das Beispiel einer Funktion gegeben, die in einer überall dichten Punktmenge auf der x-Achse unstetig ist, dagegen in einer anderen überall dicht liegenden Punktmenge dieser Achse die endliche Ableitung Null besitzt, und hat dabei die bekannten Liouvilleschen Sätze über algebraische Zahlen benutzt. Ganz elementar zeigt nun der Verfasser, daß die Funktion $f(x) = \frac{1}{6^{2m}}$, wenn x ein (echter) Dualbruch von m Ziffern ist, und $f(x) = 0$ überall sonst zwischen 0 und 1 in einer überalldichten Punktmenge die Ableitung Null besitzt, nämlich in allen Punkten

$$x = \frac{3p \pm 1}{3^q} \quad (p, q = 1, 2, \ldots).$$

A. R.

T. Łazowski. Uwagi o pojęciu ciągłości funkcyi (Bemerkungen über die Stetigkeit der Funktionen). Wektor **2**, 418-429, 473-480.

Im ersten Teile der Arbeit wird der bekannte einfache Satz bewiesen: Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Funktion $f(x, y)$ zweier Variabeln im Punkte x_1, y_1 stetig in bezug auf beide Variabeln sei, ist die gleichmäßige Stetigkeit auf allen von dem Punkte x_1, y_1 ausgehenden Strahlen. Im zweiten Teile werden dieser Satz und andere bekannte Sätze über Funktionen zweier Variabeln auf Funktionen mehrerer Variabeln übertragen. A. R.

St. Ruziewicz. O funkcyi ciągłej, monotonicznej, nie posiadającej pochodnej w nieprzeliczalnej mnogości punktów (Über eine stetige monotone Funktion, die in einer nicht abzählbaren Punktmenge keine Ableitung besitzt). Warschauer Ges. der Wissensch., Sitzber. **6**, 282-305.

Nach Lebesgue (Leçons sur l'intégration) besitzt jede monotone stetige Funktion überall, mit Ausnahme höchstens einer Menge vom Maße Null, eine endliche Derivierte. Andererseits gibt es monotone stetige Funktionen, die in einer abzählbaren, überall dichten Punktmenge keine Derivierte besitzen. In dieser Arbeit wird nun ein Beispiel einer monotonen stetigen Funktion gegeben, die in einer überall dichten Punktmenge von der Mächtigkeit des Kontinuums keine (endliche) Derivierte besitzt. A. R.

E. Landau. Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funktionen. Lond. M. S. Proc. (2) **13**, 43-49.

Ein Littlewoodscher Satz besagt: „Es sei $f(x)$ eine für $x > x_0$ definierte reelle Funktion; $f''(x)$ sei ebenda vorhanden, stetig und beschränkt. Für $x \rightarrow \infty$ sei $f(x) \rightarrow s$; dann ist $f'x) \rightarrow 0$.“ Dieser Satz wird verschärft, und es werden fünf allgemeinere Sätze aufgestellt, welche den Satz, auch in seiner verschärften Gestalt, enthalten. A. K.

W. H. Young. On derivates and their primitive functions. Lond. Math. Soc. Proc. (2) **12**, 207-217.

Untersuchungen über die fundamentale Frage, wann die Lebesguesche Integration der Derivierten einer Funktion mit Sicherheit zu der primitiven Funktion zurückführt. A. K.

W. H. Young. On functions and their associated sets of points. Lond. Math. Soc. Proc. (2) **12**, 260-287.

Die Bairesche Klassifikation der durch Grenzprozesse aus stetigen Funktionen hervorgehenden Funktionen, der aus so gebildeten Funktionen durch Grenzprozesse neu entstehenden Funktionen usw. wird von dem Verf. zu verschärfen gesucht. A. K.

W. H. Young. On uniform oscillation of the first and second kind. Lond. Math. Soc. Proc. (2) **12**, 340-364.

Die nächste Verallgemeinerung der Untersuchungen über gleichmäßig konvergierende Funktionsfolgen ist die Betrachtung von oszillierenden Funktionsfolgen; besondere Bedingungen werden hier für den Begriff der gleichförmigen Oszillation präzisiert und zwei besondere Arten solcher gleichförmiger Oszillation unterschieden. A. K.

W. H. Young. On successions whose oscillation is usually finite. Quart. J. **44**, 129-141.

Verf. hat sich vielfach, in Analogie mit dem Konvergenzbegriff, mit dem Begriff der endlichen Oszillation von Reihen, allgemein von Zahlen- und Funktionsfolgen beschäftigt; hier gebraucht er natürlich auch den Begriff von Folgen, welche „usually", d. h. im allgemeinen oder im wesentlichen, strenger ausgedrückt, überall mit Ausnahme von Nullbereichen die Eigenschaft der endlichen Oszillation haben. Der Aufsatz wurde vor allem durch die Egoroffsche Notiz zu dem Weylschen Begriff der „im wesentlichen gleichmäßigen" Konvergenz (F. d. M. **42**, 423, 1911) angeregt. A. K.

Ph. E. B. Jourdain. The values that certain analytic functions can take. Proc. 5. Intern. Math.-Kongr. **1**, 283-284.

Es sei f eine einwertige Funktion einer komplexen Variable z und $z = a$ irgendein regulärer Punkt; ferner sei C ein Kreis um a, bei dem alle Punkte im Innern und auf dem Rande regulär sind; $f(a) = w_0$. Der Verf. untersucht, unter welchen Bedingungen z sich derartig bewegen kann, daß, ihm entsprechend, z von w_1 nach w gelangt. Lp.

J. Radon. Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen. Wien. Ber. **122**, 1295-1438.

Die inhaltsreiche, an die Arbeiten von H. Lebesgue, F. Rieß, E. Hellinger anknüpfende Abhandlung gliedert sich in acht Abschnitte. In dem ersten wird der Begriff einer absolut additiven Mengenfunktion eingeführt.

Unter den in dem „Intervalle" $I = \begin{bmatrix} M, \ldots, & M \\ -M, \ldots, & -M \end{bmatrix}$ $(M > 0)$ enthaltenen n-dimensionalen $(n \geqq 1)$ Mengen wird eine Klasse T ausgezeichnet, die folgenden Forderungen genügt:

a) Alle (halb offenen) Intervalle $x_i' \leqq x_i < x_i''$ $(x_i' < x_i'', i = 1, \ldots, n)$ gehören zu T.

b) Gehören zwei Mengen E_1 und E_2 zu T, so gehören auch ihr Durchschnitt $E_1 E_2$, sowie die Menge $E_1 - E_2$ der Punkte von E_1, die nicht Punkte von E_2 sind, zu T.

c) Sind $E_i (i = 1, 2, \ldots)$ abzählbar viele Mengen in T ohne gemeinsame Elemente (disjunkte Mengen), so gehört die Vereinigungsmenge ΣE_i zu T.

Offenbar enthält T alle im Borelschen Sinne meßbaren Mengen in I. Wird jeder Menge E in T ein Wert $f(E)$ zugeordnet, so heißt $f(E)$ eine „Mengenfunktion mit dem Definitionsbereich T".

Es seien $E_i (i = 1, 2, \ldots)$ beliebige abzählbar viele disjunkte Mengen in T. Ist $\Sigma f(E_i)$ konvergent und (1) $f(\Sigma E_i) = \Sigma f(E_i)$, so heißt $f(E)$ „absolut additiv" (a. a.).

Offenbar konvergiert $\sum f(E_i)$ stets unbedingt. Ist $\sum_i^{1,\ldots,n} E_i = E$ irgendeine Einteilung von E in disjunkte Bestandteile, so ist (2) $\sum_i^{1,\ldots,n} |f(E_i)| < N$ (N von E und E_i $(i = 1, \ldots, n)$ unabhängig): Die a. a. Mengenfunktionen sind von beschränkter Schwankung (quasimonoton). Es gilt $f(E) = \varphi(E) - \psi(E)$, unter φ und ψ a. a. Mengenfunktionen verstanden, die $\geqq 0$ sind (monotone a. a. Mengenfunktionen, m. a. a.).

Der Einfachheit halber wird jetzt $n = 2$ gesetzt, und es wird der folgende, die Lebesguesche Theorie des Maßes als speziellen Fall enthaltende Satz bewiesen:

Zu einer jeden im Gebiete $-M \leqq x \leqq M$, $-M \leqq y \leqq M$ definierten, für $x = -M$ und $y = -M$ verschwindenden, im übrigen positiven, den Beziehungen

$$(3) \qquad F(a', b') - F(a', b) - F(a, b') + F(a, b) \geqq 0,\ a' \geqq a,\ b' \geqq b,$$
$$\lim_{h, k = 0} F(a - h, b - k) = F(a, b)\ (h, k \geqq 0)$$

genügenden Funktion, gehört eine m. a. a. Mengenfunktion (m. a. a. M.) $f(E)$, deren Definitionsbereich T den eingangs gestellten Forderungen genügt, so daß überdies

$$(4) \qquad f\left(\begin{bmatrix} a' & b' \\ a & b \end{bmatrix}\right) = F(a', b') - F(a', b) - F(a, b') + F(a, b)$$

gilt. Die gefundene Funktion f hat überdies die Eigenschaft, daß nach Festsetzung von $\varepsilon > 0$ in jeder Menge E in T eine abgeschlossene Menge E' so bestimmt werden kann, daß

$$(5) \qquad f(E) - f(E') < \varepsilon$$

wird.

Ist umgekehrt f eine m. a. a. M., und nimmt man

$$(6) \qquad F(x, y) = f\left(\begin{vmatrix} x & y \\ -M & -M \end{vmatrix}\right) (-M < x \leqq M, -M < y \leqq M),$$
$$0 = F(x, -M),\ 0 = F(-M, y),$$

so gewinnt man nach dem Vorstehenden eine m. a. a. M. f_1 mit dem Definitionsbereich T_1, der mit T alle im Borelschen Sinne meßbaren Mengen in I gemeinsam hat. Gehört E sowohl T_1, als auch T an, so ist $f(E) = f_1(E)$. In den Mengen von T_1, die in T nicht enthalten sind, wird per definitionem $f(E) = f_1(E)$ gesetzt. T_1 ist der „natürliche Definitionsbereich" von $f(E)$. Gilt (5), so enthält T_1 ganz T. In einer naheliegenden Weise wird dieser Begriff auf a. a. M. schlechthin übertragen.

Im folgenden wird stets (5) vorausgesetzt. Der natürliche Definitionsbereich läßt sich unter Einhaltung der Eigenschaft (5) nicht mehr erweitern.

Eine m. a. a. M. $b(E)$ wird eine Basis der a. a. M. $f(E)$ genannt, wenn für alle Mengen, für welche $f(E)$ definiert und $b(E) = 0$ ist, auch $f(E) = 0$ ist. Der natürliche Definitionsbereich von f umfaßt denjenigen von b.

In dem II. Abschnitt wird der Begriff des Stieltjesschen Integrals wie folgt verallgemeinert:

Sei $F(P)$ eine auf einer Menge E_0 von I erklärte, gleichmäßig stetige Funktion von $x_1, \ldots, x_n$ und f eine a. a. M., zu deren Definitionsbereich

T auch E_0 gehört. Es sei $E_0 = \sum_i^{1,\ldots,n} E_i$, unter E_i disjunkte Mengen von T ve[rstanden], und P_i irgendein Punkt in E_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Die Summe $\sum_i^{1,\ldots,n} F(P_i)\, f(E_i)$ nähert sich einem Grenzwert, wenn der größt[e] „Durchmesser" Π der Teilungsmengen E_i gegen Null konvergiert:

$$(7) \qquad \lim_{\Pi=0} \sum_i^{1,\ldots,n} F(P_i)\, f(E_i) = \int_{E_0} F(P)\, df.$$

Eine andere Verallgemeinerung des Stieltjesschen Integrals wird ge[-]wonnen, wenn die auf E_0 erklärte Funktion $F(P)$ „meßbar bezüglich de[r] a. a. M. $f(E)$" vorausgesetzt wird. Dies besagt, daß für alle A die Menge de[r] Punkte P, in welchen $F(P) > A$ ist, zum Definitionsbereiche T von f gehört.

Sei f zunächst monoton, $F \geqq 0$,

$$0 = y_0 < y_1 < \ldots \, (y_{n+1} - y_n < \alpha, \, n = 0, 1, \ldots), \, \lim_{n=\infty} y_n = \infty,$$

E_k die Menge der Punkte von E, so daß $y_k \leqq F(P) < y_{k+1}$ ist. Hat de[r] Ausdruck

$$(8) \qquad \lim_{\alpha=0} \sum_i^{0,\ldots,\infty} y_i\, f(E_i)$$

eine bestimmte Bedeutung, so stellt er die fragliche zweite Verallgemeinerun[g] des Stieltjesschen Integralbegriffs dar. Von hier aus gelangt man z[u] der allgemeinen Definition, wenn f eine schlechthin a. a. M. ist und $F \gtrless 0$ sei[n] kann (F bezüglich f summierbar).

Der dritte Abschnitt behandelt die stetigen linearen Funktionaloperationen[.] Es möge einer jeden auf einer abgeschlossenen Menge δ_0 (gleichmäßig) stetige[n] Funktion $F(P)$ ein Wert $U(F)$ zugeordnet sein, so daß

$$(9) \qquad U(F_1 + F_2) = U(F_1) + U(F_2), \, \lim_{n=\infty} U(F_n) = U(F)$$

gilt, falls F_n für $n = \infty$ gegen F auf E_0 gleichmäßig konvergiert. Es ist $|U(F)| \leqq N \operatorname{Max} |F|$ (N = Maximalzahl der stetigen linearen Funktionaloperation).

Jede stetige lineare Funktionaloperation läßt sich in der Form

$$(10) \qquad U(F) = \int_{E_0} F\, df$$

darstellen, unter f eine a. a. M., deren Definitionsbereich E_0 enthält, verstanden.

Sei $g(E)$ eine a. a. M. mit der Basis $f(E)$ (f eine m. a. a. M.). In dem Definitionsbereich von f läßt sich g durch das verallgemeinerte Stieltjessche Integral

$$(11) \qquad g(E) = \int_E \Psi(P) df,$$

unter Ψ eine bezüglich f summierbare Funktion verstanden, darstellen (IV. Abschnitt).

Der V. Abschnitt bringt eine Verallgemeinerung des Hellingerschen Integralbegriffes.

Es sei $f(E)$ eine a. a. M., $b(E)$ eine Basis von f, E eine Menge des natürlichen Definitionsbereiches T von b, Π irgendeine Teilung von E in eine endliche Anzahl disjunkter Teilmengen.

Liegt der Ausdruck

$$(12) \qquad \sum_i^{1,\ldots,n} \frac{|\Delta f_i|^p}{(\Delta b_i)^{p-1}} \quad (p>1),$$

unter Δf_i, Δb_i die Werte von f und b auf E_i verstanden (ist $\Delta b_i = 0$, so wird dabei $\frac{|\Delta f_i|^p}{(\Delta b_i)^{p-1}}$ gleich Null gesetzt), für alle E und Π unterhalb einer festen Schranke M^p, so heißt f zu der Klasse $L_p(b)$ gehörig. Die obere Grenze von (12) für alle Π stellt bei festem E eine m. a. a. M. dar:

$$(13) \qquad \int_E \frac{|df|^p}{db^{p-1}}.$$

Es möge jetzt g eine der Klasse $L_{\frac{p}{p-1}}(b)$ angehörende Mengenfunktion, Π_n $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Folge von Teilungen der Menge E bezeichnen, so daß stets Π_{n+1} eine Unterteilung von Π_n ist. Es existiert der Grenzwert

$$(14) \qquad \lim_{n=\infty} \sum_E \frac{\Delta f\,\Delta g}{\Delta b} = \int_E \frac{df\,dg}{db}$$

und stellt eine a. a. M. dar.

Einer jeden Mengenfunktion der Klasse $L_p(b)$ sei eine Zahl $L(f)$ zugeordnet, und es sei

$$(15) \qquad L(f+g) = L(f) + L(g), \; |L(f)| \leqq M, \text{ falls } \int_I \frac{|df|^p}{db^{p-1}} \leqq 1 \text{ ist.}$$

$L(f)$ ist eine „beschränkte lineare Funktionaloperation im Gebiete der Klasse $L_p(b)$“ („Linearoperation vom Typus $\begin{Bmatrix} p \\ b \end{Bmatrix}$“).

Es gilt

$$(16) \qquad L(f) = \int_I \frac{df\,dl}{db},$$

unter $l(b)$ eine bestimmte zu der Klasse $L_{\frac{p}{p-1}}(b)$ gehörende a. a. M. verstanden.

Es mögen weiter a und b zwei m. a. a. M. bezeichnen. Einem jeden Funktionenpaare φ und ψ, die entsprechend zu $L_p(a)$ und $L_q(b)$ gehören, sei eine Zahl $B(\varphi, \psi)$ zugeordnet, so daß

$$(17) \quad B(\varphi_1+\varphi_2, \psi_1+\psi_2) = B(\varphi_1,\psi_1) + B(\varphi_2,\psi_1) + B(\varphi_1,\psi_2) + B(\varphi_2,\psi_2),$$

$$(18) \qquad |B(\varphi,\psi)| \leqq M \quad (M \text{ konstant}),$$

sobald

$$\int_I \frac{|d\varphi|^p}{da^{p-1}} \leqq 1, \quad \int_I \frac{|d\psi|^q}{db^{q-1}} \leqq 1.$$

B heißt eine „beschränkte bilineare Funktionaloperation vom Typus $\begin{Bmatrix} p, q \\ a, b \end{Bmatrix}$“. Über die beschränkten linearen und bilinearen Funktionaloperationen wird in den Abschnitten VI und VII eine lange Reihe wichtiger Sätze abgeleitet, über die auf das Original verwiesen werden muß.

Sei, unter E und $\bar{E}$ zwei zu dem Definitionsbereiche von a gehörige Mengen verstanden,

$$(19) \qquad u_E(\bar{E}) = a(E\bar{E}), \quad l_\psi(E) = B(u_E, \psi).$$

l_ψ ist für jedes ψ von $L_q(b)$ eine a. a. M. der Klasse $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$.

Durch (19) ist eine „beschränkte lineare Funktionaltransformation“ $l_\psi = B[\psi]$ definiert.

Ein Hauptproblem der Theorie ist die Auflösung der Funktionalgleichung

$$(20) \qquad B[\psi] = \Psi,$$

unter Ψ eine gegebene Mengenfunktion der Klasse $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$, unter ψ eine zu bestimmende Mengenfunktion der Klasse $L_q(b)$ verstanden.

In Anlehnung an F. Rieß wird eine für die Lösbarkeit notwendige und hinreichende Bedingung gegeben. Hieran schließt eine Kette weiterer wichtiger Betrachtungen, insbesondere über „normale“ Bilinearoperationen ($q = \frac{p}{p-1}$, $a = b$), „Fredholmsche Transformationen“ usw.

Der letzte, achte Abschnitt bringt einige Anwendungen. Sei φ_i ($i = 1, 2, \ldots$) eine Folge von Mengenfunktionen der Klasse $L_p(a)$. In Verallgemeinerung eines Satzes von F. Rieß wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der unendlich vielen Gleichungen

$$\int_I \frac{d\varphi_k\, d\psi}{da} = a_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

unter a_i ($i = 1, 2, \ldots$) eine beliebige gegebene Wertfolge, unter ψ eine zu bestimmende Funktion der Klasse $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$ verstanden, abgeleitet. Unter zahlreichen anderen Ergebnissen sei ein weitreichendes Kriterium für die Gültigkeit der Fredholmschen Fundamentalsätze hervorgehoben. Ltn.

G. Vivanti. Sul campo d'esistenza d'una funzione analitica. Lomb. Ist. Rend. (2) **46**, 375-376.

L. Zoretti (Leçons sur le prolongement analytique. Paris: Gauthier-Villars; F. d. M. **42**, 419, 1911) wirft die Frage auf, ob es möglich ist, eine solche Reihe von Punkten $z_1, z_2, \ldots$ anzugeben, daß eine Kette von Kreisen, deren jeder einen Punkt der Reihe als Mittelpunkt und den nachfolgenden als inneren Punkt haben möge, den ganzen Existenzbereich einer vorgegebenen analytischen Funktion überdecke. Die Frage wird in bejahendem Sinne beantwortet, allerdings vorausgesetzt, daß damit nicht notwendig eine „einfache“ Überdeckung gemeint wird. Vi.

W. F. Osgood. Sur une extension d'un théorème de Weierstrass et sur une restriction d'un autre théorème du même auteur. C. R. **156**, 1591-1593.

Das Weierstraßsche Theorem, daß eine analytische Funktion, welche überall den Charakter einer rationalen Funktion hat, auch eine rationale Funktion ist, kann unter Benutzung des Begriffes des „analytischen Raumgebietes" etwas weiter gefaßt werden. Unter dem analytischen Raume wird der Inbegriff aller Punkte $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ verstanden, für welche $|z_k| \lesseqgtr \infty$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Die Bezeichnung $|z| \lesseqgtr |\infty$ soll dabei bedeuten, daß z irgendein Punkt der unendlichen komplexen Ebene ist, welche durch den Punkt $z = \infty$ geschlossen wird. Ein zweiter Satz wird durch die Benutzung des genannten Begriffes präzisiert. A. K.

G. D. Birkhoff. A theorem on matrices of analytic functions. Math. Ann. **74**, 122-133.

Sei $(l_{ij}(x))$ eine Matrix von Funktionen, welche eindeutig und analytisch sind für $|x| \geqq |R$ (aber nicht notwendig analytisch an der Stelle $x = \infty$), und die Determinante dieser Matrix sei für $|x| \geqq R$ von Null verschieden. Dann existiert eine Matrix $(a_{ij}(x))$ von Funktionen, welche an der Stelle $x = \infty$ analytisch sind, die sich für $x = \infty$ auf die Einheitsmatrix (δ_{ij}) reduziert, und eine Matrix $(e_{ij}(x))$ von ganzen Funktionen, deren Determinante nirgends in der endlichen Ebene Null ist, derart, daß $(l_{ij}(x)) = (a_{ij}(x))(c_{ij}(x))\, x^{k_j})$, wo $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ganze Zahlen vorstellen. A. K.

D. Pompéiu. Sur une application du calcul fonctionnel à la théorie des fonctions. C. R. **156**, 376-378.

Wenn man die Funktion einer komplexen Variable $f(z)$ nicht der Beschränkung unterwerfen will, welche man gewöhnlich als Regularität in einem von einer geschlossenen Kurve C begrenzten Bereiche bezeichnet, nämlich der Gleichung $\int\limits_C f(z)\, dz = 0$, in welcher das Integral über die Randkurve zu erstrecken ist, so kann man z. B. dem Integral einen ganz bestimmten Zahlenwert I geben und je nach der Wahl dieser Zahlen zu neuen, ausgedehnteren Klassen stetiger Funktionen einer komplexen Variable gelangen. Die für reguläre Funktionen geltenden Eindeutigkeitssätze können auf Funktionen mit gleichem Zahlenwerte I verallgemeinert werden. Die in der Notiz angedeutete Anwendung auf die stetige Fortsetzbarkeit solcher allgemeineren Funktionen ist bei der Kürze der Notiz nicht mit der nötigen Klarheit zum Ausdruck gekommen. A. K.

D. Pompéiu. Sur le prolongement par continuité des fonctions d'une variable complexe. Ens. math. **15**, 305-307.

Der Inhalt der kurzen Notiz ist im wesentlichen derselbe wie in der vorstehend angezeigten Note des Verf. A. K.

M. Fatou. Sur les lignes singulières des fonctions analytiques. S. M. F Bull. **41**, 113-119.

Der Satz, daß die durch eine Taylorsche Reihe definierten Funktionen, wenn man den variablen Punkt an einen Punkt des Konvergenzkreises in einem von Null verschiedenen Winkel heranrücken läßt, gegen bestimmte (endliche oder unendliche) Funktionswerte konvergieren, abgesehen von Punkten, welche einer Nullmenge angehören, wird hier auf analytische Funktionen erweitert, wenn denselben Singularitäten an einer gewissen analytischen Kurve gestattet sind. Auch hier ergeben sich bei der Annäherung unter einem von Null verschiedenen Winkel im allgemeinen bestimmte (endliche oder unendliche) Grenzwerte.

A. K.

G. Julia. Sur les lignes singulières de certaines fonctions analytiques. S. M. F. Bull. **41**, 351-366.

Konstruktion einer Funktion, die innerhalb einer geschlossenen Kurve regulär ist, und für welche jeder Punkt der Grenzkurve eine wesentlich singuläre Stelle ist, in der Form:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{ik}}{a_{ik} - z}.$$

Diskussion früherer, von Pringsheim in dieser Richtung erhaltener Resultate, unter Anfügung einer Anzahl neuer, interessanter Bemerkungen.

A. K.

E. H. Taylor. An extension of a theorem of Painlevé. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 403-406.

Es sei $f(z)$ eine innerhalb des ganzen Innern eines Bereiches S der z-Ebene $z = x + yi$ einwertige und analytische Funktion. Wenn $f(z)$ an jedem Punkte eines zusammenhängenden Stückes des Randes von S verschwindet, von dem zwei Punkte A und B durch eine ganz in S liegende Kurve C verbunden werden können, so ist $f(z) \equiv 0$. Diesen Satz hat Painlevé für den Fall bewiesen, daß das fragliche Stück des Randes ein Bogen einer analytischen Kurve ist (Toulouse Ann. **2** B, 29, 1888). Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist: zu beweisen, daß der Satz in der obigen allgemeineren Fassung gültig ist, z. B. wenn in jeder Umgebung eines beliebigen Punktes des Randes Punkte vorhanden sind, denen man sich nicht längs einer stetigen Kurve, die in dem Bereiche liegt, nähern kann.

Lp.

A. D. Pitcher. Concerning the property Δ of a class of functions. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 468-472.

Der Aufsatz nimmt Bezug auf die Abhandlung von E. H. Moore, Introduction to a form of general analysis (New Haven Mathematical Colloquium. New Haven: Yale University Press, 1910; F. d. M. **41**, 376, 1910). „Eine der schwieriger zu erforschenden Eigenschaften ist die unten definierte Eigenschaft Δ. Die gegenwärtige Untersuchung gelangt zu einigen Sätzen, die in dieser Verbindung von Nutzen sein dürften und an sich von Interesse sein können.“

Lp.

G. R. Clements. Implicit functions defined by equations with vanishing Jacobian. Amer. Math. Soc. Trans. **14**, 325—342; Bull. (2) **19**, 168-169.

Es seien (1) $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) = f_i(x)$ analytische Funktionen im Punkte $(x) = (a)$ und $f_i(a) = b_i$. Die Natur der inversen Funktionen $x_i = g\,(y)$ in der Nachbarschaft des Punktes $(y) = (b)$ ist bekannt in dem Falle, wo die Jacobiana $J = \dfrac{\partial(f)}{\partial(x)}$ im Punkte $(x) = (a)$ nicht verschwindet, und auch dann, wenn J in der Nachbarschaft des Punktes identisch verschwindet.

Der Verf. beschäftigt sich mit dem Zwischenfalle, wo $J(a) = 0$, aber nicht $J(x)$ identisch Null ist.

Osgood (Math. Enzyklopädie II, 104) hat dann an Beispielen gezeigt, daß die Umkehrung von (1) zu mehrwertigen Funktionen führen kann, die im Punkte (b) nicht analytisch sind, und hat die Vermutung ausgesprochen: „Dies dürfte wohl stets der Fall sein.“

Es genügt, den Punkt (a), dessen Nachbarschaft R zu untersuchen ist, als den Nullpunkt O zu wählen, die Art des Beweises ist zumeist schon am Falle $n = 2$ ersichtlich. Man betrachte also die Transformation $T: x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$, mit den Bedingungen: (a) f und φ sind als Funktionen der komplexen Variabeln u, v eindeutig und analytisch in der Nachbarschaft R von O; (b) $f(0, 0) = 0$, $\varphi(0, 0) = 0$; (c) $J = f_u\varphi_v - f_v\varphi_u \not\equiv 0$, $J(0, 0) = 0$. Die Punkte (x, y), die den Punkten (u, v) von R vermöge T entsprechen, bilden ein endliches Gebiet $\bar{R}$. Es handelt sich um die Natur der inversen Funktionen $u = \bar{f}(x, y)$, $v = \bar{\varphi}(x, y)$. Mit wesentlicher Hülfe des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes ergibt sich zunächst, daß eine Umkehrung der Art, daß u und v eindeutig und stetig im Gebiet $\bar{R}$ sind, überhaupt nicht existieren kann.

Man nehme nämlich an, eine Umkehrung existiere, so würde J zugleich die beiden Eigenschaften besitzen: $J(u, v) = \bar{J}[f(u, v), \varphi(u, v)] \equiv 1$, $J(0, 0) = 0$, was unmöglich ist.

Wird dagegen das Gebiet R genügend eingeschränkt, so existiert eine endlich-mehrdeutige Umkehrung, die auch analytisch ist, mit Ausnahme eines eindimensionalen Gebietes.

Es empfiehlt sich weiter, die Transformation T' einzuführen, die aus T durch Weglassung der Bedingung (c) hervorgeht.

Wenn dann vermöge T' jedem Punkte (x, y) von R eine endliche Anzahl (> 1) von Punkten (u, v) in R entspricht, so existiert wiederum eine Umkehrung mit der obigen Eigenschaft.

Im zweiten Abschnitt werden allgemeinere Gleichungssysteme untersucht vom Typus $f_i(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, wo (a) die f_i analytische Funktionen ihrer Argumente sind in der Nachbarschaft R der Werte $(x) = 0$, $(y) = 0$; (b) die f_i für letztere Werte selbst verschwinden, sowie auch (c) die Größen $J_1, J_2, \ldots, J_{k-1}$, wo $J_1 = \dfrac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_p)}, \ldots, J_{k-1} = \dfrac{\partial(J_{k-2}, f_2, \ldots, f_p)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_p)}$, dagegen $J_k = \dfrac{\partial(J_{k-1}, f_2, \ldots, f_p)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_p)}$ von Null verschieden sein soll.

Dadurch werden die y als k-wertige Funktionen der x festgelegt, die in der Nachbarschaft von $(x) = 0$ stetig sind und auch analytisch, mit möglicher Ausnahme eines gewissen $(n-1)$-dimensionalen Gebietes $\mathfrak{M}_{n-1}$.

Dieser Satz (IV) ist als eine direkte Erweiterung des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes ($p = 1$) anzusehen.

Ein entsprechender Satz (V) gilt für die Transformation T: $x_i = f_i(y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$, wo (a) die f_i eindeutige und analytische Funktionen der y sind in der Umgebung des Punktes O $[(y) = 0]$ und in ihm verschwinden; (b) in diesem Punkte O die, wie oben, nur jetzt für die $y_1, \ldots, y_n$ gebildeten Größen $J_1, J_2, \ldots, J_k$ $(k > 1)$ mit Ausnahme der letzten verschwinden.

Es besitzt T eine k-wertige stetige Umkehrung, die in der Nachbarschaft von O definiert ist, die auch analytisch ist mit k verschiedenen Zweigen, mit Ausnahme einer $\mathfrak{M}_{n-1}$, wo sie stetig und weniger als k-wertig ist. Mit den x verschwinden auch die y.

Es werde noch zum Satze (IV) ein einfaches Beispiel mitgeteilt: $y_1^2 - y_2 - 2y_3 - y_4 = 0$, $y_2 - x_1^2 = 0$, $y_3 - x_1 x_2 = 0$, $y_4 - x_2^2 = 0$, $J_1 = 2y_1$, $J_2 = 2$. Die Lösung ist:

$$y_1 = \pm (x_1 + x_2), \quad y_2 = x_1^2, \quad y_3 = x_1 x_2, \quad y_4 = x_2^2.$$

Es ist noch zu bemerken, daß bei den hier behandelten Problemen die linken Seiten der auftretenden Gleichungen irreduzible Funktionen ihrer Argumente sind. Vgl. auch das Referat in diesem Jahrgange der F. d. M. (Abschn. IX, Kap. 3 B) über die verwandten Untersuchungen von Dederick. My.

G. R. Clements. Singular point transformations in two complex variables. Amer. Math. Soc. Trans. (2) **15**, 1-19.

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind teilweise schon in der vorjährigen Note des Verf. angekündigt: Implicit functions defined by equations with vanishing Jacobian (F. d. M. **43**, 483, 1912). Die untersuchte Transformation T ist die folgende: $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$, wo a) $f(u, v)$ und $\varphi(u, v)$ Funktionen der komplexen Veränderlichen u und v sind, die einwertig und analytisch in der Umgebung R von $u = 0$ und $v = 0$ sind; b) $f(0, 0) = 0$, $\varphi(0, 0) = 0$; c) $J(u, v) \equiv f_u \varphi_v - f_v \varphi_u \not\equiv 0$, $J(0, 0) = 0$.

Jedem Punkte (u, v) von R entspricht in T ein Punkt und nur einer (x, y) des xy-Raumes. Die Gesamtheit von Punkten (x, y), die so den Punkten (u, v) von R entsprechen, bilden einen endlichen Bereich $\bar{R}$ des xy-Raumes. Im allgemeinen liefern mehr als 1 Punkt (u, v) dasselbe Wertepaar für x und y. Ein Punkt (x, y) wird nur einmal gezählt, indem er durch seine Koordinaten als vollständig bestimmt angesehen wird, und es wird eine inverse Transformation $u = \bar{f}(x, y)$, $v = \bar{\varphi}(x, y)$ aufgesucht, die alle jene Punkte (u, v) von R zur Erscheinung bringt, die einem beliebigen Punkte von $\bar{R}$ mit den Koordinaten (x, y) unter T entsprechen. Somit sind die Funktionen $\bar{f}(x, y)$ und $\bar{\varphi}(x, y)$ nur in den Punkten von $\bar{R}$, und zwar daselbst als einwertige oder als vielwertige Funktionen zu definieren. Über die Transformation werden sieben langatmige Sätze abgeleitet. Lp.

Ch. Riquier. Sur l'inversion des fonctions uniformes. Marseille Ann. Fac. d. sc. **31**, 179-186 (1912).

Es sei $F(u)$ eine eindeutige Funktion, die in der ganzen Ebene der u nur polare und wesentliche Singularitäten hat; u_0 ein besonderer Wert von u, der weder mit einer Unstetigkeit der Funktion, noch mit einer Nullstelle ihrer Ab-

leitung zusammenfällt, $x_0 = F(u_0)$ der zugehörige Funktionswert. Wenn man gemäß dem allgemeinen Prinzip der impliziten Funktionen, von der Zahlenlösung $F(u_0) = x_0$ ausgehend, die Gleichung $F(u) = x$ auflöst, so ist die Summe der sich ergebenden Entwicklung, betrachtet im Innern des Größtkreises der Konvergenz, niemals gleich einer Unstetigkeit von $F(u)$ (Rev. sem. **24**$_1$, 54).

Lp.

L. L. Dines. Concerning two recent theorems on implicit functions. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 165-166, 462-467.

In demselben Bulletin des Vorjahres (F. d. M. **43**, 483, 1912) hat Clements als Verallgemeinerung des Weierstraßschen Theorems für implizite Funktionen einen Satz bewiesen, aus dessen Voraussetzungen folgt, daß dieser Satz ein einfacher, aber interessanter Zusatz zu einem von Bliss in Amer. Math. Soc. Trans. **13**, 133-145 veröffentlichten Theorem ist (F. d. M. **43**, 504, 1912).

Lp.

M. Fujiwara. Über die Polynome von der kleinsten totalen Schwankung. Tôhoku Math. J. **3**, 129-136.

Anschließend an ein Resultat von Tschebyscheff, werden die Sätze bewiesen: Die Funktion

$$f(x) = \frac{\sin[(n+1) \arccos x]}{2^n \sin(\arccos x)}$$

ist das einzige Polynom n-ten Grades mit dem ersten Koeffizient 1, welches das Integral $\int_{-1}^{+1} |f(x)|\, dx$ zu einem Minimum macht. Der Minimalwert ist $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Die Funktion

$$\frac{\cos (n \arccos x)}{2^{n-1}}$$

ist das einzige Polynom n-ten Grades mit dem ersten Koeffizienten 1, für welches nicht nur die Abweichung von Null, sondern auch die totale Schwankung zwischen -1 und $+1$ ein Minimum ist. Der kleinste Wert der totalen Schwankung ist $\frac{n}{2^{n-2}}$.

A. K.

A. Pchéborski. Sur quelques polynomes qui s'écartent le moins possible de zéro dans un intervalle donné. C. R. **156**, 531-533.

Der Verf. untersucht Polynome, die sich in einem gegebenen Intervall möglichst wenig von Null unterscheiden, deren Koeffizienten aber außerdem gewisse Gleichungen erfüllen sollen. Keine Beweise.

Fa.

Th. Tarnarider. Sur la meilleure approximation de $|x|^{2s+1}$ par des polynomes de degrés indéfiniment croissants. C. R. **156**, 672-675.

Die ohne Beweise mitgeteilten Ausführungen des Verf. schließen sich an die bekannte Behandlung des Falles $s = 0$ durch S. Bernstein an (Acta

Math. **37**, 1; Referat S. 475). $|x|^{2s+1}$ kann im Intervall $(-1, +1)$ durch ein Polynom $(2n)$-ten Grades mit einem Fehler dargestellt werden, der für genügend große n kleiner als $\frac{0,65}{(2n)^3}$ und für unendlich viele n größer als $\frac{0,54}{(2n)^3}$ ist. Fa.

G. Pólya. Über Annäherung durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln. Palermo Rend. **36**, 279-295.

Der Verf. beweist folgende Sätze:

Sind die sämtlichen Wurzeln der Polynome $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots$ a) positiv, b) reell, und gilt gleichmäßig in irgendeinem den Nullpunkt enthaltenden Gebiet G:

$$(1) \qquad F(x) = \lim_{n=\infty} \Phi_n(x),$$

so ist $F(x)$ entweder identisch Null oder gleich dem Produkte von a) $e^{-\gamma x}$, b) $e^{-\gamma x^2}$ mit $\gamma \geqq 0$ mit einer ganzen Funktion, die im Falle a) vom Geschlechte Null, im Falle b) vom Geschlechte Null oder 1 ist.

Haben die Abschnitte einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ nur Wurzeln, die a) positiv, b) reell sind, so stellt $\mathfrak{P}(x)$ eine ganze Funktion dar, die im Falle a) vom Geschlechte Null, im Falle b) vom Geschlechte Null oder 1 ist. Fa.

G. Pólya. Über Annäherung durch Polynome, deren sämtliche Wurzeln in einen Winkelraum fallen. Gött. Nachr. 1913, 326-330.

Ist eine Folge von Polynomen, deren Nullstellen sämtlich in einen Winkelraum mit einer Öffnung $< \pi$ fallen, in einem Kreis um den Scheitel des Winkelraums gleichmäßig konvergent, und zwar gegen eine nicht identisch verschwindende Grenzfunktion, so ist sie überall, und in jedem endlichen Bereich gleichmäßig, konvergent; die Grenzfunktion hat die Form $g(x)\, e^{\gamma x}$, wo $g(x)$ vom Geschlecht Null und γ eine Konstante ist. Schr.

G. Pólya. Sur un algorithme toujours convergent pour obtenir les polynomes de meilleure approximation de T c h é b y c h e f pour une fonction continue quelconque. C. R. **157**, 840-843.

Sei $\varphi(x)$ eine in dem Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ erklärte, stetige Funktion,

$$P_k(x) = p_{k_0} + p_{k_1} x + \cdots + p_{kn} x^n$$

dasjenige Polynom, das, für $\mu_0 + \mu_1 x + \cdots + \mu_n x^n$ eingesetzt, dem Integral

$$\int_0^1 [\mu_0 + \mu_1 x + \cdots + \mu_n x^n - \varphi(x)]^{2k}\, dx \quad (k \geqq 1)$$

den kleinsten Wert erteilt. Sei endlich $T(x)$ das zu $\varphi(x)$ und dem Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ gehörige T s c h e b y s c h e f f sche Polynom n-ten Grades. Es gilt

$$T(x) = \lim_{k=0} P_k(x).$$

Ltn.

S. Bernstein. Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degrés donnés. Acta math. **37**, 1-57.

Die hier behandelte Frage ist ein spezieller Fall der in der Preisarbeit in den Mémoires publiés par l'Académie de Belgique, 1912 (s. F. d. M. **42**, 1911, 935 und **43**, 1912, 493) bearbeiteten, jedoch unter ausgiebiger Verwendung der besonderen Umstände, die sich hier darbieten.

Den Ausgangspunkt bilden die oszillierenden Polynome, d. h. die Ausdrücke $P(x) = A_0 x^{\alpha_0} + A_1 x^{\alpha_1} + \cdots + A_n x^{\alpha_n}$, die das Maximum ihres Absolutwerts an $n+1$ Stellen erreichen; ein solches ist z. B. $P_m(x) = \cos(m \arccos x)$. Ihre Koeffizienten haben abwechselnde Vorzeichen, ebenso die aufeinanderfolgenden Extremwerte. Ist ein Koeffizient A vorgeschrieben, so hat $P(x)$ im Intervall $(0,1)$ ein kleineres Maximum von $|P(x)|$ als jedes andere Polynom (mit denselben α) und umgekehrt: $P(x)$ ist durch diese Forderung festgelegt. Die beste Approximation von $|x|$ im Intervall $(-h, +h)$ durch ein Polynom vom Grade $2n$ ist $h E_{2n}$; dabei ist E_{2n} das Maximum von $|P(x|$, wo $P(x) = x + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots + \alpha_n x^{2n}$ ein oszillierendes Polynom ist. Soll die Approximationsfunktion für $x=0$ verschwinden, so tritt $A_0 + x + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \cdots + A_n x^{2n}$ für $P(x)$ ein und $\frac{1}{2n+1} > E_{2n} > \frac{1}{4(1+\sqrt{2})} \frac{1}{2n-1}$ (und ähnlich für den anderen Fall).

Im zweiten Teil wird das asymptotische Verhalten von E_{2n} untersucht; es zeigt sich, daß $2n \cdot E_{2n}$ für $n = \infty$ gegen eine bestimmte Grenze konvergiert.

Schr.

S. Bernstein. Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation des fonctions analytiques admettant des singularités données. Belg. Bull. Sc. 1913, 76-90.

Weitere Ausführung des Gegenstandes, der in der Note C. R. **155**, 1062-1065 (F. d. M. **43**, 494, 1912) behandelt war.

Lp.

S. Bernstein. Sur quelques propriétés asymptotiques des polynomes. C. R. **157**, 1055-1057.

Es handelt sich um die asymptotischen Eigenschaften derjenigen Polynome

$$H(x) = (x^h + b_1 x^{h-1} + \cdots + b_h)(x^{n-h} + p_1 x^{n-h-1} + \cdots + p_{n-h}),$$

(wo die b gegebene reelle Zahlen sind), die im Intervall $(-1, +1)$ die Null am besten approximieren.

Schr.

S. Bernstein. Sur les recherches récentes relatives à la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 256-266.

Zusammenfassender Bericht über die eigenen bezüglichen Arbeiten sowie über die von D. Jackson, H. Lebesgue, Ch. de la Vallée Poussin unter gelegentlichem Hinweis auf Tschebyscheff, Weierstraß, A. u. W. Markov.

Lp.

W. Sierpiński. Kilka uwag o aproxymowaniu funkcyj ciągłych (Einige Bemerkungen über das Approximieren stetiger Funktionen). Wektor 2, 49-53 (1912).

Jede in einem Intervalle stetige Funktion kann dargestellt werden als Grenze einer gleichmäßig konvergenten Folge von mit dem Index n wachsenden (oder abnehmenden)

a) Polynomen,

b) von stetigen, nirgends derivierbaren Funktionen,

c) von überall unstetigen Funktionen,

d) von stetigen Funktionen, die pantachisch Intervalle besitzen, in denen sie konstant sind.

A. R.

Denjoy. Sur les formules de M. Jensen et leurs applications à l'étude des valeurs rares des fonctions entières. S. M. F. C. R. 1913, 38-39.

Folgerungen aus den Formeln von Jensen in Acta Math. **30**, 175-193 (F. d. M. **37**, 422, 1906).

Lp.

G. N. Watson. A class of integral functions defined by Taylor's series. Cambr. Phil. Soc. Trans. **22**, 15-37.

Watson erhält die asymptotische Entwicklung einer Klasse von ganzen Funktionen allgemeinerer Art als die Funktion

$$F_\beta(x;\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\cdot\chi(n+\theta)}{n!(n+\theta)^\beta},$$

wo $\chi(y)$ analytisch ist in der Umgebung von $y=\infty$, die von E. W. Barnes betrachtet ist (Lond. Roy. Soc. Trans. (A) **206**, 249-297, 1906; F. d. M. **37**, 427, 1906). Watson neigt der Ansicht zu, daß die betrachteten ganzen Funktionen die allgemeinsten ganzen Funktionen sind, welche die beiden Eigenschaften besitzen, 1. daß der Koeffizient des n-ten Gliedes in der Taylorschen Reihe, welche die Funktion definiert, eine einfache Funktion von n ist, 2. daß die asymptotischen Entwicklungen der Funktionen nur Potenzen und Exponentialfunktionen der Veränderlichen enthalten.

J. (Lp.)

G. H. Hardy. A theorem concerning Taylor's series. Quart. J. **44**, 147-160.

Der Verf. beweist zuerst folgenden Satz: Wenn $f(x)=\sum a_n x^n$ für $|x|<1$ konvergiert und nach der Landauschen Bezeichnungsweise $O(1-|x|)^{-\alpha}$ ist, dann ist $\sum|a_n||x|^n=O(1-|x|)^{-\alpha-\frac{1}{2}}$ und für $\alpha=0$ sogar $o(1-|x|)^{-\frac{1}{2}}$. Sodann untersucht der Verf. ausführlich die Funktion $f(x)=\sum n^{-b}\,e^{in^a}x^n$, die von ihm und anderen, z. B. Fabry, schon mehrfach betrachtet worden war. Es gelingt, zu zeigen, daß diese Funktion in der längs derselben Achse 1 bis ∞ aufgeschnittenen Ebene regulär ist; auch über das Verhalten in den anderen Blättern ihrer Riemannschen Fläche, wie auch über die Konvergenz der obigen Reihe auf ihrem Konvergenzkreis vermag der Verf. Aufschluß zu geben. Nebenbei gelangt er zu Beispielen von Potenzreihen, die auf ihrem Konvergenzkreise zwar gleichmäßig, aber nicht absolut konvergieren.

Fa.

G. H. HARDY. A function of two variables. Quart. J. **45**, 85-113.

In sehr vielen Fällen, in denen der Koeffizient a_n in einfacher analytischer Weise von n abhängt, läßt sich die Fortsetzung der Potenzreihe $\sum a_n x^n$ übersehen. Viel verwickelter sind die Verhältnisse bei Potenzreihen $\sum a_{mn} x^m y^n$, von denen ganz wenige Beispiele näher untersucht sind. In der vorliegenden Arbeit gelingt es dem Verf., den Fall $a_{mn} = \exp(-\sqrt{(\alpha m^2 + 2\beta mn + \gamma n^2)})$ zu erledigen. Zwischen zwei zusammengehörigen Konvergenzradien r, s besteht die Beziehung $\gamma(\lg r)^2 - 2\beta \lg r \lg s + \alpha(\lg s)^2 = \alpha\gamma - \beta^2$. Die Stellen $x = r$, $y = s$ sind singuläre, und die Funktion verhält sich an ihnen genau wie $\frac{2\pi(\alpha\gamma - \beta^2)}{(\alpha\gamma - \beta^2 - \alpha(\lg y)^2 + 2\beta \lg x \lg y - \gamma(\lg x)^2)^{3/2}}$. Der Verf. gibt noch weitere Entwicklungen und asymptotische Abschätzungen der Funktion in der Umgebung dieser singulären Stellen.

Fa.

M. PÉTROVITCH. Allure d'une transcendante entière. C. R. **154**, 499-501 (1912).

Der Verf. untersucht die ganze Funktion $G(z) = \sum_1^\infty {}_n \frac{2^n}{n^n}$, die bei der Integration gewisser Differentialgleichungen wie auch als Vergleichsfunktion in der Theorie der ganzen Funktionen auftritt. Es ist $G(z) = \int_0^1 (1 + z \cdot e^{zu})\, dt$, wo $u = -t \lg t$ gesetzt ist; ähnliche Integraldarstellungen ergeben sich für die Ableitungen $G'(z)$, $G''(z)$ usw. Für große Werte von $|z|$ ist $G(z)$ asymptotisch gleich $\sqrt{\frac{2\pi}{e}}\, e^{\frac{z}{e}} \sqrt{z}$ und $G^{(k)}(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{e^{2k+1}}}\, e^{\frac{z}{e}} \sqrt{z}$. Im reellen Gebiet hat die Kurve $y = G(x)$ die Gerade $y = 1$ zur Asymptote für $x = -\infty$; wächst x von $-\infty$ an, so nimmt $G(x)$ zuerst ab bis zu einem negativen Minimum, um dann monoton zuzunehmen; die negative X-Achse wird von der Kurve $y = G(x)$ zweimal geschnitten. Außer diesen beiden reellen Nullstellen hat die Funktion $G(z)$ noch unendlich viele imaginäre Nullstellen.

Fa.

M. PÉTROVITCH. Sur le module minimum d'une fonction analytique le long d'une circonférence. C. R. **157**, 986-988.

Es sei $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$, $|z| \leqq \varrho$, $\nu(t) = \frac{1}{t^2} \sum_0^\infty {}_n |a_n t^n|^2$, $L = \underset{0 \leqq t \leqq \varrho}{\mathrm{Min}}\, \nu(t)$, $\lambda = \frac{|a_0|}{\sqrt{L}}$, p gleich der Anzahl der Nullstellen von $f(z)$ im Kreise $(z) = \varrho$; dann ist das Minimum von $(f(z))$ für $|z| = \varrho$ zwischen 0 und $\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^p$ gelegen.

Fa.

S. KAKEYA. On a system of linear forms with integral variables. Tôhoku Math. J. **4**, 120-131.

Der Verf. beweist folgenden Satz: Gegeben seien $n - 1$ reelle lineare Formen $f_i = a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n (i = 1, \ldots, n-1)$, deren Matrix $\{a_{ik}\}$ von der Ord-

nung $(n-1)$ ist. Sind $B_1, \ldots, B_n$ rational, dann soll kein derartiges System von Zahlen $A_1, \ldots, A_{n-1}$ existieren, daß $A_1 f_1 + \cdots + A_{n-1} f_n \equiv B_1 x_1 + \cdots + B_n x_n$ wäre. Unter diesen Bedingungen gibt es zu beliebigen $n-1$ reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_{n-1}$ immer ganze Zahlen $x_1, \ldots, x_n$, für welche die $(n-1)$ Differenzen $|f_i - a_i|$ kleiner als eine vorgeschriebene Zahl δ ausfallen.

Hieran knüpft der Verf. noch weitere Untersuchungen an, die sich auf die Vorzeichen und die Verteilung der x_i beziehen. Fa.

S. Kakeya. On the zero points of a power series with positive coefficients. Tôhoku Math. J. **3**, 23-34.

A. Hurwitz. Über einen Satz des Herrn Kakeya. Tôhoku Math. J. **4**, 89-93.

A. Kempner. Extract of a letter to the editor. Tôhoku Math. J. **4**, 94-95.

Kakeya spricht, indem er sich auf eine frühere Arbeit beruft, ohne Beweis den Satz aus:

Die endliche oder konvergente unendliche Reihe $p_0 + p_1 \varepsilon + p_2 \varepsilon^2 + \cdots$, wo $|\varepsilon| = 1$ und $p_0 \geqq p_1 > \ldots \geqq p_n \geqq 0$, kann nicht gleich Null sein. Er schließt daraus weiter:

Die Nullstellen der Reihe mit positiven Koeffizienten $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ liegen außerhalb eines Kreises, dessen Radius die untere Grenze der Quotienten $\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \ldots$ ist.

Kempner zeigt an einfachen Beispielen, daß die beiden Sätze falsch sind. Dagegen beweist Hurwitz sehr einfach folgendes:

Es mögen die Koeffizienten der Funktion

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

reell und positiv sein. Ist dann noch $a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \cdots \geqq a_n$, so hat die Gleichung $f(x) = 0$ keine Wurzel, deren absoluter Betrag < 1 wäre.

Daraus folgt dann:

Sind die Koeffizienten der Gleichung $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ reell und positiv, so gilt für jede Wurzel x dieser Gleichung die Beziehung $r \leqq |x| \leqq s$, wobei r den kleinsten und s den größten unter den Quotienten $\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}$ bezeichnet.

Die komplexen Wurzeln der Gleichung $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0$ sind ihrem Betrage nach kleiner als der größte der Quotienten $\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \ldots, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$ (zuerst von Hayashi bewiesen).

Die Gleichung $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ mit reellen Koeffizienten, welche den Bedingungen $a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$ genügen, besitzt stets und nur dann eine Wurzel vom Betrage 1, wenn die Koeffizienten sich in Gruppen von je $m > 1$ aufeinanderfolgenden und untereinander gleichen einteilen lassen. Fa.

W. F. Osgood. Zum Beweise des Picardschen Satzes: eine Ergänzung. Deutsche Math.-Ver. **22**, 35-36.

Vervollständigung des Beweises, den der Verf. in seinem Lehrbuch der Funktionentheorie gegeben hat. Fa.

S. TILLINGER. Sur la détermination de la croissance des fonctions entières définies par une série de Taylor. C. R. **156**, 434-437.

Folgender Satz wird ohne Beweis angegeben und auf einige besondere Fälle angewandt:

a_n sei ein Polynom k-ten Grades von n, das für $n = 1, 2, \ldots$ positiv ausfällt; $g(n)$ sei eine mit n wachsende, positive, zweimal differenzierbare Funktion. Dann besteht zwischen den ganzen Funktionen $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ng(n)} x^n$ und $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ng(n)} x^n$ die Beziehung

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{[f(x)]^k G(x)} = \text{const.},$$

wo $f(x)$ eine ganze Funktion von x vorstellt, welche mit der zu $e^{g(x)}$ inversen Funktion bei unendlich wachsendem x in gleicher Art wächst. A. K.

G. VALIRON. Sur les fonctions entières d'ordre nul. C. R. **156**, 534-536.

$f(z)$ sei eine ganze Funktion der Ordnung Null, r_n der Betrag ihrer n-ten Nullstelle, $M(r) = \text{Max}\,|f(z)|$. Man kann dann immer derartige stetige, nie wachsende Funktionen $\varrho(x)$ finden, daß $\varrho(x)\lg(x)$ nie abnimmt, und daß $n \leqq r_n^{\varrho(r_n)}$ wird (für $n > n_0$ mit unendlich häufiger Geltung des Zeichens $=$). Dann gilt

$$\frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n} < M(r) = \frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n} e^{\alpha r^{\varrho(r)}} < e^{1+\varepsilon \int_{r_0}^{r} \frac{x^{\varrho(x)}}{x} dx}$$

(wo $r_n < r < r_{\nu+1}$, $0 < \alpha < 1$ und $\lim_{r=\infty} \varepsilon = 0$ ist). Es kommt dann darauf an, die noch vorhandene Willkür bei der Wahl von $\varrho(x)$ so zu beschränken, daß die erhaltenen Abschätzungen möglichst genau ausfallen. Dazu sind mehrere Fallunterscheidungen nötig, über die im einzelnen nicht berichtet werden kann. Fa.

G. VALIRON. Sur les fonctions entières d'ordre fini. C. R. **156**, 1138-1141.

Die sehr genauen Resultate Lindelöfs (Acta Soc. Fennicae **31**, 1901; F. d. M. **33**, 421, 1902) über das Anwachsen ganzer Funktionen, die Größenordnung ihrer Koeffizienten und die Verteilung ihrer Nullstellen lassen sich verallgemeinern. Fa.

G. VALIRON. Sur la croissance des fonctions entières d'ordre nul. Nouv. Ann. (4) **13**, 97-110.

Mattson (Palermo Rend. **33**, 91-107; F. d. M. **43**, 509, 1912) hat folgenden Satz bewiesen.

Wenn $\Sigma \frac{1}{\lg |a_n|}$ konvergiert, dann gilt in unendlich vielen Kreisringen die Gleichung $\prod_1^\infty{}_n \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = \frac{z^m}{a_1 a_2 \ldots a_m}(1+\varepsilon)$, wenn $|a_m| < |z| < a_{m+1}|$.

Der Verf. gibt einen neuen Beweis und zeigt zugleich, daß die Aussage auch dann richtig bleiben kann, wenn $\Sigma \frac{1}{\lg |a_n|}$ divergiert. Fa.

M. Fekete. Sur une propriété des racines des moyennes arithmétiques d'une série entière réelle. C. R. **157**, 574-577.

Hat die für $|x| < \varrho$ konvergente unendliche Reihe $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ die reelle k-fache Nullstelle ξ ($|\xi| < \varrho$), so liegen, falls nur n groß genug gewählt wird, in einer gegebenen Umgebung von ξ k Nullstellen von $f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, von denen aber bei geradem k keine einzige reell zu sein braucht; dagegen haben die Cesàroschen Mittelwerte $f_n^{(r)}(x) = -\frac{x^{n+r+1}}{n+r}\frac{d}{dx}\left(\frac{f_n^{(r-1)}(x)}{x^{n+r}}\right)$ in der Umgebung von ξ stets genau k reelle Wurzeln. Fa.

J. F. Steffensen. Über eine Klasse von ganzen Funktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie. Acta Math. **37**, 75-112.

Die Abhandlung ist der Hauptsache nach ein Auszug aus der dänisch geschriebenen Habilitationsschrift des Verfassers und beschränkt sich auf die Wiedergabe der wichtigsten Ergebnisse nebst einigen Andeutungen der Beweise, die in der XIV + 148 Seiten langen Habilitationsschrift (Analytiske Studier med Anvendelser paa Taltheorien, Kopenhagen 1912) ins einzelne ausgeführt sind. Über diese ist F. d. M. **43**, 262 berichtet; es genügt daher hier der Hinweis, daß diese inhaltreichen und durch wichtige zahlentheoretische Anwendungen ausgezeichneten Untersuchungen nunmehr leicht zugänglich sind. Fa.

G. Faber. Über arithmetische Eigenschaften gewisser ganzer Funktionen. Münch. Ber. 1913, 533-556.

Der Verf. gibt den bekannten Beweisen für die Transzendenz von π, die ja alle in wesentlichen Zügen untereinander übereinstimmen, eine Wendung, durch die sowohl eine Vereinfachung des Beweises, wie auch dessen Ausdehnung auf andere zahlentheoretische Probleme erzielt wird. Dem Verf. gelingt es so, sämtliche in dieser Richtung liegenden Sätze von Perron Math. Ann. **66**, 482, 1909 (F. d. M. **40**, 364) und Stridsberg (Acta math. **33**, 233, 1910; F. d. M. **41**, 243, 1910) zu beweisen und zu verallgemeinern. Fa.

A. Thue. Über eine Eigenschaft, die keine transzendente Größe haben kann. Christiania Vidensk. selsk. Skrifter 1912, **2**, Nr. 20, 15 S.

Es sei ϱ eine reelle Größe > 1. Der Verf. gibt einen Ausdruck für ϱ^n, der nur dann gefunden wird, wenn ϱ die Wurzel einer ganzen Funktion mit ganzen

Koeffizienten ist. Wenn $\sum p_1 \varrho_1^n$ eine gewisse Form annimmt, bildet jede der Größen ϱ, deren absoluter Betrag > 1 ist, eine Wurzel einer ganzen Funktion mit ganzen Koeffizienten (Rev. sem. **23**$_1$, 79). Lp.

G. Rémoundos. Généralisation d'un théorème de M. Landau. S. M. F. Bull. **41**, 19-24, 340-346.

G. Rémoundos. Sur les familles de fonctions multiformes admettant des valeurs exceptionnelles dans un domaine. C. R. **157**, 542-545.

Die erweiterte Fassung des Picardschen Theorems, wie sie von Landau gefunden wurde, wird vom Verf. verallgemeinert, indem noch allgemeinere Funktionengattungen in die Untersuchungen mit einbezogen werden. Die Notiz der C. R. vervollständigt im besonderen einige frühere Untersuchungen des Verf. über das Picardsche Theorem und die vieldeutigen Funktionen (vgl. F. d. M. **43**, 507, 1912). A. K.

G. Rémoundos. Sur les fonctions entières et algébroïdes; généralisation du théorème de M. Picard dans la direction de M. Landau. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **30**, 377-393.

G. Rémoundos. Sur les familles de fonctions algébroïdes. C. R. **156**, 862-865.

G. Rémoundos. Sur les séries et les familles de fonctions algébroïdes dans un domaine. C. R. **156**, 1141-1144.

G. Rémoundos. Le théorème de M. Picard dans un cercle dont le centre est un point critique algébrique. C. R. **157**, 694-697.

G. Rémoundos. Le théorème de M. Picard et les fonctions algébroïdes. Palermo Rend. **35**, 217-224.

Ausdehnung gewisser Ideenbildungen, die teils mit dem Picard-Landauschen Satze, teils mit den bekannten weitreichenden Verallgemeinerungen des Weierstraßschen Doppelreihensatzes zusammenhängen, auf algebroide Funktionen. Fa.

P. Montel. Sur quelques généralisations nouvelles des théorèmes de M. Picard. S. M. F. C. R. 1913, 17-18.

Es seien m, n, p ganze Zahlen und $1/m + 1/n + 1/p < 1$; ferner sei $f(x)$ eine meromorphe Funktion von x in dem Gebiete D. Man betrachte die Gleichungen (α) $f(x) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x) = \infty$. Die Wurzeln der ersten Gleichung, deren Vielfachheit durch m teilbar ist, werden regelmäßig genannt, die anderen unregelmäßig. Dieselben Benennungen gelten für n und p. Dann gelten folgende Sätze: I. Ist $f(x)$ in der ganzen Ebene meromorph, so besitzt wenigstens eine der Gleichungen (α) eine unregelmäßige Wurzel. II. Ist $a_0 + a_1 x + \cdots$ $(a_1 \neq 0)$ die Taylorsche Entwicklung einer Funktion $f(x)$ um den Nullpunkt O, so gibt es eine nur von a_0 und a_1 abhängige Zahl R derart, daß in jedem Kreise um O von einem Radius $> R$ eine der Gleichungen eine unregelmäßige Wurzel hat, oder die Funktion $f(x)$ hat einen wesentlich singulären Punkt. III. In der Umgebung eines wesentlich singulären Punktes einer Funktion $f(x)$ besitzt wenigstens eine der Gleichungen (α) unendlich viele unregelmäßige Wurzeln. Lp.

St. Mazurkiewicz. O odwracaniu funkcyi klasy pierwszej (Über die Umkehrung einer Funktion erster Klasse). Wektor **3**, 206-208.

Sierpiński hat die Frage gestellt: Es sei eine Funktion erster Klasse in der Klassifikation von Baire gegeben, d. h. eine Funktion, die als Grenze einer Folge stetiger Funktionen dargestellt werden kann, und es nehme dieselbe im Intervall a, b alle Werte des Intervalles A, B, und zwar nur einmal, an. Ist dann die Umkehrung ebenfalls notwendig eine Funktion erster Klasse? Der Verf. gibt ein Beispiel einer Funktion, deren Umkehrung in jedem Punkte unstetig ist, die somit keine Funktion erster Klasse im Sinne von Baire ist.

A. R.

J. Sire. Sur la puissance de l'ensemble des points singuliers transcendants des fonctions inverses des fonctions entières. S. M. F. Bull. **41**, 148-160.

Die gelegentlich von Painlevé aufgeworfene Frage, ob die transzendenten Singularitäten der Umkehrung einer ganzen Funktion immer nur in abzählbarer Menge vorhanden sind, wird durch Bildung eines passenden Beispiels verneint.

Fa.

J. Sire. Sur les fonctions entières de deux variables d'ordre apparent total fini et à croissance régulière par rapport à l'une des variables. Journ. de Math. (6) **9**, 1-37.

Der Verf. hat sich folgende Aufgabe gestellt: Wenn $F(x, y) = \sum_0^\infty{}_n a_n(x) y^n$ eine ganze Funktion der Gesamtordnung λ ist, so soll das Anwachsen von $|F(x, y)|$ als Funktion von y untersucht werden unter der Voraussetzung, daß x irgendwelche endlichen Werte annimmt, und daß $f(y) = \sum_0^\infty{}_n c_n y^n$ von der Ordnung μ ist und regelmäßig anwächst; c_n ist der dem Betrage nach größte Koeffizient von $a_n(x)$.

Das Ergebnis ist: $F(x, y)$ ist als Funktion von y von der Ordnung μ und von regelmäßigem Anwachsen für alle x, ausgenommen die einer gewissen Punktmenge, welche die Mächtigkeit des Kontinuums haben kann; für diese Ausnahmewerte x ist $F(x, y)$ entweder von einer Ordnung $< \mu$ oder zwar von der Ordnung μ, aber von unregelmäßigem Anwachsen.

Fa.

P. Stäckel. Periodische Funktionen und Systeme von unendlich vielen linearen Gleichungen. Acta Math. **37**, 59-73.

Der Verf. fragt: Wie müssen die Koeffizienten a_n beschaffen sein, damit die Potenzreihe

$$(1) \qquad P(z) = \sum_0^\infty{}_n \frac{a_n}{n!} z^n$$

Element einer analytischen Funktion $f(z)$ mit der Periode c ist:

$$(2) \qquad f(z + c) \equiv f(z)?$$

Liegt c innerhalb des Konvergenzkreises $|z| = \varrho$ von (1), so entwickelt der

Verf. $P(z)$ nach Potenzen von $(z+c)$ und erhält dadurch das System unendlich vieler Gleichungen:

$$(3) \qquad \sum_1^\infty {}_t \frac{a_{n+t}}{t!} c^{t-1} = 0,$$

die sich freilich allen bekannten Methoden als unzugänglich erweisen. Ist jedoch $\varrho > \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot |c|$, so ist nicht nur $f(z)$ in einem Parallelstreifen der Breite $2\sqrt{\varrho^2 - \frac{|c|^2}{4}}$ regulär und daselbst in eine trigonometrische Reihe

$$(4) \qquad f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_\nu A_\nu e^{\frac{2\pi i \nu z}{c}}$$

entwickelbar, sondern es ergeben sich auch durch Koeffizientenvergleichung für die a_n konvergente Reihen:

$$(5) \qquad a_n = \left(\frac{2\pi i}{c}\right)^n \sum_{-\infty}^{+\infty} A_\nu \nu^n.$$

Es ist leicht zu sehen, daß die Gleichungen (3) durch diese Ausdrücke identisch befriedigt werden.

Zum Schlusse untersucht der Verf. die besonderen periodischen Funktionen, die sich ergeben, wenn die a_n noch Rekursionsformeln

$$(6) \qquad a_{n+r} = \lambda_0 a_n + \lambda_1 a_{n+1} + \cdots + \lambda_{r-1} a_{n+r-1}$$

befriedigen. Fa.

L. Fejér. Über die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer Fourier-Reihe. J. für Math. **142**, 165-188; Math. és termész. ért. **31**, 385-415. (Ungarisch.)

Es sei $f(x)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen x, die im Intervall $x = (0 \dots 2\pi)$ den Dirichletschen Bedingungen genügt und darin eine oder mehrere Sprungstellen hat. Wenn die aufeinander folgenden Teilsummen der Fourierschen Reihe:

$$(1) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

mit $s_0(x), s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots$ bezeichnet werden, so gilt der klassische Satz von Dirichlet, daß für eine Sprungstelle $x = x_0$:

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} s_n(x) = \tfrac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)]$$

ist, sodaß man aus der Fourierschen Reihe für $f(x)$ durch einen einfachen Grenzprozeß das arithmetische Mittel der zur Sprungstelle $x = x_0$ gehörigen Grenzwerte $f(x_0+0)$ und $f(x_0-0)$ erhalten kann. Wie kann man aber, fragt der Verf., durch einen einfachen Grenzprozeß aus der Fourierschen Reihe für $f(x)$ die zur Sprungstelle $x = x_0$ gehörigen Grenzwerte selbst bekommen?

Für eine beliebige, den Dirichletschen Bedingungen genügende Funktion $f(x)$ läßt sich vermöge des Satzes von Heine über die gleichmäßige

Konvergenz der Fourierschen Reihe in der Umgebung einer Stetigkeitsstelle die Beantwortung der Frage auf die entsprechende Frage für die besondere Funktion:

$$(3)\qquad \varphi(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots$$

zurückführen, die für $x = (0 \ldots 2\pi)$ gleich $\frac{1}{2}(\pi - x)$ ist, für $x = 0$ den Sprung π aufweist und die Periode 2π besitzt. Man hat nämlich die (bekannte) Zerlegung:

$$(4)\qquad f(x) = \tfrac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)] + \frac{1}{\pi}[f(x_0+0) - f(x_0-0)] + f_1(x),$$

wo $f_1(x)$ in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ stetig ist.

Die aufeinander folgenden Teilsummen der Fourierschen Reihe (3) mögen mit $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \ldots, \sigma_n(x), \ldots$ bezeichnet werden. Dann gilt die Darstellung:

$$(5)\qquad \sigma_n(x) = -\tfrac{1}{2}x + \int_0^{\frac{1}{2}x} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt,$$

aus der sich vermöge des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung die Gleichung

$$(6)\qquad \sigma_n(x) = -\tfrac{1}{2}x + \int_0^{\frac{1}{2}x} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt + \frac{A(n,x)}{2n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ergibt, wo

$$(7)\qquad |A(n,x)| < a;$$

hier bedeutet a eine positive numerische Konstante. Aus der Darstellung (6) folgt, unter β eine beliebige positive Konstante verstanden, der Grenzwertsatz:

$$(8)\qquad \lim_{n=\infty} \sigma_n\left(\frac{\beta}{n}\right) = \int_0^{\beta} \frac{\sin t}{t}\,dt,$$

der von besonderer Wichtigkeit wird, wenn man β so wählt, daß die Gleichung

$$(9)\qquad \int_0^{\beta} \frac{\sin t}{t}\,dt = \tfrac{1}{2}\pi = \varphi(+0)$$

gilt. Ist nämlich g eine der unendlich vielen positiven Wurzeln der transzendenten Gleichung

$$(10)\qquad \int_z^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = 0,$$

so hat man:

$$(11)\qquad \lim_{n=\infty} \sigma_n\left(\frac{g}{n}\right) = \tfrac{1}{2}\pi = \varphi(+0), \quad \lim_{n=\infty} \sigma_n\left(-\frac{g}{n}\right) = -\tfrac{1}{2}\pi = \varphi(-0).$$

Hieraus ergibt sich endlich, indem man zu der Darstellung (4) der Funktion $f(x)$ zurückgeht, für die Fouriersche Entwicklung (1) dieser Funktion der Grenzwertsatz:

$$(12) \qquad \lim_{n=\infty} s_n\left(x_0 \pm \frac{g}{n}\right) = f(x_0 \pm 0).$$

Mit ähnlichen Mitteln wird auch ein ähnlicher Satz für die arithmetischen Mittel $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{n-1}, \ldots$ der Teilsummen $\sigma_n(x)$ hergeleitet, jedoch wird es hier erforderlich, Grenzwerte der Form

$$(13) \qquad \lim_{n=\infty} \sigma_n\left(\frac{\beta}{n^a}\right)$$

zu betrachten, wo die positive Konstante $\alpha < 1$ ist. Der Übergang zur Reihe (1) für $f(x)$ geschieht, indem ein Satz über die arithmetischen Mittel der Teilsummen einer Fourierschen Reihe verallgemeinert wird, den der Verf. in einer früheren Arbeit hergeleitet hatte (F. d. M. **34**, 287, 1903).

Unter der besonderen Voraussetzung, daß die Funktion $f(x)$ im Intervall $x = (0 \ldots 2\pi)$, abgesehen von den Sprungstellen, eine Ableitung $f'(x)$ von beschränkter Schwankung besitzt, läßt sich noch eine andere Lösung der Aufgabe geben; es gilt nämlich der Lehrsatz:

Es sei

$$(14) \qquad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

die Fouriersche Reihe einer den Dirichletschen Bedingungen genügenden Funktion, die überdies im Intervall $x = (0 \ldots 2\pi)$, abgesehen von den Sprungstellen, eine Ableitung $f'(x)$ von beschränkter Schwankung besitzt. Man betrachte die Teilsummen der aus der Reihe (14) durch gliedweise Differentiation entstehenden Reihe

$$(15) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx).$$

Dann ist:

$$(16) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \nu(b_\nu \cos \nu x_0 - a_\nu \sin \nu x_0) = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0);$$

dieser Grenzwert existiert auch für eine Stelle x_0, an der $f(x)$ stetig ist, und hat dann den Wert Null. Hierzu ist zu bemerken, daß die Reihe (15), falls die Funktion $f(x)$ im Intervall $x = (0 \ldots 2\pi)$ einen oder mehrere Sprünge aufweist, für jedes x divergent ist; die Folge der arithmetischen Mittel der Teilsummen dieser divergenten Reihe ist aber, wie Fejér in der früheren Arbeit beweisen konnte, für jedes von den Sprungstellen der Funktion $f(x)$ verschiedene x konvergent und hat den Grenzwert $f'(x)$. Man erkennt, daß dieser frühere Satz durch den Grenzwertsatz (16) eine wesentliche Ergänzung erfährt.

Falls die Funktion $f(x)$ im Intervall $0 \leqq x < 2\pi$ nur eine einzige Sprungstelle x_0 aufweist, gilt die einfachere Gleichung:

$$(17) \qquad \lim_{\nu=\infty} \pi\nu(b_\nu \cos \nu x_0 - a_\nu \sin \nu x_0) = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0).$$

St.

Ch. J. de la Vallée Poussin. Sur l'unicité du développement trigonométrique. Note additionnelle. Belg. Bull. Sc. 1913, 9-14.

1. Der Verf. weist auf die Punkte seiner vorjährigen Abhandlung hin (F. d. M. **43**, 320, 1912), die dieser Arbeit und der von W. H. Young in Lond. M. S. Proc. (F. d. M. **42**, 285, 1911) veröffentlichten Untersuchung gemeinsam sind. 2. Dann macht er zwei Bemerkungen, um gewisse Ergebnisse seiner früheren Abhandlung schärfer zu fassen oder zu verallgemeinern.

Mn. (Lp.)

P. Noaillon. Sur la convergence des séries de Fourier et des suites de Fourier-Fejér. Belg. Bull. Sc. 1913, 524-541.

Neue Sätze, die allgemeiner sind als die von de la Vallée Poussin und Fejér; es ist jedoch unmöglich, über sie kurz zu berichten wegen der neuen Ausdrücke der Wortbildungen, die der Verf. nach seiner Meinung hat einführen müssen.

Mn. (Lp.)

S. Kakeya. On a property of periodic functions. Tôhoku M. J. **3**, 96-103.

Beweis des Satzes: Wenn für zwei stetige periodische Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$ mit verschiedenen Perioden, die nicht identisch gleich Null sind, und deren Quotient nicht konstant ist, zwei Systeme solcher Konstanten a und b existieren, daß in dem Intervall $\alpha < x < \beta$ $\lim \{a_n f(nx) + b_n \varphi_n (x)\} = 0$ ist, so ist $\lim a_n = 0$ und $\lim b_n = 0$. Eine Verallgemeinerung des Neumannschen Satzes in Leipz. Ber. **64**, 120-143 (F. d. M. **43**, 499, 1912). [Rev. sem. $\mathbf{22}_2$, 15.] Lp.

H. Steinhaus. O pewnym szeregu potęgowym przedstawiającym na kole zbieżności funkcyę pantachicznie nieciągłą. (Über eine Potenzreihe, die eine auf dem Konvergenzkreise pantachisch unstetige Funktion darstellt.) Warschauer Ges. der Wiss. Sitzber. **6**, 356-367.

Der Verf. untersucht eine besondere Potenzreihe, deren n-ter Koeffizient von der Ordnung $1/n$ ist. Diese Reihe konvergiert überall auf dem Einheitskreise, jedoch in keinem Intervalle gleichmäßig. Aus den Sätzen von F. Rieß-Fischer und von Fejér folgt daraus die Unstetigkeit der durch die Reihe auf dem Konvergenzkreise dargestellten Funktion. Außerdem folgt aus einem Satze von M. Rieß, der eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes von Fatou über die Existenz von Singularitäten auf dem Konvergenzkreise einer Potenzreihe bildet, daß die untersuchte Potenzreihe den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat, da die Singularitäten der Funktion auf demselben überall dicht liegen.

A. R.

E. W. Hobson. On the representation of a summable function by a series of finite polynomials. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 156-173.

Es wird folgender Satz bewiesen:

$f(x)$ sei irgendeine in einem endlichen Intervall i summierbare Funktion, die nicht unterhalb einer endlichen Grenze zu bleiben braucht; dann kann $f(x)$ in i als Grenzwert von Polynomen dargestellt werden: $f(x) = \lim_{n=\infty} p_n(x)$, wobei höchstens eine x-Menge vom Maße Null auszunehmen ist. Auch kann erreicht werden, daß für alle nicht ausgenommenen x-Werte $f(x) - p_n(x) > 0$ ausfällt für $n > n'$. Endlich ist, wenn von einer x-Menge beliebig kleinen Maßes abgesehen wird, die Konvergenz eine gleichmäßige, sodaß die Gleichung gilt:

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_{x'}^{x''} p_n(x)\,dx.$$

Die Ergebnisse lassen sich auf Funktionen beliebig vieler Veränderlichen ausdehnen. Als Anwendung beweist der Verf. den Satz von Haar und Mercer, wonach die Konvergenzbedingungen für irgendeine Sturm-Liouvillesche Reihe die nämlichen sind wie die für die Fourier-Reihe. Fa.

H. Galbrun. Sur un développement d'une fonction à variable réelle en séries de polynomes. S. M. F. Bull. **41**, 24-47.

Zunächst werden die Polynome $P_n(x)$ untersucht, die sich bei der wiederholten Differentiation von e^{-x^2} ergeben und durch die Gleichung $\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = e^{-x^2} P_n(x)$ definiert sind. Alsdann wird der folgende Satz bewiesen: Jede Funktion $f(x)$ der reellen Veränderlichen x, die in einem Intervall (a, b) stetig ist und dort nur eine endliche Anzahl von Maxima und Minima besitzt, kann in diesem Intervall durch eine Reihe von der Form

$$a_0 + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \cdots + a_n P_n(x) + \cdots$$

dargestellt werden, wo die a_n konstante Koeffizienten sind.

Das Beweisverfahren ist dem für die Fourierschen Reihen ähnlich. Gz.

É. Picard. Sur les développements de Cauchy en séries d'exponentielles et sur certaines identités remarquables. Darboux Bull. (2) **37**, 152-159.

Es seien $\pi(z)$, $\psi(z)$ und $\chi(z) = \pi(z) - \psi(z)$ drei ganze Funktionen, x_0 und $x_1 > x_0$ zwei reelle Zahlen, $f(x)$ eine für $x_0 \leqq x \leqq x_1$ stetige Funktion von beschränkter Schwankung. Unter geeigneten Voraussetzungen über φ, χ, ψ findet man

$$(1) \qquad f(x) = -\sum \frac{\psi(\lambda)}{\pi'(\lambda)} e^{\lambda x} \int_0^{x_1} e^{-\mu\lambda} f(\mu)\,d\mu,$$

falls $x_0 < x < x_1$ und die Summe über die Nullstellen λ von $\pi(z)$ erstreckt wird. (Vgl. Cauchy, Oeuvres (2) 7; Picard, Traité d'Analyse 2. Aufl. 2, 179.) Außerdem gilt nach Léauté (C. R. 1911 u. 1912), wenn $\pi(0) \neq 0$ ist, die Gleichung:

$$(2) \qquad f(x) = -\Sigma \frac{\psi(\lambda)}{\lambda\pi'(\lambda)} e^{\lambda x} \int_{x_0}^{x_1} e^{-\lambda\mu} f'(\mu)\, d\mu + f(x_1)\frac{\chi(0)}{\pi(0)} + f(x_0)\frac{\psi(0)}{\pi(0)}$$
$$(x_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1).$$

Durch Vergleichung der Formeln findet Picard, daß die Reihe

$$(3) \qquad \Sigma \frac{\psi(\lambda)}{\lambda\pi'(\lambda)} e^{\lambda x} [\psi(0)\, e^{-\lambda x_1} + \chi(0)\, e^{-\lambda x_0}]$$

gleich Null ist, falls $x_0 < x < x_1$, während sie an den Endstellen x_0, x_1 des Intervalls von Null verschiedene Werte annimmt. Wenn $\pi(0) = 0$ ist, tritt an Stelle von (3) eine ähnliche Darstellung. Diese benutzt Picard nach geeigneter Festsetzung der Funktionen π, ψ zu einem neuen Ansatz für das Problem der Abkühlung einer Mauer.

Fa.

C. Severini. Sulla teoria di chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali. Palermo Rend. **36**, 177-202.

Die Abhandlung bezieht sich auf die Reihenentwicklungen nach Orthogonalfunktionen $V_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, welche zusammen mit einer stets positiven, endlichen und von Null verschiedenen Funktion $p(x)$ die Relationen:

$$\int_a^b p(x)\, V_m(x)\, V_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n \end{cases}$$

erfüllen, wenn $a \lesseqqgtr x \lesseqqgtr b$ ein gegebenes Intervall ist. Das System $V_k(x)$ heißt geschlossen, wenn für jede mit ihrem Quadrate (im Lebesgueschen Sinne) integrierbare Funktion $f(x)$

$$\int_a^b p(x)\, \{f(x)\}^2\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2, \text{ wo } A_k = \int_a^b p(x)\, f(x)\, V_k(x)\, dx.$$

Verf. findet für die Geschlossenheit die notwendige und hinreichende Bedingung, daß für jedes ganze n (mit Einschluß der Null)

$$\int_a^b p(x)\, x^{2n} dx = \sum_{=0}^{\infty} A_k^2, \text{ wo } A_k = \int_a^b p(x)\, x^n V_k(x)\, dx.$$

A. K.

V. Kostitzin. Quelques remarques sur les systèmes complets de fonctions orthogonales. C. R. **156**, 292-295.

Eine Methode, ein vollständiges System von Orthogonalfunktionen in einem Gebiete zu konstruieren, wenn das Gebiet in eine beliebige Anzahl von Teilen geteilt ist und in jedem Teilgebiete je ein vollständiges System von Orthogonalfunktionen bekannt ist.

A.K.

J. TAMARKINE. Problème du développement d'une fonction arbitraire en séries de Sturm-Liouville. C. R. **156**, 1589-1591.

Die Notiz schließt sich an ein Resultat von L. Lichtenstein an über die Entwicklung sehr allgemeiner Funktionen in Reihen, welche nach den Funktionen V_s fortschreiten, die Gleichungen von der Form

$$\frac{d}{dx}\left(r\frac{dV_s}{dx}\right)+\{\lambda_s p(x)-q(x)\}V_s(x)=0\ (a\gtreqless x\gtreqless b),$$

$$\frac{dV_s}{dx}=hV_s\ (x=a), \frac{dV_s}{dx}=-HV_s\ (x=b),$$

$$\int_a^b p\,V_s^2\,dx=\pm\lambda_s\quad(+\text{ wenn }\lambda_s>0, -\text{ wenn }\lambda_s<0),$$

genügen. Lichtenstein hatte sich der Hilbertschen Methode der unendlich vielen Variabeln bedient; Verf. zeigt, wie man ein solches Resultat mit Hülfe der Methoden ableiten kann, welche W. Stekloff zur Ableitung seiner Reihenentwicklungen in dem linearen Problem der Wärmeleitung benutzt hat. A. K.

E. LINDELÖF. Démonstration nouvelle d'un théorème fondamental sur les suites de fonctions monogènes. S. M. F. Bull. **41**, 171-178.

Es handelt sich um den Beweis eines Satzes, dessen Ursprung auf Weierstraß zurückgeht (Zur Funktionenlehre. Werke **2**, 201), und der seine endgültige Form Vitali verdankt (F. d. M. **35**, 397, 1904). Man betrachte eine unendliche Folge von monogenen Funktionen: $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, die folgenden drei Bedingungen genügen:

1. Die Funktionen $f_n(x)$ sind sämtlich im Innern eines zusammenhängenden Gebietes T holomorph.

2. Ist T' ein Bereich, der im Innern von T liegt und keinen Punkt mit der Begrenzung von T gemeinsam hat, so ist die Gesamtheit der Funktionen $f_n(x)$ beschränkt, das heißt, zu jedem Bereich T' der angegebenen Beschaffenheit gehört eine positive Zahl G', sodaß im Innern und auf der Begrenzung von T' die Ungleichheiten gelten:

$$|f_n(x)|<G'\qquad(n=1,2,3,\ldots).$$

3. Die Folge der Funktionen $f_n(x)$ konvergiert gegen eine bestimmte, endliche Grenze in jedem Punkte einer gewissen unendlichen Menge E von Punkten, die zum Bereich T gehören und wenigstens einen Häufungspunkt x_0 im Innern von T haben.

Unter diesen Voraussetzungen konvergieren die Funktionen $f_n(x)$ im Innern von T gegen eine Funktion $F(x)$, die im Innern von T holomorph ist. Ferner konvergiert im Innern von T die Folge der p-ten Ableitungen der Funktionen $f_n(x)$ gegen die p-te Ableitung von $F(x)$. Endlich ist die Konvergenz für die Folge selbst wie für die daraus abgeleiteten Folgen für jeden Bereich T' gleichmäßig.

Die früheren Beweise des Satzes von Vitali (vgl. Carathéodory

und Landau, F. d. M. **42**, 275, 1911) beruhten darauf, daß zuerst ein Hülfssatz hergeleitet wurde, der sich so aussprechen läßt. Ist eine unendliche Folge von Funktionen $f_n(x)$ gegeben, die den Bedingungen 1. und 2. genügen, so ist es stets möglich, daraus eine unendliche Folge von Funktionen $f_\alpha(x)$, $f_\beta(x)$, $f_\gamma(x), \ldots$ $(\alpha < \beta < \gamma \ldots)$ auszusondern, die im Innern von T gegen eine holomorphe Funktion konvergiert, und zwar gleichmäßig für jeden Bereich T'.

Wie Lindelöf bemerkt, läßt sich dieser Hülfssatz leicht aus dem Satze von Vitali gewinnen. Für den Satz von Vitali aber ergibt sich ein unmittelbarer, einfacher Beweis durch folgende Überlegungen.

Als Bereich T' nehme man zunächst einen Kreis C', der mit einem solchen Halbmesser R' um den Häufungspunkt x_0 beschrieben ist, daß er ganz im Innern von T liegt; C sei ein Kreis mit demselben Mittelpunkt und dem Halbmesser $R < R'$, der ebenfalls ganz im Innern von T liegt. Wegen der Bedingung 1. gelten für den Kreis C einschließlich seiner Begrenzung Entwicklungen der Form:

$$f_n(x) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}(x - x_0) + \cdots + a_\nu^{(n)}(x - x_0)^\nu + \cdots,$$

und wegen der Bedingung 2. gibt es eine positive Zahl G, sodaß für alle Werte von n die Ungleichheiten

$$|a_\nu^{(n)}| < \frac{G}{R^\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

bestehen. Aus der Identität

$$f_{n+p}(x) - f_n(x) = a_0^{(n+p)} - a_0^{(n)} + \cdots + (a_\nu^{(n+p)} - a_\nu^{(n)})\,(x - x_0)^\nu + \cdots$$

folgen jetzt für beliebige ganze Zahlen n und p und für $|x - x_0| < R$ die Ungleichheiten:

$$|a_0^{(n+p)} - a_0^{(n)}| \leqq |f_{n+p}(x) - f_n(x)| + \frac{2G\,|x - x_0|}{R - |x - x_0|},$$

und jetzt ist es nicht schwer, zu zeigen, daß die Konstanten $a_0^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sich einer bestimmten, endlichen Grenze c_0 nähern, deren absoluter Betrag $\leqq G$ ist.

Die Funktionen

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - a_0^{(n)}}{x - x_0} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

befriedigen die Bedingungen 1., 2. und 3. Man kann daher auf sie dieselben Überlegungen anwenden, die soeben auf die Funktionen $f_n(x)$ angewandt wurden, und erkennt so, daß die Konstanten $a_1^{(n)}$ eine bestimmte endliche Grenze c_1 haben, deren absoluter Betrag $\leqq \frac{G}{R}$ ist. Indem man diese Schlußweise fortsetzt, ergibt sich, daß für alle Werte von ν die Beziehungen gelten:

$$\lim_{n=\infty} a_\nu^{(n)} = c_\nu, \; |c_\nu| \leqq \frac{G}{R^\nu}.$$

Hieraus folgt, daß durch die Potenzreihe

$$F(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

eine monogene Funktion $F(x)$ definiert wird, die im Innern des Kreises C holomorph ist, und daß die Differenz $F(x) - f_n(x)$ mit wachsendem n im Kreise C' gleichmäßig gegen Null konvergiert. Dieselben Schlußreihen lassen sich auf die Folgen der Funktionen übertragen, die aus der Folge der Funktionen $f_n(x)$ durch Differentiation hervorgehen.

Nachdem der Satz von Vitali auf diese Art für den Kreis C' bewiesen worden ist, läßt er sich auf Grund des Verfahrens der analytischen Fortsetzung auf jeden Bereich T' ausdehnen; die Gleichmäßigkeit der Konvergenz folgt dabei aus der Tatsache, daß jeder endliche Bereich T' durch eine endliche Anzahl von Kreisen überdeckt werden kann, für die nach dem Vorhergehenden die Gleichmäßigkeit feststeht. St.

W. Kapteyn. Ontwikkeling eener functie naar de functies $\varphi_n(x)$ van Abel. Amst. Ak. Versl. **21**, 1204-1215.

Die schon von Abel (Oeuvres **2**, 281) betrachtete Entwicklung von $\frac{1}{1-v} e^{\frac{-xv}{1-v}}$ nach Potenzen von v gibt zu Koeffizienten $\varphi_n(x)$ Anlaß, welche Polynome in x sind und gewissen Orthogonalitätsbeziehungen genügen. Mit deren Hülfe werden zu jeder für positive x den Dirichletschen Bedingungen genügenden Funktion $f(x)$ die Koeffizienten

$$(1) \qquad a_n = \int_0^\infty e^{-\alpha} f(\alpha)\, \varphi_n(\alpha)\, d\alpha$$

bestimmt; um dann die Richtigkeit der Gleichung

$$(2) \qquad f(x) = \sum_0^\infty {}_n\, a_n \varphi_n(x)$$

zu beweisen, formt der Verf. (wie mir scheint, mit unzulänglichem Beweise) die rechte Seite von (2) in das Integral $2\int_0^\infty f(\alpha)\, d\alpha \int_0^\infty I_0(2\beta\sqrt{\alpha})\, I_0(2\beta\sqrt{x})\beta\, d\beta$ um und stützt die Behauptung, daß dieses gleich $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ ist, auf Hankel (Math. Ann. 8, 481).

Es wird dann noch das Beispiel $f(x) = \frac{1}{1+x}$ genauer betrachtet (auch für $x = 0$), sowie das Verhalten einer unstetigen Funktion an einer Sprungstelle. Endlich wird eine Anwendung auf das Stieltjessche Momentenproblem gemacht. Fa.

H. Bohr. Note sur la fonction zéta de Riemann $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$ sur la droite $\sigma = 1$. Kopenhagen, Overs. 1913, 3-11.

Bekanntlich ist $\zeta(s) \neq 0$ auf der Linie $\sigma = 1$ (welche die eine Begrenzungslinie des „kritischen Streifens“ $0 < \sigma < 1$ ist). Der Verf. hat früher bewiesen, daß $\zeta(s)$ auf dieser Linie $\sigma = 1$ dagegen Werte annimmt, die numerisch beliebig klein sind, und (zusammen mit Landau), daß $\zeta(s)$ auf der Linie $\sigma = 1$ beliebig große Werte annimmt, auch wenn ein Bereich um die Pole $s = 1$ weggenommen wird. Mit Hülfe einer funktionentheoretischen Betrachtung gelingt es dem Verf. hier, die genannten Resultate zu verallgemeinern, indem er beweist: Es sei θ eine willkürliche reelle Zahl und ε beliebig klein; es existieren dann zwei positive Zahlen $r < \varepsilon$ und $R < 1/\varepsilon$ und zwei entsprechende reelle Zahlen t und T so, daß

$$\zeta(1 + it) = re^{i\theta}, \zeta(1 + iT) = Re^{i\theta}.$$

Mit andern Worten: $\zeta(s)$ nimmt auf der Linie $\sigma = 1$ nicht bloß beliebig kleine und beliebig große Werte an, sondern nimmt beliebig kleine und beliebig große Werte mit beliebig gegebener Amplitude an. P. H.

H. Weyl. Die Idee der Riemannschen Fläche. Leipzig: B. G. Teubner. X + 169 S. 8°. (Math. Vorles. a. d. Univ. Göttingen Nr. V.)

Der Inhalt dieses kleinen Werkes läßt sich mit den Worten des Vorworts folgendermaßen umgrenzen:

Im I. Kapitel handelt es sich um dreierlei:

„1. eine genaue Auseinandersetzung des Verhältnisses der Weierstraßschen Begriffe „analytische Funktion“ und „analytisches Gebilde“ zu der Idee der Riemannschen Fläche (§§ 1—3);

2. eine strenge Fixierung des Begriffes der Fläche überhaupt und insbesondere der Riemannschen Fläche (§§ 4—7);

3. eine exakte Begründung derjenigen Analysis-situs-Sätze, die zum Aufbau der Riemannschen Funktionentheorie unbedingt vonnöten sind (§§ 8—11) . . .

Den Gegenstand von Kapitel II bildet vor allem das Grundproblem der Riemannschen Funktionentheorie: zu einer vorgegebenen Riemannschen Fläche die zugehörigen Funktionen zu finden, insbesondere für den Fall der geschlossenen Riemannschen Fläche. Die Existenzbeweise werden hier auf dem von Riemann selbst in Aussicht genommenen Wege mit Hülfe des sogenannten „Dirichletschen Prinzips“ erbracht (§§ 12—15). Die Gangbarkeit dieses Weges hat bekanntlich Hilbert gezeigt, indem er das früher für evident gehaltene, aber dann von Weierstraß angefochtene Dirichletsche Minimumprinzip durch einen zuverlässigen Beweis stützte.... Die §§ 16—18 bringen dann einen Abriß der an die Existenztheoreme sich anschließenden systematischen Theorie der Funktionen auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche, geben aber nur soviel von dieser Theorie, als nötig ist, um die funktionentheoretische Fruchtbarkeit der Riemannschen Grundidee deutlich zu machen und die beherrschende Rolle aufzuzeigen, welche die der Analysis situs entstammende Geschlechtszahl im Reiche der Funktionen spielt.... Die letzten Abschnitte endlich (§§ 19—21) sind der von Klein und Poincaré in kühnem Riß entworfenen, von Koebe in jüngster Zeit auf ein breites Fundament gestellten Theorie der Uniformisierung gewidmet“.

Die Hauptleistung des Verf. in seinem ersten Kapitel, nämlich die strenge

Fassung und Begründung der Analysis-situs-Sätze, die zum Aufbau der Funktionentheorie nötig sind, die aber bisher immer mit mehr oder weniger Berufung auf die Anschauung, d. h. also mehr oder weniger unvollständig bewiesen wurden, erforderte nicht nur völlige Vertrautheit mit den neuesten Forschungen auf diesem Gebiete, insbesondere mit den tiefschürfenden Arbeiten Brouwers, sondern auch ein nicht geringes Maß eigener Erfindungsgabe. Diese bewährte sich auch im zweiten Kapitel, insbesondere an den Riemannschen Existenzbeweisen, bei denen der Verf. bekannte Ansätze mit eigenen Gedanken geschickt durchwebte. Die Sorgfalt, die überall auf scharfe Begriffe und strenge Beweise verwandt ist, erstreckt sich weiter bis auf die Einzelheiten der Bezeichnung und des Druckes; die flotte Sprache macht den abstrakten Stoff genießbarer.

So sehr demnach das Buch geeignet ist, dem Kenner der Funktionentheorie Genuß zu bereiten, der durch gelegentliche andere Meinung über Werturteile nicht beeinträchtigt wird, so werden doch selbst unter den besten Studenten nur wenige sein, denen es ohne Anleitung restlos verständlich wird; eine Vorlesung wird immer viele feine Hülfsmittel voraus haben, die bei der Umgestaltung zu einem Buche notwendig verloren gehen müssen. Und so denke ich mir die Wirkung, die von diesem kleinen Werke Weyls ausgehen kann und soll, vornehmlich in der Art, daß es, aus einer Vorlesung hervorgegangen, wieder für neue Vorlesungen fruchtbar werde: in solchen wird der Vortragende einzelnes weiter ausführen und vor allem die Theorie überall durch Beispiele ergänzen; auch dürfte er wohl versuchen, teils durch eigene Überlegung, teils auf Grund der fortschreitenden Forschungsarbeit anderer manches zu vereinfachen und der ursprünglichen Auffassung wieder zu nähern, immer aber wird ihm das Weylsche Buch Muster und Maßstab seiner eigenen Leistung sein. Fa.

M. Tikhomandritzky. Résolution d'un problème concernant les surfaces de Riemann. Darboux Bull. (2) **37**, 55-62.

Wenn die zu einer gegebenen Riemannschen Fläche gehörige algebraische Gleichung $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$ gesucht wird, so ist n bekannt und weiter in der Zerlegung der Diskriminante Δ in ihren wesentlichen und nichtwesentlichen Faktor $\Delta = V\,.\,W$ der erstere V und sein Grad N. Nennt man dann $2A$ den unbekannten Grad von W, so ergibt sich aus der Gleichung $N + 2A = 2m(n-1)$ eine Reihe möglicher Zahlenpaare A, m.

Man beginne mit dem kleinsten m, setze die Gleichung $F = 0$ mit unbestimmten Koeffizienten an und bilde ihre Diskriminante Δ. Beim Vorhandensein von Verzweigungspunkten im Unendlichen müssen die ersten Koeffizienten in der Entwicklung von Δ nach fallenden Potenzen von x Null sein; weiter muß dann der Rest bei der Division von Δ durch V Null und der auftretende Quotient ein Quadrat sein. Aus diesen drei Eigenschaften ergeben sich Relationen zwischen den Koeffizienten von F, und es müssen diese Koeffizienten dann noch so bestimmt werden, daß die durch die Riemannsche Fläche vorgeschriebenen Verzweigungen eintreten.

Ergeben sich die auftretenden Bedingungen als nicht miteinander verträglich, so muß der nächst größere Wert von m genommen werden.

An einem einfachen Beispiele einer dreiblättrigen Riemannschen

Fläche mit zwei Verzweigungspunkten im Endlichen wird das geschilderte Verfahren von dem Verf. ganz durchgeführt und schließlich als entsprechende algebraische Gleichung $y^3 - 3y + 2x = 0$ ermittelt. Kr.

T. Hayashi. On algebraic functions, equally ramified on the same Riemann surface. Tôhoku M. J. **4**, 71-74.

Wenn drei algebraische Funktionen, die auf derselben Riemannschen Fläche gleich verzweigt sind, gegeben werden, so ist jede von ihnen rational durch die andern beiden ausdrückbar (Rev. sem. 22_2, 17). Lp.

J. C. Fields. On the foundations of the theory of algebraic functions of one variable. Trans. Lond. Phil. Soc. (A) **212**, 339-373.

J. C. Fields. Direct derivation of the complementary theorem from elementary properties of the rational functions. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 312-326.

Der zweite Aufsatz ist ein Auszug aus der ausführlicheren ersten Abhandlung. Über diese läßt sich die Einleitung wie folgt aus: „Vor einigen Jahren hat der Verf. ein Buch veröffentlicht (Theory of the algebraic functions of a complex variable. Berlin, 1906; F. d. M. **37**, 409), in welchem er eine neue Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen entwickelt hat. Die in Rede stehende Theorie war nach ihrem Wesen rein algebraisch und vollkommen allgemein. Die höheren Singularitäten verursachten keine besonderen, von ihrer schwereren Faßbarkeit herrührenden Schwierigkeiten, und keine Ausnahmefälle brauchten für eine besondere Behandlung ausgeschieden zu werden. Das Hauptergebnis der Theorie war, wie man sagen darf, das „komplementare Theorem" (der Weierstraßsche Vorbereitungssatz), ein bedeutend allgemeinerer Satz als der von Riemann-Roch. Das Buch bereitete aber dem Leser gewisse Schwierigkeiten, und besonders scheint das sechste Kapitel ein Stein des Anstoßes gewesen zu sein. Für dieses Kapitel hat der Verf. schon mehrere verhältnismäßig einfache Ersatzdarstellungen gegeben, und der Leser der vorliegenden Abhandlung wird finden, daß unter andern Ergebnissen die des erwähnten Kapitels auf recht leichte Art aus der Darstellung einer in Gleichung (8) gegebenen Form folgen (gegeben von Christoffel in der Arbeit: Algebraischer Beweis des Satzes von der Anzahl der linearunabhängigen Integrale erster Gattung. Annali di Mat. (2) **10**, 81-100; F. d. M. **13**, 380, 1881). Die Methode der „Deformation eines Produktes", die eine hervorragende Rolle in den Anfangskapiteln des Buches spielt, wird hier aufgegeben. Die Residuen dessen, was wir den Hauptkoeffizienten der reduzierten Form einer rationalen Funktion nennen, spielen, wie sich zeigt, eine wichtige Rolle, eine Rolle, die schon in dem Inhalte des Buches liegt und in der vom Verf. veröffentlichten Abhandlung The complementary theorem, Amer. Journ. of Math. **32**, 1-16 (F. d. M. **41**, 469, 1910) in ein besseres Licht gesetzt ist. In der gegenwärtigen Abhandlung wird die Zurüstung zur Handhabung der fraglichen Residuen bedeutend vereinfacht."

Wir haben den Verf. selbst sprechen lassen, um die Kürze der Referate über seine vorangehenden Veröffentlichungen damit zu rechtfertigen. Vielleicht wird er auf noch größere Vereinfachungen sinnen. Lp.

A. Krazer. Über die Unendlichkeits- und Nullpunkte einer algebraischen Funktion. Heidelb. Sitzber. 1913, Abt. A. 24. Abh.

Faßt man den allgemeinen Integranden erster Gattung als eine Linearform von p unabhängigen Veränderlichen auf, so nehmen die Gleichungen zwischen den ∞^1-Punkten einer algebraischen Funktion und deren Gewichten eine besonders übersichtliche Gestalt an und erschließen einen tieferen Einblick in die Natur solcher Punktsysteme. Daß die angewandte Methode auch im Falle gruppenweisen Zusammenfallens der ∞^1-Punkte mit Vorteil angewandt werden kann, zeigt der am Schlusse gegebene Beweis des Weierstraßschen Lückensatzes. Kr.

P. Koebe. Das Uniformisierungstheorem und seine Bedeutung für Funktionentheorie und nichteuklidische Geometrie. Annali di Mat. (3) **21**, 57-64.

Es wird das allgemeine, die Grenzkreisuniformisierung beliebiger analytischer Funktionen betreffende Uniformisierungstheorem formuliert und seine Bedeutung besprochen, und zwar: 1. die Bedeutung für die Uniformisierungstheorie als solche, 2. die Bedeutung für die Riemannsche Funktionentheorie überhaupt, 3. die Bedeutung für die Bolyai-Lobatschefskische Geometrie und die Riemann-Helmholtzsche Raumtheorie. In letzterer Beziehung sei an dieser Stelle nur erwähnt, daß das Uniformisierungsproblem geradezu als ein Problem der nichteuklidischen Geometrie interpretiert wird, nämlich das Problem, eine beliebig vorgegebene Riemannsche Mannigfaltigkeit als eine nichteuklidische Raumform zu charakterisieren im Sinne des Riemann-Helmholtzschen Raumpostulats der freien Beweglichkeit. Kb.

A. Lauth. Über algebraische Funktionen, insbesondere über das Fundamentalsystem eines algebraischen Körpers. Diss. Tübingen 1913, 37 S.

Die von A. Brill angeregte Arbeit behandelt ein Problem aus der Theorie der algebraischen Funktionen, und zwar ohne das funktionentheoretische Hülfsmittel der Potenzreihe zu benutzen, also auf rein algebraischer Grundlage. Das Produkt aus einer algebraischen Funktion y von x und aus einem Wurzelausdrucke (Wurzelfunktion nach Hensel) nennt der Verf. eine „Nebenfunktion“ von η und insbesondere eine fundamentale Nebenfunktion, wenn es die Kleinsche Nebenfunktion ist, die für alle endlichen Werte von x endlich bleibt. Ferner führt der Verf. die Begriffe ein: „Modul von Nebenfunktionen“ und „Nebenfundamentalsystem“, von denen der letztere ganz ähnliche Eigenschaften hat

wie das Fundamentalsystem im gewöhnlichen Sinne. Ein solches Nebenfundamentalsystem läßt sich, wie er zeigt, auf rationalem Wege herstellen; aus einem Nebenfundamentalsystem aber kann man einerseits ein Fundamentalsystem ableiten, andrerseits eine Basis, deren Modul alle Funktionen des Körpers umfaßt, die im Endlichen höchstens integrabel unendlich werden. Besprochen wird dann noch der Fall des kubischen und der des trinomischen Körpers. Zum Schlusse wird gezeigt, daß die Gestalt eines Nebenfundamentalsystems einen völligen Einblick in die Beschaffenheit der zur Grundgleichung gehörigen Riemannschen Fläche gibt.
El.

A. Châtelet. Sur la multiplication complexe. C. R. **157**, 1386-1389.

Verf. hat in früheren Arbeiten gezeigt, welches Interesse für die algebraischen Zahlkörper die Zurückführung einer linearen Substitution auf ihre kanonische Form hat. Diese Reduktion hat eine besondere Bedeutung auch für das Problem der komplexen Multiplikation periodischer Funktionen und zeigt in klarem Lichte den Zusammenhang dieser Theorie mit der Theorie der algebraischen Zahlkörper.
A. K.

E. Noether. Rationale Funktionenkörper. Deutsche Math.-Ver. **22**, 316-319.

Vorläufige Mitteilung. Die Untersuchungen sind in Math. Ann. **76**, 161-196 erschienen und werden im nächsten Jahrgange besprochen werden. Stz.

P. Montel. Sur les différentielles totales et les fonctions monogènes. C. R. **156**, 1820-1822.

In der vorliegenden Note werden unter anderem folgende Sätze ohne Beweis mitgeteilt:

Es seien p und q beliebige, in einem einfach zusammenhängenden Gebiete D der (x, y)-Ebene erklärte beschränkte Funktionen, die daselbst endliche, nicht notwendig beschränkte partielle Ableitungen $\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial q}{\partial x}$ haben. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Ausdruck $pdx + qdy$ ein vollständiges Differential darstellt, lautet nach Montel, daß in D, außer höchstens in einer Punktmenge vom Flächenmaße Null, die Beziehung $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$ gilt.

Es genügt übrigens, die Existenz endlicher Derivierten der Funktionen q in bezug auf x und p in bezng auf y vorauszusetzen. Nach einem vom Verf. kürzlich bewiesenen Satze sind alsdann $\frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}$ „fast überall“ vorhanden.

Sind u und v in D beschränkt, sind etwa $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ in D endlich, wenn auch nicht notwendig beschränkt, und ist in D „fast überall“:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

so ist $u+iv$ eine Funktion der komplexen Variable $x+iy$. Ltn.

J. Le Roux. Sur la détermination des fonctions harmoniques. C. R. **156**, 437-440.

J. Le Roux. Sur la détermination des fonctions harmoniques. Application au carré. C. R. **156**, 670-672.

Man denke sich die Ebene der Variabeln x und y mit einem Netz von rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecken überzogen. Die Katheten sollen der x- oder der y-Achse parallel sein und die Länge h haben. Sei (D) ein Gebiet, das aus einer endlichen Anzahl von Dreiecken besteht. Jedem Eckpunkt des Netzes in (D) oder auf dem Rande (C) von (D) wird ein Wert $z_{x,y}$ zugeordnet. Durch die Punkte $(x, y, z_{x,y})$ als räumliche Ecken wird eine Polyederfläche $u(x, y)$ gelegt. Der Wert $z_{x,y}$ wird so bestimmt, daß

$$I(u)=\iint\limits_{(D)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

bei vorgegebenen Werten in den Randecken des Netzes ein Minimum wird, was auf die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen führt. In der Grenze $h=0$ reduziert sich das Problem auf das erste Randwertproblem der Potentialtheorie.

In der zweiten Note wird das vorstehende Verfahren auf die Fläche eines Quadrats angewandt. Ltn.

A. Buhl. Sur les formules analogues à la formule de Stokes. C. R. **156**, 1739-1741.

Sei Γ ein stetig gekrümmtes Flächenstück, γ seine Randlinie. P, Q, R, S, T seien Funktionen von $x, y, z, p=\frac{\partial z}{\partial x}, q=\frac{\partial z}{\partial y}$. Es ist

$$\iint\limits_{\Gamma}\begin{vmatrix} r & s & 0 & -1 & 0\\ s & t & 0 & 0 & -1\\ -p & -q & 1 & 0 & 0\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0\\ P & Q & R & S & T\end{vmatrix}dx\,dy=\int\limits_{\gamma}Pdx+Qdy+Rdz+Sdp+Tdq,$$

$$\text{wo } r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Ist $S=T=0, \frac{\partial P}{\partial p}=\frac{\partial P}{\partial q}=\frac{\partial Q}{\partial p}=\frac{\partial Q}{\partial q}=\frac{\partial R}{\partial p}=\frac{\partial R}{\partial q}=0$, so geht die vorstehende Formel in die Formel von Stokes über. Hieran schließen sich weitere Entwicklungen an. Ltn.

A. BUHL. Sur la formule de Stokes dans l'hyperespace. Toulouse Ann. (3) **3**, 63-72.

Im Anschluß an Poincaré (F. d. M. **19**, 275, 1887) wird die Stokessche Formel auf den Raum von n Dimensionen in der Weise verallgemeinert, daß Doppelintegrale, die sich auf zweidimensionale Mannigfaltigkeiten beziehen, mit den eindimensionalen Gebilden in Verbindung gebracht werden, die jene Mannigfaltigkeiten begrenzen. Die von dem Verfasser aufgestellte Formel hat den Vorteil, daß sie für $n = 3$ sofort die gewöhnliche Formel von Stokes, für $n = 2$ die Formel von Green gibt. Den Schluß der Abhandlung bilden Anwendungen des Falles $n = 4$ auf die analytischen Funktionen von zwei Veränderlichen. St.

G. A. MAGGI. Su alcune circostanze attinenti alla presenza di superficie di discontinuità e al passaggio all' infinito, nella teoria del campo vettoriale. Rom. Acc. L. Rend. $\mathbf{22}_2$, 247-255.

In einem dreidimensionalen Felde werden die Vektoren $\mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}$ als monodrom, endlich und stetig angenommen, mit Ausnahme gewisser in dem Felde gelegener Oberflächen, in denen die genannten 4 Vektoren Unstetigkeiten besitzen können. In den beiden Hauptfällen, dem Falle der Wirbellosigkeit und dem solenoidalen Falle, werden Darstellungen des Vektors **A** in dem Gewande der Vektoranalysis gegeben, die ihrem Wesen nach im übrigen bekannt sind. A. K.

E. COTTON. Sur une question concernant les fonctions de deux variables réelles. C. R. **156**, 1054-1056.

Ist $V(x, y) = 0$, für $x = 0, y = 0$, so handelt es sich darum, V durch ein Polynom $U(x, y)$ zu ersetzen, das für alle oder fast alle x, y einer gewissen Umgebung des Nullpunktes das nämliche Vorzeichen wie $V(x, y)$ besitzt. Fa.

KELLOGG. Sur l'indépendance linéaire de plusieurs variables. S. M. F. C. R. 1913, 19-21.

Den Bedingungen entsprechend, die in dem Falle von Funktionen einer Veränderlichen an die Wronskischen Determinanten anknüpfen, werden die Bedingungen für Funktionen zweier Veränderlichen angegeben mit der Bemerkung, daß die Ergebnisse allgemein gelten. Es seien $f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots, f_n(x, y)$ Funktionen von einer einzigen Bestimmung in einem Gebiete D. Man bilde die Matrize M_n:

$$\left\| f_i \; \frac{\partial f_i}{\partial x} \; \frac{\partial f_i}{\partial y} \; \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \cdots \frac{\partial^{n-1} f_i}{\partial x^{n-1}} \; \frac{\partial^{n-1} f_i}{\partial x^{n-2} \partial y} \cdots \frac{\partial^{n-1} f_i}{\partial y^{n-1}} \right\|$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$; sie erhält alle Ableitungen der Ordnungen $1, 2, \ldots, n-1$ von den f_i.

Für die in jedem Punkte von D analytischen Funktionen ist die notwendige und hinreichende Bedingung für eine lineare Beziehung zwischen den f_i mit konstanten Koeffizienten, die nicht alle Null sind, daß der Rang von M_n beständig kleiner als n ist. Lp.

R. Weitzenböck. Über schiefsymmetrische Funktionen. (II. Mitteilung.) Palermo Rend. **35**, 172-176.

In seiner ersten Mitteilung hatte der Verf. die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angegeben, daß eine eindeutige Funktion $K(x, y)$ der beiden komplexen Veränderlichen x und y schiefsymmetrisch vom Range r ist, d. h. $K(x, y) = -K(y, x)$, $K(x, x) = 0$ und

$$K(x, y) \equiv \{\varphi_1(x)\,\psi_1(y) - \psi_1(x)\,\varphi_1(y)\} + \cdots + \{\varphi_r(x)\,\psi_r(y) - \psi_r(x)\,\varphi_r(y)\}.$$

Für den Fall, daß $K(x, y)$ eine reelle schiefsymmetrische Funktion der reellen Veränderlichen x und y ist, leitet der Verf. die entsprechenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen mit Hülfe der Theorie der linearen Integralgleichungen her, wobei zugleich die Funktionen $\varphi_i(x)$ und $\psi_i(y) (i = 1, \ldots, r)$ bei gegebenem $K(x, y)$ wirklich gefunden werden. Jhk.

G. Guareschi. Sul sistema fondamentale delle grandezze intere di un corpo di funzioni algebriche di due variabili, i cui coefficienti appartengono ad un corpo chiuso. Ven. Ist. Atti **72** [(8) **15**], 817-822.

Ein Körper von Größen (oder Funktionen) heißt geschlossen, wenn jede algebraische Gleichung, deren Koeffizienten dem Körper angehören, mindestens eine Wurzel und daher alle Wurzeln im Körper hat; ein solcher Körper ist zum Beispiel die Gesamtheit der komplexen Zahlen. Es seien: A ein geschlossener Körper; x_1 und x_2 Unbestimmte, die bei der Bildung von A nicht verwendet werden; Ω der Körper aller rationalen Funktionen von x_1 und x_2, deren Koeffizienten dem Körper A angehören; K ein algebraischer Oberkörper von Ω der Ordnung n. Dann gibt es in Verallgemeinerung eines Satzes von Hensel (F. d. M. **31**, 424, 1900) in K stets ein Fundamentalsystem, bestehend aus n ganzen Größen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ von K für die ganzen Größen von K. Diese lassen sich also sämtlich in der Form $u_1 \lambda_1 + u_2 \lambda_2 + \cdots + u_n \lambda_n$ darstellen, wo $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ganze Größen des Körpers Ω bezeichnen. St.

F. Severi. Un teorema d'inversione per gl'integrali semplici di I[a] specie appartenenti ad una superficie algebrica. Ven. Ist. Atti **72** [(8) **15**], 765-772.

Picard hatte in der Note II zum zweiten Bande seiner Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes (F. d. M. **37**, 404, 1906) das Jacobische Umkehrungsproblem für die zu einer algebraischen Kurve C gehörigen (Abelschen) Integrale erster Gattung auf die zu einer algebraischen Fläche F gehörigen einfachen Integrale erster Gattung auszudehnen versucht, indem er fragte, ob man bei einer gegebenen Fläche F eine ganze Zahl p so bestimmen kann, daß die Gesamtheit der Gruppen von p Punkten von F eine Abelsche Menge bildet. Es ergab sich, daß diese Forderung im allgemeinen nicht erfüllt werden kann; ausgenommen ist der Fall der hyperelliptischen Flächen, in dem $p=1$ ist.

Wie Severi bemerkt hat, läßt sich die Ähnlichkeit zwischen der Lehre von den algebraischen Kurven und der Lehre von den algebraischen Flächen aufrechterhalten, wenn man dem Umkehrungsproblem eine engere Form gibt. Bei einer algebraischen Kurve C frage man, ob es, wenn ein Punkt allgemeiner Lage x gegeben ist, andere Punkte der Kurve gibt, in denen alle Abelschen Integrale erster Gattung von C dieselben Werte (bis auf Perioden und deren Vielfache) annehmen, wie im Punkte x? Die Antwort lautet bekanntlich verneinend. Wird bei einer algebraischen Fläche der Irregularität $p>0$ dieselbe Frage für die zu einem Punkte x allgemeiner Lage gehörigen einfachen Integrale gestellt, so ergibt sich eine algebraische Bedingung, und es sind zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Falle nehmen die p Integrale dieselben Werte in einer endlichen Zahl m ($\geqq 1$) von Punkten an; die so erklärten ∞^2 Gruppen von m Punkten bilden eine Involution derselben Irregularität p wie F, die gegenüber den birationalen Transformationen von F invariant ist. Im zweiten Falle gibt es unzählig viele Punkte der verlangten Art; die ∞^1 algebraischen Kurven, längs deren die p Integrale dieselben Werte behalten, bilden dann einen Büschel des Geschlechtes p.

St.

F. Severi. Relazioni tra gl' integrali semplici e gl' integrali multipli di 1ª specie di una varietà algebrica. Annali di Mat. (3) **20**, 201-215.

Wenn man zwei unabhängige einfache Integrale erster Gattung für eine algebraische Fläche kennt, so kann man stets nach Noether (F. d. M. **19**, 790, 1887) ein Doppelintegral erster Gattung herstellen, das von den beiden einfachen Integralen rational abhängt. Ähnliche Beziehungen bestehen, wie Severi in der vorliegenden Arbeit zeigt, zwischen einfachen und mehrfachen — doppelten, dreifachen ,. . ., k-fachen — Integralen erster Gattung einer Mannigfaltigkeit W_k, die durch eine algebraische Gleichung zwischen $k+1$ Veränderlichen erklärt ist; diese Beziehungen ermöglichen es, wenn s unabhängige einfache Integrale erster Gattung gegeben sind, auf rationalem Wege ein s-faches Integral erster Gattung herzustellen.

Es gelingt zwar leicht, indem man den von Noether beschriebenen Weg verfolgt, eine Beziehung zwischen einfachen und k-fachen Integralen zu finden, allein die Zwischenstufen der 2-, 3-, . . ., $(k-1)$-fachen Integrale erfordern tiefer dringende Hülfsmittel; um sie zu gewinnen, hat Severi zunächst die Untersuchung für die algebraischen Flächen noch einmal aufgenommen und den Satz von Noether, statt auf algorithmische Eigenschaften gewisser Polynome, auf geometrische Eigenschaften der Flächen zurückgeführt.

Bei den Untersuchungen über die algebraischen Flächen wird zunächst bewiesen, daß jede Fläche F der Irregularität $p > 0$ immer durch rationale Transformation aus einer Fläche Φ von derselben Irregularität hervorgeht, die der zur Fläche F gehörenden Mannigfaltigkeit V_p angehört. Ausgenommen ist nur der Fall, daß F einen irrationalen Büschel vom Geschlecht p besitzt; in diesem Falle geht F durch rationale Transformation aus einer Kurve vom Geschlecht p hervor, die auf V_p gezogen ist, und alle einfachen Integrale erster Gattung von F sind Funktionen eines unter ihnen.

Sind u_1, u_2 zwei der p einfachen Integrale erster Gattung von V_p, so sind die Doppelintegrale erster Gattung dieser Mannigfaltigkeit von der Form $\iint du_1\, du_2$; diesen einfachen und doppelten Integralen entsprechen einfache und doppelte Integrale auf Φ und diesen wiederum Integrale auf F. Haben also Φ und F dieselbe Irregularität, so erhält man auf die angegebene Art sämtliche einfachen Integrale erster Gattung von F aus den einfachen Integralen u von V_p; von den doppelten Integralen läßt sich nicht dasselbe behaupten. Weiter ergibt sich, daß die Jacobische Determinante zweier einfachen Integrale erster Gattung der Fläche $F(x, y, z) = 0$ nach den beiden unabhängigen Veränderlichen x und y der Integrand eines Doppelintegrals erster Gattung ist, und darin besteht die von Noether gefundene Beziehung.

Um das für den Fall der algebraischen Flächen entwickelte Verfahren auf algebraische Mannigfaltigkeiten W_k anzuwenden, wird zuerst bewiesen, daß eine Mannigfaltigkeit W_k von der Flächenirregularität $p > 0$ durch rationale Transformation aus einer Mannigfaltigkeit Φ_k von derselben Flächenirregularität p hervorgeht, die auf der zu W_k gehörenden Mannigfaltigkeit V_p gezogen ist. Ausgenommen ist der Fall, daß W_k ein System von ∞^{k-i} Mannigfaltigkeiten $M_i (1 \leq i \leq k-1)$ enthält, denen dieselbe zweidimensionale Irregularität p zukommt; W_k ist dann durch rationale Transformation aus einer Mannigfaltigkeit Φ_{k-i} von der Flächenirregularität p hervorgegangen, die auf V_p liegt, und die $k-i+1$ einfachen Integrale erster Art von W_k sind voneinander abhängig.

Indem man jetzt beachtet, daß die doppelten, dreifachen, ... Integrale erster Gattung von V_p von der Form

$$\iint du_1\, du_2, \quad \iiint du_1\, du_2\, du_3 \ldots$$

sind, wo $u_1, u_2, u_3, \ldots$ die p einfachen Integrale erster Gattung von V_p bedeuten, ergibt sich die Herstellung von doppelten, dreifachen, ... Integralen der Mannigfaltigkeit W_k aus den zugehörigen einfachen Integralen erster Gattung.

St.

M. DE FRANCHIS. Intorno a un recente lavoro sugl' integrali multipli di 1ª specie. Palermo Rend. **36**, 140.

FR. SEVERI. Risposta ad un' osservazione del Sig. de Franchis. Palermo Rend. **36**, 226-232.

É. Picard. Extrait d'une lettre au directeur des Rendiconti. Palermo Rend. **36**, 277-278.

Die erste Note bezieht sich auf die vorstehend angezeigte Arbeit von Severi; es wird behauptet, daß der zuletzt im Referat angeführte Satz keines Beweises bedürfe. Severi erwidert darauf in der zweiten Note, daß de Franchis sich über die Bündigkeit seiner Schlüsse täusche, und weist die Quelle des Irrtums nach. Hierbei wird der auch im vorstehenden Referate angezogene Satz von Noether gebraucht. Gegen die Bezeichnung des betreffenden Satzes als Satz von Noether erhebt Picard in der dritten Note Einspruch. Der Satz sei von ihm in der Abhandlung ausgesprochen „Sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espèce (Journ. de Math. (4) **1**, 281-364, S. 304; F. d. M. **17**, 332-336, 1885); die von Severi angezogene Abhandlung Noethers „Über die totalen algebraischen Differentialausdrücke" (Math. Ann. **29**, 339-381; F. d. M. **19**, 790) stammen aber erst aus dem Jahre 1887 (genauer aus 1886, wie das Referat zeigt). Lp.

A. Comessatti. Sulle varietà algebriche che posseggono integrali semplici funzionalmente dipendenti. Rom. Acc. L. Rend. $\mathbf{22}_2$, 270-275.

Der Verf. verallgemeinert hier einen Satz von de Franchis (F. d. M. **36**, 669, 1905) über algebraische Flächen auf k-fach ausgedehnte algebraische Mannigfaltigkeiten in einem Raume von $k+1$ Dimensionen. Besitzt eine solche Mannigfaltigkeit $l+1 \leqq k$ linear unabhängige einfache Integrale, die funktional voneinander abhängig sind, während l unter ihnen es nicht sind, so gibt es auf der Mannigfaltigkeit einen irrationalen Bündel von ∞^l $(k-l)$-fach ausgedehnten algebraischen Mannigfaltigkeiten. Sind die Integrale alle von erster Gattung, so läßt sich über diesen Bündel noch etwas mehr aussagen. Der Satz ist in gewissem Sinne umkehrbar. El.

T. Levi-Civita. Sulle funzioni che ammettono una formula d'addizione del tipo $f(x+y) = \sum_1^n{}_i\, X_i(x)\, Y_i(y)$. Rom. Acc. L. Rend. $\mathbf{22}_2$, 181-183.

Es wird der Lehrsatz bewiesen, daß alle eindeutigen Funktionen $f(x)$, für die ein Additionstheorem der Form

$$f(x+y) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x)\, Y_i(y)$$

gilt, sich als Summen einer endlichen Anzahl von Ausdrücken der Form $P(x)e^{\omega x}$ darstellen lassen, wo $P(x)$ ein Polynom, ω eine reelle oder komplexe Konstante bedeutet. Nach einer Bemerkung, die der Berichterstatter W. Blaschke verdankt, ergibt sich dieser Satz sofort, wenn man bedenkt, daß nach dem Additionstheorem zwischen den $n+1$ Funktionen $Y_1(y), Y_2(y), \ldots, Y_n(y)$ und $f(x+y)$ von y eine lineare homogene Gleichung besteht, mithin deren Wronski-

sche Determinante verschwindet. Setzt man darin $y = 0$ (was unbeschadet der Allgemeinheit erlaubt ist), so erhält man für $f(x)$ eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Der Berichterstatter selbst hat (Rom. Acc. L. Rend. **22**$_2$, Referat S. 396) einen Beweis gegeben, der insofern weniger voraussetzt, als im Unterschiede gegen Levi-Civita und Blaschke nur die Existenz von Ableitungen erster Ordnung der betrachteten Funktionen benutzt wird. St.

W. Sierpiński. O powierzchni, na której każdy łuk jest nieskończenie długi. (Eine Fläche, auf der jeder Kurvenbogen unendlich lang ist.) Warschauer Ges. der Wiss. **6**, 353-356.

Es sei $f(x)$ eine für jedes reelle x definierte stetige Funktion, die in jedem Intervalle von nicht beschränkter Schwankung ist (z. B. eine nirgends derivierbare Funktion). Auf der Fläche

$$(1) \qquad z = f(y - f(x))$$

kann jede stetige Kurve durch die Gleichungen dargestellt werden

$$(2) \qquad x = \varphi(t), y = \psi(t), \quad z = f(\psi(t) - f(\varphi(t))),$$

wo $\varphi(t)$, $\psi(t)$ stetige Funktionen bedeuten, die nicht beide zugleich konstant sind. Wenn das Argument einer Funktion, die in keinem Intervalle von beschränkter Schwankung ist, selbst eine stetige, von einer Konstante verschiedene Funktion ist, dann ist diese zusammengesetzte Funktion selbst von nicht beschränkter Schwankung. Daraus folgt, daß keine Kurve der Gestalt (2) im Sinne von Jordan (Cours d'Analyse Bd. I) rektifizierbar sein kann. A. R.

R. Gateaux. Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques. C. R. **157**, 325-327.

Die Notiz schließt sich an frühere Untersuchungen von Fréchet an, nach welchen eine stetige Linienfunktion (wir wollen den Volterraschen Ausdruck für „fonctionnelle" gebrauchen) $U(z)$ die Darstellung zuläßt:

$$U(z) = \lim_{n=\infty} p_n(z_1, \ldots, z_n) = \lim_{n=\infty} U_n(z),$$

wo p_n ein Polynom von n Variabeln, $U_n(z)$ eine Summe vielfacher Integrale ist, solange man sich in reellen Gebieten bewegt. Die Untersuchung wird auf komplexe

$$z(\alpha) = x(\alpha) + iy(\alpha) \quad (0 \gtreqless \alpha \gtreqless 1)$$

ausgedehnt; $U(z)$ ist von ganzer Ordnung, und zwar von der Ordnung m, wenn $U(\lambda z + \lambda' z')$ (λ und λ' irgend zwei komplexe Zahlen) ein Polynom vom Grade m für λ und λ' ist. Ist das Polynom homogen, so heißt $U(z)$ homogen von der Ord-

nung m. Die Einführung analytischer Linienfunktionen geschieht dann durch Reihenentwicklungen:

$$U(z) = U_0 + U_1(z) + \cdots + U_n(z) + \cdots,$$

in denen die $U_n(z)$ homogene Linienfunktionen der Ordnung n sind; ist die Reihe in einem gewissen Funktionsgebiete um $z = 0$ herum gleichmäßig konvergent, so sagt man, $U(z)$ ist in der Nähe von Null holomorph. Die Definition wird auch in etwas anderer Weise gegeben, analog einer Definition von Cauchy in der gewöhnlichen Funktionentheorie. A. K.

R. Gateaux. Sur la représentation des fonctionnelles continues. Rom. Acc. L. Rend. **22**$_2$, 646-648.

Die Notiz beschäftigt sich mit der analytischen Darstellung der Funktionen von Funktionen (fonctionnelles), die wir jetzt gewöhnlich mit einem von Volterra gewählten Ausdrucke als Linienfunktionen bezeichnen. Wie man analytische Funktionen als Potenzreihen oder als Reihen von Polynomen oder als Grenzwerte von Polynomen darstellen kann, ergeben sich ähnliche Fragen für die Linienfunktionen; Verf. hat in dieser Richtung grundlegende Untersuchungen von Fréchet vereinfacht (man vgl. das vorstehende Referat); die vorliegende Notiz ist eine Fortsetzung dieser Untersuchungen. A. K.

J. Pérès. Sur les fonctions permutables analytiques. Rom. Acc. L. Rend. **22**$_2$, 649-654.

Lösung des Problems: Gegeben ist eine analytische, in der Umgebung des Anfangspunktes ($x = 0, y = 0$) reguläre Funktion $f(x, y)$; es sind sämtliche analytische Funktionen zu bestimmen, welche in der Umgebung des Anfangspunktes regulär und mit $f(x, y)$ permutabel sind. A. K.

R. Fricke. II B 4. Automorphe Funktionen mit Einschluß der elliptischen Modulfunktionen. Enzyklop. d. math. Wissensch. II 2, 349-470.

Inhaltsübersicht. 1. Begriff der automorphen Funktionen. 2. Auftreten von Modulfunktionen in der Theorie der elliptischen Funktionen bei Gauß, Abel usw. 3. Riemanns Bedeutung für die Theorie der automorphen Funktionen. 4. Selbständige Ausbildung des Begriffs der automorphen Funktionen. 5. Äquivalenz und Diskontinuitätsbereich bei einer Substitutionsgruppe. 6. Der Diskontinuitätsbereich der Modulgruppe. 7. Projektiv-geometrische Auffassungen und Methoden. Beziehung zur nichteuklidischen Geometrie. 8. Allgemeines über die Gestalt ebener Diskontinuitätsbereiche in der ζ-Ebene. 9. Ausführliche Polygontheorie der Hauptkreisgruppen in projek-

tiver Darstellung. 10. Transformations- und Invariantentheorie der Hauptkreispolygone. 11. Einteilungsprinzipien auf Grund der Bereichnetze. 12. Arithmetische Definition der Gruppen. 13. Untergruppen, speziell Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe. 14. Existenzbeweis der automorphen Funktionen. 15. Klassifikation der automorphen Funktionen. 16. Sonstige Funktionen der Riemannschen Fläche F_{μ}, die durch ζ uniformisiert werden. 17. Exkurs über homogene Variabeln und Formen auf Riemannschen Flächen. 18. Die homogenen ζ-Substitutionen. 19. Begriff der automorphen Formen. 20. Theorie der automorphen Formen für $p = 0$. 21. Automorphe Formen für Gebilde beliebigen Geschlechtes. 22. Die Poincaréschen Reihen. 23. Darstellung automorpher Formen durch Poincarésche Thetareihen. 24. Schottkys Produktentwicklung der Primform. 25. Analytische Darstellung für Modulformen. 26. Transformationstheorie, speziell der Modulfunktionen. Modulargleichungen. 27. Fortsetzung. Modularkorrespondenzen, Multiplikatorgleichungen. 28. Klassenzahlrelationen. 29. Transformation sonstiger automorpher Funktionen. 30. Algebraische Probleme bei ausgezeichneten Untergruppen, insbesondere innerhalb der Modulgruppe. 31. Die polymorphen Funktionen und Formen auf einer Riemannschen Fläche. 32. Differentialgleichungen für polymorphe Funktionen und Formen. 33. Analytische Darstellungen für polymorphe Formen. 34. Die polymorphen Formen H_1, H_2 als eindeutige Modulformen. 35. Die homomorphen Formen und die Poincaréschen Zetareihen. 36. Fundamentaltheoreme über die Existenz der eindeutig umkehrbaren polymorphen Funktionen auf gegebenen Riemannschen Flächen. 37. Die Kontinuitätsmethode zum Beweise der Fundamentaltheoreme. 38. Die Methode des Bogenelementes beim Beweise des Grenzkreistheorems. 39. Die Methode der Überlagerungsfläche zum Beweise aller Fundamentaltheoreme. 40. Anwendung der Modulfunktionen in der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. 41. Mehrdeutige automorphe Funktionen. 42. Automorphe Funktionen mehrerer Variabeln. Lp.

W. F. Osgood. Existenzbeweis betreffend Funktionen, welche zu einer eigentlichen diskontinuierlichen automorphen Gruppe gehören. Palermo Rend. **35**, 103-106.

Eine Betrachtung zum Beweise des Satzes, daß zu einer beliebig vorgegebenen Riemannschen Fläche Funktionen gehören, welche auf der Fläche eindeutig und, von Polen abgesehen, analytisch sind, in zwei übereinander liegenden Blättern niemals identisch gleiche Werte annehmen und sich endlich nicht über die Fläche hinaus analytisch fortsetzen lassen. A. K.

F. Schottky. Über die Funktionenklasse, die der Gleichung $F\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right) = F(x)$ genügt. J. für Math. **143**, 1-24.

Das Ziel des Verf. besteht darin, die wichtigsten Sätze über die Lösungen der Funktionalgleichung:

$$F\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right) = F(x)$$

in einheitlicher Darstellung und mit möglichst einfachen Hülfsmitteln herzuleiten. Den Schluß bilden Bemerkungen zu dem Referat, das F. d. M. **41**, 517, 1910 über Schottkys Abhandlung: Ein Satz, der sich auf die Anordnung der 4^p Thetafunktionen bezieht, von anderer Seite erstattet worden war. Die Frage, ob Riemann das von Schottky aufgestellte Theorem bereits gekannt habe, wird nach der Meinung des Berichterstatters durch eine Stelle in den Nachträgen zu Riemanns gesammelten Werken, Leipzig 1902, S. 53, entschieden, wo es heißt: „Die Folge ist, daß diese Systeme von Charakteristiken nicht nur für die hyperelliptischen, sondern auch für die allgemeinen Abelschen Funktionen anwendbar sind. So haben wir für $p = 3 \ldots$" St.

L. Precchia. Sulla costruzione di funzioni uniformi di due variabili complesse che rimangono inalterate pel gruppo generato da due sostituzioni lineari permutabili. Batt. G. **51** [(4) **3**], 99-123.

Das Analogon zur Theorie der automorphen Funktionen der Gruppen linearer Substitutionen bei einer Variable ist im Gebiete zweier Variabeln nicht die Theorie einzelner automorpher Funktionen, sondern die Theorie eines Paares voneinander unabhängiger automorpher Funktionen. Wenn auch im Gegensatze zu einer mißverständlichen Ausdrucksweise unseres Verfassers die Frage nach der Existenz einzelner automorpher Funktionen nicht einmal bei den Gruppen der vierfach periodischen Funktionen voll erledigt zu sein scheint, so steht jedenfalls fest, daß es nicht zu jeder vierfach periodischen Gruppe ein Paar voneinander unabhängiger automorpher Funktionen gibt. Dazu muß ja nach einem Fundamentalsatz von Riemann unter anderem eine bilineare Relation zwischen den Perioden bestehen. Hier sind also die Bedingungen voll bekannt.

Genau wie bei einer Variable läßt sich nun die Betrachtung der automorphen Funktionen von Gruppen, die aus zwei vertauschbaren Substitutionen erzeugt werden, durch eine logarithmische Substitution auf die Betrachtung vierfach periodischer Funktionen zurückführen. So gelingt es dem Verf. natürlich unschwer, die für diese Gruppen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz zugehöriger automorpher Funktionenpaare abzuleiten und auch alle derartigen Funktionen mit Hülfe der Thetafunktionen zu konstruieren. Bi.

H. Poincaré. Fonctions modulaires et fonctions fuchsiennes. Toulouse Ann. (3) **3**, 125-149.

Der Verf. ergänzt und berichtigt eine Reihe von Stellen in seiner großen Abhandlung „Sur les invariants arithmétiques", über die F. d. M. **36**, 144-151, 1905 ausführlich referiert worden ist. St.

É. Picard. Sur une classe de transcendantes généralisant les fonctions elliptiques et les fonctions abéliennes. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **30**, 247-253.

1. Zu jeder birationalen Transformation

$$X_\nu = R_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

mit dem Doppelpunkt $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ gehört bekanntlich ein System von n eindeutigen, im Endlichen meromorphen Funktionen $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$, die

a) die Periode $2\pi i$ besitzen,

b) den Funktionalgleichungen genügen:

$$f_\nu(z+\omega) = R_\nu[f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)] \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n);$$

ω bedeutet eine reelle, positive Konstante.

Der Beweis beruhte auf dem Verfahren der aufeinanderfolgenden Annäherungen. Wie Picard jetzt zeigt, konvergiert das Verfahren auch unter allgemeineren Voraussetzungen als denen, die er früher machte. Die so erhaltenen Funktionen haben jedoch die Pole der doppeltperiodischen Funktionen zweiter Art, die als Ausgangsfunktionen dienen, zu wesentlich singulären Punkten.

2. Es liegt nahe, entsprechende Betrachtungen im Gebiete von zwei unabhängigen Veränderlichen anzustellen. Wählt man jedoch als Ausgangsfunktionen vierfachperiodische Funktionen zweiter Art, so ergibt sich, daß die erhaltenen Funktionen immer wesentlich singuläre Stellen im Endlichen besitzen und daher nicht als die Verallgemeinerung der Abelschen Funktionen angesehen werden können. Da auch ein anderer Ansatz der Ausgangsfunktionen versagt, so bleibt die Frage der Existenz solcher Funktionen zweifelhaft.
St.

G. Giraud. Sur un groupe de transformations birationnelles. C. R. **157**, 1511-1514.

Der Verf. konstruiert den Fundamentalbereich einer speziellen Gruppe.
Bi.

G. Giraud. Sur une classe de transcendantes admettant un théorème de multiplication. S. M. F. C. R. 1913, 33-35.

Betrachtungen über die von Poincaré behandelten Transzendenten in der Abhandlung Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes (Journ. de math. (4) **6**, 313-365; F. d. M. **22**, 420, 1890) in Anknüpfung an die Mitteilung von Picard in C. R. **139**, 5-9 (F. d. M. **35**, 421, 1904). Lp.

G. Giraud. Sur une classe de transcendantes ayant un théorème de multiplication. C. R. **156**, 49-51.

Einige Sätze über die Transzendenten, welche durch Funktionalgleichungen der Form:

$$f_i(a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots, a_n x_n) = R_i[f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, x_2 \ldots x_n)] \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

definiert werden, wo unter $R_1, R_2, \ldots, R_n$ rationale Funktionen von $f_1, f_2, \ldots, f_n$ verstanden werden, die für $f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0$ verschwinden; die unbekannten Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sind holomorph für genügend kleine Werte von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und Null für $x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0$. A. K.

E. Esclangon. Sur les fonctions quasi périodiques moyennes, déduites d'une fonction quasi périodique. C. R. **157**, 1389-1392.

Der Begriff der quasiperiodischen Funktionen wurde vom Verf. vor etwa 14 Jahren eingeführt; er nannte eine Funktion $f(x)$ quasiperiodisch mit der Periodenbasis $a_1, a_2, \ldots, a_n$, wenn für eine Mannigfaltigkeit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bei beliebig kleinem ε stets δ so gefunden werden kann, daß unter den Bedingungen:

$$| x + m_i a_i - x_i | < \delta$$

die Ungleichheit:

$$| f(x) - L(x_1, x_2, \ldots, x_n) | \gtreqless \varepsilon \quad (L \text{ eine bestimmte Funktion ihrer Argumente}),$$

erfüllt wird. $m_1, m_2, \ldots, m_n$ werden als ganze Zahlen vorausgesetzt. Solche Funktionen kommen gelegentlich vor, wenn sie durch gewisse trigonometrische Reihen definiert werden, und in dieser Richtung ist der Begriff wohl von anderen Forschern auch früher bereits gebraucht worden. Die vorliegende Notiz beschäftigt sich mit einigen Eigenschaften solcher quasiperiodischen Funktionen, im besonderen damit, aus einer quasiperiodischen Funktion durch eine gewisse Mittelwertsbildung eine neue quasiperiodische Funktion mit besonderen Periodizitätseigenschaften herauszuschälen. A. K.

P. E. Böhmer. Über mehrdeutige periodische Funktionen. Sitzber. Berl. Math. Ges. **12**, 32-35.

Die unendlich vieldeutige Funktion $f_1(z) = \log \cos \pi z + i\pi z$ ist in sämtlichen positiven Halbblättern $(y > 0)$ periodisch von der Periode 1; dagegen ist sie nicht periodisch in den negativen Halbblättern; das Umgekehrte gilt für die unendlich vieldeutige Funktion: $f_2(z) = \log \cos \pi z - i\pi z$. An diesen Beispielen wird das Verhalten mehrdeutiger periodischer Funktionen zu beiden Seiten derjenigen Geraden erläutert, welche die Verzweigungspunkte enthält.
A. K.

P. Bernays. Zur elementaren Theorie der Landauschen Funktion $\varphi(a)$. Zürich. Naturforsch. Ges. **58**, 203-238.

Für reelles α zwischen 0 und 1 ist, wenn μ das arithmetisch-geometrische Mittel bedeutet, die Funktion $\Phi(\alpha) = \frac{2\pi\alpha(1-\alpha)}{\mu(1, \sqrt{\alpha})\,\mu(1, \sqrt{1-\alpha})}$ durch die Funktionalgleichungen $\Phi(\alpha) = \Phi(1-\alpha)$ und $\Phi(\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha}(1+\sqrt{\alpha})^3}{2(1-\sqrt{\alpha})}\,\Phi\left(\frac{4\sqrt{\alpha}}{(1+\sqrt{\alpha})^2}\right)$, sowie die Nebenbedingung $\lim_{\alpha=0} \frac{\Phi(\alpha)}{\alpha \lg \frac{1}{\alpha}} = 2$ vollständig charakterisiert.

Andrerseits ist elementar bewiesen, daß die genaue obere Grenze $\varphi(\alpha)$ für den Radius eines Kreises, in dessen Inneren jede Potenzreihe $\alpha + x + \cdots$ konvergent und von 0 und 1 verschieden ist, den nämlichen beiden Funktionalgleichungen genügt; indem der Verf. nun ebenfalls auf elementarem Wege zeigt, daß $\varphi(\alpha)$ auch der erwähnten Nebenbedingung genügt, findet er $\varphi(\alpha)$ identisch mit dem obigen Quotienten für $\Phi(\alpha)$, aus dem sich durch Umformung der Carathéodorysche, die Modulfunktion benutzende Ausdruck von $\varphi(\alpha)$ gewinnen läßt. Durch die notwendige Beschränkung von α auf das reelle Intervall (0, 1) wird der Wert der vorliegenden Abhandlung beeinträchtigt. Fa.

P. Appell. Développement en série procédant suivant les inverses de polynomes donnés. Darboux Bull. (2) **37**, 345-350.

(Referat in Abschnitt VII, Kap. 2 D.)

Weitere Literatur.

R. J. Backlund. Einige numerische Rechnungen, die Nullprodukte der Riemannschen ζ-Funktion betreffend. Öfv. Finska Vet. Soc. Förh. **54**, Nr. 3, 7 S. (1912).

H. Batemann. Sonin's polynomials and their relation to other functions. Amer. M. S. Bull. (2) **19**, 394.

E. T. Bell. On Liouville's theorems concerning certain numerical functions. Amer. M. S. Bull. (2) **19**, 166-167.

G. A. Bliss. The relation satisfied by two dependent functions near a point at which both are singular. Amer. M. S. Bull. (2) **19**, 286.

M. Bôcher. An application of Gibbs's phenomenon. Amer. M. S. Bull. (2) **19**, 460.

I. Brajtzev. Über die singulären Punkte einer durch eine Taylorsche Reihe bestimmten Funktion. Warschau Ann. des Polyt. Inst. 1913, 204 S. (Russisch.)

R. Della Valle. Le funzioni con argomento complesso estese sulle superficie sferiche di Riemann. S. Maria C. V.: Cavotto. 31 S. 8°.

W. von Dyck. Über singuläre Stellen der Differentialgleichungen erster Orduung zweiten Grades. Verhdl. Naturf.-Ges. 1912 (Münster) $\mathbf{2}_2$, 5-6. Hinweis auf die Dissertation von J. Weigel (F. d. M. **43**, 402, 1912).

C. A. Fischer. A generalization of Volterra's derivative of a function of a curve. Amer. M. S. Bull. (2) **19**, 390.

C. A. Fischer. The derivative of a function of a surface. Amer. M. S. Bull. (2) **19**, 512.

M. Fréchet. Sur la notion de différentielle d'une fonction de ligne. Amer. M. S. Bull. (2) **20**, 77.

T. H. Gronwall. On the Riemann zeta function I, II. Amer. M. S. Bull. (2) **19**, 224-225.

T. H. Gronwall. On Picard's theorem. Amer. M. S. Bull. (2) **19**, 225-226.

T. H. Gronwall. On Weierstraß's preparation theorem. Amer. M. S. Bull. (2) **19**, 298-299.

T. H. Gronwall. On the maximum modulus of an analytic function. Amer. M. S. Bull. (2) **19**, 507.

J. Grossmann. Über die Nullstellen der Riemannschen ζ-Funktion und der Dirichletschen L-Funktion. Diss. Göttingen.

W. Harzer. Bestimmung der Anzahl der dreiblättrigen Riemannschen Flächen mit beliebig gegebenen Windungspunkten und der vierblättrigen mit Windungspunkten gleicher Ordnung. Diss. Leipzig. 43 S. 8°.

E. R. Hedrick and W. D. A. Westfall. An existence theorem for implicit functions. Amer. M. S. Bull. (2) **20**, 66.

W. F. Osgood. Proof of the existence of functions belonging to a given automorphic group. Amer. M. S. Bull. (2) **19**, 171.

W. F. Osgood. On functions of several variables which are meromorphic or analytic at infinity. Amer. M. S. Bull. (2) **20**, 70.

W. F. Osgood. Note on line-integrals on an algebraic surface $f(x, y, z) = 0$. Amer. M. S. Bull. (2) **20**, 70.

M. Petrowitsch. Integral des Modulquadrats reeller Funktionen. Agram Akad. **193**, 105-114. (Kroatisch.)

A. D. Pitcher. On the connection of an abstract set, with applications to the theory of functions of a general variable. Amer. M. S. Bull. (2) **19**, 510.

D. Riabouchinsky. La fonction $|x|$. Essai d'un calcul des valeurs absolues. Moskau: Kuchniroff. 28 S. 4°.

J. Rudnicki. O zastosowaniu praktycznym metody Cauchy-Lipschitza w pewnym szczególnym przypadku. (Die praktische Anwendung der Methode von Cauchy-Lipschitz in einem besonderen Falle.) Wektor **3**, 17-21.

W. A. Stekloff. Über eine Anwendung der Theorie des Schließens auf das Problem der Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Tschebyschefschen Polynomen. St. Petersb. Bull. 1913, Nr. 2, 87-92. (Russisch.)

E. H. Taylor. An extension of a theorem of Painlevé. Amer. M. S. Bull. (2) **19**, 169.

T. Wada. Note on a sequence of functions. Kyôto. Mem. Coll. Univ. **4**, 133-135.

C. E. Wilder. On the degree of approximation to discontinuous functions trigonometric sums. Amer. M. S. Bull. (2) **19**, 394-395.

Kapitel 2.

Besondere Funktionen.

A. Elementare Funktionen, Gammafunktionen und hypergeometrische Reihen.

P. Mansion. Précis de la théorie des fonctiens hyperboliques, suivi d'une théorie purement analytique des fonctions circulaires. 3e édition revue et augmentée. Paris: Gauthier-Villars. 44 S. 8°.

P. Mansion. Abriß der Theorie der Hyperbelfunktionen nebst einer rein analytischen Theorie der Kreisfunktionen. Nach der dritten französischen Auflage übersetzt. Leipzig: B. G. Teubner. 44 S. gr. 8°.

Das Büchlein, das auf dem Titel den Satz von Riccati wiedergibt: Per analogiam sinus et cosinus ex circulo traduci possunt ad hyperbolam aequilateram, enthält hinter der Einleitung folgende Abschnitte: I. Grundeigenschaften, hierzu: Tabelle der Hyperbel- und Kreisfunktionen von 0° bis 45° in vier Dezimalen. II. Geometrische Deutung der hyperbolischen Funktionen. III. Ableitungen: Integrale, Reihen. IV. Anwendungen: Auflösung der kubischen Gleichung, Eigenschaften der Hyperbel, Kettenlinie und Traktrix. Pseudosphäre, Parabel und Rotationsparaboloid. V. Übungen: Lobatschefskijsche Trigonometrie. Anhang: Rein analytische Theorie der Kreisfunktionen.

Als für Anfänger bequeme Einführung in diese Theorie und als Ergänzung solcher elementaren Lehrbücher, welche den Gegenstand nicht berühren, ist die vorliegende Schrift zu empfehlen. Lp.

S. K. Jyengar. The series $\sum_{1}^{n=\infty}\left\{\frac{n^p}{\lfloor n}\right\}$. Indian Math. Soc. **5**, 178-179.

Die Summe der Reihe ist $k_p\, e$, wo k_p eine ganze Zahl ist (ein übrigens bekanntes Resultat siehe z. B. Cesàro, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechung, Leipzig 1904, § 807 d). S. 872); k_p wird durch die Fakultätenkoeffizienten ausgedrückt. Schr.

F. Jackson. On the series for sine and cosine. Messenger (2) **43**, 63-72.

Im Messenger (2) **35**, 58-69 (F. d. M. **36**, 496, 1905) hat M. J. M. Hill einen induktiven Beweis für die Sinus- und Kosinusreihe gegeben, der von der Le Cointeschen Identität ausgeht:

$$3^n \sin \frac{x}{3^n} - \sin x = 4\left(\sin^3 \frac{x}{3} + 3 \sin^3 \frac{x}{3^2} + \cdots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{x}{3^n}\right).$$

Der Verf. liefert eine andere Herleitung, indem er von der leicht zu beweisenden Indentität ausgeht:

$$2^n \sin \frac{x}{2^n} = 2 \sin \frac{x}{2}\left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) + 2^2 \sin \frac{x}{2^2}\left(1 - \cos \frac{x}{2^2}\right) + \cdots$$
$$+ 2^n \sin \frac{x}{2^n}\left(1 - \cos \frac{x}{2^n}\right).$$

Referent vermag auch jetzt noch nicht den Nutzen socher weitläufigen Betrachtungen einzusehen. Lp.

E. J. Nanson. On the series for sine and cosine. Messenger (2) **43**, 108-110.

Der Verf. erschließt die Sinus- und die Kosinusreihe aus dem leicht zu erweisenden Satz, daß $\sin x$ zwischen $S_n(x)$ und $S_{n+1}(x)$ liegt, $\cos x$ zwischen $C_n(x)$ und $C_{n+1}(x)$, wo

$$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Lp.

V. B. Ketakar. The sine and cosine series. Indian Math. Soc. **5**, 133-135.

Ableitung der Sinus- und Kosinusreihe ohne Benutzung imaginärer Größen mittels des Additionstheorems der trigonometrischen Funktionen. Ba.

I. J. Schwatt. Note on the expansion of analytic functions. Messenger (2) **42**, 140*-143*.

Ableitung der Potenzreihe für $(\text{arc tg}\, x)^n$. Lp.

A. C. Dixon. Expressions for the remainders when Θ, Θ^2, $\sin k\Theta$, $\cos k\Theta$ are expanded in ascending powers of $\sin \Theta$. Cambr. Phil. Soc. Proc. **17**, 244-248.

Der Ausdruck für die Entwicklung z. B. von $\sin k\Theta$ ist z. B.

$$k \sin \Theta - \frac{k(k^2 - l^2)}{3!} \sin^3 \Theta + \cdots + (-l)^n \frac{k(k^2 - l^2) \ldots k^2 - (2n - l)^2}{(2n + l)!}$$
$$\times \left[\sin^{2n+l} \Theta - \frac{k^2 - (2n + l)^2}{k} u_{2n-l}\right]$$

J.

M. Pétrovitch. Sur des transcendantes entières généralisant les fonctions exponentielles et trigonométriques. C. R. **156**, 1213-1215.

Sind $u(t)$ und $r(t)$ für $a \leqq t \leqq b$ endlich und stetig, und setzt man

$$\alpha_n = \frac{\int_a^b u\, r^n\, dt}{\int_a^b u\, dt},$$

so zeigen die drei Funktionen

$$J(x) = 1 + \frac{\alpha_1}{1!}x + \frac{\alpha_2}{2!}x^2 + \cdots,$$

$$J_1(x) = 1 - \frac{\alpha_2}{2!}x^2 + \frac{\alpha_4}{4!}x^4 - + \cdots,$$

$$J_2(x) = \frac{\alpha_1}{1!}x - \frac{\alpha_3}{3!}x^3 + - \cdots$$

gewisse Analogien mit e^x, $\sin x$, $\cos x$, was im einzelnen näher ausgeführt wird.

Fa.

M. Pétrovitch. Séries hypertrigonométriques. C. R. **156**, 1823-1825.

Sind u und r stetige und beschränkte Funktionen von t in (a, b), und setzt man

$$\alpha_n = \frac{\int_a^b u\, r^n\, dt}{\int_a^b u\, dt},$$

so weisen die Funktionen

$$J_1(x) = 1 - \frac{\alpha_2}{2!}x^2 + \frac{\alpha_4}{4!}x^4 - + \ldots,$$

$$J_2(x) = \alpha_1 x - \frac{\alpha_3}{3!}x^3 + \frac{\alpha_5}{5!}x^5 - + \cdots$$

zahlreiche Analogien mit $\cos x$ und $\sin x$ auf. Dies hat Verf. in der vorstehend angezeigten Note schon ausgeführt. In dem vorliegenden Artikel wird gezeigt, daß jeder in $0 \ldots 2\pi$ gültigen Fourier- Entwicklung einer stetigen Funktion $f(x) = A_0 + \Sigma\,(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$ eine Reihe $A_0 + \Sigma\,(A_n J_1(nx) + B_n J_2(nx))$ entspricht, die in leicht angebbaren Intervallen konvergiert und eine gleichfalls explizit angebbare Funktion darstellt.

K. K.

N. Nielsen. Verkürzte Rekursionsformeln für Bernoullische und Eulersche Zahlen. Leipz. Ber. **65**, 3-26.

Ist $a_0, a_1, a_2, \ldots$ eine unendliche Folge, so heißt die Polynomfolge

$$f_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{a_s x^{n-s}}{(n-s)!}$$

regulär, wenn für jedes n

$$(-1)^n f_n(-x-1) = f_n(x)$$

ist. Jeder regulären Folge entspricht eine Rekursionsformel für die Bernoullischen Zahlen und eine für die Eulerschen Zahlen. Durch spezielle Annahmen entstehen zahlreiche teils bekannte, teils neue Formeln. Schr.

N. Nielsen. Sur les fonctions de Bernoulli et des sommes de puissances numériques. Nieuw Archief (2) **10**, 396-415.

Ableitung einiger, zum Teil bekannter, Rekursionsformeln; die Summe $\sigma_{2n}(p) = 2\sum_{r=0}^{r=p-1} (-1)^r (p-r)^{2n}$ ist ein Polynom $2n$-ten Grades in p mit ganzzahligen Koeffizienten; die Summe $\tau_n(p) = \sum_{r=0}^{r=p-1} (-1)^r (2p-2r-1)^n$ ist ein Polynom n-ten Grades in p mit ganzzahligen Koeffizienten, und man hat

$$\tau_{2n+1}(p) \equiv 0 \pmod{p}, \quad \tau_{2n}(2p) \equiv 0 \pmod{8p^2}.$$

Polynome $f(x)$ vom n-ten Grade, für die

$$(-1)^n f(-x-1) = f(x)$$

ist, heißen regelmäßig (réguliers); solche sind unter andern die Bernoullischen Polynome. Mit dieser Eigenschaft hängen zahlreiche Rekursionsformeln zusammen.

Schr.

W. F. Sheppard. The power-sum formula and the Bernoullian function. III. The Euler-Maclaurin formula. Math. Gazette **7**, 100-104.

Vgl. F. d. M. **43**, 337, 1912. „Die gewöhnliche Formel für Σn^r in Gliedern von n und die andere in Gliedern von $n + \frac{1}{2} \equiv \nu$ sind besondere Fälle der Euler-Maclaurinschen Formel und der sie ersetzenden Formel, die „Zwischenordinaten" enthält. Die Formeln werden von den Mathematikern gewöhnlich als ein Mittel angesehen, eine Summe als ein Integral auszudrücken; ihr praktischer Wert dient aber dem umgekehrten Zwecke, den Ausdruck eines Flächeninhalts in Gliedern mit den Ordinaten zu erhalten." Dies wird an verschiedenen Formen der bekannten Summenformel erläutert; genauer wird noch auf die Bestimmung des Restes der Reihe eingegangen. Zuletzt werden zwei Beispiele betrachtet.

Lp.

D. Arany. Contribution to L a p l a c e's theory of the generating function. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 441-443.

Der Ausdruck

$$Q(x) = \frac{l!}{x!(l-x)!} p^x q^{l-x} \qquad (p+q=1)\cdot$$

ist nur für ganze x definiert, und es wäre in der Wahrscheinlichkeitsrechnung manchmal bequem, dem Ausdruck auch für beliebige x einen Sinn zu geben. Nachdem dies Verf. mit Hülfe der S t i r l i n g schen Formel für $n!$ getan hat, deutet er eine allgemeine Methode an, welche dazu dienen kann, irgendeine nur für $x = 0, 1, 2, \ldots, l$ definierte Funktion $f(x)$ auch für beliebige andere Werte des Argumentes x zu definieren. Er setzt:

$$2\pi i f(x) = \int_{u=a}^{u=a+2\pi i} e^{-xu}\, \Phi(u)\, du \text{ mit } \Phi(u) = \sum_{t=0}^{t=l} f(t)\, e^{tu}$$

als der „erzeugenden Funktion" (fonction génératrice, generating function). Die Funktion $Q(x)$ wird als Beispiel behandelt. A. K.

J. Hadamard. Sur la série de S t i r l i n g. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 303-305.

Die S t i r l i n g sche Reihe:

$$\log \sqrt{2\pi} - x + (x+\tfrac{1}{2}) \log x + \frac{B_1}{1\cdot 2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{B_2}{3\cdot 4} \frac{1}{x^2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n-1)\, 2n} \frac{1}{x^{2n-1}} + \cdots,$$

die dem asymptotischen Ausdruck von $\log \Gamma(x+1)$ für ein sehr großes x entspricht, ist bekanntlich divergent; sie bekundet das Verhalten der Funktion, liefert aber nicht ihren Zahlwert. Der Verf. macht sie dadurch konvergent, daß er zum n-ten Gliede den Ausdruck hinzufügt:

$$\frac{2(-1)^{n-1}}{(2n-1)\, x^{2n-1}} \int_x^\infty t^{2n-1} \left(e^{-2\pi t} + e^{-4\pi t} + \cdots + e^{-2n\pi t}\right) dt = \Phi_n \left(\frac{1}{x}, e^{-2\pi x}\right),$$

ein ganzes Polynom vom Grade $2n-1$ in bezug auf die eine der Veränderlichen, vom Grade n in bezug auf die andere. Bezeichnet man die Summe der neuen Reihe mit $S(x)$, so ist

$$\log \Gamma(x) = S(x) + \psi(x),$$

wo $\psi(x)$ schneller abnimmt als jedwede Potenz von x. Lp.

J. Malaise. Sur une formule d'approximation d'une fonction de grand nombre. Nouv. Ann. (4) **13**, 514-516.

Für ein sehr großes n entwickelt der Verf. die Näherungsformel

$$\sin[(n+1)\arccos x] = \frac{(n+1)(2n+1)^{2n+1}\, e^{-(n+1)}\, (1-x)^{\frac{1}{2}}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)\, n^n}\sqrt{2+1/n}\,(1+\varepsilon),$$

wo ε mit wachsendem n gegen Null konvergiert. Vgl. jedoch das folgende Referat.
Lp.

J. F. Ritt. Note sur la fonction sin $[(n+1)\arccos x]$. Nouv. Ann. (4) **14**, 184-186 (1914).

Kritik des Verfahrens von J. Malaise in der vorstehend angezeigten Note. Für ein sehr großes n muß die Beziehung gelten:

$$\sin[(n+1)\arccos x] = (n+2)\sqrt{2(1-x)},$$

„ein Ergebnis, das mit dem verwickelten Ausdruck von Malaise übereinstimmen müßte, dessen Unmöglichkeit zutage liegt".
Lp.

H. Burkhardt. Zur Theorie der Gammafunktion, besonders über ihre analytische Darstellung für große positive Werte des Arguments. Münch. Ber. 1913, 383-396.

Von der Darstellung $\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2}$ ausgehend, werden die bekannten Eigenschaften der Gammafunktion in ganz besonders einfacher Weise abgeleitet, wobei die Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ verwendet wird. Für große x wird, anknüpfend an einen allgemeinen Satz von Stieltjes, die folgende konvergente Fakultätenreihe aufgestellt:

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x(x+1)} + \frac{2!}{3}\frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{4}\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots$$

Von dieser kommt man zu Gudermanns Darstellung von $\log \Gamma(x)$.
Schr.

H. Burkhardt. Un théorème sur la fonction gamma. C. R. **156**, 1212.

Angabe einer für $x > 0$ konvergenten Reihenentwicklung von $\log \Gamma(x)$.
Lp.

G. D. Birkhoff. Note on the gamma function. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 1-10.

In diesem Aufsatz liefert der Verf. eine einfache Entwicklung der Haupteigenschaften der Funktion $\Gamma(x)$ auf Grund der Elemente der Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen. Er setzt

$$(1) \qquad \varphi(x) = x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \sqrt{2\pi} \qquad (-\pi < \arg x < +\pi)$$

mit der Bestimmung, daß $\varphi(x)$ reell und positiv zu wählen ist, wenn die komplexe Veränderliche x reell und positiv ist. Dann wird $\Gamma(x)$ definiert als

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x+1} \cdots \frac{1}{x+n} \varphi(x+n+1)$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots; x \neq 0, -1, -2, \ldots).$$

Lp.

J. Touchard. Sur la fonction gamma. S. M. F. Bull. **41**, 234-242.

Es wird die für $\Re(x) > 0$ gültige Formel

$$e^x = \frac{1}{2} + \int_0^\infty \frac{x^z\, dz}{\Gamma(1+z)} + \frac{x}{\pi} \int_0^\infty e^{-xz} \operatorname{arc\,tg} \frac{\log z}{\pi}\, dz$$

und eine Anzahl ähnlich gebildeter bewiesen.

Als Anwendung gelingt unter anderem die Bestimmung der Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von e^{e^x}, — allerdings nur in Form sehr komplizierter Integrale.

K. K.

G. N. Watson. Some analytic functions associated with the G-function. Quart. J. **44**, 187-205.

An die Untersuchungen von Barnes über die durch die Gleichung $G(x+1) = \Gamma(x)\, G(x)$ definierte G-Funktion anschließend, definiert und untersucht der Verf. die Funktion ${}_rF_s$ durch die Gleichung:

$$\frac{\prod_{t=1}^{s} G(\varrho_t)}{\prod_{t=1}^{r} G(\alpha_t)}\, {}_rF_s(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r;\, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s;\, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{t=1}^{s} G(\varrho_t + n)}{\prod_{t=1}^{r} G(\alpha_t + n)} G(n+1)\, z^n.$$

Wir haben es mit einer ganzen Funktion zu tun, wenn $s+1 = r$, $0 < R\left\{\sum_{t=1}^{r} \alpha_t - \sum_{t=1}^{s} \varrho_t - 1\right\}$, und wenn $s+1 < r$; für $s+1 = r$, $R\left\{\sum_{t=1}^{r} \alpha_t - \sum_{t=1}^{s} \varrho_t - 1\right\} = 0$ hat die Reihe den Konvergenzradius 1; in allen übrigen Fällen divergiert die Reihe für jeden Wert von z.

A. K.

K. P. Williams. The asymptotic form of the function $\Psi(x)$. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 472-479.

Die Funktion $\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$:

$$\Psi(x) = -C - \sum \left[\frac{1}{x+s} - \frac{1}{s+1}\right] \qquad (s = 0, 1, \ldots \infty),$$

wo C die Eulersche Konstante ist, genügt der nicht homogenen Differenzengleichung:

$$f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x}.$$

Aus dieser Eigenschaft leitet der Verf. die bekannte asymptotische Form von $\Psi(x)$ ab:

$$\Psi(x) \backsim \log x - \frac{1}{2x} + \Sigma \frac{(-1)^s B_s}{2s \cdot x^{2s}} \qquad (s = 1, 2, \ldots \infty)$$

(für $-\pi < \arg x < \pi$).

Lp.

R. H. Fowler. The cubic transformations of Riemann's *P*-functions. Quart. J. **44**, 205-218.

Die Theorie der linearen und quadratischen Transformationen der hypergeometrischen Funktionen mit Hülfe der Pochhammerschen Doppelschleifenintegrale wurde von Barnes durch Verwendung von Randintegralen über gewisse mit Γ-Funktionen gebildete Ausdrücke eleganter gestaltet. In der vorliegenden Abhandlung behandelt der Verf. mit Hülfe einer analogen Methode die kubischen Transformationen der Riemannschen *P*-Funktionen.

A. K.

K. Abramowicz. O pewnych wzorach Riemann'a odnoszących się do funkcyj hypergeometrycznych. (Über einige Formeln von Riemann, die sich auf hypergeometrische Funktionen beziehen.) Wiad. matem. **16**, 185-195.

Die lineare Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktion

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\frac{1-\alpha-\alpha'}{x-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{x-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-c}\right]\frac{dy}{dx} + \left[\frac{\alpha\,\alpha'(a-b)(a-c)}{x-a} + \frac{\beta\,\beta'(b-a)(b-c)}{x-b} + \frac{\gamma\,\gamma'(c-a)(c-b)}{x-c}\right]\frac{y}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 0$$

besitzt die drei singulären Stellen der Bestimmtheit a, b, c, denen sechs Zweige der Funktion entsprechen. Wenn in der Darstellung dieser Zweige die gewöhnlichen bestimmten Integrale durch Schleifenintegrale ersetzt werden, dann lassen sich die Koeffizienten in den Übergangssubstitutionen zwischen den sechs Zweigen durch trigonometrische Funktionen von $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ ausdrücken. Diese Bemerkung ist von Klein gemacht worden. Die Rechnung wird vom Verf. durchgeführt; die Formeln aber finden sich schon in der klassischen Abhandlung von Riemann.

A. R.

M. J. M. Hill. On the continuation of the hypergeometric series. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 375-383.

„Zweck dieses Aufsatzes ist, die Aufmerksamkeit auf gewisse Schwierigkeiten zu lenken, die bei dem Versuch entstehen, die Methode der gewöhnlichen algebraischen Entwicklung, die erfolgreich auf Reihen angewandt ist, welche einen oder zwei singuläre Punkte haben, auf Reihen anzuwenden, die drei solche

Punkte haben, nämlich die hypergeometrischen Reihen. Die zu beweisende Gleichung ist:

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x) = \frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\,\Pi(\beta-\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$
$$+ \frac{\Pi(\gamma-2)\,\Pi(\alpha+\beta-\gamma)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)} x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x).$$

Die Reihen $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x)$ und $x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x)$ können nicht in Reihen mit ganzen Potenzen von x ausgedrückt werden. Deshalb werden in jeder betroffenen Reihe nur $n+1$ Glieder genommen, und es wird ein Versuch gemacht, zu beweisen, daß die Differenz zwischen den beiden Seiten sich der Null nähert, wenn n unendlich wird, wobei bekanntlich $|x|$ und $|1-x|$ beide kleiner als 1 sind.“ Lp.

N. Nielsen. Recherches sur le développement d'une fonction analytique en série de fonctions hypergéometriques. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **30**, 121-171.

Die sehr umfangreiche Arbeit geht von Reihenentwicklungen aus, die zuerst von C. Neumann gegeben worden sind: Bedeutet $P_n(x)$ die n-te Kugelfunktion, so ist eine analytische Funktion, die im Innern einer Ellipse mit den Brennpunkten $+1, -1$ regulär ist, dort in eine Reihe der Form $f(x) = \Sigma A_n P_n(x)$ entwickelbar, mit von x unabhängigen Koeffizienten.

In seinem Traité de fonctions métasphériques hat Nielsen dieses Resultat schon erheblich verallgemeinert: Ist $f(x)$ in einer Ellipse mit den Brennpunkten $0, +1$ regulär, so läßt sich $f(x)$ dort in eine Reihe der Form $f(x) = \Sigma A_n F(\alpha+n, -n, \gamma, x)$ entwickeln, wo α und γ willkürliche Parameter sind. Und endlich: Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}, \beta_1, \ldots, \beta_p$ irgend $2p+1$ Parameter, und wird

$$F_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1+n-s)\ldots\Gamma(\alpha_{p+1}+n-s)}{s!\,\Gamma(\beta_1+n-s)\ldots\Gamma(p_{p-1}+n+s)\,\Gamma(\beta_p+2n+s)} x^{n+s}$$

gesetzt, und ist $f(x) = f(y+iz)$ innerhalb der Kurve

$$(y^2+z^2)^2 + \frac{y^2+z^2}{r(r+1)} y - \frac{y^2}{r(r+1)} - \frac{(2r+1)^2 z^2}{4r^2(r+1)^2} = 0 \qquad (r>0)$$

regulär, so ist $f(x)$ dort in eine Reihe der Form

$$f(x) = \Sigma A_n F_n(x)$$

entwickelbar. — Es handelt sich dann weiter um Entwicklungen regulärer Funktionen in Reihen von den genannten und von noch komplizierteren Formen. Zahlreiche durchgeführte Beispiele liefern zum Teil interessante Nebenresultate. K. K.

A. Errera. Zahlentheoretische Lösung einer funktionentheoretischen Frage. Palermo Rend. **35**, 107-144.

Die Problemstellung stammt von Landau (vgl. F. d. M. **42**, 462, 1911), der die Frage nach allen (nicht trivialen) Fällen, in denen die hypergeometri-

sche Reihe eine algebraische Funktion $f(x)$ ihres vierten Argumentes darstellt, auf ein rein zahlentheoretisches Problem zurückgeführt hatte.

Sind die Zahlen α, β, γ rational, aber $\alpha, \beta, \alpha-\gamma, \beta-\gamma$ nicht ganz, so fand Landau (1904) ein einfaches notwendiges Kriterium dafür, daß $f(x)$ algebraisch ist: setzt man $\alpha = \frac{a}{m}, \beta = \frac{b}{m}, \gamma = \frac{c}{m}$ mit $(a, b, c, m) = 1$, und sind a_1, b_1, c_1 die kleinsten positiven Reste von a, b, c mod. m, so muß c_1 zwischen a_1 und b_1 liegen.

Fast gleichzeitig fanden dann Stridsberg und Landau (1911/12): Es ist auch notwendig, daß für jedes zu m teilerfremde ϱ der kleinste positive Rest von ϱc zwischen denen von ϱa und ϱb liegt. — Landau hatte nun die Frage nach allen Systemen ganzer Zahlen a, b, c, m aufgeworfen, die die ebengenannte „ϱ-Bedingung" erfüllen. Falls sich zeigen ließe, daß es außer den aus den Schwarzschen Untersuchungen über den Gegenstand sich ergebenden keine weiteren gäbe, so hieße dies: Das Erfülltsein der ϱ-Bedingung ist auch hinreichend dafür, daß $f(x)$ algebraisch ist.

Die vorliegende Arbeit zeigt, daß dem in der Tat so ist. K. K.

N. E. Nörlund. Sur une classe de fonctions hypergéométriques. Danske Vidensk. Selsk. Forh. 1913, 135-153.

Reihen von der Form

$$1 + \frac{\alpha_0 \cdot \alpha_1 \ldots \alpha_n}{1 \cdot \beta_1 \ldots \beta_n} z + \frac{\alpha_0 (\alpha_0+1)\, \alpha_1 (\alpha_1+1) \ldots \alpha_n (\alpha_n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \beta_1 (\beta_1+1) \ldots \beta_n (\beta_n+1)} z^2 + \cdots,$$

als Funktionen der α, β aufgefaßt, genügen gewissen linearen Differenzengleichungen zweiter Ordnung. Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich mit besonderen Funktionen dieser Art, die von vornherein durch die Eigenschaften ihrer singulären Punkte definiert werden. Die von dem Verf. in Betracht gezogenen Funktionen genügen der Differenzengleichung oder der leicht als Differenzengleichung zu schreibenden Funktionalgleichung:

$$(x+2-\gamma)(x+2-\gamma')\, U(x+2) - (2x^2 + Ax + B)\, U(x+1) + (x-\alpha)(x-\alpha')\, U(x) = 0,$$

wo $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ Konstanten sind und

$$A = 4 - \alpha - \alpha' - \gamma - \gamma', B = \alpha\alpha' - \beta\beta' + (\gamma-2)(\gamma'-2),$$
$$\beta + \beta' + \gamma + \gamma' = \alpha + \alpha' + 3.$$

Es werden hierauf Reihenentwicklungen für diese Funktionen $U(x)$ und ihre Darstellungen durch bestimmte Integrale gefunden. In besonderen Grenzfällen gehen diese Integrale in die hypergeometrischen Integrale über:

$$\int (t-a)^{\alpha-1} (t-b)^{\beta-1} (t-z)^{\gamma-1}\, dt.$$

A. K.

Weitere Literatur.

G. N. BAUER and H. L. SLOBIN. Some transcendental curves and numbers. Amer. M. S. Bull. (2) **19**, 451.

H. BIERI. Über die unvollständige Gammafunktion. Diss. Bern. 45 S. 8° (1912).

G. D. BIRKHOFF. Note on the gamma functions. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 508.

V. BLAHA. Transzendente Zahlen, insbesondere e und π. Progr. Wien. 80 S. 8°.

F. E. EDWARDES. On the expansion of $(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots)^{-n}$ in positive integral powers of z, when n is a positive integer. Edinb. M. S. Proc. **31**, 2-8.

C. E. VAN ORSTRAND. Tables of the exponential functions e^x, e^{-x} for $x = 0{,}0$ to $x = 32{,}0$ to either 20 decimals or 20 significant figures. Journ. of the Washington Ac. of Sc. **3**.

L. THEISINGER. Bestimmte Integrale. Monatsh. f. Math. u. Phys. **24**, 328-346.

L. THEISINGER. Einige Reihenentwicklungen. Monatsh. f. Math. u. Phys. **24**, 363-368.

Referate über die beiden letztgenannten Arbeiten in Abschnitt VII, Kap. 2D.

B. Elliptische Funktionen.

R. FRICKE. II B 3. Elliptische Funktionen. Mit Benutzung von Vorarbeiten und Ausarbeitungen der Herren J. Harkness in Montreal, Canada, und W. Wirtinger in Wien. Enzyklop. d. math. Wiss. II 2, 177-348.

Inhaltsübersicht. I. Ältere Theorie der elliptischen Integrale. 1. Definition und erstes Auftreten der elliptischen Integrale. 2. Eulers Entdeckung der Additionstheoreme. 3. Beziehungen zwischen Euler und Lagrange. 4. A. M. Legendres Bedeutung für die Theorie der elliptischen Funktionen. 5. Legendres Normalintegrale. 6. Legendres Gestalt der Additionstheoreme. 7. Die Landensche Transformation und die numerische Berechnung der Integrale bei Legendre. 8. Die vollständigen Integrale und die Legendresche Relation. Differentialgleichungen und Reihen. 9. Die Vertauschung von Parameter und Argument bei Legendre. 10. Reduktion höherer Integrale auf elliptische und Transformation dritter Ordnung.

II. Die elliptischen Funktionen bei Abel, Jacobi und Gauß. 11. Die Umkehrung des Integrals erster Gattung und die doppelte Periodizität bei Abel. 12. Die Multiplikation und die allgemeine Teilung der elliptischen Funktionen bei Abel. 13. Die spezielle Teilung der elliptischen Funktionen bei Abel. 14. Abels allgemeine Formeln für die Multiplikation der elliptischen Funktionen. 15. Unendliche Doppelreihen und Doppelprodukte für die elliptischen Funktionen. 16. Abels einfach unendliche Reihen und Produkte für die elliptischen Funktionen. 17. Abels Transformation der elliptischen

Funktionen. 18. Abels Entdeckung der komplexen Multiplikation. 19. Die weiteren Untersuchungen Abels. Das allgemeine Transformationsproblem. 20. Jacobis erste Arbeiten. 21. Die einführenden Abschnitte der „Fundamenta nova". 22. Jacobis Behandlung der Transformationstheorie auf Grund der Umkehrfunktion. 23. Die supplementaren Transformationen und die Multiplikation. 24. Die arithmetischen Relationen zwischen K und K' sowie zwischen Λ und Λ'. Die Differentialgleichung der Modulargleichung. 25. Jacobis Darstellung der elliptischen Funktionen als Quotienten einfach unendlicher Produkte. 26. Die Integrale zweiter und dritter Ordnung bei Jacobi. 27. Jacobis Thetafunktionen. 28. Die Integrale zweiter und dritter Gattung, ausgedrückt durch die Thetafunktion. 29. Die elliptischen Funktionen selbst ausgedrückt durch die Funktionen Θ, H. 30. Die fundamentalen Eigenschaften der Funktionen $\Theta(u)$ und $H(u)$. 31. Die Reihenentwicklungen von $\Theta(u)$ und $H(u)$. 32. Die Theorie der elliptischen Funktionen, aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet. 33. Der Zusammenhang von q und k^2. 34. Gauß' Entwicklungen über das arithmetisch-geometrische Mittel. 35. Gauß' Entwicklungen über die lemniskatische Funktion. 36. Die allgemeinen elliptischen Funktionen bei Gauß. 37. Multiplikation, Division und Transformation der elliptischen Funktionen bei Gauß.

III. Die elliptischen Funktionen in der Zeit zwischen Abel und Riemann. 38. Das Periodenparallelogramm und die eindeutigen doppeltperiodischen Funktionen. 39. Fortbildung der algebraischen Grundlage unter Cauchys Einfluß. 40. Hermites erste Arbeiten über elliptische Funktionen. 41. Hermites Normalform des elliptischen Integrals erster Gattung. 42. Spätere Arbeiten Hermites über doppeltperiodische Funktionen. 43. Hermites Arbeiten über die Transformationstheorie. 44. Arbeiten Jacobis und seiner Schüler. 45. Untersuchungen von Eisenstein.

IV. Grundlagen der Theorie der elliptischen Funktionen nach neueren Anschauungen. 46. Zweiblättrige Riemannsche Flächen mit vier Verzweigungspunkten; Verzweigungsform. 47. Normalgestalten der Verzweigungsform. 48. Die algebraischen Funktionen und Integrale der Fläche F_2. 49. Gestalten der Normalintegrale. 50. Abbildung der Fläche F_2 durch das Integral erster Gattung. 51. Die Funktionen der Fläche F_2, in Abhängigkeit von u betrachtet. 52. Analytische Darstellungen für $\wp(u)$, $\wp'(u)$ und $\zeta(u)$. 53. Allgemeinste Zerschneidung der Fläche F_2 und lineare Transformation der Perioden. 54. Independente Erklärung doppeltperiodischer Funktionen. Gruppentheoretische Auffassung. 55. Die Weierstraßsche Funktion $\sigma(u)$. 56. Darstellung der doppeltperiodischen Funktionen durch $\sigma(u)$, $\zeta(u)$ usw. 57. Darstellung der Integrale dritter Gattung durch die σ-Funktion. 58. Die elliptischen Funktionen, betrachtet als Funktionen von drei Argumenten. 59. Die Differentialgleichungen der Perioden. 60. Kleins Prinzip der Stufenteilung. 61. Die Wurzelfunktionen $\sqrt{\wp(u) - e_k}$ und die drei Weierstraßschen Funktionen $\sigma_k(u)$. 62. Produktdarstellung für die Funktionen $\sigma_k(u)$ und für die Diskriminante Δ. 63. Rückgang auf die Jacobischen Bezeichnungen. 64. Lineare Transformation der Jacobischen Funktionen. 65. Gegenüberstellung aller elliptischen Gebilde und aller algebraischen Gebilde des Geschlechtes 1. Spezialfälle und Ausartungen. 66. Numerische Berechnungen.

V. Addition, Multiplikation, Division und allgemeine Transformation der elliptischen Funktionen. 67. Die Additionstheoreme. 68. Die Multiplikations-

theoreme. 69. Die Divisionstheoreme. 70. Die speziellen Teilungsgleichungen. 71. Die Transformationstheorie der doppeltperiodischen Funktionen. 72. Transformation n-ten Grades der Thetafunktionen. Die Thetafunktionen n-ter Ordnung. 73. Die Modular- und Multiplikatorgleichungen.

VI. Anwendungen der elliptischen Funktionen. 74. Anwendungen auf die Theorie der Kurven. 75. Anwendungen auf die Zahlentheorie. 76. Konforme Abbildungen, durch elliptische Funktionen vermittelt. 77. Poncelet sche Polygone. 78. Das sphärische und das einfache Pendel. 79. Dynamik starrer Körper. Kreiselbewegung. 80. Die Lamé sche Gleichung. 81. Auftreten elliptischer Integrale auf anderen Gebieten. 82. Sonstige Anwendungen der elliptischen Funktionen. Lp.

M. M. U. Wilkinson. Elliptic and allied functions: suggestions for reform in notation and didactical method. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 407-414.

„Zweck dieses Aufsatzes ist, gewisse Reformen in der Bezeichnung und der didaktischen Unterweisung bei der elementaren Behandlung der elliptischen und der mit ihnen zusammenhängenden Funktionen zu befürworten. ... Ich mache drei Vorschläge: Der erste ist, die Bezeichnung sn, cn, dn soll durch eine Bezeichnung ersetzt werden, die sich auf die Weierstraß sche Bezeichnung von $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ stützt. Die zweite ist, der Anfänger soll die Sigmafunktion etwas anders vorgetragen bekommen, als dies hergebracht ist. Der dritte ist, dem Falle $k^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ soll mehr Aufmerksamkeit geschenkt werden, als gewöhnlich geschieht." Die Begründung und die neu eingeführten Bezeichnungen $\operatorname{bs} u = \sigma_1 u/\sigma u$, $\operatorname{cs} u = \sigma_2 u/\sigma u$, $\operatorname{ds} u = \sigma_3 u/\sigma u$ in ihrer Verwendung können hier nicht wiedergegeben werden. Lp.

T. Hayashi. A generalization of Liouville's and Briot-Bouquet's theorem on doubly periodic functions. Tôhoku Sc. Rep. **2**, 63-67.

An das Liouville sche Theorem, daß jede doppeltperiodische Funktion rational durch eine doppeltperiodische Funktion zweiter Ordnung u mit denselben Perioden und ihre Derivierte u' dargestellt werden kann, schließt Verf. die beiden folgenden Sätze an:

1. Jede doppeltperiodische Funktion ist rational ausdrückbar durch irgendeine doppeltperiodische Funktion u zweiter Ordnung und irgendeine andere doppeltperiodische Funktion beliebiger Ordnung v, wenn die drei Funktionen dieselben Perioden besitzen.

2. Sind v und v_1 irgend zwei doppeltperiodische Funktionen mit denselben Perioden, so existieren zwei rationale Funktionen irgendeiner doppeltperiodischen Funktion zweiter Ordnung u so, daß $R(u)v + R_1(u)v_1 = 1$. An das Briot-Bouquet sche Theorem, daß jede doppeltperiodische Funktion v rational durch irgendeine andere doppeltperiodische Funktion beliebiger Ordnung w mit denselben Perioden und ihre Derivierte dargestellt werden kann, schließt Verf. den Satz an:

3. Jede doppeltperiodische Funktion v ist rational darstellbar durch irgend zwei andere doppeltperiodische Funktionen w und W, wenn die drei Funktionen dieselben Perioden besitzen.

A. K.

A. W. Velten. Über die Funktionen, die aus der Jacobischen Ω-Funktion entspringen. Deutsche Math.-Ver. **22**, 215-220.

Indem der Verf. Untersuchungen fortsetzt, über die F. d. M. **41**, 511, 1910 berichtet worden ist, wird er dazu geführt, den „vier reduzierten Jacobischen Funktionen" vier Jacobische Ω-Funktionen an die Seite zu stellen; dabei ist im besonderen die Funktion $\Omega(u)$ nach Jacobi definiert durch die Gleichung

$$\ln \Omega(u) = \int_0^u E(u)\, du.$$

Jede Ω-Funktion ist das Produkt einer reduzierten Jacobischen Funktion und einer Exponentialgröße. Ziel der Abhandlung ist es, die Hülfsfunktionen, die bei der Behandlung der elliptischen Funktionen auftreten, in scharf getrennte uruppen zu ordnen und die Beziehungen zwischen den Gruppen zu klären. dls ein Hauptergebnis wird der Satz bezeichnet, daß die in der vorliegenden Abhandlung eingeführten Ω-Funktionen für die Darstellung der elliptischen Funktionen nicht in Betracht kommen.

St.

K. Abramowicz. O przekształceniu funkcyj Θ Jacobi'ego. (Die Transformation der Jacobischen Θ-Funktionen.) Wiad. matem. **16**, 207-209 (1912).

Ableitung der altbekannten Formel für die Transformation von der Ordnung n bei den Jacobischen Thetafunktionen m-ter Ordnung mit einem Argument.

A. R.

T. J. I'A. Bromwich. Series for the complete elliptic integrals K, E, K', E' and certain other elliptic integrals. Quart. J. **44**, 363-380.

Reihenentwicklungen der Integrale

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x \sin^2\varphi}},\ E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x \sin^2\varphi}\, d\varphi$$

und ihrer ersten Ableitungen nach Potenzen von $x/(x-1)$; ferner Entwicklungen der Integrale

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{p + \cos^2\varphi}},\ Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{p + \cos^2\varphi}\, d\varphi,\ R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{p + \cos^2\varphi}}$$

in Reihen von der Form:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \left\{\log \frac{4}{\sqrt{p}} - b_n\right\} p^n.$$

Letztere Entwicklungen sind in Untersuchungen über die gegenseitigen und Selbstinduktionen von Ringen nützlich. A. K.

M. Falk. Über eine symmetrische Darstellung einiger in der Theorie der elliptischen Funktionen vorkommenden Wurzelgrößen. Upsala Nova Acta (4) **3**, Nr. 5, 38 S.

In der Weierstraßschen Theorie der elliptischen Funktionen werden die Größen e_1, e_2, e_3 durch die Gleichungen $e_1 = \wp(\omega_1), e_2 = \wp(\omega_2), e_3 = \wp(\omega_3)$ erklärt; dabei ist $\omega_2 = \omega_1 + \omega_3$. Die Quadratwurzeln aus den sechs Differenzen $e_2 - e_3, e_3 - e_1, e_1 - e_2, e_3 - e_2, e_1 - e_3, e_2 - e_1$ werden dann eindeutige Funktionen von $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Die erhaltenen Formeln haben den Mangel, daß sie nicht symmetrisch sind, das heißt, daß die sechs Gleichungen nicht bei jeder Vertauschung der Indexe ineinander übergehen. Um symmetrische Beziehungen zu gewinnen, wodurch die Anzahl der Formeln auf ein Drittel oder ein Viertel reduziert wird, haben Molk und Tannery ω_2 durch $-\omega_2$ ersetzt, sodaß sich die Gleichung $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ ergibt, und von dieser Annahme geht auch der Verf. aus. Außer einer vollständigen Darstellung der Quadratwurzeln jener Differenzen gibt er auch eine Darstellung der vierten Wurzeln; diese sind so bestimmt, daß ihre Quadrate den Werten der entsprechenden Quadratwurzeln gleich sind und schließlich eindeutige Funktionen der Größen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ werden, sobald man eine von ihnen eindeutig fixiert hat. Aus den so gewonnenen Ergebnissen wird eine in einfachen Formeln ausgedrückte Lösung der Aufgabe hergeleitet, von einem primitiven Periodenpaare $(2\omega_1, 2\omega_3)$ zu irgend einem äquivalenten Periodenpaare $(2\varpi_1, 2\varpi_3)$ überzugehen; sie ist unter anderem aus dem Grunde von Interesse, daß sie die Herleitung der Grundformeln der linearen Transformation der Thetafunktionen erleichtert. St.

E. Haentzschel. Euler und die Weierstraßsche Theorie der elliptischen Funktionen. Deutsche Math.-Ver. **22**, 278-284.

Euler hat in der Anleitung zur Algebra (1770) die diophantische Gleichung untersucht: $v^2 = 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)$, in der e_1, e_2, e_3 rationale Zahlen bedeuten. Die Aufgabe, rationale Werte von v und s zu ermitteln, die dieser Gleichung genügen, läßt sich auch so aussprechen, daß rationale Werte der Funktion $s = \wp(u)$ gefunden werden sollen, für die gleichzeitig $v = \wp'(u)$ rational ist. Wenn ein solches Wertepaar (s, v) bekannt ist, so hat Euler ein Verfahren angegeben, daraus neue Wertepaare (s', v') herzuleiten, es besteht in nichts anderem, als daß er $s' = \wp(2u)$ und $v' = \wp'(2u)$ bildet. St.

A. Baruch. Über die Darstellung der logarithmischen Ableitungen der elliptischen Thetafunktionen. Batt. G. **51** [(4) **3**], 92-98.

Auf Anregung von E. Pascal hatte Bertolani Darstellungen der logarithmischen Ableitungen vierter und fünfter Ordnung der elliptischen Thetafunktionen entwickelt (F. d. M. **26**, 501, 1895). Der Verf. zeigt, daß diese Darstellungen auf Ableitungen beliebiger Ordnung verallgemeinert werden können. Es ist zum Beispiel:

$$\frac{d^{2n}\ln\vartheta(x)}{dx^{2n}} = A_0^{(2n)} + A_1^{(2n)}\frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} + A_2^{(2n)}\frac{\vartheta_1^4(x)}{\vartheta^4(x)} + \cdots + A_n^{(2n)}\frac{\vartheta_1^{2n}(x)}{\vartheta^{2n}(x)};$$

die Koeffizienten $A_p^{(2n)}$ sind Konstanten, die allein von n und p abhängen. Sie ergeben sich zunächst aus Rekursionsformeln und werden daraus vom Verf. bis zu $n=6$ berechnet; für die drei letzten Koeffizienten gelingt es, das unmittelbare Bildungsgesetz aufzustellen. St.

A. Baruch. Lösung zu 167 (E. Jahnke). Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 179-181.

Die neun Größen a_{mn} bilden in der folgenden Darstellung, wo ϑu, $\vartheta_2 u$, $\vartheta_3 u$ die geraden elliptischen Thetas, u_1, u_2 beliebige Argumente bedeuten, ein Orthogonalsystem:

$$\begin{aligned}
A(a_{11}+i\,a_{21}) &= \vartheta_3^2u_1+\vartheta^2u_1, & A(a_{11}-i\,a_{21}) &= \vartheta_3^3u_2+\vartheta^2u_2\\
A(a_{12}+i\,a_{22}) &= -2i\,\vartheta u_1\,\vartheta_3u_1, & A(a_{12}-i\,a_{22}) &= -2i\,\vartheta u_2\,\vartheta_3u_2\\
A(a_{13}+i\,a_{23}) &= -i(\vartheta_3^2u_1-\vartheta^2u_1), & A(a_{13}-i\,a_{23}) &= -i(\vartheta_3^2u_2-\vartheta^2u_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A\,a_{31} &= -i(\vartheta\,u_1\;\vartheta\,u_2+\vartheta_3u_1\;\vartheta_3u_2)\\
A\,a_{32} &= -\;(\vartheta\,u_1\;\vartheta_3u_2+\vartheta_3u_1\;\vartheta\,u_2)\\
A\,a_{33} &= -\;(\vartheta_3u_1\;\vartheta_3u_2-\vartheta\,u_1\;\vartheta\,u_2),
\end{aligned}$$

wo

$$A=\vartheta u_1\,\vartheta_3u_2-\vartheta_3u_1\,\vartheta u_2.$$

Die zugehörigen 6 Differentialgrößen haben die Form:

$$\begin{aligned}
A\,p_1 &= -\;(\vartheta_3'u_1\,\vartheta_3u_2+\vartheta'u_1\,\vartheta u_2)\,du_1+\;(\vartheta_3u_1\,\vartheta_3'u_2+\vartheta\,u_1\,\vartheta'u_2)\,du_2\\
A\,p_2 &= i(\vartheta'u_1\,\vartheta_3u_2+\vartheta_3'u_1\,\vartheta u_2)\,du_1-i(\vartheta\,u_1\,\vartheta_3'u_2+\vartheta_3u_1\,\vartheta'u_2)\,du_2\\
A\,p_3 &= i(\vartheta_3'u_1\,\vartheta_3u_2-\vartheta'u_1\,\vartheta u_2)\,du_1-i(\vartheta_3u_1\,\vartheta_3'u_2-\vartheta\,u_1\,\vartheta'u_2)\,du_2\\
A\,v_1 &= (\vartheta'u_1\,\vartheta_3u_1-\vartheta_3'u_1\,\vartheta u_1)\,du_1-\;(\vartheta\,u_2\,\vartheta_3'u_2-\vartheta_3u_2\,\vartheta'u_2)\,du_2\\
A\,v_2 &= -i(\vartheta'u_1\,\vartheta_3u_1-\vartheta_3'u_1\,\vartheta u_1)\,du_1-i(\vartheta\,u_2\,\vartheta_3'u_2-\vartheta_3u_2\,\vartheta'u_2)\,du_2\\
A\,v_3 &= -i(\vartheta'u_1\,\vartheta_3u_2-\vartheta_3'u_1\,\vartheta u_2)\,du_1+i(\vartheta\,u_1\,\vartheta_3'u_2-\vartheta_3u_1\,\vartheta'u_2)\,du_2.
\end{aligned}$$

Ba.

L. de Dávid. Sur une application des fonctions modulaires à la théorie de la moyenne arithmético-géométrique. Ung. Ber. **27**, 164-171.

L. v. Dávid. Zur Gaußschen Theorie der Modulfunktion. Palermo Rend. **35**, 82-89.

1. Die algebraische Erklärung des arithmetisch-geometrischen Mittels von zwei beliebigen komplexen Zahlen a_1 und a_2 führt zu einer unendlichen Menge M

von Werten $M(a_1, a_2)$ des Mittels, weil das Vorzeichen der Quadratwurzeln willkürlich gewählt werden kann; diese Menge hat die Mächtigkeit des Kontinuums.

2. Die transzendente Erklärung des arithmetisch-geometrischen Mittels erfordert zunächst, daß die Bedingungen $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_1 \pm a_2 \neq 0$ erfüllt sind. Als Werte des Mittels $\mu(a_1, a_2)$ ergeben sich dann (vgl. F. d. M. **40**, 484, 1909) alle Zahlen μ, für welche die Gleichungen $a_1 = \mu \vartheta_{00}^2(\omega), a_2 = \mu \vartheta_{01}^2(\omega)$ erfüllt sind; die Menge m dieser Zahlen ist abzählbar.

3. Welche Beziehung besteht zwischen den Mengen M und m? Es seien M' und m' die abgeleiteten Mengen. Dann gilt der Satz: Die Menge m ist eine Teilmenge der Menge M; die Menge M ist enthalten in der Menge $m + m'$.

4. Im Anschluß an diese in der ersten Abhandlung entwickelten Sätze werden in der zweiten Abhandlung zwei Aufzeichnungen über die elliptischen Modulfunktionen aus dem Gaußschen Nachlaß (Werke 3, 378, 477) erläutert und weitergeführt. St.

L. Schlesinger. Über eine Aufgabe von Hermite aus der Theorie der Modulfunktionen. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 306-311.

In dem Briefwechsel zwischen Hermite und Stieltjes **2**, 148 kommt Hermite bei der Betrachtung der Transformation zweiter Ordnung $l = 2\sqrt{k}/(1+k)$, indem er $\omega = i\,K'/K$ und $k = \varphi^4(\omega)$ setzt, auf die Funktionalgleichung $\varphi^4(\tfrac{1}{2}\omega) = 2\varphi^2(\omega)/(1+\varphi^4(\omega))$. Statt ihrer setzt der Verf. an

$$(2) \qquad f(\tfrac{1}{2}t) = \frac{2\sqrt{f(t)}}{1+f(t)}$$

und leitet aus ihr für die inverse Funktion $F(x) = t$ von $x = f(t)$ die Funktionalgleichung

$$(5) \qquad 2\,F\left(\frac{2\xi}{1+\xi^2}\right) = F(\xi^2)$$

ab, die er für $p = 1$ die Gaußsche Funktionalgleichung nennt wegen ihrer Beziehung auf das arithmetisch-geometrische Mittel. Die Untersuchung dieser Gleichung liefert neben einigen besonderen Ergebnissen den Satz:

III. „Eine monogene Lösung $x = f(t)$ der Hermiteschen Funktionalgleichung (2), deren inverse Funktion in $x = 1$ singulär, aber, multipliziert mit $\log \dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}}$, für $x = 1$ bestimmt ist, geht aus der Modulfunktion $\varphi(\omega)$ durch die Substitution $Ct = \omega$ hervor, wo C eine von 0 verschiedene Konstante bedeutet.“ Lp.

C. L. Bacon. The cartesian oval and the elliptic functions $\wp$ and σ. American Journ. **35**, 261-280.

In der Arbeit werden die Haupteigenschaften des Cartesischen Ovals aus den Weierstraßschen elliptischen Funktionen $\wp$ und σ abgeleitet. Dabei ergibt sich auch eine geometrische Deutung der grundlegenden Formeln dieser Funktionen. Vor ähnlichen Untersuchungen Greenhills (Proc. London Math. Soc. **17**, 1886) zeichnen sich die vorliegenden durch größere Sym-

metrie der Beziehungen aus, die durch Einführung der drei Brennpunkte des Cartesischen Ovals erreicht wird. Ba.

A. Cianchetti. Applicazione delle funzioni ellittiche alla risoluzione del problema inverso di quello del trasporto delle coordinate geografiche. Batt. G. **51** [(4) **3**], 197-220.

Es wird mit Hülfe elliptischer Funktionen folgende Aufgabe gelöst: Gegeben sind die geographischen Breiten zweier Orte und ihr Längenunterschied: gesucht wird die Länge der sie verbindenden Linie und deren Azimute in den Endpunkten. Die erhaltenen Formeln werden auf ein Zahlenbeispiel angewendet. Ba.

Weitere Literatur.

W. Boomstra. De orthogonale en gelijkzijdige kwadratische oppervlakken in verband met het deelingsprobleem der elliptische functies. Diss. Amsterdam: Olivier. 238 S. 8°.

H. Heinis. Über eine Gleichung fünften Grades der komplexen Multiplikation der elliptischen Modulfunktionen. Diss. Basel 78 S. 8° (1911).

R. Nitschke. Über einige mit den elliptischen Funktionen verwandte Transzendenten. Diss. Leipzig. 58 S. 8°.

K. Smets. Anwendung der elliptischen Funktionen auf die Theorie der Wellengeschwindigkeitsfläche. Diss. Dresden. 73 S. 8°.

E. B. van Vleck and F. T. H'Doubler. On certain functional equations. Amer. M. S. Bull. (2) **20**, 65-66.

The Tabulation of Bessel and other functions. — Report of the committee. British Association. 48 S.

Referat in Abschnitt VII, Kap. 2 D.

C. Hyperelliptische, Abelsche und verwandte Funktionen.

M. Tikhomandritzky. Sur l'enseignement de la théorie des fonctions abéliennes. Ens. math. **15**, 384-389.

Die 5 verschiedenen Methoden in der Theorie der Abelschen Funktionen, welche durch die Namen 1. Göpel und Rosenhain, 2. Riemann, 3. Clebsch und Gordan, 4. Weierstraß, 5. Dedekind und Weber bezeichnet sind, werden in ihren Grundzügen geschildert, und es wird auf die Mängel hingewiesen, welche ihnen nach der Ansicht des Verf. anhaften. Sodann wird eine kurze Inhaltsangabe jener „wahren" Theorie der Abelschen Funktionen angegeben, welche der Verf. in seinem Werke: Éléments de la théorie des intégrales abéliennes, Petersburg 1911 (F. d. M. **42**, 469, 1911), veröffentlicht hat. Kr.

G. Scorza. Sul teorema di esistenza delle funzioni abeliane. Palermo Rend. **36**, 386-395.

Sind $\omega_{1\alpha}, \ldots, \omega_{p\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, 2p)$ die $2p$ Periodensysteme einer meromorphen $2p$-fach periodischen Funktion von p Veränderlichen, so bestehen bekanntlich zwischen diesen $2p^2$ Größen $\omega_{\mu\alpha}$ stets $\frac{1}{2}(p-1)p$ Beziehungen von der Form

$$\sum_{\alpha=1}^{2p} \sum_{\beta=1}^{2p} c_{\alpha\beta}\, \omega_{\mu\alpha}\, \omega_{\nu\beta} = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p; \mu < \nu),$$

in denen die $4p^2$ Größen $c_{\alpha\beta}$ ganze Zahlen bezeichnen, so beschaffen, daß $c_{\alpha\alpha} = 0$, $c_{\alpha\beta} + c_{\beta\alpha} = 0$ und die Determinante $\Sigma \pm c_{11}\, c_{22} \ldots c_{2p,2p}$ von Null verschieden ist. Sind dann ferner $\omega_\alpha = \eta_\alpha + i\zeta_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, 2p)$ die korrespondierenden Änderungen irgend einer linearen Verbindung der Variablen, so ist stets $\sum_{\alpha=1}^{2p} \sum_{\beta=1}^{2p} c_{\alpha\beta}\, \eta_\alpha\, \zeta_\beta > 0$ (oder stets < 0).

In derselben Weise, wie man die Bedingung, daß eine gegebene quadratische Form positiv (oder negativ) sei, durch p für ihre Koeffizienten bestehende Ungleichungen ausdrücken kann (vgl. des Ref. Lehrbuch der Thetafunktionen S. 15), so kann man auch die vorher an zweiter Stelle genannte Bedingung durch Ungleichungen ersetzen, in denen die Koeffizienten $c_{\alpha\beta}$ sowie die reellen und imaginären Teile der Perioden $\omega_{\mu\alpha}$ auftreten. Es ist die Aufgabe der vorliegenden Abhandlung, diese Ungleichungen aufzustellen. Kr.

E. Picard. Sur une classe de transcendantes généralisant les fonctions elliptiques et les fonctions abéliennes. C. R. **156**, 978-983.

In der vorliegenden Note handelt es sich um die vom Verf. schon früher (vgl. F. d. M. **25**, 713, 1893/94, und **31**, 427, 1900) untersuchten Systeme von Funktionen einer Veränderlichen z: $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$, welche periodisch sind mit der Periode $2\pi i$, und für welche bei Änderung um eine reelle Größe ω

$$\begin{aligned} f_1(z+\omega) &= R_1(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)),\\ f_2(z+\omega) &= R_2(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_n(z+\omega) &= R_n(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)) \end{aligned}$$

ist, wo $R_1, R_2, \ldots, R_n$ eine birationale Transformation bestimmen.

Am Schlusse bemerkt der Verf., daß es ihm nicht gelungen sei, diese Untersuchungen auf Funktionen mehrerer Veränderlichen auszudehnen, und setzt für den Fall $p = 2$ die Schwierigkeiten auseinander, die hier der Lösung entgegenstehen. Kr.

G. Cotty. Les fonctions abéliennes et la théorie des nombres. Toulouse Ann. (3) **3**, 209-374.

Mit T_n wird das Periodenschema

$$\begin{matrix} \frac{1}{n} & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{matrix}$$

einer vierfach periodischen Funktion von zwei Veränderlichen u, v bezeichnet; solchen Funktionen, die durch spezielle Thetafunktionen n-ter Ordnung rational darstellbar sind, kann man in bekannter Weise eine hyperelliptische Fläche s zuordnen. Entspricht dann einem zweiten Periodenschema T_N mit einer andern positiven ganzen Zahl N und anderen Größen G, H, G' die hyperelliptische Fläche S, so besteht das Transformationsproblem darin, die Bedingungen aufzusuchen, unter denen zwischen den Punkten der Flächen s und S eine algebraische Korrespondenz besteht derart, daß jedem Punkte u, v von s ein und nur ein Punkt U, V von S entspricht. Dieses Problem der Transformation vom Typus (n, N) wird von dem Verf. in dem 2. Kapitel des 1. Teiles seiner Abhandlung in derselben Weise behandelt, wie es Hermite für den speziellen Typus (1, 1) getan hat, und im 3. und 4. Kapitel werden sodann jene speziellen Funktionen und ihre Transformationen untersucht, bei denen die Größen g, h durch eine Gleichung von der Form $Ang + Bh + Cg' + Dn(h^2 - gg') + E = 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten $A, B, \ldots, E$ miteinander verknüpft sind, und welche in dem speziellen Falle $n = 1$ von Humbert als fonctions singulières eingeführt und eingehend untersucht worden sind.

Als neues Hülfsmittel begegnen wir beim Verf. der Liniengeometrie, welche er mit der Transformation der Abelschen Funktionen zweier Veränderlichen in folgender Weise in Beziehung setzt. Sind $w_0, v_0; w_1, v_1; w_2, v_2; w_3, v_3$ die vier Periodensysteme einer Abelschen Funktion, so fasse man die w und ebenso die v als homogene Punktkoordinaten auf; sind P_1 und P_2 die durch sie bestimmten Punkte, so sind die sechs Größen $p_{ik} = w_i v_k - w_k v_i$ die Plückerschen Linienkoordinaten der Verbindungslinie $P_1 P_2$, und die zwischen den w und v stets bestehende bilineare Relation sagt aus, daß $p_{03} + p_{12} = 0$ ist, daß also die Gerade $P_1 P_2$ einem Linienkomplexe ersten Grades angehört, der nun durch jede Periodentransformation in sich übergeht. In dem allgemeineren Falle des Verf. geht durch eine Transformation vom Typus (n, N) ein Linienkomplex $p_{03} + np_{12} = 0$ in einen Komplex $P_{03} + NP_{12} = 0$ über.

In dem Falle der singulären Funktionen tritt zu der Gleichung $p_{03} + np_{12} = 0$ noch eine zweite lineare Gleichung zwischen den p_{ik} hinzu und sagt aus, daß die Linie $P_1 P_2$ noch einem zweiten Linienkomplexe, also einer Linienkongruenz, angehört.

Nimmt man nun wieder die Transformationen vom speziellen Typus (1, 1) und setzt voraus, daß die zwischen den Perioden bestehende singuläre Relation durch die Transformation in sich übergehe, so sind diese Transformationen dadurch charakterisiert, daß sie die eben genannte Linienkongruenz in sich überführen, also insbesondere ihre beiden Direktrizen ungeändert lassen. Diese Eigenschaft benutzt der Verf. im zweiten Teile seiner Arbeit zur eingehenden Untersuchung der Gruppe dieser Transformationen, insbesondere im Falle, daß sie lineare sind. Er findet, daß dann die Gruppe dieser Transformationen holoedrisch isomorph ist mit der Modulargruppe des zu $\sqrt{D}$ gehörigen quadratischen Zahlkörpers, wo D oder $4D$ die Invariante der gegebenen singulären Relation ist, je nachdem diese ungerade oder gerade ist.

Die genannten Direktrizen spielen auch im dritten Teile der Abhandlung eine wichtige Rolle, in welchem der Verf. die Äquivalenz und die Reduktion der schon von Hermite eingeführten speziellen quadratischen Formen von vier Veränderlichen $f = \sum a_{ij} x_i x_j$ untersucht. Sie geben hier dem Verf. Anlaß, einer solchen Form f eine binäre Form $\varphi(x, y)$ zu adjungieren, derart, daß im Falle der Äquivalenz zweier Formen f auch ihre adjungierten Formen φ äqui-

valent sind und f definit ist dann und nur dann, wenn φ definit und negativ ist, wogegen bei indefinitem oder definitem, aber positivem φ stets f indefinit mit positiver oder negativer Invariante ist. Auch zu einer Reduktion einer Form f auf eine speziellere Ψ mit nur vier willkürlichen Koeffizienten führt die Betrachtung der genannten Direktrizen, und diesen Formen Ψ werden von dem Verf. bilineare Formen zweier konjugierten Variablenpaare in einem quadratischen Zahlkörper zugeordnet, deren Äquivalenz über die Äquivalenz von Ψ-Formen entscheidet. Kr.

E. Jahnke. Das Orthogonalsystem der Lorentz-Transformation. Palermo Rend. **35**, 90-94.

Die Lorentz-Transformation führt auf ein orthogonales Sechzehnersystem $g_{ij}(i, j = 1, 2, 3, 4)$, bei welchem die 9 Koeffizienten g ohne den Index 4 und g_{44} reell, die übrigen 6 rein imaginär sind. Ein Orthogonalsystem dieser Art wird durch die Euler-Cayleyschen Formeln geliefert, wenn man den darin vorkommenden zweimal 4 Parametern 4 Paare konjugiert komplexer Werte erteilt. Hiervon ausgehend, stellt der Verf. das Orthogonalsystem der allgemeinen (und der daraus durch Bevorzugung der z-Achsenrichtung entstehenden speziellen) Lorentz-Transformation auf.

Sodann wird noch angegeben, in welcher Weise die aufgestellten orthogonalen Sechzehnersysteme sich dazu benutzen lassen, um für die Thetafunktionen von zwei Veränderlichen neue Orthogonalsysteme aufzustellen. Kr.

P. Roth. Das erweiterte Umkehrproblem der Abelschen Integrale in der Geometrie der ebenen Kurven. Monatsh. f. Math. u. Phys. **24**, 87-141.

Als erweitertes Umkehrungsproblem bezeichnet man nach Clebsch und Gordan die Aufgabe, k Punkte $x_1, \ldots, x_k$ eines algebraischen Gebildes vom Geschlechte $p < k$ aus k Gleichungen zu bestimmen, von denen die ersten p Summen von je k Integralen erster Gattung, die letzten $k - p$ aber Summen von je k Integralen dritter (oder zweiter) Gattung enthalten, in denen jedesmal die x als obere Grenzpunkte auftreten.

Nimmt man an, daß die Grundkurve nur mit Doppelpunkten behaftet ist, und wählt die Integrale dritter Gattung so, daß jedes von ihnen in den beiden Zweigen eines Doppelpunktes logarithmisch unendlich wird, so treten für die x Teilscharen auf, welche durch Kurven ausgeschnitten werden können, die durch diese Doppelpunkte nicht hindurchgehen.

Geht einer der Doppelpunkte in eine Spitze über, so hat an Stelle des Integrals dritter Gattung ein in dieser Spitze ∞^1 werdendes Integral zweiter Gattung zu treten (§ 2).

An diese einfachste Aufgabe knüpft sich naturgemäß die weitere an, auf Kurven mit ganz beliebigen Singularitäten jene Scharen zu studieren, die durch nicht adjungierte Kurven ausgeschnitten werden, d. h. durch Kurven, die in einem s-fachen Punkte der Grundkurve selbst nur einen σ-fachen ($\sigma < s$) Punkt besitzen, sogenannte σ-Kurven.

Bezüglich dieser σ-Kurven untersucht der Verf. (in den §§ 3-5 für den Fall $\sigma = 0$, in den §§ 6-8 für den Fall $\sigma > 0$) zuerst die Bedingungen, denen die Werte einer algebraischen Funktion, die durch Quotienten von σ-Kurven dar-

stellbar ist, mit ihren Differentialquotienten in dem s-fachen Punkte der Grundkurve zu genügen haben, und gewinnt, indem er diese algebraischen Bedingungen in transzendente umsetzt, die entsprechenden verallgemeinerten Umkehrprobleme, von denen er dann endlich zeigt, daß sie im allgemeinen Falle eindeutig lösbar sind. § 9 behandelt sodann den sogenannten unbestimmten Fall des Umkehrproblems.

Am Schlusse der Abhandlung werden jene Kurven behandelt, welche in den beweglichen Punkten der Schar die Grundkurve von gegebener Ordnung berühren; dabei beschränkt sich aber der Verf. auf den Fall, daß die Grundkurve nur Doppelpunkte oder Spitzen erster Art besitze. Das allgemeinste Berührungsproblem ist dann das folgende:

Gegeben ist eine durch gewisse der Doppelpunkte und Spitzen nicht hindurchgehende, in den restlichen sich adjungiert verhaltende Kurve $\mathfrak{A}$, die durch eine bestimmte Gruppe von Punkten einfach hindurchgeht und sonst die Grundkurve überall von gegebener Ordnung berührt; dann ist nach der Zahl der Systeme und der in ihnen enthaltenen Gruppen von sich ebenso wie $\mathfrak{A}$ verhaltenden Kurven gefragt.

Kr.

A. B. Coble. An application of finite geometry to the characteristic theory of the odd and even theta functions. American M. S. Trans. **14**, 241-276.

$x_1, x_2, \ldots, x_{2p}$ seien die homogenen Punktkoordinaten eines Raumes von $2p-1$ Dimensionen S_{2p-1}. Beschränkt man dann die x auf die Werte 0 und 1, so erhält man (da das Wertesystem $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2p} = 0$ ausgeschlossen ist) im ganzen $2^{2p}-1$ Punkte, denen so zugleich die $2^{2p}-1$ eigentlichen, mod. 2 inkongruenten Periodencharakteristiken (Per. Char.) zugeordnet sind. Den ganzzahligen linearen Transformationen der Per. Char. entsprechen Kollineationen des Raumes S_{2p-1}, welche das Nullsystem $\sum_{\mu=1}^{p}(x_\mu x'_{p+\mu} - x_{p+\mu} x'_\mu) = 0$ ungeändert lassen. Bei dieser geometrischen Veranschaulichung der eigentlichen Per. Char. können nun alle Begriffe, welche in der Lehre von den Per. Char. auftreten, wie syzygetische und azygetische Per. Char., Fundamentalsysteme von Per. Char., Gruppen von Per. Char., und die auf sie bezüglichen Sätze geometrisch gedeutet werden.

Um das gleiche für die Thetacharakteristiken (Th. Char.) zu leisten, werden diesen mit Rücksicht auf jene Gleichungen, welche hier bei der ganzzahligen linearen Transformation die Elemente der transformierten Charakteristik bestimmen, die 2^{2p} Formen zweiten Grades $\sum_{\mu=1}^{p}(x_\mu x_{p+\mu} + \varepsilon_\mu x^2_\mu + \varepsilon_{p+\mu} x^2_{p+\mu})$, also, geometrisch gesprochen, 2^{2p} „Quadriken" im Raume S_{2p-1} zugeordnet.

Statt durch die Punkte des S_{2p-1} kann man die $2^{2p}-1$ eigentlichen Per. Char. auch durch die ebensovielen S_{2p-2} $\sum_{i=1}^{2p} u_i x_i = 0$ repräsentieren, in denen die u die Werte 0 und 1 haben. Die Betrachtung der $2^{2p}-1$ Quadrate dieser S_{2p-2} und der 2^{2p} den Th. Char. zugeordneten Formen zweiten Grades als Elemente in einem R_{2p} führt endlich zu jenen Begriffen und Sätzen, welche die Beziehungen zwischen den Per. Char. und den Th. Char. bestimmen.

Kr.

D. Kugelfunktionen und verwandte Funktionen.

F. Dingeldey. Über ein gewisses Integral und eine einfache Darstellung der Kugelfunktionen erster Art. Deutsche Math.-Ver. **22**, 257-266.

Der Verf. geht von der Frage aus, welche Beziehung zwischen den Koeffizienten a, b, c und dem (positiven und ganzzahligen) Exponenten m bestehen muß, damit das Integral

$$G_m = \int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{ax^2 + 2b\,x + c}}$$

rein algebraisch sei. Da G_m sich mittels der bekannten Formel

(1) $$G_m = (A_0\, x^{m-1} + A_1\, x^{m-2} + \cdots + A_{m-1}) \sqrt{ax^2 + 2bx + c} + A_m\, G_0$$

auf das Integral G_0 zurückführen läßt, so kommt die obige Frage auf die andere hinaus, wann in (1) A_m verschwindet. Nun liefert die Gleichung (1) durch Differentiation und Multiplikation mit $\sqrt{ax^2 + 2b\,x + c}$ die zur Bestimmung der Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots, A_m$ erforderlichen Gleichungen, und daraus ergibt sich $(-1)^m\, m!\, a^m\, A_m$ in Form einer Determinante m-ter Ordnung D_m, in der alle Elemente gleich Null sind mit Ausnahme der Hauptdiagonale und der zu dieser oben und unten parallelen Reihen. Bei der Berechnung von D_m mit Hülfe der Unterdeterminanten gelangt man dann zu einer Rekursionsformel zwischen D_m, D_{m-1} und D_{m-2}, und diese Rekursionsformel läßt sich auf die der Kugelfunktionen $P_n(x)$ zurückführen. So ergibt sich als Hauptresultat: Die Bedingung, daß das Integral G_m rein algebraisch ist, kann im Falle $ac \neq 0$, $b \neq 0$ als eine Gleichung für $b^2 : ac = z^2$ aufgefaßt werden, die für gerade m mit der Gleichung $P_m(z) = 0$ identisch ist, für ungerade m nach Absonderung des Faktors b mit $\frac{1}{z} P_m(z) = 0$. Somit kann G_m für $abc \neq 0$ nur dann rein algebraisch werden, wenn a und c gleiche Zeichen haben und $b^2 < ac$ ist; und es gibt $\frac{m}{2}$, resp. $\frac{m-1}{2}$ verschiedene Werte von $b^2 : ac$, die obiger Gleichung (1), darin $A_m = 0$ gesetzt, genügen.

Aus der Determinante für A_m folgt ferner, daß $m!\, P_m(z)$ gleich einer Determinante ist, deren Hauptdiagonale durch die Elemente $z, 3z, 5z, \ldots, (2m-1)z$ gebildet wird, während in der nächsten oberen und der nächsten unteren, zur Hauptdiagonale parallelen Reihe $1, 2, \ldots, m-1$ auftreten, alle übrigen Elemente aber gleich Null sind. Diese, wie es scheint, neue Darstellung der Kugelfunktionen in Determinantenform ist einfacher als die bisher bekannten analogen Darstellungen. Wn.

A. Freilich. O zastozowaniu teoryi równań liniowych różniczkowych klasy Fuchsa do wykazania istnienia funkcyi kulistej drugiego rodzaju jednej zmiennej. (Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse zum Existenzbeweis der Kugelfunktionen zweiter Gattung einer Variabeln.) Wiad. matem. **17**, 304-314.

Die Kugelfunktion zweiter Gattung n-ter Ordnung wird definiert als ein gewisse Eigenschaften besitzendes Integral der wohlbekannten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, der auch die Kugelfunktion erster Gattung n-ter Ordnung genügt. Es wird dann gezeigt, daß diese Funktion mitsamt der Kugelfunktion erster Gattung das kanonische Fundamentalsystem für $x = \infty$ dieser Differentialgleichung bilden. Die Arbeit enthält somit nichts Neues.

A. R.

J. B. Holt. On the irreducibility of Legendre's polynomials. (Second paper.) Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 126-132.

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (s. F. d. M. **43**, 547, 1912) untersucht der Verf. zunächst die Frage, wann die Kugelfunktion $P_n(x)$ einen rationalen Faktor von der Form $ax^2 + b$ besitzen kann, und findet, daß, wenn ein derartiger Faktor vorhanden ist, dieser nur $3x^2 - 1$ sein kann. Das ergibt sich dadurch, daß die Gleichung $P_n(x) = 0$ durch die Substitution $z = 4x^2 : (x^2 - 1)$ in eine Gleichung für z vom Grade $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ übergeht, die ihrerseits nur eine rationale Wurzel von der Form $z = -2s$ haben kann, wo s eine ganze Zahl ist, und weiter muß, wie eine besondere Betrachtung zeigt, $s = 1$ sein. Kann man nun zeigen, und das ist in manchen Fällen möglich, daß $P_n(x)$, falls es reduzibel ist, einen quadratischen Faktor haben muß, daß $P_n(x)$ aber nicht für $x^2 = \frac{1}{3}$ verschwindet, so ist $P_n(x)$ irreduzibel. Auf Grund derartiger Überlegungen fügt der Verf. seinen früheren Resultaten das folgende hinzu: $P_n(x)$ ist irreduzibel, wenn eine der Zahlen $n-3$, $n+4$, $\frac{1}{2}(n+4)$, $n-2$, $n+3$, $\frac{1}{2}(n+3)$ eine Primzahl ist. Ferner wird gezeigt, daß, wenn p, q zwei aufeinander folgende Primzahlen sind, deren Differenz < 10, $P_n(x)$ für $n = p, p+1, \ldots, q$ irreduzibel ist. Alles in allem findet sich, daß $P_n(x)$ sicher für $n < 200$ irreduzibel ist, nur daß die Frage für $n = 122, 185, 186$ unentschieden bleibt. Für $n < 1000$ läßt sich in mehr als 90% aller Fälle die Irreduzibilität von $P_n(x)$ feststellen.

Zum Schluß wird eine Verallgemeinerung des in der früheren Arbeit benutzten Hülfssatzes mitgeteilt.

Wn.

C. S. Jackson. A note on Legendre's coefficients. Messenger (2) **42**, 138*-140*.

Der Zweck dieser kleinen Note ist, die führenden Eigenschaften der Legendreschen Koeffizienten möglichst direkt im Hinblick auf ihren Nutzen für die Studierenden der Physik abzuleiten.

Lp.

A. E. Haas. Über ein Problem aus der Theorie der Kugelfunktionen. Monatsh. f. Math. u. Phys. **24**, 355-362.

Aus der bekannten, nach Kosinus der Vielfachen von ϑ fortschreitenden Reihe bei $P_N(\cos\vartheta)$ leitet der Verf. den Wert für die Summe

$$\sum_{m=1}^{m=n} P_N\left(\cos\frac{2m\pi}{n}\right)$$

ab, in der die Argumente durch Teilung des Kreisumfangs in n gleiche Teile sich ergeben. Für ungerade $N < n$ ist jene Summe $= 0$, während sie für gerade N $[N = 2\nu < n]$ den Wert:

$$\frac{n[(2\nu)!]^2}{16^\nu(\nu!)^4}$$

hat. Auch die Werte der Summe für $N = n$ und $N > n$ werden ermittelt; im letzteren Falle ergeben sich keine einfachen Resultate.

Die Resultate werden benutzt, um für das Potential von n gleichen Massen, die in den Ecken eines regulären n-Ecks verteilt sind, und für die Resultierende der von diesen Massen ausgeübten Kräfte angenäherte Werte zu finden unter der Annahme, daß der angezogene Punkt auf der Verlängerung des nach einer Ecke gezogenen Radius liegt. Wn.

F. Lukács. Sur la série de Laplace. C. R. **157**, 632-634.

Das von Haar (s. F. d. M. **42**, 485, 1911) gefundene Resultat, daß die Legendresche Reihe unter gewissen Voraussetzungen schon durch die Methode des ersten arithmetischen Mittels summierbar ist, ist von Gronwall (Math. Ann. **74**; vgl. S. 305 dieses Bandes) neuerdings auf die allgemeine Laplacesche, nach Kugelfunktionen zweier Veränderlichen fortschreitende Reihe ausgedehnt. Die Gronwallsche Ableitung wird hier in einem wesentlichen Punkte vereinfacht, und zwar stützt sich die Vereinfachung auf folgende Ungleichung:

Ist

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P_k(x),$$

so ist

$$\left|\frac{\frac{1}{2}U_n(x) - P_{n+1}(x)}{1-x}\right| < (n+1)^2 \qquad (-1 \leqq x \leqq +1).$$

Ohne Beweis wird noch der Satz mitgeteilt, daß die Laplacesche Reihe für Punkte, in denen die zu entwickelnde Funktion $F(\vartheta, \varphi)$ kontinuierlich ist, schon durch Bildung des arithmetischen Mittels von der Ordnung $\frac{1}{2} + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ summierbar ist. Wn.

P. Appell. Les polynomes $V_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux fonctions sphériques dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions. C. R. **156**, 1423-1425.

P. Appell. Les polynomes $U_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux fonctions sphériques dans l'hyperspace. C. R. **156**, 1582-1585.

P. Appell. Les polynomes $V_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux potentiels à q variables. Palermo Rend. **36**, 203-212.

Hermite hat [C. R. **60**, 1865; Werke **2**, 319] Funktionen $V_{m,n}$ zweier Variabeln untersucht, die man als Verallgemeinerungen der einfachen Kugelfunktionen auffassen kann. Es sind die Koeffizienten von $a^m b^n$ bei der Entwicklung des Ausdrucks $(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-1}$ nach steigenden Potenzen von a und b. Appell zeigt nun den Zusammenhang dieser Funktionen

$V_{m,n}$ und der ihnen assoziierten $U_{m,n}$ mit den Kugelfunktionen höherer Ordnung, d. h. den Funktionen, die in einem mehr als dreidimensionalen Raume bei den Potentialaufgaben der Hypersphäre auftreten. Zugleich dehnt er einige der Hermiteschen Resultate auf noch allgemeinere Funktionen mit beliebig vielen Variablen aus, die ihrerseits die Hermiteschen Funktionen als Spezialfall enthalten.

Ist in dem q-dimensionalen Raume ϱ der Abstand des Punktes mit den Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_q$ vom Anfangspunkt, so genügt ϱ^{2-q} der Gleichung, die für diesen Raum an Stelle der Laplaceschen Gleichung tritt. Derselben Gleichung genügt auch die Funktion W, die man erhält, wenn man ϱ^{2-q} nach den Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{q-1}$ resp. m_1-, m_2-, ..., m_{q-1}-mal differenziert und dann mit dem Faktor $(-1)^{m_1+m_2+\cdots+m_{q-1}}: [(m_1!) \cdot (m_2!) \ldots (m_{q-1}!)]$ multipliziert. Nimmt man nun $\varrho = 1$ an, d. h. liegt der Punkt $x_1, x_2, \ldots, x_q$ auf der Hypersphäre vom Radius 1, und eliminiert mittels der Gleichung $\varrho = 1$ die Variable x_q aus W, so wird die durch die Elimination entstehende Funktion mit

$$\underset{m_1, m_2, \ldots, m_{q-1}}{V}(x_1, x_2, \ldots, x_{q-1})$$

bezeichnet. Diese Funktion V ist zugleich der Koeffizient von $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_{q-1}^{m_{q-1}}$ in der Entwicklung der $(2-q)$-ten Potenz des Abstandes eines beliebigen Punktes der Hypersphäre von dem inneren Punkte mit den Koordinaten $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, 0$. Durch Anwendung des erweiterten Greenschen Satzes auf den Raum zwischen zwei konzentrischen Hypersphären und auf zwei Funktionen W, deren Grad $m_1 + m_2 + \cdots + m_{q-1}$ verschieden ist, ergibt sich sodann für zwei Funktionen V, V' von verschiedenem Grade der Satz:

$$\text{(I)} \quad \int \frac{V\, V'\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{q-1}}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_1^2 - \cdots - x_{q-1}^2}} = 0,$$

wobei das Integral über den Bereich $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{q-1}^2 \leqq 1$ auszudehnen ist. Werden in den Funktionen V, V' die letzten s der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{q-1}$ gleich Null gesetzt, so geht Gleichung (I) in folgende über:

$$\text{(II)} \quad \int (1 - x_1^2 - \cdots - x_{q-s-1}^2)^{\frac{s-1}{2}}\, V\, V'\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{q-s-1} = 0,$$

wobei die Integration über den Bereich $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{q-s-1}^2 \leqq 1$ zu erstrecken ist. Vorausgesetzt ist dabei wieder, daß die Ordnung von V und V' verschieden ist. Für den Fall $q = 4$, $s = 1$ gehen die in der Gleichung (II) auftretenden Funktionen in die Hermiteschen Funktionen über. Zugleich sind darin die V die Koeffizienten in der Entwicklung nach steigenden Potenzen von a_1, a_2 der (-2)-ten Potenz des Abstandes eines Punktes $x_1, x_2, 0, x_4$ der Hypersphäre vom Radius 1 von dem inneren Punkte $a_1, a_2, 0, 0$; und das ist die Hermitesche Definition.

Die zu den erweiterten Hermiteschen Funktionen V assoziierten Funktionen U ergeben sich folgendermaßen. Es sei $p = q - s - 1$, $X_p = 1 - x_1^2 - \cdots - x_p^2$, so differenziere man die $(m_1 + m_2 + \cdots + m_p + \frac{s-1}{2})$-te Potenz von X_p nach $x_1, x_2, \ldots, x_p$ resp. m_1-, m_2-, ..., m_p-mal und multipliziere

mit $X_p^{\frac{1}{2}(1-s)}$. Auch hier erhält man für $q=4$, $s=1$ die Hermiteschen Funktionen U, die bei der Entwicklung einer Funktion zweier Variabeln nach den Hermiteschen Funktionen $V_{m,n}$ eine wichtige Rolle spielen.

Zum Schluß wird auf mehrere Fragen hingewiesen, die betreffs der erweiterten Hermiteschen Funktionen noch zu erledigen sind. Wn.

J. Kampé de Fériet. Sur les polynomes ultrasphériques $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}$. C. R. **157**, 912-914.

J. Kampé de Fériet. Sur le développement d'une fonction en série de polynomes ultrasphériques. C. R. **157**, 1392-1394.

Der Verf. erledigt zwei der von Appell (vgl. das vorhergehende Referat) noch übriggelassenen Fragen. Er ermittelt zunächst den Wert des auf der linken Seite der obigen Gleichung (II) stehenden Integrals für den Fall, daß die Ordnungen der Funktionen V und V', d. i. die Summe ihrer Indexe, die gleiche ist. Der Wert des Integrals ist dann gleich dem mit einem gewissen Koeffizienten multiplizierten Werte des Integrals

$$\int X_p^{\frac{1}{2}(s-1)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_p,$$

worin p, X_p dieselbe Bedeutung haben wie bei Appell. Auf dasselbe Integral, nur mit einem andern Faktor multipliziert, reduziert sich das Integral auf der linken Seite der obigen Gleichung (II), wenn an Stelle von V' die zu V assoziierte Funktion U tritt, und zwar müssen U und V genau dieselben Indexe besitzen. Ferner werden Reihenentwicklungen der Funktionen V und U mitgeteilt. Wn.

H. E. J. Curzon. On a connexion between the functions of Hermite and the functions of Legendre. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 236-259.

Die Funktion

$$U_n(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi} \int_{\Gamma_u} \frac{e^{-2ux-u^2}}{u^{n+1}}\, du$$

(der Integrationsweg Γ_u geht in der komplexen Ebene u von dem unendlich fernen Punkte der reellen Achse längs dieser bis zum Nullpunkte, umschließt letzteren im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers und geht dann zum Ausgangspunkte zurück) genügt nach Whittaker (s. F. d. M. **34**, 520, 1903) für beliebige Werte von u der Differentialgleichung:

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + 2n\,u = 0;$$

und für positive ganzzahlige Werte von n geht U in die Hermitesche Funktion:

$$U_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}$$

über. Für die allgemeine Funktion $U_n(x)$ wird eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe aufgestellt, sodann werden ein oberer Grenzwert für $|U_n x)|$ und gewisse Rekursionsformeln abgeleitet. Ferner wird gezeigt, daß die Kugelfunktion $P_n(x)$ für beliebige Werte des Indexes n und für $|x| < 1$ sich durch das folgende, die Funktion U enthaltende Integral darstellen läßt:

$$P_n(x) = \frac{1}{i\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)\sin(n\pi)} \int_{\Gamma_t} e^{-t^2} t^n U_n(xt)dt,$$

eine Formel, die, falls n gleich einer positiven ganzen Zahl m ist, in die folgende übergeht:

$$P_m(x) = \frac{(-1)^m}{\pi^{\frac{1}{2}} m!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^m U_m(xt)\, dt.$$

Umgekehrt läßt sich die Funktion $U_n(x)$ durch ein Integral darstellen, das die Kugelfunktion enthält, und zwar ist

$$U_n(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{e^{\frac{1}{2}(n+2)i\pi}\,\pi^{\frac{1}{2}}} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-t^2} t^{-n} P_n\left(\frac{ix}{t}\right) dt;$$

der Integrationsweg muß den Punkt $t = 0$ und, falls x rein imaginär ist, auch den Punkt $(-ix)$ in einem Halbkreise in positivem Sinne umgehen.

Ähnliche Beziehungen bestehen zwischen der Kugelfunktion zweiter Art $Q_n(x)$ und dem zweiten Integral der Gleichung (A), d. h. der Funktion:

$$V_n(x) = e^{x^2} U_{-n-1}(-ix).$$

$Q_n(x)$ läßt sich durch ein V_n enthaltendes Integral und umgekehrt V_n durch ein Q_n enthaltendes darstellen. Wn.

P. Appell. **Développements en série procédant suivant les inverses de polynomes donnés.** Darboux Bull. (2) **37**, 345-350.

Es seien $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ gegebene Polynome, deren Grad gleich dem Index ist, und in denen die höchste Potenz den Faktor 1 hat. Die Wurzeln von $P_n(x) = 0$ mögen ferner für alle n innerhalb eines in der komplexen Ebene um den Anfangspunkt beschriebenen Kreises vom Radius R liegen. Dann handelt es sich darum, $1 : (x-y)$ in eine Reihe der Form

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{P_1(x)} + \frac{Q_1(y)}{P_2(x)} + \cdots + \frac{Q_{n-1}(y)}{P_n(x)} + \cdots$$

zu entwickeln; darin sind die Zähler Q Polynome in y, deren Grad durch den Index bezeichnet wird, und in denen der Koeffizient der höchsten Potenz ebenfalls $= 1$ ist.

Ist zunächst $P_n(x) = (x - \lambda_n)^n$, so ergeben sich aus den Gleichungen $Q_n^{(\nu)}(\lambda_{\nu+1}) = 0$ für $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ die zur Bestimmung der Koeffizienten von Q_n nötigen Gleichungen.

Um ferner jene Koeffizienten für den Fall zu bestimmen, daß die Wurzeln jedes der Polynome $P_n(x)$ voneinander verschieden sind, zerlege man $1 : P_\nu(x)$ in Partialbrüche:

$$\frac{1}{P_\nu(x)} = \frac{L_{\nu,1}}{x-\lambda_{\nu,1}} + \frac{L_{\nu,2}}{x-\lambda_{\nu,2}} + \cdots + \frac{L_{\nu,\nu}}{x-\lambda_{\nu,\nu}},$$

so gelten für $\nu \neq n+1$ Gleichungen von der Form

$$L_{\nu,1}\, Q_n(\lambda_{\nu,1}) + L_{\nu,2}\, Q_n(\lambda_{\nu,2}) + \cdots + L_{\nu,\nu}\, Q_n(\lambda_{\nu,\nu}) = 0.$$

Setzt man in diesen der Reihe nach $\nu = 1, 2, \ldots, n$, so hat man n leicht auflösbare Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten der Q_n. Wn.

L. Theisinger. Bestimmte Integrale. Monatsh. f. Math. u. Phys. **24**, 328-346.

Es wird eine Anzahl von bestimmten Integralen ausgewertet, die die Krampsche Transzendente

$$L(x) = \int_x^\infty e^{-z^2}\, dz$$

und die mit ihr nahe zusammenhängenden Fresnelschen Funktionen

$$C(x) = \int_x^\infty \cos(z^2)\, dz, \qquad S(x) = \int_x^\infty \sin(z^2)\, dz$$

enthalten. Benutzt werden dabei die für die genannten Funktionen geltenden Potenzreihen sowie die Umkehrung der Integrationsordnung in gewissen Doppelintegralen. Von den Resultaten mögen folgende hier Platz finden. Es ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\alpha^2 \cos^2\varphi}\, L(\alpha \sin\varphi) \sin\varphi\, d\varphi = \frac{\pi e^{-\alpha^2}}{4\alpha} - \frac{\sqrt{\pi}\, L(\alpha)}{2\alpha};$$

$$\int_0^1 \frac{e^{-\alpha^2 t^2} L(\alpha\sqrt{1-t^2})\, dt}{1+t^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{\alpha^2} \{\sqrt{\pi}\, L(\alpha\sqrt{2}) - [L(\alpha)]^2\};$$

$$\int_0^\infty e^{-2\alpha^2 x^2} [\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - L(\alpha i x)]^2\, dx = -\frac{1}{4\alpha}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^3, \ \alpha > 0.$$

Ferner werden auf ähnlichem Wege und unter Benutzung anderer bekannter Reihen für die Besselschen Funktionen $I_0(x)$ und $I_1(x)$ neue Integraldarstellungen hergeleitet, von denen die für $I_0(x)$ lautet:

$$\frac{\pi}{2} I_0(x) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-2kx\sin\varphi} \cos(x\cos\varphi)\, d\varphi + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(2kx \operatorname{cotg}\varphi)\sin(x \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi)}{\sin\varphi \sin(x\operatorname{cotg}\varphi)}\, d\varphi;$$

k ist darin eine beliebige positive Zahl. Für $k = \infty$ verschwindet das erste Integral rechts, und $\frac{\pi}{2} I_0(x)$ ergibt sich als Grenzwert des zweiten Summanden.

Endlich sei noch das folgende Resultat erwähnt. Es ist:

$$\int_0^1 \frac{I_0(\alpha x)\cos(\alpha x)\,dx}{\sqrt{1-x}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} - \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\,\mathrm{C}(\sqrt{2\alpha});$$

und darin kann man Kosinus und Sinus und zugleich die Funktion C mit S vertauschen.

Wn.

L. Theisinger. Einige Reihenentwicklungen. Monatsh. f. Math. u. Phys. **24**, 363-368.

Es werden die Funktionen

$$F_1(x,\sigma) = \int_0^x \cos(z^\sigma)\,dz,\quad F_2(x,\sigma) = \int_0^x \sin(z^\sigma)\,dz,$$

die man als Verallgemeinerungen der Fresnelschen Funktionen ansehen kann, untersucht und neben den für alle x geltenden Potenzreihen dieser Funktionen die Reihen für die Produkte $F_m(\alpha x,\sigma)\cdot F_n(\beta x,\sigma)[m=1,2;\, n=1,2]$ aufgestellt.

Wn.

J. R. Airey. The asymptotic expansions of Bessel and other functions. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **20**, 240-244.

Der Verf. benutzt die semikonvergenten Reihen für die Besselschen Funktionen in eigenartiger Weise zur Berechnung der Werte dieser Funktionen. Ist $P_0(x)$ der Faktor von $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x-\frac{1}{4}\pi)$ in dem bekannten Ausdruck für $I_0(x)$, so wird die semikonvergente Reihe $P_0(x)$ auf den Fall angewandt, daß x eine ganze Zahl ist. Ist dann K der $(k+1)$-te Term der Reihe, so läßt sich der divergente Teil der Reihe in die Form bringen

$$K(ab - abcd + abcdef - \cdots),$$

und die hier auftretenden Faktoren $a, b, c, d, \ldots$ lassen sich in konvergente, nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihen entwickeln, desgleichen die Produkte $ab, abcd, \ldots$ Die Reihen für diese Produkte werden nun so benutzt, daß alle ersten, alle zweiten etc. Glieder für sich summiert werden. Die ersten Glieder sind alle $=1$; wegen der abwechselnden Zeichen ist ihre Summe $=\frac{1}{2}$. Die Summe des zweiten Gliedes ist $-1/8x$, die des dritten $1/8x^2$ etc. Durch Benutzung dieser Summation ergeben sich genauere Werte, als wenn man die semikonvergente Reihe einfach abbricht. Als Beispiel berechnet der Verf. den Wert von $I_0(x)$ für $x=7$ und findet gegenüber der Meißelschen Tafel, die nach steigenden Potenzen von x berechnet ist, eine Abweichung erst in der zwölften Dezimale.

Wn.

A. Dinnik. Tafeln der Besselschen Funktionen $I_{\pm\frac{1}{2}}$, $I_{\pm\frac{2}{3}}$ und $I_{\pm\frac{5}{2}}$. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **20**, 238-240.

A. Dinnik. Tafeln der Besselschen Funktionen $I_{\pm\frac{1}{4}}$ und $I_{\pm\frac{3}{4}}$. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **21**, 324-326.

Analoge Tafeln wie früher für die Besselschen Funktionen $I_{\pm\frac{1}{3}}$ und $I_{\pm\frac{2}{3}}$ (s. F. d. M. **42**, 494, 1911) hat der Verf. jetzt für die Funktionen mit den Indexen $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}$ berechnet. Die Tafeln geben, wie die früheren, die auf vier Dezimalen berechneten Werte der Funktionen für die Argumente $x = 0$ bis $x = 8$, in Intervallen von 0, 2 fortschreitend. Sie bilden eine Ergänzung der Tafeln von Jahnke und Emde, die sich auf Besselsche Funktionen mit ganzzahligen Indexen beschränken. Auf Anwendungen der neuen Tafeln bei Aufgaben der Statik und der Elastizität wird kurz hingewiesen.

Wn.

J. A. Airey. Tables of the Neumann functions or Bessel functions of the second kind. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **22**, 30-43.

The tabulation of Bessel and other functions. — Report of the committee. British Association Rep. **83**, Birmingham, 87—130.

Beide Arbeiten enthalten Tafeln für die Besselschen Funktionen zweiter Art mit den Indexen 0 und 1. Legt man für die Besselsche Funktion zweiter Art die ursprüngliche C. Neumannsche Definition zugrunde, wonach

$$Y_0(x) = I_0(x)\log x + 2[I_2(x) - \tfrac{1}{2}I_4(x) + \tfrac{1}{3}I_6(x) - \cdots],\ Y_n(x) = (-2x)^n \frac{\partial^n Y_0(x)}{\partial (x^2)^n}$$

ist, und bildet daraus die Funktion

$$G_n(x) = (\log 2 - \gamma)\, I_n(x) - Y_n(x)$$

(γ die Eulersche Konstante), so enthalten die Tafeln die Werte von G_0 und G_1. (Mit den von Nielsen mit Y_n bezeichneten Funktionen hängt G_n durch die Gleichung $G_n(x) = -\dfrac{\pi}{2} Y_n(x)$ zusammen.)

Die Tafeln in beiden Arbeiten geben G_0 und G_1 für Argumente von $x = 0$ bis $x = 16$, fortschreitend in Intervallen von 0,01, und zwar ist die Tafel der ersten Arbeit auf vier, die der zweiten auf sieben Dezimalen berechnet.

Die zweite Arbeit, der Bericht der englischen Tafelkommission, enthält außerdem Tafeln der elliptischen Funktionen nach dem Schema von Greenhill, und zwar für folgende Werte der Periodenverhältnisse:

$$\frac{K}{K'} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, 3, \frac{3}{\sqrt{2}}, 3\sqrt{2}, 3\sqrt{3}, 4, 5.$$

Wn.

E. T. Whittaker. On the functions associated with the elliptic cylinder in harmonic analysis. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 366-371.

Die Funktionen des elliptischen Zylinders, die durch die Gleichung $d^2y/dz^2 + (a + k^2\cos^2 z)y = 0$ definiert werden, treten bei der Lösung der partiellen Differentialgleichungen für die Wellen und das Potential bei elliptischen Körpern oder elliptisch-zylindrischen Verteilungen auf. Die Lösungen jener Differentialgleichung sind im allgemeinen nicht periodische Funktionen von z; es gibt aber unendlich viele Lösungen, die periodisch sind mit der Periode 2π. Diese peri-

odischen Lösungen der Differentialgleichung werden in der mathematischen Physik gebraucht; mit ihnen beschäftigt sich die vorliegende Note in den Abschnitten: 2. Die Funktionen des elliptischen Zylinders sind die Lösungen einer gewissen Integralgleichung:

$$y(z) + \lambda \int_0^{2\pi} e^{k.\cos z \cos \theta}\, y(\theta)\, d\theta = 0.$$

3. Bestimmung der Funktionen $ce_0(z)$ des elliptischen Zylinders von der Ordnung 0. 4. Die andere, von den Funktionen des elliptischen Zylinders befriedigte Integralgleichung:

$$y(z) + \lambda \int_0^{2\pi} e^{ik \sin z \sin \theta}\, y(\theta)\, d\theta = 0.$$

5. Die Funktionen $ce_1(z)$ und $se_1(z)$ des elliptischen Zylinders von der Ordnung 1.

Lp.

Weitere Literatur.

F. J. I'A. Bromwich. Certain potential functions and a new solution of Laplace's equation. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 100-125.

Referat im Abschnitt X, Kap. 5.

T. H. Gronwall. On series of spherical harmonics. II. Amer. M. S. Bull. (2) **19**, 299.

J. Hollingworth. A physical interpretation of the Bessel function of order zero. Phil. Mag. (6) **25**, 427-440.

H. W. March. Integral and series representations of an arbitrary function in terms of spherical harmonics. Amer. M. S. Bull. (2) **20**, 80-81.

W. Marshall. The functions of the parabolic cylinder. Amer. M. S. Bull. (2) **20**, 62-63.

J. W. Nicholson. Correction of a numerical error in the author's paper on the relation of Airy's integral to the Bessel functions. Phil. Mag. (8) **25**, 200.

Vgl. F. d. M. **40**, 515, 1909.

E. Stender. Anwendungen der Besselschen Funktionen. Diss. Bern. 79 S. 8⁰ (1912).

Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Kapitel 1.

Prinzipien der Geometrie.

M. Pasch. Lecciones de Geometría moderna. Traducción anotada de la primera edición alemana, con adiciones del autor, por J. G. Álvarez Ude y J. Rey Pastor. Madrid: E. Arias. XI + 288 S.

Das im Jahre 1882 erschienene Werk von Pasch stellte sich die Aufgabe, die grundlegenden Teile der Geometrie lückenlos aufzubauen und dabei dem empirischen Ursprung der Geometrie gerecht zu werden. Verschiedene Stellen des Werkes wurden durch spätere Arbeiten des Verf. vereinfacht und vervollständigt. Auf Grund dieser Arbeiten hat Pasch „Zusätze" verfaßt, die die Veranstalter der spanischen Ausgabe seines Werkes in den Text einfügen konnten; auch haben die Übersetzer durch Anmerkungen das Verständnis gefördert. Die „Zusätze" sind auch der im Jahre 1912 erschienenen „Zweiten Ausgabe" des deutschen Werkes beigegeben; diese zweite Ausgabe enthält aber u. a. außerdem (S. 204-209) eine tiefere Einführung in das Wesen des mathematischen Beweises, das noch immer nicht genügend klargelegt ist.

Verf.

D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie. 4. Aufl. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. VI + 258 S. 8°. (Wissenschaft und Hypothese. VII.)

Nachdem die dritte Auflage noch eine wesentliche Vermehrung des Inhalts gebracht hatte (zwei neue Anhänge), auch eine Änderung der äußeren Gewandung des Buches, ist jetzt nur die neuere Literatur berücksichtigt worden. Es sind das hauptsächlich die interessanten Arbeiten von Rosenthal in den Math. Ann. **69** und **71** (F. d. M. **41**, 535, 1910 u. **42**, 496, 1911; vgl. S. 3 und 13 der neuen Auflage); sonst ist der Inhalt der bekannte geblieben. Das Erscheinen der neuen Auflage dieses schnell klassisch gewordenen Buches ist wieder ein Zeichen dafür, daß die Forschungen, die es angeregt hat, noch nicht beendet sind.

C.

P. BOUTROUX. L'édifice géométrique et la démonstration. Ens. math. **15**, 298-305.

Abgedruckt aus dem Buch „Introduction à l'Analyse mathématique" des Verfassers. In dem vorliegenden Abschnitt entwickelt er die Anschauungen der alten Griechen über den Unterschied von Satz und Aufgabe, Analysis und Synthesis, die einzelnen Teile der vollständigen Behandlung einer Aufgabe, das Wesen der „Elemente" usw., indem er sich hauptsächlich auf Euklids Schriften und den Kommentar des Proklos zum ersten Buch der Elemente stützt.
C.

G. GIORGI. Sui fondamenti della geometria. Boll. della Mathesis. 1912, 29-44, 74-91, 105-119.

Diese drei Vorlesungen sind vom Verf. im mathematischen Seminar der Universität Rom gehalten worden. Sie geben einen historischen Überblick über das Problem und eine Darlegung seines heutigen Standes. (Vgl. das Referat F. d. M. **43**, 558, 1912.)
Sk.

E. V. HUNTINGTON. A set of postulates for abstract geometry, expressed in terms of the simple relation of inclusion. Math. Ann. **73**, 522-559; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 171-172.

Der Verf. hat den Inhalt dieser Abhandlung in der Oktoberversammlung der Amerikanischen Mathematischen Gesellschaft 1912 vorgetragen. Wir folgen in unserem Referate dem wohl von ihm selbst herrührenden Berichte über diesen Vortrag.

Die Abhandlung liefert ein neues System von Postulaten für die gewöhnliche euklidische dreidimensionale Geometrie. Die Postulate enthalten nur zwei Veränderliche: (1) ein Symbol K, das irgendeine Klasse von Elementen $A, B, C, \dots$ bezeichnen kann, und (2) ein Symbol R, das irgendeine Beziehung A R B zwischen zweien dieser Elemente bezeichnen kann. Das geläufigste System (K, R), das alle Postulate befriedigt, ist das System, in welchem K die Klasse aller Kugeln von nicht kleinerem Durchmesser als irgendeine Konstante c ($\gtreqless 0$) ist und R die Beziehung des Einschlusses, so daß also A R B bedeutet: A innerhalb B. Jede zwei Systeme (K, R), die alle Postulate befriedigen, sind, wie gezeigt wird, isomorph in bezug auf die Veränderlichen K und R; deshalb ist jedes solches System logisch identisch mit dem eben erwähnten geometrischen System. Die Postulate bilden mithin ein „kategorisches System", durch das der geometrische Schlag des Systems (K, R) völlig bestimmt ist. Das System enthält 18 formale Gesetze, die als unabhängig voneinander nachgewiesen werden, und 7 Existenzpostulate, die als unabhängig voneinander und von den formalen Gesetzen nachgewiesen werden. Die wichtigsten Definitionen lauten: Eine Kugel ist ein beliebiges Element der Klasse K. Ein Punkt ist eine Kugel, die keine andere Kugel in sich enthält. Wenn A und B zwei Punkte sind, so ist die Strecke $[A\,B]$ die Klasse solcher Punkte X, daß jede die Punkte A und B enthaltende Kugel auch X enthält. Wenn A, B, C drei Punkte sind, so ist das Dreieck $[ABC]$ die Klasse solcher Punkte X, daß jede A, B und C enthaltende Kugel auch X enthält. Die Linie AB ist die Klasse von Punkten, die zu der

Strecke $[AB]$ gehören oder zu jeder ihrer Verlängerungen: $[A B']$ und $[B A']$. Hierbei ist z. B. $[A B']$ die Klasse solcher Punkte X, daß $[XB]$ A enthält. Die Ebene ABC ist die Klasse der zum Dreieck $[ABC]$ oder zu irgendeiner seiner 6 Erweiterungen gehörigen Punkte. Hier ist z. B. die vertikale Erweiterung $[A B' C']$. die Klasse solcher Punkte X, daß $[BCX]$ A enthält, und die seitliche Erweiterung, z. B. $[A B C']$, die Klasse solcher Punkte X, daß $[AB]$ und $[CX]$ einen Punkt gemeinschaftlich haben. Zwei Linien sind parallel, wenn sie derselben Ebene angehören und keinen Punkt gemeinschaftlich haben. Der Mittelpunkt der Strecke $[AB]$ ist der (einzige) Schnittpunkt der Diagonalen eines über $[AB]$ als der einen Diagonale konstruierten Parallelogramms. Der Mittelpunkt einer Kugel ist ein (einziger) solcher Punkt O innerhalb der Kugel, daß jedes O enthaltende Sehnenpaar die Diagonalen eines Parallelogramms bildet. Sehne einer Kugel ist hier eine Strecke, deren Endpunkte innerhalb der Kugel liegen, ihre beiden Verlängerungen aber außerhalb. Mittels der Definitionen des Mittelpunktes einer Strecke (die Translation liefert) und des Mittelpunktes einer Kugel (die Rotation liefert) ist es dann leicht, die Kongruenz zweier Strecken zu definieren. Es möge bemerkt werden, daß diese Definitionen alle in Ausdrücken der Grundveränderlichen K und R bestehen.

Wegen des Gebrauches des Körpers statt des Punktes als der Grundveränderlichen waren die meisten der Pseudogeometrien, die in den Unabhängigkeitsbeweisen vorkommen, neu zu konstruieren. Lp.

A. R. Schweitzer. A theory of geometrical relations. Continued. American J. **35**, 37-56.

Fortsetzung der Untersuchungen in American J. **31**, 365-410 (F. d. M. **40**, 518, 1909). Die Abhandlung bringt das Kapitel VI: Über die Grundlagen von Graßmanns extensiver Algebra. (I) Vorläufige Bemerkungen über die Entstehung der euklidischen Geometrie. (II) Metrische Vervollständigung des Systems $^3K_3$ für die euklidische Geometrie. Ausdrückliche Einführung des Zahlensystems. Numerische Punktableitung. § 1. Quotientenbeziehungen: Die Klassen $\mathfrak{K}$, $\breve{\mathfrak{K}}$, $\overline{\mathfrak{K}}$. § 2. Die Identifizierung der Klassen $\mathfrak{K}$, $\breve{\mathfrak{K}}$, $\overline{\mathfrak{K}}$ mit Systemen reeller Zahlen. § 3. Numerische Punktableitung. Angesichts dieser zu erklärenden Zeichen leuchtet es wohl ein, daß von den 30 aufgestellten Theoremen weder eine Übersicht, noch eine Darstellung des Gedankenganges der Arbeit in einem Referate gegeben werden kann. Lp.

A. A. Robb. Note on the proof of one of Peano's axioms of the straight line. Messenger (2) **42**, 134.

Nachtrag zu dem vorjährigen Artikel gleichen Titels (F. d. M. **43**, 561, 1912). Auch das Axiom VI von Peano läßt sich beweisen, ist also auszuscheiden. Lp

---

T. Kubota. Eine neue Begründung der nichteuklidischen Geometrie. Tôhoku Math. J. **4**, 16-24.

Die Hilbertschen Axiome 1, 2, 3 sowie Stetigkeit und Differenzierbarkeit vorausgesetzt, konstruiert der Verf. die drei Geometrien auf analytischem Wege. Dafür beweist er bei dem Gebrauch der Lieschen infinitesimalen Transformationen die Gültigkeit der euklidischen Formeln im unendlich kleinen Gebiet der Ebene und baut dann die drei Geometrien auf etwas einfachere Weise als Killing auf (Rev. sem. 22_2, 16). Lp.

P. Predella. Sulla struttura dello spazio. Lomb. Ist. Rend. (2) **46**, 1045-1054.

Der Verf. beschäftigt sich mit einem Raume, in welchem alle Axiome gelten mit Ausnahme derer von Archimedes und von Dedekind.: Infinitesimale und transfinite Segmente. Der physische Raum. Punkte, gerade Linien, Ebenen in drei Dimensionen. Übersicht über die Konstruktion und Schlußfolgerungen. Die uneigentlichen Punkte. Lp.

G. Ascoli. Saggio sulla teoria dei versi nelle forme geometriche fondamentali. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 193-208.

Eine Beschreibung der Theorie der Anordnung (gleichsinnig, gegensinnig) der geometrischen Grundgebilde von möglichst logischem Charakter in den Paragraphen: 1. Logischer Charakter der Theorie. 2. Sinn der Geraden. 3. Sinn auf den Geraden eines Strahlenbüschels oder eines Bündels mit uneigentlichem Zentrum. 4. Sinn eines Strahlenbüschels. 5. Sinn innerhalb der Ebene. 6. Sinn innerhalb des Bündels. 7. Sinn im Raume. 8. Projektive Eigenschaften des Sinnes. 9. Anwendungen. Lp.

Ch. Müntz. Das archimedische Prinzip und der Pascalsche Satz. Math. Ann. **74**, 301-308.

Die historisch begründete metrische Fassung des archimedischen Prinzips ist ein spezieller Fall des allgemeinen projektiven: Es sei E_1 ein innerer Punkt der Strecke $E_0 E$, E_2 sei der vierte harmonische zu E_0 in bezug auf $E_1 E$; allgemeiner sei E_{n+1} der vierte harmonische zu E_{n-1} in bezug auf $E_n E$. Dann gehört jeder vorgelegte Punkt E' der Strecke $E_0 E$ bei hinreichend hohem (positiv ganzzahligem) n der Strecke $E_0 E_n$ an.

Der Verf. zeigt unter Voraussetzung aller Axiome der Verknüpfung und Anordnung, daß dieses Prinzip nur ein einziges Mal vorausgesetzt zu werden braucht, worauf es notwendig allgemeine Gültigkeit haben muß, also: Wenn das archimedische Prinzip für eine einzige gegebene Strecke $E_0 E$ mit einem einzigen auf ihr gegebenen Einheitspunkt E_1 gilt, so gilt es für jede Strecke mit jedem Einheitspunkt auf ihr in der gesamten Ausdehnung des Raumes. Der Pascalsche Satz gilt auf projektiver Grundlage notwendig noch im (reellen) algebraischen Raume; aber nicht mehr, sobald bei aufgehobenem archimedischen Prinzip auch nur eine einzige Transzendente zugelassen wird. Lp.

Ch. Müntz. Das euklidische Parallelenaxiom. Math. Ann. **73**, 241-244.

Der Verf. will unter Voraussetzung aller geometrischen Axiome der Verknüpfung und Anordnung, d. h. durch Betrachtungen rein projektiver Natur, ein System notwendiger und hinreichender Bedingungen für die allgemeine Gültigkeit des Parallelenpostulats der euklidischen Geometrie geben. Sie bestehen in dem Lehrsatz: Wenn zu drei gegebenen, nicht in einer Ebene liegenden Strahlen eines Bündels in je einem einzigen Punkte nur eine Parallele (d. h. Nichtschneidende in der zugehörigen Ebene) vorausgesetzt wird, so gilt ein Gleiches für jeden Punkt und jede Gerade des Raumes. Eine genauere Darstellung, bei der aber die hier gegebenen Sätze ohne Beweis mitgeteilt sind, findet sich in der Abhandlung des Verf. „Aufbau der gesamten Geometrie auf Grund der projektiven Axiome allein“ (F. d. M. **43**, 562, 1912). Lp.

W. B. Frankland. Note on the parallel-axiom. Math. Gazette **7**, 136-139.

Der Verf. ist der Ansicht, Bertrand aus Genf habe das Parallelenaxiom in der letzten Hälfte des 18. Jahrhunderts endgültig und vollständig bewiesen. „Die einzige Alternative ist, vorauszusetzen, daß der Raum von endlicher Ausdehnung ist, und daß die von Euklid als parallel gerechneten Linien fähig sind, sich in einem irgendwo im Rücken des Weltalls gelegenen Punkte zu schneiden. Alle Arten und Stufen des Paradoxen liegen in dieser Ansicht, die von Riemann feierlich 1854 eingeführt wurde. Aber wo ist der Bertrand, der beweise, daß der Raum nicht endlich ist? Wo ist der einfache Beweis, der Riemanns Hypothese auf dieselbe direkte Art ausschließt, wie Bertrands Beweis die Lobatschevskische Hypothese ausschließt? ... Bertrand hat das Lobatschevskische System geköpft; wer wird das Riemannsche enthaupten und so Euklidem ab omni naevo vindicatum und ohne Nebenbuhler hinstellen?“ Lp.

J. Rose-Innes. On an assumption contained in Euclid's proofs of certain propositions in his twelfth book. Lond. M. S. Proc. (2) **13**, 57-59.

Kritische Prüfung der Annahme in den Elementen von Euklid, daß, wenn irgendwelche drei Größen gegeben sind, von denen die beiden ersten von derselben Art sind, immer eine vierte vorhanden ist, die zu ihnen proportional ist. Lp.

E. Freda. Sui problemi di geometria piana non-euclidea. Batt. G. **51** [(3) **4**], 343-365.

Die Arbeit beschäftigt sich mit den geometrischen Aufgaben, die in der nichteuklidischen (elliptischen oder hyperbolischen) Ebene mit Lineal und Zirkel lösbar sind. Die befolgte Methode ist mit der verwandt, die Castelnuovo in dem Anhange zu seinen Lezioni di geometria analitica (Roma 1909)

und in einer etwas andern Form in den Questioni riguardanti la geometria elementare (Bologna 1900; F. d. M. **31**, 86. Die deutsche Ausgabe F. d. M. **38**, 520, 1907) für den Fall der euklidischen Geometrie angewendet hat.

Gemäß der Weisung, die F. Klein für die nichteuklidische Geometrie gegeben hat, wird in der vorliegenden Arbeit die (vom Postulat V unabhängige) projektive Geometrie zugrunde gelegt und jede metrische Eigenschaft der Gebilde als eine Beziehung zwischen ihnen und dem absoluten Kegelschnitt angesehen; nur für eine gewisse der im § 7 enthaltenen Anwendungen wird auf die nichteuklidische Trigonometrie zurückgegriffen. Diese Methode eignet sich gut dazu, den hyperbolischen und den elliptischen Fall gleichzeitig zu erledigen und die Gründe der Übereinstimmungen und der Abweichungen zwischen ihnen und dem euklidischen Fall zu beleuchten. Auf dem projektiven Wege kann man auch, wie die angedeuteten oder durchgeführten Konstruktionen zeigen, zu graphischen Lösungen für die einzelnen Aufgaben gelangen.

Nachdem die mit dem Lineal allein lösbaren Aufgaben gekennzeichnet sind, wird ein eigenartiges Koordinatensystem mit Lineal und Zirkel beschrieben, das dem gewöhnlichen kartesischen orthogonalen System entspricht; in bezug auf dieses hat der absolute Kegelschnitt eine bekannte Form, und man kann deshalb, auf ein solches System sich stützend, die mit Lineal und Zirkel ausführbaren Konstruktionen analytisch übertragen und die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufstellen, daß ein Punkt sich aus gegebenen Punkten mit den genannten Instrumenten konstruieren läßt. Dadurch wird ein Ergebnis gewonnen, das allgemein die mit Lineal und Zirkel lösbaren Aufgaben kennzeichnet.

Vergegenwärtigt man sich nun die Definitionen von Abstand zweier Punkte, Winkel zweier Geraden in der metrischen Geometrie, so fließen aus jenem Ergebnis unmittelbar die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine Strecke oder ein Winkel mit Lineal und Zirkel aus mehreren gegebenen Strecken und Winkeln konstruierbar ist. Für die hyperbolische Ebene sind die so gewonnenen Ergebnisse, jedoch in vollständigerer Gestalt dieselben, die Gérard in seiner Thèse sur la géométrie non-euclidienne (Paris 1892; F. d. M. **25**, 870, 1893/94) ausgesprechen hat; er hat sich dabei auf die hyperbolische Trigonometrie gestützt.

In den Anwendungen der erwähnten allgemeinen Ergebnisse werden die in der euklidischen Ebene mit Lineal und Zirkel lösbaren Hauptaufgaben daraufhin geprüft, ob sie es auch in der hyperbolischen und der elliptischen Ebene sind. Es zeigt sich dann (wie bei J. Bolyai), daß manche Aufgaben, die in der euklidischen Ebene mit Lineal und Zirkel nicht mehr lösbar sind, es doch in dem nichteuklidischen Falle sein können; beispielsweise die Rektifikation und die Quadratur des Kreises für besondere Werte des Halbmessers. Der letzte Paragraph handelt von den Instrumenten, die den Zirkel ersetzen können, und den Beschränkungen, die sich seinem Gebrauche widersetzen können. Lp.

F. Rulf. Über die Grundlagenforschung in der Geometrie. Monatsh. f. Math. u. Phys. **24**, 142-158.

In dieser Arbeit wird der Versuch gemacht, den Kongruenzbegriff zu definieren. Dabei wird vorausgesetzt, daß man die Dinge, mit denen man Geometrie treibt, genau kennt und auch die richtigen Sätze über sie von den falschen

unterscheidet. Auf erkenntnistheoretische Fragen wie die, was ein richtiger Satz sei, wird nicht eingegangen. Dann wird näher ausgeführt, wie man sich bei Annahme der gegebenen Definition zu den Axiomensystemen von Hilbert und Schur zu stellen hat. Durch eine mit ganz elementaren Hülfsmitteln durchgeführte Anwendung auf das System der Ballschen Schrauben ergibt sich der Satz, daß die Geometrie im allgemeinen Schraubennetz elliptisch ist, falls man eine geeignete Maßbestimmung trifft. Sonst wird noch dem ebenen Anordnungsaxiome Hilberts eine eingehendere Beachtung zugewendet.

Die einzelnen Abschnitte sind betitelt: 1. Einige vorbereitende Bemerkungen. 2. Die Begriffe identisch, gleich und kongruent. 3. Verknüpfung. 4. Anordnung. 5. Kongruenz. 6. Verknüpfung der uneigentlichen Elemente.

Bei der Aufstellung der Kongruenzmerkmale wird der Studysche Begriff des Somas an die Spitze gestellt: Wir betrachten in der Ebene eine Gerade, einen in ihr liegenden Punkt, eine Richtung in der Geraden und einen Drehsinn um den Punkt. Die aus allen diesen Elementen bestehende Figur nennen wir Soma. Die Kongruenzmerkmale des Verf. lauten: 1. Alle Somen sind kongruent. 2. Von zwei nicht identischen, kongruenten Strecken kann keine ganz innerhalb der anderen liegen. 3. Von zwei nicht identischen kongruenten Winkeln kann keiner ganz innerhalb des andern liegen. Lp.

L. Zarzecki. Kilka słów o pewniku Archimedesa w odniesieniu do wielokątów równych przez rozkład. (Einiges über das archimedische Axiom in Beziehung auf zerlegungsgleiche Polygone.) Wektor **1**, 319-325 (1912).

Hilbert hat in den „Grundlagen der Geometrie" gezeigt, daß der Beweis des Satzes, wonach zwei Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe „zerlegungsgleich" sind, ohne Benutzung des archimedischen Axioms nicht möglich ist, wogegen sehr leicht bewiesen werden kann, daß dieselben „inhaltsgleich" sind. Der Verf. betrachtet besondere Fälle, in denen der Nachweis der Zerlegungsgleichheit ohne Benutzung des archimedischen Axioms gelingt, und zwar auf Grund des folgenden Satzes: Wenn zwei zerlegungsgleiche Figuren P_1, P_2 derart innerhalb einer Figur Q zugleich eingeschrieben werden können, daß sie keine gemeinsamen Punkte besitzen, dann sind die Figuren $Q-P_1$ und $Q-P_2$ zerlegungsgleich. A. R.

G. Vacca. Su alcuni teoremi di geometria piana analoghi a quelli di Max Dehn nella geometria solida. Rom. Acc. L. Rend. **22**$_2$, 417-423.

Nach Dehn ist es unmöglich, den Satz, daß zwei Pyramiden gleicher Grundfläche und gleicher Höhe volumengleich sind, allgemein zu beweisen, ohne einen Grenzübergang zu benutzen. Wie Vacca findet, gibt es in der Ebene ähnliche Sätze, wenn man den Begriff der Verschiebungsgleichheit einführt.

Zwei Figuren in einer Ebene heißen verschiebungsgleich, wenn die eine mit der andern durch eine Parallelverschiebung (in der betreffenden Ebene) zur Deckung gebracht werden kann. Dem Satze, daß volumengleiche Prismen in eine endliche Anzahl von Stücken zerlegt werden können, die schraubungsgleich sind, d. h. durch eine Schraubung zur Deckung gebracht werden können, entspricht in der Ebene der Satz, daß flächengleiche Parallelogramme in eine

endliche Anzahl von Stücken zerlegt werden können, die verschiebungsgleich sind. Ebenso wie eine solche Zerlegbarkeit bei volumengleichen Pyramiden im allgemeinen nicht stattfindet, sind auch flächengleiche Dreiecke vermutlich im allgemeinen nicht zerlegungsgleich. Vermutlich, denn Vacca führt den Beweis, wie er ausdrücklich hervorhebt, unter einer beschränkenden Voraussetzung: bei dem von ihm angewandten Beweisverfahren scheint es kaum möglich, sich von dieser Beschränkung zu befreien. Sie besteht darin, daß nur „verknotete" Zerlegungen benutzt werden dürfen; die Teile eines Vielecks, das in Teilvielecke zerlegt wird, heißen verknotet, wenn jede Ecke eines Teilvielecks, die im Innern (nicht auf der Begrenzung) des ganzen Vielecks liegt, auch Ecke ist für alle Teilvielecke, denen die Ecke als Punkt angehört. Jetzt gelten die Sätze:

Es ist unmöglich, zwei symmetrische Dreiecke in eine endliche Anzahl verknoteter Teile zu zerlegen, die jeweils verschiebungsgleich sind.

Es ist unmöglich, ein Dreieck und ein Parallelogramm in eine endliche Anzahl verknoteter Teile zu zerlegen, die jeweils verschiebungsgleich sind.

Dabei ist noch folgender Umstand bemerkenswert. Bei dem Beweise des Satzes von Dehn stößt man auf lineare, homogene Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, die zwischen gewissen Winkeln im Falle der Zerlegungsgleichheit bestehen müssen. Bei den Beweisen von Vacca treten Gleichungen derselben Art auf, aber statt der gewöhnlichen Winkel hat man „gerichtete" Winkel. Gerichtet nennt Vacca Winkel, bei denen es auf die Richtung der Schenkel selbst ankommt; gerichtete Winkel sind dann und nur dann einander gleich, wenn die entsprechenden Schenkel gleichgerichtet sind; bei einer schärferen Erklärung werden die von einem Punkte ausgehenden Halbgeraden benutzt.

St.

O. Nicoletti. Sulla equivalenza dei poliedri. Rom. Acc. L. Rend. **22**$_1$, 767-770.

Der Verf. hat Untersuchungen angestellt, die sich an die Abhandlung von Dehn „über den Rauminhalt" in Math. Ann. **55**, 465-478 anschließen (F. d. M. **32**, 486, 1901). In dem vorliegenden Aufsatz teilt er die Ergebnisse mit, zu denen er gelangt ist. In der Einleitung bemerkt er dazu:

„Wenn man den Gedankengang von Dehn wieder aufnimmt und vervollständigt, so ist leicht zu sehen, daß, falls zwei Polyederaggregate P und P' endlich gleich sind, nicht nur ihre räumlichen und ebenen Winkel, sondern im allgemeinen auch ihre Kanten durch eine oder mehrere homogene lineare Beziehungen mit ganzzahligen Koeffizienten verbunden sind; es ist ferner möglich, auf einfache und bemerkenswerte Art das System solcher Beziehungen zu kennzeichnen. Somit erhält man für die endliche Gleichheit zweier Polyederaggregate außer den Dehnschen Bedingungen noch andere, notwendige Bedingungen, von denen, wie ausdrücklich gesagt werde, die Raumgleichheit im allgemeinen nicht eine Folge ist. Man füge diese letztere Bedingung hinzu. Erlangt man dadurch ein System notwendiger und hinreichender Bedingungen für die endliche Gleichheit zweiner Polyederaggregate? Auf diese interessante Frage zu antworten, ist mir nicht gelungen." Die Ergebnisse selbst, deren Beweise anderswo gegeben werden sollen, sind in einem kurzen Referate nicht angebbar. Lp.

Ernst Müller. Weiteres über Begründung und Grundlagen des Pythagoreischen Lehrsatzes. Ann. d. Naturphil. **12**, 170-186.

Verf. sucht, früher mitgeteilte Untersuchungen fortsetzend (s. F. d. M. **42**, 83, 1911), die Beweise des Pythagoreischen Lehrsatzes allgemeinen Prinzipien unterzuordnen. Neben manchen Anschauungen und Entwicklungen, die dem reinen Mathematiker bedenklich erscheinen müssen (z. B. daß das Auftreten des Dreiecks in „verkleinertem oder vergrößertem Maßstab" dem Dimensionscharakter der Ebene entspricht), finden sich auch gute Beobachtungen und gelegentlich ein nützlicher Wink für den Unterricht. C.

G. Pólya. Über eine Peanosche Kurve. Krakau Anz. (A) 1913, 305-313.

Hilbert hatte ohne Beweis angegeben, daß es Peanosche Kurven gibt, deren Punkte höchstens dreifach sind. Nach den bekannten Methoden, die von Peano, Hilbert und Sierpiński herrühren, konstruiert nun der Verf. eine Peanosche Kurve, durch die ein nicht gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck auf eine Strecke abgebildet wird, und zeigt dann, daß man das Kathetenverhältnis so wählen kann, daß vierfache Punkte nicht auftreten; mehrfache Punkte sind von vornherein ausgeschlossen und auch in älteren Beispielen nicht vorhanden. (Vgl. Hahn, S. 560 dieses Bandes.) C.

W. Sierpiński. Sur une courbe non quarrable. Krakau Antz. (A) 1913, 254-263.

Der Verf. konstruiert einen Jordanschen Kurvenbogen, von dem jedes Stück positives Flächenmaß im Lebesgueschen Sinne hat (also positiven äußeren Flächeninhalt im Jordanschen Sinne). Das ist nicht neu; aber es kommt dem Verf. darauf an, ein recht einfaches Beispiel zu haben, bei dem auch alle nötigen Beweise schnell und bequem zu führen sind. Und in der Tat ist dies dank dem Konstruktionsprinzip und der sehr geschickt gewählten Bezeichnungsweise vollkommen erreicht. — Ein Gebiet, dessen Rand einen solchen Bogen enthält, ist dann nicht quadrierbar (im Jordanschen Sinne). C.

Z. de Geöcze. Sur l'exemple d'une surface dont l'aire est égale à zéro et qui remplit un cube. S. M. F. C. R. 1913, 29-31; Math. és phys. lapok **23**, 115-117.

H. Lebesgue. Observations sur la communication précédente. S. M. F. C. R. 1913, 31-32.

Die reellen und unabhängigen Veränderlichen u und v halten sich in dem Grenzen 0 und 1; $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ sind eindeutige, beschränkte und stetige Funktionen dieser Veränderlichen. Die Gleichungen $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$ seien die Gleichungen einer Oberfläche S. Von der Definition eines Flächeninhaltes einer Oberfläche ausgehend, die Lebesgue in seiner Doktor-

arbeit (F. d. M. 33, 307, 1902) gegeben hat, zeigt der Verf., daß die Oberfläche so beschaffen sein kann, daß ihr Inhalt Null ist, und daß sie einen Würfel ausfüllt.

In den durch diese Mitteilung veranlaßten Bemerkungen sagt Lebesgue am Schluß: „Wir würden über Aussagen von der Art derer von de Geöcze nicht erstaunt sein, wenn es uns nicht unterliefe, zu vergessen, daß eine Kurve oder eine Fläche nicht durch die alleinige Kenntnis der Menge ihrer Punkte bestimmt ist, sondern daß man überdies wissen muß, wie diese Punkte angeordnet sind. Dann wären wir nicht überrascht, daß eine Oberfläche, die durch alle Punkte eines Würfels oder eines Quadrates geht, einen Flächeninhalt Null haben kann oder von einer beliebigen Kleinheit, was für ein Flächen- oder Körpermaß auch die Menge dieser Punkte habe. Man kann diese Tatsache ein wenig gezwungen in Wahrheit so ausdrücken, daß man sagt, bei der Auswertung des Flächeninhaltes kommen die Punkte der Berandung nicht in Betracht, sobald sie bei der Abschätzung des Maßes in Betracht gezogen werden. Da wir nie den Inhalt einer von einer Ebene getragenen Fläche mit dem Flächenmaß der Punkte dieser Fläche verwechseln würden, so würden wir aus der Tatsache, daß der Inhalt einer Fläche immer mindestens gleich dem Inhalt einer beliebigen ihrer Flächenprojektionen ist, nicht zu schließen uns versucht fühlen, daß der Inhalt einer Oberfläche nicht geringer sein kann als das Flächenmaß der Punktmenge einer Projektionsfläche. Die Note von de Geöcze bringt die Notwendigkeit dieser Unterscheidungen an den Tag." Lp.

E. J. Wilczynski. Some general aspects of modern geometry. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 331-342.

Ein Vortrag, gehalten am 31. Dezember 1912 in einer gemeinschaftlichen Tagung der American Mathematical Society mit mehreren andern Gesellschaften. Unter den gegenwärtigen Arbeiten aus der Geometrie werden besonders solche besprochen, welche die mehrdimensionale Geometrie unter dem Gesichtspunkte solcher Gebilde behandeln, die von $n > 3$ Parametern abhängen. Wir führen aus dem Schluß des Artikels den Satz an: „Die projektive Geometrie einer r-Fläche (r-spread) in einem linearen n-dimensionalen Raume ist gleichwertig der Theorie der Invarianten und Kovarianten eines vollständig integrierbaren Systems linearer partieller Differentialgleichungen mit r unabhängigen Veränderlichen, dessen allgemeine Lösung von $n+1$ willkürlichen Konstanten abhängt. — Wenn wir an unsere einleitende Erörterung bezüglich der Willkürlichkeit des Raumelements erinnern und die große Allgemeinheit beachten, die in dem Begriffe „r-Fläche in n Dimensionen" liegt, auch bei ihrer Anwendung auf den gewöhnlichen Raum, so werden wir den umfassenden Charakter dieser Verallgemeinerung, die ein so weites Gebiet vereinigt, zu schätzen wissen." Lp.

J. Ser. Essai de linéométrie. Première partie. Paris: Gauthier-Villars. 79 S. 8⁰.

Ein Vorwort fehlt. Auch eine Definition von „Linéométrie". Behandelt werden Mannigfaltigkeiten von ∞^1 komplexen Punkten, die auf einer analytischen ebenen Kurve liegen, sogenannte Fäden. Der Gegenstand berührt sich

mit Dingen, die Study in seinen Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, 1. Heft (F. d. M. **42**, 590, 1911) behandelt hat. B.

J. Hjelmslev. Om Grundlaget for den praktiske Geometri. (Über die Grundlage der praktischen Geometrie.) Nyt Tidskr. for Mat. (A) **24**, 41-58.

Die Abhandlung geht von der Bemerkung aus, daß man, indem man gleich bei der Grundlage der Geometrie Abstraktionen einführt, sich von den Forderungen der Praxis entfernt, so daß Zweifel entstehen können, ob das erhaltene Lehrgebäude auf die Wirklichkeit anwendbar ist. Um disem Übel vorzubeugen, wird vorgeschlagen, in der Grundlage selbst bei einer Reihe rein praktischer Vorstellungen stehen zu bleiben und dann die abstrakte Geometrie als eine natürliche formale Abrundung der praktischen Geometrie hinzuzufügen. P. H.

Weitere Literatur.

Encyclopédie des sciences mathématiques. Édition française. Tome III, vol. 2: Géométrie descriptive. Géométrie élémentaire. Fascicule 1: Schoenflies-Trosse, Géométrie projective. Steinitz-Merlin, Configurations. Leipzig: B. G. Teubner. 160 S. gr. 8°.

M. Bôcher. The infinite regions of various geometries. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 69-70.

F. Grebe. Verwendung des Imaginären in der Geometrie. Progr. Naumburg a. S. 26 S. 8°.

L. W. de Hoenika. Nouvelle démonstration de la théorie des droites parallèles d'Euclide. (Texte russe et texte français.) Moscou 10 S. 8°.

E. V. Huntington. A set of independent postulates for „betweenness". Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 297-298, 510.

C. J. Keyser. Concerning multiple interpretations of postulate systems and the existence of hyperspaces. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 292-293.

R. L. Moore. Concerning pseudo-Archimedean and Vollständigkeitsaxioms. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 503-504.

G. Sforza. Determinazione nella ipotesi non-euclidea del volume del tetraedro normale in funzione dei diedri. Modena Atti Soc. dei Nat. e Mat. (4) **15**, 35-49.

A. Suini. Sul vizio d'origine delle geometrie non euclidee. Piacenza: Porta. 8 S. 8°.

J. W. Withers. Euclid's parallel postulate. Its nature, validity and place in geometrical systems. Chicago: Open Court. Co. VII + 192 S.

Kapitel 2.
Kontinuitätsbetrachtungen (Analysis situs, Topologie).

Ed. Stamm. Characteristica geometrica Leibniza i jej znaczenie w Matematyce. (Leibnizens Characteristica geometrica und deren Bedeutung in der Mathematik.) Wiad. mat. **17**, 43-90.

In einem 1679 an Huygens gerichteten Briefe entwickelte Leibniz eine Methode, um mit Hülfe der fundamentalen Begriffe des Punktes und der Kongruenz die Geometrie auf symbolisch-deduktive Weise abzuleiten. Diese „geometrische Charakteristik" ist, wie der Verf. darlegt, nur ein Glied in dem System der „allgemeinen Charakteristik", von Leibniz, das die ganze Wissenschaft umfassen sollte. Inhaltlich ist die geometrische Charakteristik ein Vorläufer der synthetischen Geometrie, allgemeiner der heute „Analysis situs" genannten Wissenschaft, die allgemeine invariante Eigenschaften der Körper studiert. Formell sind Leibnizens Nachfolger: Graßmann mit seiner „Ausdehnungslehre", Peano mit zwei Systemen eines Aufbaues der Geometrie und andere. Die besonders von Russell entwickelte Logik der Relationen gestattet insbesondere den Aufbau von Leibnizens Characteristica geometrica und anderer Systeme mit Hülfe allgemeiner Prinzipien.

A. R.

H. Brunn. Über die Bausteine der Analysis situs. Arch. der Math. u. Phys. **22**, 43-48.

In der Analysis situs denkt man sich die Punktmannigfaltigkeiten aus „Zellen" oder „Bausteinen" verschiedener Dimension aufgebaut. Es sind dies für die Dimension 0 der Punkt, für die Dimensionen 1, 2, 3 Strecke, Quadrat und Würfel oder sonstige im Sinne der Analysis situs mit Strecken, Quadraten, Würfeln gleichwertigen Punktmengen. Eine für eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ wichtige Zahl ist die (Listingsche) Charakteristik, weil sie unabhängig davon ist, wie man $\mathfrak{M}$ aus Zellen aufbaut. Sie ist definiert durch den Ausdruck $\sum_i (-1)^{[a_i]}$, wenn man mit $a_1, \ldots, a_k$ die Zellen, mit $[a_i]$ die Dimension von a_i bezeichnet, wird also erhalten durch Abzählung der Bausteine, wenn man diese, je nachdem sie von gerader oder ungerader Dimension sind, mit $+1$ oder -1 zählt. Es findet aber, wenn man die Charakteristik so erklärt und die Bausteine der Dimensionen > 0, wie es üblich ist, als abgeschlossen betrachtet (also die Begrenzung von Strecke, Quadrat, Würfel nicht zum Baustein rechnet), eine Unstimmigkeit statt zwischen der Art, wie man sie zählt und wie man sie beim geometrischen Aufbau verwendet. Denn die gesamte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ ist einfach gleich der Summe der Bausteine, da jeder Punkt von $\mathfrak{M}$ in einem und nur einem Baustein auftritt; diese kommen also hier sämtlich positiv in Rechnung. Die Unstimmigkeit verschwindet aber, wenn man statt der unabgeschlossenen die abgeschlossenen Bausteine verwendet. Die Mannigfaltigkeit läßt sich auch aus diesen, wenn man nicht nur ein Hinzufügen, sondern auch ein Wegnehmen von Bausteinen zuläßt, aufbauen. Anders ausgedrückt: es läßt sich $\mathfrak{M}$, wenn die a_i die abgeschlossenen Bausteine bezeichnen, in der Form

$$\mathfrak{M} = \sum c_i a_i$$

darstellen, wo die c_i eindeutig bestimmte ganze Zahlen $\gtreqless 0$ sind. Dies gilt nicht nur für homogene komplexe $\mathfrak{M}$, sondern auch für solche, die Bestandteile verschiedener Dimensionen enthalten. Obwohl nun, wenn man Komplexe von solcher Allgemeinheit zuläßt, c_i durchaus nicht $= (-1)^{[a_i]}$ zu sein braucht, ist doch stets $\sum (-1)^{[a_i]} = \sum c_i$, so daß man die Charakteristik auch durch die letztere Summe definieren kann. Dies besagt aber, daß die Charakteristik angibt, wieviele abgeschlossene Bausteine zur Verwendung kommen, wenn man, wie es natürlich ist, jedes Hinzufügen eines solchen mit $+1$, jede Wegnahme mit -1 bezeichnet. Stz.

L. E. Brouwer. Über den natürlichen Dimensionsbegriff. J. für Math. **142**, 146-152.

Man definierte bisher die Dimensionenzahl einer Mannigfaltigkeit als die Anzahl der Parameter, durch die sich eine Umgebung irgendeines ihrer Punkte umkehrbar eindeutig und stetig darstellen läßt. Diese Definition ist berechtigt auf Grund des von Brouwer in Math. Ann. **70** (F. d. M. **42**, 416, 1911) gegebenen Beweises für den Satz von der Invarianz der Dimensionenzahl. Doch hat schon Poincaré eine andere Definition zu geben versucht, die unserer intuitiven Raumanschauung mehr Rechnung trägt. Dies wird hier von Brouwer durchgeführt.

π sei eine „Normalmenge" (Fréchet) und π_1, ϱ, ϱ' seien drei in π abgeschlossene fremde Teilmengen von π. „π besitzt den allgemeinen Dimensionsgrad n", wenn für jede Wahl von ϱ und ϱ' eine diese Mengen trennende Menge π_1 vom allgemeinen Dimensionsgrad $n-1$ existiert. Damit ist eine rückläufige Definition gegeben, der man aber auch eine von der Rekursion unabhängige Form geben kann.

Gibt es zu einem Punkt P von π Umgebungen vom allgemeinen Dimensionsgrad m ($m \leq n$) und keine Umgebung von niedrigerem Grade, so sagt Brouwer, daß P in π den Dimensionsgrad m besitzt. Dann gilt der „Dimensionssatz": Eine Mannigfaltigkeit vom allgemeinen Dimensionsgrad n hat in jedem ihrer Punkte den gleichen Dimensionsgrad n. Da die neue Dimensionsdefinition gegenüber den Transformationen der Analysis situs invariant ist, so ist in dem Dimensionssatz der Satz von der Erhaltung der Dimensionenzahl mitenthalten.

Beim Beweise des Dimensionssatzes stützt sich Brouwer auf den von ihm (Math. Ann. **71**; F. d. M. **42**, 417, 1911) eingeführten Begriff des „Abbildungsgrades". Ferner wird hierbei ein Hülfssatz benutzt, den auch Lebesgue bei seinem Beweisansatz (Math. Ann. **70**) zum Theorem von der Erhaltung der Dimensionszahl verwendet hat. Doch zeigt Brouwer, daß der Beweis des Hülfssatzes bei Lebesgue eine Lücke aufweist. Bl.

L. E. J. Brouwer. Sur la notion de „classe" de transformations d'une multiplicité. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 9-10.

„Es seien μ und μ' zwei geschlossene Mannigfaltigkeiten. Wir sagen von zwei eindeutigen und stetigen Darstellungen von μ und μ', sie gehören zu derselben Klasse, wenn wir von der einen zur andern mittels einer stetigen Modi-

fikation gelangen können. Die Darstellungen derselben Klasse besitzen alle denselben Grad (Math. Ann. **71**, 97-115; F. d. M. **42**, 417, 1911); das Merkwürdige ist aber, daß in einer großen Zahl von Fällen die Umkehrung dieses Satzes auch noch gilt, eine Eigenschaft, deren Nachweis ich kurz für den Fall andeuten will, wenn μ und μ' alle beide Kugeln sind." Lp.

L. E. J. Brouwer. Eenige opmerkingen over het samenhangstype η. Amst. Ak. Versl. **21**, 1412-1419.

In der Terminologie des Verf. besitzen zwei Mengen denselben „Zusammenhangstypus", wenn sie sich eineindeutig und stetig aufeinander abbilden lassen, und denselben „geometrischen Typus", wenn diese Abbildung überdies gleichmäßig stetig ist. Es wird gezeigt, daß alle mehrfach geordneten, abzählbaren und überall dichten Mengen denselben Zusammenhangstypus besitzen, nämlich den Typus η der rationalen Zahlen. Weil bei diesen Mengen vom Begriff des geometrischen Typus keine Rede sein kann, so kommt für sie die Invarianz der Dimensionenzahl in Fortfall. Sodann beweist der Verf. folgendes geometrische Theorem: „Wenn im Innern eines n-dimensionalen Kubus zwei abzählbare, überall dichte Punktmengen gegeben sind, so lassen sie sich ineinander überführen mittels einer eineindeutigen und stetigen Transformation des Kubus einschließlich der Grenze in sich." Brw.

É. Borel. Les ensembles de mesure nulle. S. M. F. Bull. **41**, 1-19.

Eine Punktmenge M wird „regulär" genannt, wenn sie sich in folgender Weise definieren läßt: Es sei $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ eine abzählbare Punktmenge, die als „Menge der Fundamentalpunkte" bezeichnet werden möge, und $C_1^{(h)}$, $C_2^{(h)}, \ldots, C_n^{(h)}$ für jedes ganze positive h eine abzählbare Menge von Quadraten, deren Flächeninhalte eine konvergierende Reihe bilden, während $C_n^{(h)}$ in seinem Inneren $C_n^{(h+1)}$ enthält und sich für festes n und unbeschränkt wachsendes h auf A_n zusammenzieht. Wenn noch die Vereinigungsmenge von $C_1^{(h)}, C_2^{(h)}, \ldots$ mit E_h bezeichnet wird, so wird M als der gemeinsame Durchschnitt aller E_h definiert. Der Verf. zeigt zunächst, daß jede Punktmenge vom Maße Null in einer regulären Punktmenge enthalten ist, wendet sich darauf zum Studium derjenigen regulären Punktmengen, welche in einem Bereiche überall dicht liegen, und stellt folgendes Lemma auf: „Es seien C und C' zwei kongruente Kreise, A und B zwei abzählbare Punktmengen, von denen die erste auf C und im Inneren von C, die zweite auf C' und im Inneren von C' überall dicht liegt, und ε eine beliebig klein vorgegebene positive Zahl; alsdann lassen die Punkte von A und B sich derart numerieren, daß für jedes p und jedes q: $1-\varepsilon < \frac{A_p A_q}{B_p B_q} < 1+\varepsilon$." Der von diesem Lemma gegebene Beweis ist nicht stichhaltig: damit die S. 9 des Aufsatzes entwickelte Konstruktion sich unbeschränkt fortsetzen lasse, genügt es nicht, bei jedem Schritt die Bedingung zu erfüllen, daß die Verhältnisse der Längen der sich entsprechenden Seiten des bis dahin konstruierten Bereichs zwischen $(1-\varepsilon_1)\ldots(1-\varepsilon_n)$ und $(1+\varepsilon_1)\ldots(1+\varepsilon_n)$ liegen; denn wenn für das Verhältnis der Abszissen- und Ordinatendifferenzen

von zwei willkürlichen sich entsprechenden Eckpunktepaaren der vollständigen Bereichsysteme nicht dasselbe der Fall ist, kann es sehr gut vorkommen, daß bei Fortsetzung der Konstruktion auch den vom Verf. vorgeschriebenen Bedingungen nicht mehr genügt werden kann. Anders ausgedrückt, der Verf. beachtet bei der Wahl eines neuen Punktes A_n nur die Abszisse und die Ordinate von A_n, während in Wirklichkeit die Abszissen der Punkte des Kreisumfanges, welche dieselbe Ordinate wie A_n, und die Ordinaten der Punkte des Kreisumfanges, welche dieselbe Abszisse wie A_n besitzen, auf die Fortsetzbarkeit der Konstruktion ebensogut von Einfluß sind. Das Lemma ist indessen richtig und kann leicht bewiesen werden mittels der Abbildung, welche Ref. zur Begründung des am Schlusse des vorstehenden Referates formulierten Theorems benutzt hat. Aus dem Lemma zieht der Verf. die Folgerung, daß zu einer willkürlichen regulären Punktmenge R, deren Menge der Fundamentalpunkte B im Inneren von C überall dicht liegt, eine reguläre Punktmenge S existiert, deren Menge der Fundamentalpunkte A im Inneren von C überall dicht liegt, und welche der Menge R eineindeutig und stetig mit einem zwischen $1-\varepsilon$ und $1+\varepsilon$ schwankenden Ähnlichkeitsverhältnis entspricht. Im Schlußparagraphen schlägt der Verf. eine auf das asymptotische Dekrement der einschließenden Intervalle gegründete Klassifizierung der regulären Punktmengen vor und zieht die physikalische Folgerung, daß die Hypothese, die Gleichgewichtslagen der Schwerpunkte der Moleküle eines festen Körpers bilden eine überall dichte Punktlage, gleichwertig ist mit der Annahme, daß dieselben mit der Menge der rationalen Punkte zusammenfallen.

Brw.

St. Mazurkiewicz. O arytmetyzacyi continuów. (Über die Arithmetisierung der Kontinua.) Warschauer Ges. der Wissensch. Sitzber. 6, 306-310.

Es sei im n-dimensionalen Raume ein Kontinuum Γ gegeben. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit dieses Kontinuum eine Jordansche Kurve sei, d. h. durch stetige Funktionen eines Parameters t in einem gewissen Intervalle (t_0, t_1) dargestellt werden könne, lassen sich folgenderweise formulieren:

1. Das Kontinuum liegt ganz im Endlichen.

2. Je zwei seiner Punkte können durch einen einfachen Jordanschen Kurvenbogen verbunden werden, d. h. durch einen Kurvenbogen ohne mehrfache Punkte.

3. Der „Durchmesser" eines solchen Kurvenbogens AB, d. h. die größte Entfernung zweier seiner Punkte, konvergiert gegen Null, wenn B an A heranrückt.

Aus der letzten Bedingung folgt sofort die gleichmäßige Konvergenz des Durchmessers gegen Null mit der Entfernung AB. Bekanntlich hat Schoenflies in seinem Berichte (zweiter Teil 1908) andere notwendige und hinreichende Bedingungen aufgestellt. Neuerdings hat H. Hahn mit Hülfe des Begriffes des „Zusammenhanges im Kleinen" einer Punktmenge gleichfalls von den Bedingungen des Verf. verschiedene notwendige und hinreichende Bedingungen aufgestellt (Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1914).

A. R.

D. König. Zur Analysis situs der Doppelmannigfaltigkeiten und der projektiven Räume. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 129-133.

„In diesem Vortrage beabsichtigen wir die projektiven Räume einer beliebigen Dimensionszahl in bezug auf ihre Ein- und Zweiseitigkeit zu untersuchen, und zwar so, daß die Resultate, soweit als möglich, mittels der kombinatorischen Methoden der Analysis situs abgeleitet werden. Dabei werden auch gewisse allgemeinere Resultate über sogenannte Doppelmannigfaltigkeiten bewiesen.“ Der Aufsatz bewegt sich in dem Gedankenkreise der Abhandlung „Über Ein- und Zweiseitigkeit mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten“ (F. d. M. **43**, 571, 1912); er gipfelt in dem Satze: Der n-dimensionale projektive Raum ist einseitig für gerades n, zweiseitig für ungerades n, ein Ergebnis, das in der angeführten Abhandlung ausführlich nur für $n = 2$ und $n = 3$ bewiesen ist.

Lp.

O. Veblen and J. W. Alexander II. Manifolds of n dimensions. Annals of Math. (2) **14**, 163-178.

In ganz ähnlicher Weise wie Poincaré seine „Bettischen“ Zahlen $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}$ einführt, wird hier unter Benutzung eines Gedankens von H. Tietze ein anderes System $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_{n-1}$ von Analysis-situs-Invarianten einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit abgeleitet aus gewissen, ähnlich wie bei Poincaré gebildeten Matrizen, die die Mannigfaltigkeit völlig kennzeichnen. Diese Zahlen R_k, für die ein Dualitätsgesetz und eine Eulersche Regel ähnlich wie für die P_k gilt, können indessen auch aus den Poincaréschen Invarianten, nämlich aus den P_k und aus den sogenannten Torsionszahlen abgeleitet werden, stellen also keine neuen Invarianten dar. Die Arbeit kann als eine Einführung in die Schriften Poincarés über Analysis situs angesehen werden.

Bl.

H. Bohr. Om Addition af uendelig mange konvekse Kurver. (Über die Addition unendlich vieler konvexen Kurven.) Kopenhagen, Overs. 1913, 325-366.

Bei einer Untersuchung über gewisse, in der analytischen Primzahltheorie vorkommende Funktionen war der Verf. zu dem geometrischen Probleme geführt: zu untersuchen, welche Punktmenge durch „Addition“ unendlich vieler geschlossenen konvexen Kurven entsteht (wo eine Punktmenge der Ebene M als entstanden durch Addition z. B. zweier Punktmengen M_1 und M_2 bezeichnet wird, wenn M aus den Punkten besteht, die durch Addition eines willkürlichen Punktes in M_1 und eines willkürlichen Punktes in M_2 entstehen). Nach einer kürzeren allgemeinen Untersuchung (in § 1) über die Addition unendlich vieler willkürlichen Punktmengen behandelt der Verf. in § 2 die Addition zweier willkürlichen geschlossenen konvexen Kurven und findet als Hauptresultat, daß die durch Addition zweier solcher Kurven entstandene Punktmenge ein Bereich ist, der entweder von einer einzelnen geschlossenen konvexen Kurve begrenzt ist oder von zwei solchen, von welchen die eine die andere umschließt; es wird erörtert, wann der eine und wann der andere Fall eintrifft. In § 3 wird dieses Resultat verallgemeinert, erst zu Additionen einer willkürlichen endlichen Anzahl konvexer Kurven, dann (durch einen Grenzübergang) zu Additionen, bei denen

die Anzahl der konvexen Kurven unendlich groß ist. Der Abhandlung ist eine französische Übersicht beigefügt. P. H.

V. Strazzeri. Sul significato analitico dell' espressione punti interni ad un poligono semplice. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 216-220.

Zuerst wird der Satz bewiesen: Es seien zwei Punkte M, N gegeben, die nicht zu einem gegebenen Polygon gehören. Man verbinde M mit N mittels eines polygonalen Zuges, der durch keine Ecke des Polygons geht. Wenn ein solcher polygonaler Zug das Polygon in einer ungeraden (geraden) Anzahl von Punkten trifft, so trifft jeder andere so geführte polygonale Zug es immer in einer ungeraden (geraden) Anzahl von Punkten. Zwei nicht zum Polygon gehörige Punkte gehören zu derselben Klasse, wenn ein sie als Endpunkte verbindender polygonaler Zug das Polygon in einer geraden Anzahl von Punkten trifft. Endlich wird aus diesen Sätzen geschlossen: Klasse äußerer Punkte des Polygons heißt die, welche die Punkte von größeren Abszissen umfaßt als die der Ecken des Polygons; die andere heißt Klasse der inneren Punkte. Lp.

L. Bieberbach. Über den Jordanschen Kurvensatz, die Schoenfliesschen Sätze von Erreichbarkeit und Unbewalltheit und den Satz von der Invarianz des ebenen Gebietes. Deutsche Math.-Ver. **22**, 144-153.

Es werden zwei Gebiete konstruiert (Gebiet = zusammenhängende Punktmenge aus lauter inneren Punkten), die alle in einer gewissen Nachbarschaft einer Jordan-Kurve gelegenen Punkte enthalten und überdies die Eigenschaft haben, daß jedes der beiden Gebiete Punkte in beliebiger Nähe jedes Kurvenpunktes enthält. Damit ist gezeigt: Eine Jordan-Kurve „bestimmt" höchstens zwei Gebiete, und: Sie ist mit der vollen Grenze jedes bestimmten Gebiets identisch. Der dritte noch ausständige Punkt der von Schoenflies herrührenden und auch von L. E. J. Brouwer (Math. Ann. **69**; F. d. M. **41**, 544, 1910) bei seinem eleganten Beweis des Jordan-Satzes benutzten Formulierung des Jordanschen Satzes, daß nämlich eine Jordan-Kurve mindestens zwei Gebiete bestimmt, wird von Bieberbach mittels eines die Jordan-Kurve approximierenden Polygons erledigt. Dieser Beweis hat den Vorteil, daß sich aus ihm die Eigenschaften der „Erreichbarkeit" und „Unbewalltheit" einer Jordan-Kurve ohne weitere Mühe unmittelbar ergeben. Bl.

G. Andreoli. Sulle curve limiti di poligonali. Batt. G. **51** [(4) **3**], 41-56.

Es werden „Kurven" betrachtet, die durch Grenzübergang aus Polygonen ableitbar sind, und Bedingungen aufgestellt für Stetigkeit, Rektifizierbarkeit und Quadrierbarkeit dieser Grenzkurven. Ferner werden mit Hülfsmitteln, die von Peano und H. v. Koch herrühren, stetige Kurven konstruiert, die ein Quadrat ausfüllen und durch jeden Punkt des Quadrats unendlich oft hindurchgehen. Bl.

H. Brunn. Über Kerneigebiete. Math. Ann. **73**, 436-440.

Es sei M eine beschränkte und abgeschlossene Punktmenge im n-dimensionalen Raume. Hat ein Punkt k die Eigenschaft, daß jede Gerade durch k die Menge M entweder in allen Punkten einer Strecke oder in einem einzigen Punkte trifft, so nennt Brunn k einen Kernpunkt von M, und alle Kernpunkte bilden den „Kern" K von M. Es wird gezeigt, daß K (wenn es überhaupt existiert) eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge von M ist. $K = M$, wenn M selbst schon konvex ist. Es werden einfache Beispiele angegeben, für die K existiert und $K \neq M$. Bl.

H. Hahn. Über die Abbildung der Strecke auf ein Quadrat. Annali di Mat. (3) **21**, 33-55.

„Daß eine solche Abbildung, und zwar umkehrbar eindeutig, möglich sei, war eines der ersten Resultate von Cantors Mengenlehre. Es wurde bald dahin ergänzt, daß eine solche eineindeutige Abbildung nicht stetig sein kann. Wir konstruieren hier in sehr allgemeiner Weise solche Abbildungen, bei denen die Abszisse des Quadratpunktes stetig mit dem Punkte der Strecke variiert."

„G. Peano gelang es, eine stetige Abbildung der Strecke aufs Quadrat anzugeben: wie schon erwähnt, kann ihre Umkehrung nicht eindeutig sein. Wir verschärfen hier diese Tatsache dahin, daß bei jeder stetigen Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat diejenigen Punkte des Quadrats, denen mindestens zwei Punkte der Strecke entsprechen, eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums bilden, und daß es eine im Quadrat überall dicht liegende Menge von Punkten gibt, denen mindestens drei Punkte der Strecke entsprechen." Diese letzte Tatsache ist, wie der Verf. nachträglich bemerkt hat, schon früher von Lebesgue ohne Beweis mitgeteilt worden (Math. Annalen **70**; F. d. M. **41**, 419 u. 1032, 1910).

„Wir zeigen endlich, wie die Peanosche Abbildung so abgeändert werden kann, daß einem Punkte des Quadrats niemals mehr als drei Punkte der Strecke entsprechen." (Vgl. G. Pólya, S. 551 dieses Bandes.) Bl.

Z. Janiszewski. Über die Begriffe „Linie" und „Fläche". Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 126-128.

„Mein Referat hat einen ganz negativen Charakter: ich will nur einige kritische Bemerkungen über den heutigen Stand einer Frage mitteilen und keine Lösung derselben." Die Kritik der bisher versuchten Definitionen der Begriffe Linie und Fläche führt zu dem Ergebnis, man könne von keiner Definition behaupten, daß sie allgemeingültig sei. Lp.

J. Pál. Über die Existenz einer Jordan-Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ bei vorgeschriebenem $\varphi(t)$. J. für Math. **143**, 294-299.

Eine von L. Fejér aufgeworfene Frage wird hier in einfacher Weise beantwortet: Ist eine stetige Funktion $\varphi(t)$ von der Periode 2π vorgeschrieben, so kann man dann und nur dann eine zweite stetige Funktion $\psi(t)$ mit der Periode 2π auffinden, so daß durch die Gleichungen $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$ die Parameterdarstellung einer Jordan-Kurve mit der „Umlaufzeit" 2π

geliefert wird, wenn die Funktion φ die Eigenschaft hat, daß die Stellen, an denen sie ihren allergrößten Wert annimmt, von den Stellen, an denen sie ihren allerkleinsten Wert annimmt, nicht getrennt werden. Dabei möge man sich die Funktionswerte von $\varphi(t)$ auf einem Einheitskreise mit t als Bogenlänge aufgetragen denken. Bl.

A. Emch. Some properties of closed convex curves in a plane. Amer. Journ. **35**, 407-412.

A. Emch. On closed continuous curves. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 221-222 u. **20**, 27-29.

Es wird in dem ersten Aufsatze gezeigt, daß sich in jede geschlossene Kurve mindestens ein Quadrat einschreiben läßt. Der zweite behandelt die umgekehrte Aufgabe, die Parametergleichungen aller stetigen Kurven zu finden, die durch die Ecken eines beliebigen Quadrates in der Ebene gehen. Bezeichnet man mit t einen Parameter, so kann die Gleichung einer solchen Kurve immer in der Form geschrieben werden (vereinfacht auf S. 27 der zweiten Stelle):

$$(1)\qquad x = p + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cos(2\pi t/\omega + \theta) + \Pi \sin\{2\pi t/\omega - \tfrac{1}{8}(2k+1)\omega\}F(t),$$
$$y = q + \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\cos(2\pi t/\omega + \theta) + \Pi \sin\{2\pi t/\omega - \tfrac{1}{8}(2k+1)\omega\}\, G(t),$$

wo $k = 0, 1, 2, 3$ und $F(t)$ sowie $G(t)$ einwertige stetige Funktionen von t sind. Falls diese periodisch sind (mit derselben Periode ω), ist die durch (1) definierte Kurve geschlossen. Jede geschlossene stetige Kurve durch die Ecken eines Quadrates kann daher in der Form (1) dargestellt werden. Wenn nun gezeigt wird, daß die Parametergleichungen jeder geschlossenen Kurve (2) $x = \varphi(t'), y = \psi(t')$, wo $\varphi(t')$ und $\psi(t')$ beliebige periodische Funktionen von t' mit derselben Periode sind, durch eine geeignete Transformation von t' in t in die Gleichungen (1) übergeführt werden können, so ist bewiesen, daß jede geschlossene Kurve mindestens ein eingeschriebenes Quadrat zuläßt. Lp.

W. Blaschke. Die Minimalzahl der Scheitel einer geschlossenen konvexen Kurve. Palermo Rend. **36**, 220-222.

Eine geschlossene und konvexe Kurve K von stetiger und nirgends verschwindender Krümmung kann durch parallele Tangenten eineindeutig und stetig auf einen Kreis K' abgebildet werden. Belegt man nun K' derart mit Masse, daß die Dichte an jeder Stelle P' von K' gleich dem Krümmungsradius im zugehörigen Punkt P von K wird, so fällt der Schwerpunkt dieser Massenbelegung in den Mittelpunkt von K'. Daraus ergibt sich in einfachster Weise ein Beweis für die bekannte (vgl. A. Kneser in der H. Weber-Festschr. S. 170; F. d. M. **43**, 463, 1912) Tatsache daß auf K mindestens vier verschiedene Punkte („Scheitel") liegen müssen, in denen die Krümmung von K einen extremen Wert annimmt. Bl.

F. Lefschetz. On some topological properties of plane curves and a theorem of Möbius. Amer. Journ. of Math. **35**, 189-200.

Im wesentlichen ist diese Arbeit der Anwendung der Inversion auf eine topologische Kurvenforschung gewidmet. Zunächst erhalten einige wohlbekannte Eigenschaften offener oder geschlossener Zweige neue Beweise. Dann folgt eine Besprechung der Krümmung zum Zwecke der Anwendung auf Wendepunkte gewisser Äste mittels einer Inversion. Danach wird eingehend eine Untersuchung geschlossener Zweige angestellt, die einen einzigen singulären Punkt von der Vielfachkeit k haben. Eine Darstellung eines derartigen Systems wird mittels einer Skizze gegeben, deren Hauptsache in der Bildung gewisser Vielecke besteht, die zu Ecken die eines regelmäßigen Vielecks von k Seiten haben. Mit Hülfe einiger einfachen Eigenschaften solcher Vielecke wird für den Fall $k = 2n + 1$ dann ein Satz bewiesen, der, wie sich zeigt, dem Satze von Möbius gleichwertig ist, der 3 als die Mindestzahl von Wendepunkten eines ungeraden Zweiges ohne irgendwelche vielfachen Punkte angibt. In Wahrheit besteht die Vorstellung darin, daß für eine Kurve, die unendliche Äste hat, eine gesetzt wird, die in endlicher Entfernung liegt. Möbius bewirkte dies durch Projektion ebener Kurven auf eine Kugel; der Verf. erhält dieselben Ergebnisse mittels der Inversion der Kurve in bezug auf einen Pol, durch den sie nicht geht.

Lp.

H. Tietze. Über einfach zusammenhängende Flächen und ihre Deformationen in sich. Wien. Ber. **122**, 1653-1658.

Der Verf. hat in Palermo Rend. **38**, 247-304, 1914 (Über stetige Abbildungen einer Quadratfläche auf sich selbst) einen allgemeinen Satz bewiesen, aus dem hier einige Folgerungen gezogen werden. Zum Beispiel: „Irgend zwei geschlossene ebene Jordansche Kurven lassen sich ineinander überführen durch eine in einem beschränkten Teil der Ebene sich abspielende stetige Deformation der Ebene in sich.“ „Liegt eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung zweier ebenen Jordanschen Kurven vor ..., so läßt sich diese Abbildung zu einer eindeutigen und stetigen Abbildung der ganzen Ebene auf sich selbst erweitern.“

Bl.

C. Juel. Über Elementarflächen. Deutsche Math.-Ver. **22**, 345-350.

Dem Verf. ist es gelungen, eine große Zahl von Eigenschaften algebraischer Kurven auf ebene, nichtanalytische Kurven zu übertragen und damit die wahren Quellen dieser Eigenschaften aufzudecken. Diese nichtanalytischen Kurven werden aus einer endlichen Anzahl von Elementen, nämlich konvexen, eckenfreien Kurvenbogen aufgebaut und dadurch klassifiziert, daß die Maximalzahl der Schnittpunkte mit einer Geraden (die „Ordnung“ der Kurve) vorgeschrieben wird. Versucht man nun diese Untersuchungsrichtung auf die räumliche Geometrie der krummen Flächen auszudehnen, so ergibt sich eine erste Schwierigkeit in der Wahl der Elemente, da der Aufbau aus konvexen Flächenstücken offenbar zu speziell ist. Es stellt sich als zweckmäßig heraus, als Elementarflächen Flächenstücke dritter „Ordnung“ zu benutzen. Eine geschlossene und stetig differenzierbare Fläche, die aus endlich vielen Elementarflächen zusammengesetzt ist, ergibt nämlich durch Schnitt mit einer Ebene oder bei Zentralprojektion als Umriß eine ebene Kurve von der früher betrachteten besonderen Art. Es werden einige Eigenschaften dieser Flächen hergeleitet.

Bl.

K. Zindler. Über geschlossene Raumkurven. Deutsche Math.-Ver. **22**, 329-330.

Vorläufige Mitteilung betreffend Untersuchungen über solche einzügigen geschlossenen und ganz im Endlichen verlaufenden Raumkurven, die in jedem Punkt eine einzige, sich stetig ändernde Tangente und Schmiegungsebene besitzen, und für welche die Zahl der Schnittpunkte mit einer Ebene eine feste Grenze (Familie der Kurve genannt) hat. Stz.

E. Busche. Eine Verallgemeinerung der Streckenteilung. Hamb. Mitt. **5**, 70-82.

Wenn vier Parallelogramme $a_{ik}(i, k = 1, 2)$ in einem Punkte T zusammenstoßen und aneinander anschließen, so bilden die vier gegenüber T liegenden Ecken die Ecken eines fünften Parallelogramms a, wobei $a = \Sigma a_{ik}$ (die a bedeuten zugleich die Inhalte). Ist das Parallelogramm a gegeben, so darf eines der a_{ik} beliebig angenommen werden, worauf die übrigen dann eindeutig bestimmt sind. Der Verf. betrachtet diesen Satz, den er in seiner Abhandlung über die Theorie der biquadratischen Reste benutzt hat (J. für Math. **141**, 146-161; F. d. M. **43**, 246, 1912), als ein Analogon davon, daß eine Strecke in zwei Teilstrecken zerlegt werden kann, und beschäftigt sich mit der gemeinten Parallelogrammteilung aus diesem Gesichtspunkte. Die Teilungshyperbel, der Ort des T bei gegebenem a, und der Zahlenwert nach gegebenem a_{12}. Harmonische und vollständig harmonische Teilungen. Konfiguration der zu diesen Teilungen gehörigen Teilungshyperbeln, usw. Die gewonnenen Resultate werden verallgemeinert, einmal dadurch, daß statt einer Vierteilung eine Neun-, Sechzehn-, n^2-Teilung des Parallelogramms eingeführt wird, dann aber auch durch Bezugnahme auf den dreidimensionalen Raum. Lp.

R. Weitzenböck. Sur les pentacycles. Batt. G. **51** [(3) **3**], 366-368.

C. Stephanos hat eine Konfiguration von 5 Kreisen im gewöhnlichen Raum betrachtet und sie „Pentazykel" genannt (C. R. **93**; F. d. M. **13**, 597, 1881). C. Segre hat eine Konfiguration von 5 „assoziierten" Ebenen im projektiven vierdimensionalen Raum untersucht (Palermo Rend. **2**; F. d. M. **20**, 666, 1888). Weitzenböck bildet die beiden Figuren mittels stereographischer Projektion aufeinander ab und zeigt auf diesem Wege, daß es Pentazykel mit 5 reellen Kreisen gibt. Bl.

B. Mullemeister. Over de configuraties $(8_4, 8_4)$ van punten en vlakken en de tetraeders van Möbius. (Über die Konfigurationen $(8_4, 8_4)$ von Punkten und Ebenen und die Tetraeder von Möbius.) Diss. Utrecht.

Im Anschluß an eine Arbeit von Martinetti (F. d. M. **28**, 424, 1897) behandelt der Verf. im ersten Kapitel alle möglichen Konfigurationen $(8_4, 8_4)$

von Punkten und Ebenen. Das zweite Kapitel gibt eine nähere Betrachtung der Möbiusschen Tetraeder, während das dritte Kapitel einige Spezialfälle dieser Konfigurationen enthält. Schn.

M. Beloch. Sulla configurazione delle curve situate sopra quadriche, e, in particolare, sulla configurazione delle curve algebriche sghembe col massimo numero di circuiti. Rom. Acc. L. Rend. **22**$_2$, 60-67, 95-97.

Die beiden Noten schließen sich in Fragestellung und Methode eng an Hilberts Arbeit „Über die reellen Züge algebraischer Kurven“ aus Math. Ann. **38** an (F. d. M. **23**, 753, 1891). Die projektive Ebene wird durch einen paaren Kurvenzug (es kommen hier und im folgenden nur Kurven ohne mehrfache Punkte in Betracht) in zwei Gebiete eingeteilt, die topologisch verschieden sind, indem das eine (innere) ein einfach zusammenhängendes Flächenstück, das andere (äußere) eine einseitige Fläche darstellt. Auf einer Fläche zweiter Ordnung mit hyperbolischer oder parabolischer Krümmung hat man wie in der Ebene paare und unpaare Züge zu unterscheiden. Die paaren Züge aber zerfallen wieder in zwei Arten, nämlich solche, die sich in einen beliebigen Punkt zusammenziehen lassen (Züge erster Art), und solche, bei denen dies nicht möglich ist (Züge zweiter Art). Durch einen Zug erster Art wird die Fläche in zwei Gebiete zerlegt, von denen wieder das eine (innere) sich durch den einfachen Zusammenhang von dem andern unterscheidet. Hilbert nennt l Paare einander nicht schneidender Züge einer ebenen Kurve „ineinander eingeschachtelt“, wenn von je zwei Zügen allemal der eine im inneren Gebiet des andern verläuft, und er beantwortet die Frage nach dem Maximum von l für solche algebraischen Kurven, die bei gegebener Ordnung n zugleich die Maximalzahl von Zügen überhaupt (d. i. $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$) besitzen. Die Definition der Einschachtelung läßt sich ohne weiteres auf die paaren Züge erster Art bei Kurven auf Flächen zweiter Ordnung mit hyperbolischer oder parabolischer Krümmung übertragen. Bei den elliptisch gekrümmten Flächen, bei denen überhaupt nur paare Züge erster Art existieren, bedarf sie einer kleinen Modifikation, weil hier die beiden Gebiete, in welche die Fläche zerlegt wird, sich topologisch nicht unterscheiden. Die Fragen, welche Verf. für Kurven auf Flächen zweiter Ordnung beantwortet, sind in der Hauptsache die folgenden: „Welches ist das Maximum von l bei gegebener Ordnung n? Welches ist das Maximum von l, wenn noch gefordert wird, daß die Kurve zugleich das Maximum von Zügen überhaupt (d. i. $\frac{1}{4}(n-2)^2+1$) besitzt? Welches ist in dem einen oder andern Falle das Maximum für die Anzahl paarer Züge zweiter Art?“ Für die Kurven der Ordnungen $\leqq 6$ wird eine Klassifikation gegeben, wobei zwei Kurven zu derselben Klasse gerechnet werden, wenn sie in den 3 Anzahlen der paaren Züge erster Art, der paaren Züge zweiter Art, der unpaaren Züge übereinstimmen. Es werden alle vorkommenden Klassen aufgezählt, und für jede wird das Maximum von l bestimmt. Stz.

W. Fr. Meyer. Über neue Konfigurationseigenschaften von kubischen Raumkurven. Leipzig. Ber. **65**, 329-342.

K. Rohn. Einige Bemerkungen zu der Arbeit von Herrn W. Fr. Meyer „Über neue Konfigurationseigenschaften von kubischen Raumkurven." Leipzig Ber. **65**, 343-346.

Als Ausdehnung eines bekannten, von Lambert und Steiner herrührenden Satzes der Ebene über die den vier Teildreiecken eines vollständigen Vierseits umbeschriebenen Kreise auf den Raum, zugleich in projektiver Verallgemeinerung, wird der folgende Satz aufgestellt:

(I) „Es liege ein eigentliches, reelles, sonst beliebiges Fünfflach Ω vor, nebst einem Paare von (reellen oder konjugiert-komplexen) Punkten F_3, F_4, von denen keiner einer Ebene von Ω angehöre, und deren Verbindungsgerade keine Kante von Ω treffe. Läßt man von Ω je eine Ebene weg, so verbleibt ein Teiltetraeder T_r $(r = 1, \ldots, 5)$. Man beschreibe T_r diejenige eigentliche kubische Ordnungskurve c_r um, die noch durch F_3 und F_4 geht. Dann haben diese fünf kubischen Kurven c_r noch zwei weitere (reelle oder konjugiert-komplexe) Punkte F_1, F_2 gemein. Zugleich existiert eine eigentliche kubische Klassenkurve γ, die sowohl Ω, wie dem Tetraeder $(F_1 F_2 F_3 F_4)$ eingeschrieben ist." Entsprechend gilt der zu (I) dualistische Satz (I').

Der Beweis stützt sich auf einen Satz von Hurwitz (F. d. M. **14**, 559, 1882): (H) „Die 8 Ecken zweier, einer eigentlichen kubischen Raumkurve γ einbeschriebenen Vierflache (Tetraeder) liegen auf einer eigentlichen kubischen Raumkurve c. Zugleich existiert eine ∞^1-Schar solcher Tetraeder."

Im besonderen seien die Ebenen 1, 2, 3, 4 des einen der beiden Vierflache alle reell.

Die Ecken des zweiten Vierflaches seien F_1, F_2, F_3, F_4, wo F_1, F_2 und F_3, F_4 auch konjugiert-komplex sein dürfen; die Ebenen des Vierflaches seien E_1, E_2, E_3, E_4.

Man greife aus der Figur des Satzes (H) die Kurve γ, das Vierflach (1, 2, 3, 4) und das Eckenpaar F_3, F_4 des zweiten Vierflaches heraus. Die durch die sechs Punkte 1, 2, 3, 4, F_3, F_4 bestimmte kubische Kurve c geht dann von selbst auch durch F_1, F_2.

Man setze jetzt an Stelle des Vierflaches (1, 2, 3, 4) der Reihe nach jedes der fünf Teiltetraeder T_r eines γ umbeschriebenen Fünfflaches Ω. Ist c_r die entsprechende kubische Kurve, so geht jede dieser fünf Kurven c_r auch noch durch F_1, F_2.

Aus der so erweiterten Figur denke man sich γ entfernt, und nur Ω nebst F_3, F_4 beibehalten.

Dann entsteht γ hinterher als diejenige kubische Kurve, die Ω einbeschrieben ist und überdies die Gerade $g = (F_3, F_4)$ zur „Achse" besitzt.

Damit gelangt man aber zu der Gesamtfigur des Satzes (I) und ihren beiden Eigenschaften.

Der Satz (I) läßt eine Reihe bemerkenswerter metrischer Spezialisierungen zu. Zu dem Behuf wird vor allem der Brennpunktsbegriff von Kegelschnitten auf kubische Raumkurven γ übertragen. In der Ebene E_∞ liegt eine einzige Achse von γ, die „unendlich ferne Achse g_∞ von γ". Die beiden durch g_∞ an γ gehenden „Ebenen" seien Σ_1, Σ_2, die reell und verschieden oder aber konjugiert-komplex sind, je nachdem γ eine kubische Ellipse oder Hyperbel ist. Der Übergang wird durch die kubische „Semiparabel" gebildet.

Die Achse g_∞ trifft den „Kugelkreis" K in zwei „Kreispunkten" K_1, K_2, die jetzt an die Stelle der früheren Punkte F_3, F_4 treten. Die beiden zugehörigen

Punkte F_1, F_2 heißen dann die „Brennpunkte“ von γ, ihre (stets reelle) Verbindungsgerade f die „Brennachse (erster Art)“.

Hierbei sind nur die kubischen Parabeln auszuschließen.

Andererseits ist bekanntlich ein „kubischer Kreis“ k eine solche kubische Ellipse, die zwei (konjugiert-komplexe) Kreispunkte K_1, K_2 enthält; deren Verbindungsgerade sei k_∞. Läßt man jetzt F_3, F_4 mit K_1, K_2 zusammenfallen, so entsteht ein direktes räumliches metrisches Analogon zu dem Lambert-Steinerschen Kreissatze:

(II) „Man umschreibe jedem der fünf Teiltetraeder T_r eines Fünfflaches Ω einen kubischen Kreis k_r mit derselben unendlichfernen reellen Sehne g_∞.

Dann haben diese fünf kubischen Kreise k_r noch zwei weitere Punkte F_1, F_2 gemein, und diese sind die Brennpunkte derjenigen kubischen Klassenkurve γ, die Ω einbeschrieben ist und noch die Gerade g_∞ zur Achse besitzt.“

Dieser Satz (II) erhält eine spezifische Modifikation (IIa), wenn eine der Ebenen von Ω unbestimmt wird, und er erscheint dann als direkte Verallgemeinerung des Steinerschen Satzes der Ebene, wonach der Umkreis eines Dreiecks der Ort der Brennpunkte der dem Dreieck einbeschriebenen Parabeln ist. Andrerseits läßt der zum Hauptsatze dualistische Satz (I′) eine bemerkenswerte metrische Spezialisierung zu, indem man von den beiden Ebenen, die außer einem räumlichen Fünfeck Φ vorliegen, die eine als Ebene E_∞ wählt. Analog zu (IIa) kann man dann wieder eine Ecke von Φ unbestimmt werden lassen (II′a).

Den beiden Sätzen (II′, II′a) korrespondieren dann in der Ebene zwei andere, die in dieser Form neu zu sein scheinen.

Es wird noch eine zweite Art erwähnt, wie man den Satz (I′) mit Hülfe des Kugelkreises K metrisch spezialisiert. Zu dem Behuf bedarf man einer zweiten Übertragung des Brennpunktsbegriffes von Kegelschnitten auf kubische Raumkurven γ. Für eine solche Kurve γ (mit Ausschluß der kubischen Parabeln) existieren drei reelle, zueinander windschiefe „Brennachsen zweiter Art“ f_1, f_2, f_3 derart, daß für jede derselben das Paar der durch sie an γ gehenden Schmiegungsebenen ein Paar von Minimalebenen ist.

Im Satze (I′) mögen nun die beiden gegebenen Ebenen als die durch eine reelle Gerade f gehenden Minimalebenen gewählt werden.

Dann gilt der Satz (III′): „Jedem der fünf Teiltetraeder T_r eines Fünfecks Φ beschreibe man diejenige kubische Raumkurve γ_r ein, für die f eine Brennachse zweiter Art ist.

Dann oskulieren diese fünf Kurven γ_r noch zwei weitere Ebenen E_1, E_2, deren Schnittgerade e sei. Andrerseits geht eine weitere kubische Kurve c durch die fünf Ecken von Φ, die noch die Geraden f und e zu Sehnen besitzt. Zugleich werden die Paare der auf c gelegenen, in bezug auf c konjugierten Punkte von f aus durch eine rechtwinklige Ebeneninvolution projiziert.“

Die anschließende Arbeit von Rohn verfolgt den obigen Hauptsatz (I) im Zusammenhange mit tetraedralen Komplexen. Läßt man von den fünf Ebenen E_r eines Fünfflachs Ω die i-te weg, so verbleibt ein Teiltetraeder T_i. Übrigens sei eine beliebige Gerade g gegeben. Diese bestimmt mit jedem T_i einen tetraedralen Komplex $\mathfrak{K}_i$. Jeder Raumpunkt P ist Scheitel eines Komplexkegels K_i, dessen Kanten dem Komplex $\mathfrak{K}_i$ angehören.

Die fünf Komplexkegel K_i besitzen drei gemeinsame Kanten a_1, a_2, a_3. In einer Ebene E liegt dagegen im allgemeinen nur ein einziger derartiger Strahl a.

Es existiert dann eine kubische Raumkurve γ, so daß für irgendeinen Punkt P die drei Geraden a_1, a_2, a_3 die durch P an γ gehenden Achsen sind und die in irgendeiner Ebene E gelegene Gerade a eine Achse von γ.

Geht man daher aus von dem Fünfflach Ω, irgendeinem Raumpunkte P und einem beliebigen Strahle a_1 durch ihn, so besitzen die fünf Kegel K_i mit dem Scheitel P außer a_1 noch zwei weitere gemeinsame Kanten a_2, a_3. Die Ebenen des Dreikants $(a_1 a_2 a_3)$ nebst denen von Ω sind Schmiegungsebenen einer kubischen Raumkurve γ. Durch Projektion der ganzen Figur von P aus auf eine beliebige Ebene ergibt sich eine Desarguessche Konfiguration von 10 Punkten und 10 Geraden. Aus ihr lassen sich 5 Vierecke und 5 Vierseite herausgreifen, so daß jeweils deren 6 Seiten oder Ecken der Konfiguration angehören. Nimmt man noch einen beliebigen Punkt A hinzu, so bestimmt A mit den Ecken eines jeden Vierecks einen Kegelschnitt C_i, und diese 5 C_i haben noch zwei weitere Punkte B und C gemein. Zugleich werden die Seiten eines jeden Vierseits nebst den Seiten des Dreiecks ABC von einem Kegelschnitt k berührt.

Durch metrische Spezialisierung geht die Figur in eine entsprechende Kreisfigur über.

Kehren wir zur Raumfigur zurück, so gehen durch jeden Punkt von a_1 zwei Komplexgerade a_2, a_3. Durch die Wahl zweier Punkte F_3, F_4 auf a_1 ergeben sich so noch je zwei solcher Geraden a_2, a_3; a'_2, a'_3, die sich paarweise in F_1, F_2 schneiden. Dann ist $(F_1 F_2 F_3 F_4)$ ein Tetraeder, dessen Kanten allen Komplexen angehören.

Dieses Tetraeder erweist sich als das in dem Meyerschen Satze (I) auftretende, womit derselbe von neuem bewiesen ist. My.

E. Merlin. Sur les configurations planes n_4. Belg. Bull. Sc. 1913, 647-660.

Forschung über die Konfigurationen 13_4, 14_4, 15_4; sie sind nicht geometrisch. Die Kenntnis einer schematischen Konfiguration zieht die Kenntnis unendlich vieler schematischen Konfigurationen $(n+p)_4$ nach sich. Unter den Konfigurationen n_4 gibt es unendlich viele, die geometrisch sind. Mn. (Lp.)

M. Brückner. Über die Teilung des Raumes durch sechs Ebenen und die Sechsflache. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 35-38.

Der Verf. berichtet über die Fortsetzung seiner Untersuchungen, von denen er auf dem Kongreß in Rom Mitteilung gemacht hatte (F. d. M. **40**, 537, 1909), und die „einen vorher nicht vermuteten Umfang" angenommen haben, „so daß es mehrjähriger Arbeit bedurfte, das hier vorliegende Manuskript herzustellen". ... „Die Zahl aller beschriebenen zwei- und einseitigen allgemeinen Sechsflache beträgt 228, bzw. 109." Lp.

D. Birkhoff. The reducibility of maps. American J. **35**, 115-128.

Bei den Versuchen, den Vierfarbensatz zu beweisen oder zu widerlegen, wurde man zu einer Reihe von Sätzen geführt, welche lehren, daß man in vielen Fällen die Aufgabe der Färbung (nämlich mit 4 Farben) einer Gebietseinteilung einer Fläche vom Geschlecht 0 auf die einer andern Einteilung in weniger Gebiete zurückführen kann. Eine solche Reduktion ist z. B. möglich, wenn mehr als 3 Gebiete in einer Ecke zusammenstoßen, wenn ein Gebiet mit weniger als 5 Ecken vorkommt, oder wenn ein, zwei oder drei Gebiete ein mehrfach zusammenhängendes Flächenstück bilden; hieraus erhellt, daß, wenn der Vierfarbensatz falsch ist, eine ihm widersprechende Einteilung von kleinster Anzahl der Gebiete keine mehr als dreiflächigen Ecken, keine weniger als fünfeckigen Gebiete, keine mehrfach zusammenhängenden Flächen besitzen kann, die sich aus 1, 2 oder 3 Gebieten zusammensetzen. Man braucht sich also fernerhin nur mit solchen Einteilungen zu befassen, die die ebengenannten Bedingungen erfüllen. Solche Einteilungen nennt Verf. regulär. (Die Bezeichnung wird also in einem von dem üblichen ganz abweichenden Sinne gebraucht.) Seine Untersuchungen gehen darauf aus, zu zeigen, daß in vielen Fällen eine reguläre Einteilung nun noch weiter reduzierbar ist. Ist eine Einteilung gegeben, so wird durch zwei aus Grenzlinien gebildete, weder sich selbst, noch einander schneidende geschlossene Zügen eine Zone begrenzt. Gruppieren sich die in ihr enthaltenen Gebiete so zu einem Zyklus, daß jedes Gebiet mit dem vorangehenden und folgenden, aber mit keinem andern des Zyklus benachbart ist, so heißt die Zone ein Ring. Es wird gezeigt, daß das Färbungsproblem reduzierbar ist, wenn ein Ring von weniger als 5 Gebieten vorkommt. Neben diesen Ringen werden noch solche von 5 und 6 Gebieten näher untersucht, auch einige allgemeinere Betrachtungen schließen sich an. Ob dadurch das ursprüngliche Problem seiner Lösung nähergeführt wird, bleibt natürlich zweifelhaft. Stz.

Weitere Literatur.

J. W. Alexander II. Proof of the invariance of certain constants of analysis situs. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 68.

R. P. Baker. The topological configurations occurring in finite geometries. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 79-80.

G. A. Bliss. A method of subdividing the area enclosed by a plane curve, with an application to Cauchy's theorem. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 453.

S. Lefschetz. The base for the algebraic $(r-1)$-spread immersed in an r-spread, with some applications. Amer. Math. Soc. Bull. (3) **19**, 453-454.

C. Koehler. Über das Raumfünfeck und über die projektive Einteilung der durch ein Raumfünfeck bestimmten Polarfelder. 16. Abhandl. d. Heidelberger Sitzungsber. Heidelberg: C. Winter. 15 S. gr. 8°.

Referat in Abschnitt VIII, Kap. 5 A S. 607.

D. König. Über Ein- und Zweiseitigkeit mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. Math. és phys. lapok **22**, 40-52. (Ungarisch.)

Vgl. F. d. M. **43**, 571, 1912.

A. Szücs. Zwei Beiträge zur Theorie der einseitigen Flächen. Math. és termész. ért. **70**, 950-956. (Ungarisch.) 1912.

Kapitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

F. Klein. Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil II. Geometrie. Vorlesung gehalten im Sommersemester 1908. Ausgearbeitet von E. Hellinger. Zweite Auflage. Leipzig: B. G. Teubner. VIII u. 547 S. 4°. (Autograph.)

Auch der zweite Teil der Kleinschen Elementarmathematik hat in Fachkreisen die beifällige Aufnahme gefunden, die seines vielseitigen und anregenden Inhalts wegen zu erwarten war. Wesentliche Änderungen gegen die F. d. M. **40**, 538, 1909 eingehend besprochene erste Auflage sind nicht vorgenommen, nur haben im Text und im Anhang einige wenige Zusätze Aufnahme gefunden, die sich auf neue Modelle, auf die Grundlagen der Geometrie, auf die Beziehungen der Graßmannschen Gedankengänge zur Invariantentheorie beziehen, sowie endlich ein Bericht über die Einwirkung der Reformbewegung auf den Unterricht in der Geometrie. Sk.

O. Lörcher und E. Löffler. Methodisches Lehrbuch der Geometrie nebst Grundzügen der Trigonometrie. Stuttgart u. Berlin: F. Grub. XII u. 300 S. gr. 8°.

Das Buch gibt den üblichen Lehrstoff der höheren Schulen unter steter Betonung des anschaulichen Elements, mit zahlreichen Übungen und praktischen Anwendungen. Angefügt sind geschichtliche Belehrungen, in denen auch u. a. die Hilbertschen Axiome ihren Platz gefunden haben, natürlich nur auf der obersten Stufe und auch da mit Vorsicht zu verwenden. Sk.

R. Pyrkosch. Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe höherer Lehranstalten. Bielefeld u. Leipzig: Velhagen u. Klasing. XII u. 512 S. gr. 8°.

Das Werk behandelt den nicht zu knapp bemessenen Lehrstoff der Oberstufe in vielfach eigenartiger und fesselnder Art. Hervorgehoben sei die Behandlung der Geometrie, wo es danach strebt, die Fülle der Einzeltatsachen und Einzelmethoden unter einen Gesichtspunkt zu bringen. Daß damit der

Begriff der Projektion in den Mittelpunkt rückt, ist für den Sachkenner selbstverständlich. Auch in anderer Hinsicht ist das Buch modern, und es schließt mit einer kurzen Behandlung der Infinitesimalrechnung. Daß aber der Verf. dem leichtsinnigen Operieren mit schlecht verstandenen Begriffen nicht das Wort reden will, sieht man daraus, daß ihm für diesen Abschnitt Mangoldts prächtige „Einführung“ zum Vorbilde gedient hat. Sk.

E. Suppantschitsch. Mathematisches Unterrichtswerk. Lehrbuch der Geometrie und analytischen Geometrie. Für die VI. und VII. Klasse der Realschulen. Wien: F. Tempsky. 300 S. 8° mit 200 Fig. u. 786 Fragen u. Aufg.

Das für österreichische höhere Schulen verfaßte Lehrbuch enthält in drei Abschnitten die ebene und sphärische Trigonometrie und die analytische Geometrie der Ebene. Alle drei Teile zeichnen sich durch große Reichhaltigkeit aus. Die Theorie ist mit den Aufgaben dadurch in enge Verbindung gebracht, daß jedem wichtigen Abschnitt eine ausgeführte Musteraufgabe angefügt ist und oft praktische Rechenwinke gegeben werden. Lp.

H. Thieme. Leitfaden der Mathematik für Gymnasien. Zweiter Teil: Die Oberstufe. 3. Aufl. Leipzig: G. Freitag. 116 S. 8°.

Von der vorhergehenden Auflage unterscheidet sich diese nur durch Hinzufügung eines Paragraphen über Differentialquotient und Integral, Maxima und Minima der Funktionen. Ba.

A. Emmerich. Leitfaden und Übungsbuch der Stereometrie. Neubearbeitung der 10. Auflage von W. Minks Lehrbuch der Geometrie. II., Abt. B. Weinheim u. Leipzig: Fr. Ackermann. VIII u. 160 S. 8°.

Nach der ausführlichen Entwicklung der wichtigsten Sätze und Formeln folgt ein knapper Lehrtext und ein reiches Material von Übungsaufgaben. In zwei Anhängen sind Aufgaben, die auf kubische Gleichungen führen, und Beispiele für Maxima und Minima behandelt. Neben dem rechnerischen Verfahren wird auch auf graphische Lösungen hingewiesen. Lp.

G. Ascoli. Complementi di geometria per gli istituti tecnici. Livorno: Raffaello Giusti.

„Ein Buch, das mir wert zu sein scheint, der Aufmerksamkeit der Lernenden empfohlen zu werden wegen der Klarheit der Darstellung, der Strenge der Methoden, und weil es dem Verf. gelungen ist, mittels einer logischeren und natürlicheren Anordnung des Stoffes den Mangel der in den Programmen wurzelnden Zusammenhangslosigkeit abzuschwächen“ (C. Rosati. Periodico di Mat. **29** [(3) **11**, 47-48). Nach dieser Anzeige behandelt das Buch die elementare Geometrie der Ebene und der Kugelfläche, die Theorie der Polyeder,

die Kegelschnitte in elementarer, geometrischer Behandlung, die Transformation durch reziproke Radien und die Elemente der darstellenden Geometrie. Lp.

A. G. Cracknell. Junior geometry. London: W. B. Clive. University Tutorial Press Ltd. VIII u. 276 S. 8°.

Dieses Buch besteht aus 27 Kapiteln. Inhaltsverzeichnis: Geometrische Figuren. Winkel und Dreiecke. Leichte geometrische Konstruktionen. Parallelen und Parallelogramme. Geometrische Körper. Definitionen und Axiome. Winkel und Parallelen. Dreiecke. Parallelogramme. Aufgaben. Örter. Flächeninhalte. Aufgaben über Inhalte. Das rechtwinklige Dreieck. Der Kreis. Sehnen und Tangenten. Der Kreis: Winkeleigenschaften. Der Kreis: Aufgaben. Regelmäßige Vielecke. Die Zusammensetzung von Rechtecken. Rechteckssätze über Dreiecke und Kreise. Aufgaben über Rechtecke. Verhältnis und Proportion. Ähnliche Dreiecke. Proportionssätze über Inhalte. Aufgaben über Proportionen. Vermischtes. J. (Lp.)

Lambot et Cambier. Leçons de trigonométrie. Bruxelles: De Boeck. IV + 287 S. 4°.

Eine verbesserte Ausgabe der Trigonometrie des verewigten Cambier, die besonders wegen der jedes Kapitel begleitenden, abgestuften Übungsaufgaben zu empfehlen war. Lambot hat umsichtig die Vektorentheorie in das Cambiersche Buch eingeführt, ohne sie jedoch ausschließlich zu verwenden, und hat alle zu kurzen Kapitel ausführlicher entwickelt. Endlich hat er auch zahlreiche Aufgaben hinzugefügt. Mn. (Lp.)

J. Hjelmslev. Geometriske Eksperimenter. (Geometrische Experimente.) København: Jul. Gjellerup. 88 S. 8°.

Das Ziel dieses Buches ist eine Grundlage für geometrische Konstruktionen von einem weiteren Gesichtspunkte aus, als ihn die euklidischen Elemente geben. Das sogenannte Probieren wird an die Spitze gestellt als allgemeine systematische Methode, wogegen die sogenannten Konstruktionen mit Zirkel und Lineal als etwas Spezielles betrachtet werden. Die Bemerkung des Vorwortes, daß es sich hier um exakte Konstruktionen, nicht um Approximationen handelt, kann doch leicht zu Mißverständnissen Anlaß geben. Nach ganz einfachen Konstruktionen, wie Hälften und Dreiteilen von Strecken und Kreisbogen durch Probieren, wird unter anderem die Aufgabe gelöst: Die Schnittpunkte zwischen einem Kegelschnitt und einem Kreise zu bestimmen durch direktes Probieren mit dem Stechzirkel. Die Lösung beruht auf der Eigenschaft, daß jeder Punkt des Kegelschnittes denselben Abstand von einem festen Punkt und einem festen Kreis (oder einer geraden Linie) hat. Dadurch hat man eine allgemeine Grundlage für die Behandlung der Aufgaben des dritten und vierten Grades. Die Dreiteilung der Winkel und die Ausziehung der Kubikwurzel werden ausführlich behandelt; die Unmöglichkeit, diese Konstruktion mit Zirkel und Lineal auszuführen, wird bewiesen.

In einem folgenden Abschnitt wird gezeigt, wie alle Aufgaben dritten und vierten Grades mit einem dreischenkligen Zirkel gelöst werden können. Danach

folgen Schnittversuche (eine gebrochene Linie, deren Strecken einander gleich sind, so zu konstruieren, daß die Endpunkte der gebrochenen Linie in gegebene Punkte fallen, während die zwischenliegenden Eckpunkte auf gegebenen Kurven liegen). Einschiebungen und Verschiebungsversuche. Letztere bestehen darin, daß man durch unmittelbares Probieren eine gegebene Figur bis zu einer Stellung verschiebt, die gewisse gegebene Bedingungen befriedigt, und zwar dadurch, daß man die Figur auf ein Stück Pauspapier zeichnet und die richtige Stellung durch Probieren ermittelt. Diese Operation, die für viele spezielle Aufgaben Verwendung findet, wird in einem späteren Abschnitt als so umfassend erwiesen, daß sich jede Konstruktionsaufgabe aus dem algebraischen Gebiete durch solches Probieren in Verbindung mit Konstruktionen mit Zirkel und Lineal lösen läßt.

Der aus der Praxis bekannte Gebrauch von Reduktionswinkeln wird selbstverständlich ausführlich behandelt. Unter anderem nennen wir noch einige Methoden zur Bestimmung von Kegelschnitten in solchen Fällen, wo das Probieren auf eine besonders schnelle Bestimmung von Punktreihen abzielt. In einem darstellend-geometrischen Abschnitt werden unter anderem Aufgaben betreffs Rotationsflächen behandelt, z. B. Konstruktionen von Schnittkurven. Zuletzt folgt eine Theorie der Kreisevolvente und ihre Anwendung zur Lösung elementar-transzendenter Aufgaben (Keplersche Gleichung, Konstruktion einer Stufenscheibe). Außer der reichhaltigen Sammlung von Beispielen mit Lösungen enthält das Buch zugleich einige Übungsaufgaben. P. H.

P. Zühlke. Konstruktionen in begrenzter Ebene. Leipzig: B. G. Teubner. IV+40 S. 8°. (Math. Bibl. 11.)

Eine anregende Auswahl aus dem reichen Stoff, den der Verf. virtuos beherrscht. Das Büchlein und die Programmarbeit des Verf. von 1906 (F. d. M. 37, 512) ergänzen sich vielfach. Sk.

E. W. Hobson. On geometrical constructions by means of the compass. Math. Gazette 7, 49-54.

Nach den einleitenden scharfsinnigen Ausführungen über den Unterschied der abstrakten und der physischen Geometrie geht der Verf. auf die Bestimmung eines Punktes bei Euklid ein. Er unterscheidet drei Arten, nämlich Punkt als Schnittpunkt 1. zweier Geraden, 2. einer Geraden und eines Kreises, 3. zweier Kreise, und zeigt dann, daß die Bestimmungen der beiden ersten Arten durch die der dritten ersetzbar sind. Zu diesem Zwecke werden die Lösungen der folgenden 4 Aufgaben entwickelt: 1. P, A, B sind drei gegebene Punkte; das Spiegelbild von P an der Geraden AB zu finden. 2. Einen Punkt B' auf der Verlängerung von AB zu finden, so daß $AB' = 2AB$ oder ein ganzes Vielfaches von AB ist. 3. Den inversen Punkt P' zu P in bezug auf den Kreis mit A als Mittelpunkt, AB als Radius zu finden. 4. Den Umkreis der drei Punkte A, B, C zu finden. Am Schlusse dieses Vortrages, den Hobson als Vorsitzender der Jahresversammlung der Mathematical Association am 8. Januar 1913 in London gehalten hat, wird Geschichtliches über diese und verwandte Konstruktionen mitgeteilt. Lp.

D. Cauer. Über die Konstruktion des Mittelpunktes eines Kreises mit dem Lineal allein. Math. Ann. **74**, 462-464.

Von F. Schur darauf aufmerksam gemacht, daß die in der vorjährigen Arbeit (F. d. M. **43**, 583) als Nachtrag angefügte Konstruktion von J. Großmann für den Fall dreier gegebenen Kreise unrichtig ist, teilt er jetzt die von F. Schur und von Mierendorf ihm angegebenen Konstruktionen für diesen Fall mit, geht auch kurz auf den Fall von vier gegebenen Kreisen ein und weist auf die algebraische Behandlung dieser Aufgaben hin. Lp.

R. Sturm. Über den festen Kreis bei Aufgaben zweiten Grades. Deutsche Math.-Ver. **22**, 254-257.

Man findet bisweilen die Behauptung ausgesprochen, daß bei der Auflösung von Aufgaben zweiten Grades mit Hülfe eines festen Kreises sein Mittelpunkt gegeben sein müsse. Der Verf. weist darauf hin, daß dies nur bei den metrischen Aufgaben, nicht aber bei den projektiven Aufgaben zweiten Grades notwendig ist. Bei Parallelziehungen sei es vielleicht richtiger, statt des Kreises ein festes Parallelogramm zugrunde zu legen, das mittels des Zirkels oder besser mit Lineal und Dreieck hergestellt werden kann. Nur für metrische Aufgaben, die wirklich quadratisch sind, ist die Anwendung des festen Kreises mit Mittelpunkt berechtigt. Zch.

K. Ogura. Some theorems in the geometry of oriented circles in a plane. Tôhoku Math. J. **3**, 104-109.

Nach zyklographischen Methoden werden Untersuchungen von E. Müller (Deutsche Math.-Ver. **20**, 168-192; F. d. M. **42**, 528, 1911) weitergeführt. Vier schöne Figuren. B.

J. L. Coolidge. Two geometric applications of the method of least squares. American Math. Monthly **20**, 187-190.

Verf. gibt zwei einfache Beweise nebst Konstruktion für zwei in dem Buche von Vahlen, „Konstruktionen und Approximationen" (Leipzig 1911), auf S. 125 und 126 angeführte Sätze. Gd.

K. Hagge, W. Stegemann, H. Bodenstedt, C. Bökle. Lösungen geometrographischer Aufgaben. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 272-274, 320-324, 486-487, 562-563.

An den zuerst bezeichneten Stellen sind Lösungen früher gestellter Aufgaben gegeben. Aus dem Schlußwort, das an der letzten Stelle gegeben ist, geht hervor, daß die geometrographischen Aufgaben nicht mehr, wie in den drei letzten Jahrgängen, in der Zeitschrift Platz finden werden. Demnach möge der letzte Satz des Schlußwortes wiedergegeben werden: Durch geeignete Konstruktionen den Sinn der Schüler für die Schönheiten der Geometrie zu wecken, bei einem Mindestmaß der Mittel ein Höchstmaß der Leistung zu erzielen, die kürzeste Weise des logischen Aufbaus zu finden, den Gesetzen der

Symmetrie und Harmonie in weitestem Maße Rechnung zu tragen, das ist eine edle Kunst, deren Ausübung eines jeden Mathematikers nicht unwürdig sein sollte.

Lp.

K. HAGGE. Geometrographische Auflösungen dreier Aufgaben. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 77-81.

Konstruktion eines Dreiecks 1. aus den drei Höhen, 2. aus den Radien der drei Ankreise. 3. Sectio rationis.

Lp.

K. HAGGE. Geometrographische Untersuchung einer in „Wiskundig Tijdschrift" durch van Alderen mitgeteilten Achsenkonstruktion der Ellipse aus gegebenen konjugierten Durchmessern. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 167-173, 270-272.

Die geometrographische Lösung dieser Aufgabe befindet sich in dem „Leitfaden für die Vorlesungen über darstellende Geometrie" von Reinhold Müller. Nachdem der Verf. an der ersten Stelle sich eingehend mit der Konstruktion von van Alderen beschäftigt hat und bis zu ihrer geometrographischen Lösung vorgedrungen ist, beschäftigt er sich an der zweiten Stelle auch noch genauer mit der Lösung von R. Müller.

Lp.

K. HAGGE. Geometrographische Behandlung einer Aufgabe aus der Brocardschen Geometrie nebst Hinweis auf rationale Kurven hoher ungerader Ordnung. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 405-412.

Es handelt sich um die Aufgabe, ein Dreieck ABC zu konstruieren, von dem die Grundseite BC und der Lemoinesche Punkt L gegeben sind. Bewegt sich L auf gewissen vorgeschriebenen Kurven, so wird der Ort von A gefunden, und dergleichen mehr.

Lp.

K. HAGGE. Ableitung und geometrographische Konstruktion des Eckhardtschen Ähnlichkeitswinkels ε eines beliebigen Sehnenvierecks. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 482-485.

Über den Ähnlichkeitswinkel Eckhardts vgl. man F. d. M. **36**, 552, 1905.

Lp.

J. NEUBERG. Analogies entre la géométrie plane et celle de l'espace. Tôhoku Math. J. **4**, 96-104.

Sind AB und CD zwei parallele Strecken, M ein Punkt der Geraden CD, $CE \parallel AM$, $DF \parallel BM$, E und F Punkte der Geraden AB, so ist $EF = AB + CD$. Dieser Satz gestattet zwei Analogien in der räumlichen Geometrie: 1. Eine körperliche Ecke wird durch zwei parallele Ebenen in den Vielecken U und U' geschnitten. Verbindet man einen Punkt M der Ebene U mit den Ecken von U', und zieht man durch die entsprechenden Ecken von U die Parallelen zu den Ver-

bindungslinien, die in der Ebene U' die Ecken eines Vielecks U'' bestimmen, so ist $\sqrt{U''} = \sqrt{U} + \sqrt{U'}$. 2. Eine dreiseitige Ecke wird von zwei parallelen Ebenen in den Dreiecken $ABC = U$ und $A'B'C' = U'$ geschnitten. M sei ein Punkt der Ebene ABC. Die Ebenen, die man durch A, B, C parallel zu den Ebenen $MB'C'$, $MC'A'$, $MA'B'$ legt, bestimmen in der Ebene $A'B'C'$ ein Dreieck $A''B''C'' = U''$. Dann ist $\sqrt{U''} = \pm(2\sqrt{U} - \sqrt{U'})$.

Die Lösung der Aufgabe, einem gegebenen Dreieck ein zweites Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten denen eines andern gegebenen Dreiecks parallel sind, führt auf zwei verschiedene Lösungen der analogen Aufgabe für Tetraeder.

Gergonne hat den Satz aufgestellt: Wenn zwei Dreiecke entsprechende parallele Seiten besitzen und das kleinere ganz in dem größeren liegt, so ist der Inhalt eines dem inneren Dreieck um- und dem äußeren eingeschriebenen Dreiecks die mittlere Proportionale zu den Inhalten der gegebenen Dreiecke. Als Analogon dieses Satzes kann der folgende gleten: Es seien $ABCD = V$ und $A'B'C'D' = V'$ zwei Tetraeder mit entsprechenden parallelen Flächen, von denen das eine innerhalb des andern liegt. In den Ebenen von $A'B'C'D'$ nehme man vier Punkte A'', B'', C'', D'' an und setze $V'' = ABCD + A''BCD + AB''CD + ABC''D + ABCD''$. Dann ist $V'' = \sqrt[3]{V^2 V'}$.

Folgender Satz rührt von v. d. Griend jr. her: Sind A', B', C' die Projektionen der Ecken eines Dreiecks auf eine Gerade p, so bilden die Parallelen durch A', B', C' zu BC, CA, AB ein dem Dreieck ABC gleiches Dreieck. Zu diesem Satze gibt es zwei räumliche Analoga: 1. Durch die Ecken eines Tetraeders legt man 4 parallele Geraden, die eine gegebene Ebene in 4 Punkten schneiden. Die durch diese Punkte parallel zu den entsprechenden Ebenen des Tetraeders gelegten Ebenen bilden ein Tetraeder konstanten Volumens. 2. Durch die Ecken eines Tetraeders legt man 4 parallele Ebenen, welche eine gegebene Gerade in 4 Punkten schneiden. Die durch diese Punkte parallel den entsprechenden Ebenen des Tetraeders gelegten Ebenen bilden ein dem gegebenen Tetraeder symmetrisches Tetraeder. Zch.

R. Walckling. Der goldene Schnitt. Progr. (Nr. 377) Städt. Oberrealschule. Halle a. S. 32 S.

Die vorliegende Arbeit soll einen knapp gefaßten Überblick geben über die Gebiete, auf die der goldene Schnitt angewandt wurde, oder in denen er sich wunderbar offenbart. „Es war die Absicht, aus der Fülle dessen, was zum Teil schon in einer reichen Literatur niedergelegt ist, das herauszuheben, was heutzutage noch für uns allgemein von Interesse und Bedeutung ist.“ Im ersten Abschnitt werden im wesentlichen die bekannten Konstruktionen zur stetigen Teilung besprochen. Der zweite Abschnitt bringt die stetige Teilung in Geometrie und Stereometrie (regelmäßiges Zehneck, Fünfeck, Ikosaeder und Dodekaeder). Im dritten und letzten Abschnitt wird die ästhetische Bedeutung des goldenen Schnittes an mehreren Beispielen gezeigt (menschlicher Idealkörper Apolls von Belvedere, Blätter der Eiche, der Rose und des Efeus, Bauten der Perikleischen Periode, Sixtinische Madonna). Gd.

S. Wellisch. Das Strichmaß. Österr. Zeitschr. f. Vermessungswesen **11**, 304-310.

In der Ballistik und Schießpraxis ist die Messung der Winkel nach Strichen sehr verbreitet. Der Altstrich beträgt im Bogenmaß $\frac{1}{1000}$, im Winkelmaß 3′ 26″, der Großstrich $\frac{1}{750}$ (= 1 Meter: 1000 Schritte — beim österreichischen Heer —) oder 4′ 35″, der Neustrich $\frac{1}{1019}$ (= $\frac{1}{1600}$ des Quadranten; Abrundung des Altstrichs) oder 3′ 22,5″, der deutsche Strich $\frac{1}{917}$ (= $\frac{1}{1440}$ des Quadranten) oder 3′ 45″ = $\frac{1}{16}$°. Zwei Umwandlungstafeln sind beigefügt. Schr.

B. Sollertinsky. Sur les figures affines. Mathesis **33** [(4) 3], 169-177.

Synthetische Beweise von Eigenschaften affiner Figuren, im besonderen der metaparallelen Dreiecke. Zwei Dreiecke ABC, $A'B'C'$ heißen metaparallel, wenn die durch die Ecken des einen von ihnen zu den Seiten des andern parallel gezogenen Geraden durch ein und denselben Punkt gehen, eine Eigenschaft, die gegenseitig stattfindet. Mn. (Lp.)

J. Walmsley. Three proofs of Euclid I, 27, founded on new principles, and with new and simplifying features. London: C. F. Hodgson and Son. 4 S.

Drei Beweise des bekannten euklidischen Parallelensatzes (I, 27) mittels Kongruenz. Der Satz wird zurückgeführt auf das Axiom, daß zwei Geraden keinen Raum einschließen können. J.

J. Schlesinger. Zur Lehre von der Proportionalität. Zusammenhang der beiden Strahlensätze. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 390-392.

Nachtrag zu dem Aufsatz des Verf. in Bd. **37**, 261-262 (F. d. M. **37**, 522, 1906). Lp.

D. F. Dieguez. Sobre la media proporcional entre dos rectas dadas. Rev. Soc. Math. Esp. **3**, 45-46.

Um zu zwei nach Richtung und Größe gegebenen geradlinigen Strecken OA und OB, die einen Winkel 2δ miteinander bilden, die mittlere Proportionale zu finden, beschreibe man über AB nach der von O abgewendeten Seite den Kreisbogen, der den Peripheriewinkel $180^\circ - \delta$ faßt, und halbiere den Winkel AOB. Trifft die Halbierungslinie den Kreisbogen in C, so ist OC die gesuchte mittlere Proportionale.

Ist $\delta = 90^0$, so erhält man als besonderen Fall die gewöhnliche Konstruktion mittels der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks. Zch.

R. F. Davis. Question 17 235. Ed. Times (2) **23**, 67-69.

Gegeben sind zwei Geraden OX, OY und zwei Punkte A, B. Es ist eine geometrische Konstruktion für die Gerade PAQ zu finden, welche OX, OY in P, Q derart schneidet, daß $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ABQ$ ist. — Lösungen von F. Waitt und C. H. Chepmell. Gd.

A. E. A. Williams. Question 12 720. Ed. Times (2) **23**, 97-99.

Ein Dreieck zu konstruieren aus den drei Winkelhalbierenden. — Lösung von Constance I. Marks nebst historischen Bemerkungen von W. J. Greenstreet. Gd.

W. W. Der Lehmus-Steinersche Satz. Zs. f. math.-naturw. Unterr. **44**, 557-558.

„Ein direkter Beweis, der mit ganz elementaren Mitteln zum Ziele gelangt." Lp.

J. W. Stewart. A new solution to an historical theorem in geometry. Phil. Mag. (6) **26**, 984-986.

Der Lehmussche Satz, daß die Gleichheit zweier Winkelhalbierenden die Gleichheit der Gegenseiten der beiden Winkel zur Folge hat. Historische Notizen aus englischen Quellen. Lp.

S. Tafelmacher. Verallgemeinerung eines von Herrn M. Linnich behandelten Lehrsatzes. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 315-316.

Zeichnet man über der Seite a eines Dreiecks ABC ein beliebiges Dreieck A_1BC mit den Winkeln $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und konstruiert dann über b und c ähnliche Dreiecke AB_1C und ABC_1, so daß die Eckpunkte A, B, C zugleich Scheitelpunkte gleicher Winkel werden (A von α_1, B von β_1, C von γ_1), so gehen AA_1, BB_1, CC_1 durch denselben Punkt P. Lp.

H. Kehl, Heinr. Simon. Bemerkungen zu der Notiz von Tafelmacher. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 511 u. 512.

Kehl zeigt, daß der Satz aus dem Brianchonschen Satze als Korollar folgt. Simon weist auf die Elemente der Geometrie von van Swinden hin, wo Jacobi (S. 340, Nr. 853) den Satz ausgesprochen hat. Lp.

A. Gutzmer. Bemerkungen über einen geometrischen Satz. Unterrichtsbl. f. Math. u. Naturw. **19**, 11-12.

Bemerkungen über den von Linnich in derselben Zeitschrift ausgesprochenen Satz: Konstruiert man über den Seiten eines beliebigen Dreiecks drei ähnliche gleichschenklige Dreiecke, und zwar jedesmal nach außen oder nach innen vom Grunddreieck aus, und verbindet man die Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke mit den gegenüberliegenden Ecken des Grunddreiecks, so gehen die drei Verbindungsgeraden durch einen Punkt. Außer geschichtlichen Notizen zu diesem Satz und seinen Beweisen wird auch sein Zusammenhang mit dem Carnotschen Satze für Kegelschnitte hervorgehoben. Lp.

E. Lampe. Über eine elementare Schließungsaufgabe am gleichseitigen Dreieck. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **12**, 72-76.

Die Aufgabe, die Seite s eines gleichseitigen Dreiecks zu berechnen, dessen Ecken von einem gegebenen Punkte P die Entfernungen a, b, c haben, führt auf die in bezug auf a, b, c, s symmetrische Gleichung

$$(1) \qquad a^4 + b^4 + c^4 + s^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2 - a^2s^2 - b^2s^2 - c^2s^2 = 0,$$

aus der sich die beiden Lösungen $s_1^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\varDelta\sqrt{3}$ und $s_2^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - 2\varDelta\sqrt{3}$ ergeben, in denen $\varDelta$ den Inhalt des Dreiecks mit den Seiten a, b, c bezeichnet. Berechnet man nun aus a, b, s_2 die vierte, von c verschiedene Strecke s_3 aus der zu (1) analogen Gleichung, so erhält man $s_3^2 = \frac{1}{2}(3a^2 + 3b^2 - c^2) - 2\varDelta\sqrt{3}$. Berechnet man ebenso zu a, b, s_3 die vierte (von s_2 verschiedene) Strecke s_4 usf., so ergibt sich schließlich $s_6^2 = s_1^2$.

Geometrisch besagt das: Spiegelt man einen Punkt P_1 an der Seite AB eines gleichseitigen Dreiecks ABC, das Spiegelbild an BC, dessen Spiegelbild wieder an AB usf., so fällt das sechste Spiegelbild wieder mit P_1 zusammen. Oder auch optisch ausgedrückt: In einem Winkelspiegel von 60° beträgt die Anzahl der Bilder (mit Einschluß des leuchtenden Punktes) sechs. Eine andere geometrische Deutung ergibt sich, wenn man einen Punkt mit den Ecken eines regelmäßigen Sechsecks verbindet: Die Entfernungen dieses Punktes von den Ecken sind die Wurzeln jener Kette quadratischer Gleichungen, wenn in ihnen a, b, c den Umkreisradius des Sechsecks sowie die Entfernungen des Punktes vom Mittelpunkt und von einer Ecke des Sechsecks bedeuten. Drittens bedeuten s_1 und s_2 die Entfernungen der Spitzen der über den Seiten des Dreiecks a, b, c nach außen oder innen errichteten gleichseitigen Dreiecke von den Gegenecken. Zch.

K. Krüse. Der Schwerpunkt im Dreieck. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 547-549.

Betrachtet den Schwerpunkt als Grenze der unendlichen Folge von Dreiecken, bei denen das folgende Dreieck seine Ecken in den Mitten der Seiten des vorangehenden hat. Lp.

R. Hunger. Ableitung des verallgemeinerten pythagoreischen Lehrsatzes und der heronischen Formel. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 379-383.

Ein Versuch, verschiedene, sonst vereinzelt liegende Beweisarten des pythagoreischen Lehrsatzes und seiner Folgerungen in einen inneren Zusammenhang zu bringen. Lp.

M. ZDELAR. Der pythagoreische Lehrsatz. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 531-540.

Der Verf., der eine größere Abhandlung über den pythagoreischen Satz vorbereitet, teilt vier neue Beweise für ihn mit. Sie stützen sich auf 1. den Sekantensatz, 2. den Sehnensatz, 3. den Satz von der dritten geometrischen Proportionale, 4. den Satz vom Ergänzungsparallelogramm. Lp.

C. S. JACKSON. El teorema de Pitágoras. Rev. Soc. Mat. Esp. **3**, 42.

Über der Hypotenuse AB des rechtwinkligen Dreiecks ABC errichte man das Quadrat $ABDE$, so daß C innerhalb des Quadrates liegt. Dann ist $\Delta ACB = \frac{1}{2}b^2$, $\Delta BDC = \frac{1}{2}a^2$, $\Delta BEC + \Delta ABC = \frac{1}{2}c^2$, mithin

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} = c^2, \text{ d. h. } a^2 + b^2 = c^2.$$

Lp.

ALOYS MÜLLER. Über eine Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 134-136.

Es sei p die Projektion der Seite c auf die Seite b, ferner seien F_a, F_b, F_c, F_p die Inhalte ähnlicher Vielecke mit a, b, c, p als homologen Seiten, so ist

$$\frac{F_a}{a^2} = \frac{F_b}{b^2} = \frac{F_c}{c^2} = \frac{F_p}{p^2} = k$$

und

$$F_a = F_b + F_c \pm 2bp\,k,$$

wo das Zeichen $+$ für $\alpha > \frac{1}{2}\pi$, das Zeichen $-$ für $\alpha < \frac{1}{2}\pi$ gilt. Lp.

M. ZDELAR. Der Satz des Ptolemäus. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 517-531.

„Unser Endziel ist nicht nur Aneignung der bekannten mathematischen Wahrheiten, sondern auch die Ergründung von neuen. Und die Wege zu dieser Ergründung müssen in den Lehrbüchern einen gebührenden Platz finden; denn diese Wege lassen sich ebenfalls erlernen und zur weiteren Forschung wie auch zum erforderlichen Verständnis bestens verwenden." Unter diesem Gesichtspunkte kritisiert der Verf. die in den meisten Lehrbüchern übliche Behandlungsweise der Geometrie und wählt als Beispiel den Beweis des ptolemäischen Satzes. Er zeigt, wie dieser Satz nach seiner Ansicht heuristisch entwickelt werden soll, und führt zum Vergleiche 20 Beweise aus verschiedenen Lehrbüchern an. Schließlich fügt er zwei Beweise hinzu, die er für neu hält. Lp.

A. MEESE. Bedingungen, unter welchen n Punkte auf dem Umfange eines Kreises gelegen sind. Leipz. Ber. **65**, 264-267.

Mittels einfacher Identitäten und Substitutionen werden $\frac{1}{2}n(n-1)$ Bedingungen dafür aufgestellt, daß n gegebene Punkte auf einem Kreise liegen.
Ba.

E. G. HOGG. Question 17 290. Ed. Times (2) **23**, 83-86.

Es sei P irgendein Punkt auf einem zum Umkreise des Dreiecks ABC konzentrischen Kreise vom Radius p $(< R)$ und Q sein isogonal konjugierter Punkt. Dann besteht die Relation

$$\frac{BC\cdot AQ}{AP}+\frac{CA\cdot BQ}{BP}+\frac{AB\cdot CQ}{CP}=\frac{4\Delta R}{R^2-p^2},$$

wo Δ den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und R seinen Umkreisradius bezeichnet. — Analytische Lösung von K. J. Sanjána, J. C. Swaminarayan und dem Aufgabensteller, geometrische und trigonometrische Lösung von V. Daniel und W. N. Bailey.
Gd.

C. E. MC VICKER. Question 17 253. Ed. Times (2) **23**, 51, 72.

Ein Kreis berührt die Seiten eines Dreiecks ABC in L, M, N und den Neunpunktekreis in F. Die Gegenpunkte von F in bezug auf die Seiten des Dreiecks LMN haben denselben Schwerpunkt wie L, M, N und liegen mit den Mittelpunkten der beiden Kreise ABC und LMN in einer Geraden. — Beweis von R. F. Davis und C. E. Youngman.
Gd.

R. BOUVAIST. Sur le problème d'Apollonius. Nouv. Ann. (4) **13**, 446-451.

Drei gegebene Kreise lassen sich mittels einer Transformation durch reziproke Radien in drei gleiche Kreise transformieren. Nachdem die Inversionspole bestimmt und ihre Realität untersucht worden ist, wird gezeigt, wie auf Grund dieser Eigenschaft das apollonische Problem: „Einen Kreis zu zeichnen, der drei gegebene Kreise berührt", gelöst werden kann.
Gd.

E. ECKHARDT. Über die Radien der Berührungskreise des Kreisvierecks. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 297- 14.

Der Zweck der Arbeit ist, für das Kreisviereck die Beziehungen zwischen den Radien der Berührungskreise untereinander sowie zum Umkreisradius und zu den Seiten in erschöpfender Weise zusammenzustellen. Dabei ergibt sich eine Ableitung für die Fläche des Kreisvierecks analog zu der der arabischen drei Brüder für das Dreieck. „Auch die Seiten des zum ebenen Kreisviereck gehörigen sphärischen Dreiecks und die von Study in die sphärische Trigonometrie eingeführten Parameter werden durch die Radien der Berührungskreise dargestellt."

Nach einem einleitenden Abschnitt über die ersten Beziehungen zwischen den in Betracht kommenden Stücken folgen die weiteren Entwicklungen unter den Titeln: Die Bestimmung der Berührungsradien. Die Fläche F des Kreisvierecks. Andere Formen für die Größen ϱ_ν. Formeln, in denen die Differenzen aus den Radien der Berührungskreise auftreten. Die Winkel des Kreisvierecks. Die Schnittwinkel der Gegenseiten. Der Umkreisradius r und die Umkreisradien der Teildreiecke. Die Seiten des zum Kreisviereck gehörigen sphärischen Dreiecks. Die Studyschen Parameter. Grenzübertragung zum Dreieck. Lp.

DUREL. Propriétés nouvelles du quadrilatère inscriptible. Assoc. Franç. (Tunis) **42**,19.

BALITRAND. Réponse à la communication précédente de M. DUREL sur l'anticentre. Assoc. Franç. (Tunis) **42**, 20-21.

Über das Antizentrum als merkwürdigen Punkt eines Kreisvierecks (der bezüglich des Mittelpunktes symmetrische Punkt zu dem Halbierungspunkte der die Mitten der beiden Diagonalen verbindenden Geraden). Lp.

D. M. Y. SOMMERVILLE. Question 17 308. Ed. Times (2) **23**, 52-53.

$AB'CA'BC'$ ist ein einem Kreise eingeschriebenes reguläres Sechseck und P irgendein Punkt auf dem Kreise. 1) PA' schneidet BC in X, PB' schneidet CA in Y und PC' schneidet AB in Z. X, Y, Z liegen in einer Geraden, und zwar auf einem Durchmesser. 2) Zieht man drei Parallelen durch A', B', C', die BC, CA, AB bzw. in L, M, N schneiden, so liegen L, M, N in einer Geraden. — Geometrischer Beweis von W. N. Bailey, analytischer Beweis mittels Dreieckskoordinaten von J. C. Swaminarayan. Gd.

KRISHNA PRASAD DE. Question 17 196. Ed. Times (2) **23**, 57-62.

$ABCD$ ist ein Kreisviereck. Die Simsonschen Geraden von A, B, C, D in bezug auf die Dreiecke BCD, CDA, DAB und ABC gehen durch einen Punkt und bilden dieselben Winkel untereinander wie die nach den Punkten A, B, C, D gezogenen Radien. — 4 verschiedene Beweise von M. Satyanarayana, T. Worrall, E. L. Collins und A. A. Krishnaswami Aiyangar. Gd.

F. BÜTZBERGER. Über bizentrische Polygone, Steinersche Kreis- und Kugelreihen und die Erfindung der Inversion. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. 60 S. gr. 8⁰.

Die Schrift besteht aus drei Teilen. In dem ersten Teile werden die bizentrischen Polygone behandelt, d. h. solche Polygone, die gleichzeitig einem ersten Kreise eingeschrieben, einem zweiten Kreise umgeschrieben sind. Nach einer geschichtlichen Einleitung wird gezeigt, wie man, von der besonderen Lage ausgehend, bei der eine Ecke des Vielecks auf dem einen Endpunkte des den beiden Kreisen gemeinschaftlichen Durchmessers liegt, die Beziehung zwischen

den Radien r und ϱ und der Zentrale c nach einheitlicher Methode auf kürzerem Wege erhalten kann, als dies bei den früheren Behandlungen der Aufgabe geschehen ist. Die bezüglichen Formeln werden in $p = r + c, q = r - c$ und ϱ ausgedrückt, und zwar nach Potenzen von ϱ entwickelt. Der Gang besteht darin, daß c auf die Seiten des Vielecks projiziert wird und dann die in die Ausdrücke eingehenden Winkel eliminiert werden. Auf diese Weise werden für das n-Eck von $n = 3, 5, 7, 9, 4, 6, 8, 10$ die geforderten Gleichungen gefunden.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit den Steinerschen Kreis- und Kugelreihen; er schließt sich dabei an die Darstellung von Geiser an, „Einleitung in die synthetische Geometrie", letztes Kapitel „Das Prinzip der reziproken Radien". Die von Max Simon in seiner Entwicklung der Elementargeometrie angeführte Literatur des Gegenstandes wird um die Titel zweier Schriften ergänzt: O. Mautz, Ebene Inversionsgeometrie. Progr. Gymn. Basel, 1909. C. Habicht, Die Steinerschen Kreisreihen. Diss. Bern, 1904.

Der letzte Teil ist der Erfindung der Inversion von Steiner gewidmet. Durch den Abdruck eines Manuskripts aus den nachgelassenen Papieren Steiners vom 8. Hornung 1824 wird der Nachweis geführt, daß Steiner die als Inversion bezeichnete Verwandtschaft als Lehre „von der Wiedergeburt und der Auferstehung" bezeichnet und gehandhabt hat. — Über die endliche Veröffentlichung der Steinerschen nachgelassenen Schrift, die schon 1896 angekündigt wurde (F. d. M. **37**, 15), wird jetzt nur gesagt: „Nach der Veröffentlichung dieser Arbeit wird kein Zweifel mehr bestehen können, daß Steiner auch die Haupteigenschaft seiner „Wiedergeburt und Auferstehung", die Winkeltreue, gekannt und benutzt hat".

Lp.

E. Beutel. Die Quadratur des Kreises. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. 75 S. 8°. (Math. Bibl. von W. Lietzmann und A. Witting. XII.)

Dem Zwecke der „Mathematischen Bibliothek" gemäß macht das Bändchen den Leser in möglichst verständlicher Weise mit dem Wesen des Problems der Kreisquadratur und den im Laufe der Zeit versuchten Lösungen bekannt in den Kapiteln I. Einleitung. II. Der elementargeometrische Zeitraum. III. Der arithmetisch-trigonometrische Zeitraum. IV. Der algebraische Zeitraum. V. Die endgültige Erledigung des Problems. — Ein Verzeichnis der benutzten Literatur und ein mit biographischen Notizen versehenes Verzeichnis der im Texte vorkommenden Personen machen den Beschluß. Der gebotene Stoff genügt vollständig für eine erste Bekanntschaft mit dem altberühmten Problem.

Im einzelnen ist sowohl stilistisch, als sachlich manches zu bessern. Wir wollen hier nur zwei Beispiele geben. S. 51-52 wird zur Ableitung unendlicher Produkte für π so geschlossen. Man kann setzen:

$$(1) \qquad \sin x = ax(x^2 - \pi^2)(x^2 - (2\pi)^2)(x^2 - (3\pi)^2)\ldots$$

Daraus folgt für $x = 0$:

$$(2) \qquad \frac{\sin x}{x} = 1 = a(-\pi^2)(-(2\pi)^2)(-(3\pi)^2)\ldots$$

Nach Division von (1) durch (2) ergibt sich

$$\sin x = x\left(1-\left(\frac{x}{\pi}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{x}{3\pi}\right)^2\right)\cdots$$

Wie ist es möglich, in (2) das Produkt auf der rechten Seite als eine Zahl zu behandeln, ebenso das Produkt auf der rechten Seite von (1)?

Auf S. 31 wird gesagt, daß Ludolf van Ceulen ein recht unbedeutender Mathematiker war. Nun vergleiche man den Artikel von Bosmans: Un émule de Viète: Ludolphe van Ceulen: „Trotz des Mangels an gelehrter Ausbildung war Ludolf ein wirkliches Genie, dessen Arbeitsanhaltsamkeit aus ihm einen Gelehrten ersten Ranges machte" (F. d. M. **41**, 4-5, 1910).

Lp.

P. Hass. Bemerkungen zur Kreisrechnung. Progr. (Nr. 1049) Realsch. a. der Bogenstraße Hamburg. 43 S.

Es werden die Methoden der Berechnung des Kreises von Archimedes bis Huygens in großen Zügen dargelegt. „Es wurde gerade diese Zeitspanne in der Entwicklung des Problems gewählt, weil Archimedes das erste brauchbare Verfahren zur Berechnung des Kreises gab, Huygens dagegen die inzwischen teilweise verbesserte Methode zu ihrer höchsten Vollendung brachte. Vor allem aber haben alle Mathematiker jener Zeit die Aufgabe auf elementare Weise gelöst." Es ist bis jetzt nicht gelungen, den Weg zu entdecken, auf dem Huygens zu seinen bewundernswerten Resultaten kommt. Die Beschäftigung mit dieser Frage hat indessen den Verfasser zu einer Lösung geführt, die dem Stile Huygens' entspricht, seine Genauigkeit erreicht und sogar noch übertrifft.

Ba.

J. De Koninck. Rectification approchée de la circonférence et quadrature approchée du cercle. Mathesis **33** [(4) **3**], 111.

Man konstruiere das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten $a = \sqrt{355} = \sqrt{15^2 + 9^2 + 7^2}$ und $b = \sqrt{113} = \sqrt{8^2 + 7^2}$. Das Lot vom Scheitel des rechten Winkels teilt die Hypotenuse in zwei Strecken m und n, die sich wie 355 zu 113 verhalten. Die Länge l einer Kreislinie vom Radius R ergibt sich aus der Proportion $l : m = 2R : n$; der Inhalt k des Kreises aus $k : a = R : b$, beides mit einem Fehler von dem Betrage 10^{-7}. [Nicht neu; wie in Mathesis (4) **4**, 16 bemerkt wird, hat Otho angegeben, daß π ungenähert gleich $3 + (16/113)$ ist, $16 : 113 = 4^2 : (8^2 + 7^2)$. — In den Elementen der Geometrie von J. H. van Swinden, deutsche Ausgabe von C. F. A. Jacobi, S. 226, wird diese Angabe nach einer Mitteilung von „dem wackeren Mathematiker" De Gelder angeführt. Lp.]

Mn. (Lp.)

S. Ramanujan. Squaring the circle. Ind. Math. Soc. **5**, 132.

Konstruktion einer Strecke x, so daß $x^2 = \frac{355}{113} r^2$, also nahezu gleich πr^2 wird.

Sk.

R. Soreau. Formule approchée de l'arc d'ellipse. C. R. **157**, 272-273.

Der Bogen BM sei vom Nebenscheitel B gerechnet, M' der Schnittpunkt des Hauptscheitelkreises mit der Parallele zur Nebenachse durch M. Setzt man dann $\sphericalangle BOM' = \theta$, so wird arc $BM = a \sin\theta \cdot \frac{2k\theta}{\sin 2k\theta}$, wo $k = b : (a+b)$ ist. Geometrische Interpretation und Fehlerabschätzung. Sk.

P. Mansion. Sur les figures isopérimètres en géométrie plane. Mathesis **33** [(4) 3], 183-186.

Elementarer Beweis des Satzes: Eine geschlossene Kurve kann nicht einen größeren Inhalt haben als ein Kreis von demselben Umfange. Mn. (Lp.)

A. Mitzscherling. Das Problem der Kreisteilung. Ein Beitrag zur Geschichte seiner Entwicklung. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. VI u. 214 S. gr. 8°.

Eine sehr sorgfältige Sammlung des weit verstreuten Materials durch den jung verstorbenen Verf. (geb. 17. Juli 1879, gest. 29. Januar 1912). Das Werk wird an seinem Teile mit dazu beitragen, das Interesse für die Geschichte der Mathematik zu beleben, und wird vor allem manche Anregung zur Belebung des mathematischen Unterrichts bieten. Inhalt: A. Kreisteilung. 1. Historisches. 2. Geometrische Konstruktion der Vielecke. 3. Näherungskonstruktionen. 4. Instrumente zur Kreisteilung. B. Bogen- oder Winkelteilung. I. Trisektion. 1. Möglichkeit der Trisektion. 2. Elementare Methoden. 3. Verwendung von Kegelschnitten. 4. Verwendung von anderen Kurven. 5. Näherungskonstruktionen. 6. Teilinstrumente. II. Polysektion. 1. Durch Teilungskurven. 2. Durch Näherung. 3. Durch Instrumente. Sk.

C. H. Chepmell. A construction of the regular polygon of 34 sides. Math. Ann. **74**, 150-151.

Vereinfachung des in Math. Ann. **71**, 592-598 (F. d. M. **43**, 584, 1912) gelehrten Verfahrens. Diese Konstruktion hängt von den Kosinussen der Periode $2\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha + 2\cos 8\alpha$ ab, wo $\alpha = 2\pi/17$. Die gegenwärtige Konstruktion hat einen entschiedenen Vorzug an Schnelligkeit und praktischer Genauigkeit. Lp.

P. v. Schaewen. Zeichnung des regelmäßigen Siebzehnecks. Zs. f. d. Realschulw. **38**, 590-597.

Elementare Lösung der Gleichung $x^{17} = 1$. Die Verteilung der Wurzeln auf die Teilgleichungen geschieht durch Näherungsrechnungen. Anwendung auf die Konstruktion. Schr.

Fr. Kapplinger. Teilung der Winkel in eine beliebige Anzahl gleicher Teile. Mitteilungen des Vereins der Ing. der k. k. österr. Staatsbahnen **11**, 106-108. Linz: R. Pirngruber. 8 S. 8°.

P. Stiaszny. Zum Artikel: Teilung der Winkel usw. Ebenda 117-118.

Die von Kapplinger benutzten Kurven haben die Polargleichung $r\varphi = \text{const}$, sie sind also hyperbolische Spiralen.

Stiaszny verweist auf eigene Arbeiten. Das Wesentliche an Kapplingers Konstruktion erkennt er darin, daß man nicht den Kreisradius, sondern die Sehne fest annimmt. Schr.

H. Tissaphernes. Krumme Linien als geometrische Örter und Teilung eines Winkels in 3, 5, 7 und 11 gleiche Teile. Berlin: Selbstverlag. 20 S. 8°.

Der Verf., offenbar ein Autodidakt, ist unbekannt mit jeder Literatur über das von ihm behandelte Problem. Bloß mit den Sätzen der elementaren Geometrie ausgerüstet, besonders auf die Eigenschaften gleichschenkliger Dreiecke sich stützend, verschafft er sich geometrische Örter, die als Teilungskurven dienen können, und gibt rohe Mechanismen an, um solche Kurven zu zeichnen, wobei Fadenkonstruktionen und Drehungen verschiebbarer Linien eine große Rolle spielen. Die der Schrift beigegebenen Figuren zeugen von der Primitivität der Verwirklichung der Mechanismen. Die Kurve für die Dreiteilung eines Winkels ist nichts anderes als die Konchoide von Nikomedes, die ja schon im Altertum zur Lösung der Trisektion benutzt ist. Dies weiß der Verf. ebensowenig, wie er den Namen der Kurve kennt oder von ihrer Behandlung etwas erfahren hat. Die Kreiskonchoiden, die er neu erfindet, ohne zu ahnen, daß sie längst bekannt sind, folgen hierauf. Es ist immerhin anzuerkennen, daß der Verf. dazu gelangt, mit den von ihm ersonnenen Hülfsmitteln Teilungskurven zu zeichnen, die theoretisch den zu stellenden Anforderungen genügen. Lp.

K. J. Sanjana. A graphical construction for the pth part of a given angle. Indian Math. Soc. **5**, 16-18.

Eine Näherungskonstruktion. Ist BOA $(OB = OA)$ der gegebene spitze Winkel, so nehme man auf OA die Strecke $OM = m(< OA)$, auf ON die Strecke $ON = n(> OB)$ und verbinde N mit M. Der Schnittpunkt von NM mit dem Kreise um O, Radius $OA = OB$, sei P. Dann ist bei geeigneter Wahl von m und n der Winkel BOP angenähert der p-te Teil von $BOA = \omega$. Der Verf. wählt $m = \frac{1-2p}{p-2}$, $n = \frac{p+1}{p-2}$. Es ergibt sich, daß der Wert von θ sich von ω/p erst in der fünften Potenz von ω um

$$\omega^5 \frac{(p^2-1)(2p^2-5p+2)}{360\,p^3}$$

unterscheidet. Für $p = 3, 5, 7$ und $\omega = 52^\circ\,30'$ beträgt der Fehler etwas über $1'$. Lp.

C. Roubaudi. Trisecteur du Dr. H. Grasset. Darb. Bull. (2) **37**, 159-160.

Der Dreiteiler von H. Grasset ist nichts weiter als eine mechanische Einrichtung zur Verwirklichung des im Liber assumptorum von Archimedes (Ed. Heiberg **2**, 518) gelehrten Verfahrens, das bekanntlich auf der Einschiebung einer Strecke von der Länge des Radius eines Kreises zwischen diesem Kreise und einem festen Durchmesser auf einer durch einen Punkt der Peripherie gehenden Sekante beruht. Dies wird in der Notiz nicht erwähnt.

Lp.

M. Franceschi. Zur Dreiteilung des Winkels. Zs. f. d. Realschulwesen **38**, 522-527.

Dreiteilung mit Hülfe von zwei Hyperbeln. Anwendung auf die Konstruktion eines Trisektors. Approximation durch Einführung des Krümmungskreises im Scheitel der Hyperbel (Fehler 1,7″ bei 30°, $2\frac{1}{2}'$ bei 90°). Schr.

L. Klein. Das Gesetz der Dreiteilung der Winkel. Zentralblatt f. d. gewerbl. Unterrichtswesen in Österreich **31**, 174-185.

Der Verf. „unternimmt es, in der vorliegenden Arbeit seine im Laufe längerer Jahre gelegentlich erlangten Kenntnisse und Ergebnisse über dieses Spezialgebiet zusammenzufassen". Es werden aber fast nur technische Zeitschriften zitiert, und erst in einem zweiten Nachtrag wird auf Enriques Fragen der Elementargeometrie hingewiesen. Schr.

W. Effenberger. Eine systematische Zusammenfassung merkwürdiger Punkte im geradlinigen Dreieck. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 369-379.

In der Abhandlung über koaxiale Kegelschnitte am Dreieck spricht Pfaff S. 128 desselben Bandes der Zeitschrift den Satz aus, daß jede der gleichseitigen Hyperbeln durch die Ecken eines Dreiecks der Ort der Mittelpunkte eines Systems von Kegelschnitten ist, deren Achsen den Hyperbelasymptoten parallel sind, und erwähnt weiter den Sonderfall, bei dem diese Ortskurven einen Büschel homothetischer gleichseitiger Hyperbeln bilden. An diese Bemerkung knüpft der Verf. seine Ausführungen an, die in ganz elementarer Weise eine Erzeugung von solchen drei homothetischen gleichseitigen Hyperbeln enthalten, die einander im Schwerpunkt des Dreiecks berühren und für die Mechanik von besonderer Bedeutung sind. Aus ihrer Erzeugungsweise wird ersichtlich, daß sie die merkwürdigen Punkte eines Dreiecks in ein System bringen helfen, das die engere Beziehung gewisser Punktgruppen aufweist. Lp.

E. Piccioli. Ancora sui punti di Brocard nel triangolo rettilineo. Suppl. al Period. **16**, 132-134.

In einem früheren Artikel (F. d. M. **42**, 529, 1911) hatte sich der Verf. schon mit diesem Gegenstande beschäftigt. Jetzt behandelt er ihn mit Hülfe von Schwerpunktskoordinaten, weil diese Methode einer Ausdehnung auf das Tetraeder fähig sei.

Lp.

F. G. Taylor. A case of three rotating lines and the point O. (Continued.) Math. Gazette **7**, 4-6.

Schluß dieses Artikels, der einen Beitrag zur Dreiecksgeometrie liefert (vgl. F. d. M. **43**, 589, 1912). Lp.

W. F. Beard. Question 17416. Ed. Times (2) **24**, 42.

Wenn die Simsonsche Gerade eines Punktes P in bezug auf ein Dreieck durch den andern Endpunkt des durch P gezogenen Durchmessers geht, so geht sie auch durch den Schwerpunkt dieses Dreiecks. — 2 geometrische Lösungen vom Aufgabensteller, W. N. Bailey und Keshub Das De, V. V. Satyanarayan. Gd.

R. F. Davis. Question 17468. Ed. Times (2) **24**, 108.

P und Q teilen die Basis BC eines Dreiecks ABC isotomisch (d. h. $BP = CQ$), AP und AQ schneiden den Umkreis des Dreiecks in p und q. Es ist zu beweisen, daß die Gerade pq durch einen festen, auf BC gelegenen Punkt geht. Dieser Punkt ist auch folgendermaßen bestimmt: Die durch A zu BC gezogene Parallele schneidet den Umkreis in D. Die Tangente des Kreises im Punkte D trifft BC in dem in Rede stehenden Punkt. — Lösung von W. F. Beard. Gd.

W. Gallatly. Pedal Triangles. Ed. Times (2) **24**, 111-112.

Man betrachte irgendeinen Punkt P auf einem gegebenen Durchmesser TOT' des dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises. Die Winkel des zu P gehörenden Fußpunktdreiecks seien λ, μ, ν. Über der festen Basis BC wird das Dreieck QBC errichtet, welches die Winkel $QBC = \mu$, $QCB = \nu$, $BQC = \lambda$ hat. Bewegt sich P auf TOT', so beschreibt Q einen durch A gehenden Kreis. Durch folgende elegante Konstruktion wird dieser Kreis (Q) näher bestimmt: AR, AR' parallel zu den Simsonschen Linien von TT' schneiden BC in α, α', den Endpunkten eines Durchmessers des Kreises (Q). Ist t der Pol der Simsonschen Geraden parallel zu TOT', so schneidet At die Seite BC in dem Mittelpunkte S des Kreises (Q). Sind endlich h, p die von A auf BC und TOT' gefällten Lote und R der Radius des Kreises (ABC), so ist der Radius des Kreises (Q) durch $SA = \frac{Rh}{p}$ gegeben. Gd.

J. A. Third. Generalization of the „orthopole" and allied theorems. Edinb. M. S. Proc. **31**, 17-34.

Der „Orthopol" eines Dreiecks in bezug auf eine Gerade ist der Punkt, den Cwojdziński im Archiv der Math. u. Phys. (3) **1**, 175-180 (F. d. M. **32**, 580, 1901) unter dem Namen „Lotpunkt" eines Dreiecks in bezug auf eine Gerade behandelt hat, und dessen Beziehung zu Steinerschen Sätzen Jahnke in einer gleich darauf folgenden Note aufgedeckt hat. Später hat J. Neuberg „die Verwandtschaft zwischen einer Geraden und ihrem Lotpunkt in bezug auf ein Dreieck" in demselben Archiv (3) **3**, 89-93 nach einer seiner Veröffentlichungen aus dem Jahre 1878 auseinandergesetzt. Lp.

W. Gallatly. Note on geometry. Ed. Times (2) **23**, 73.

Es seien Ap, Bq, Cr die von den Ecken eines Dreiecks ABC auf eine gegebene Linie L gefällten Lote. Die Geraden pp', qq', rr', die bzw. senkrecht auf BC, CA, AB sind, schneiden sich in einem Punkte, dem Orthopol von L. Vergl. das vorstehende Referat.
Gd.

W. Gallatly. The orthopole. Ed. Times (2) **24**, 89-96.

W. Gallatly. Notes on the quadrilateral. Ed. Times (2) **23**, 79-83.

Giobbe. Risoluzione della 116ª quistione a concorso. Suppl. al Period. **16**, 92-94.

Die von A. La Paglia gestellte Aufgabe lautet: Den Flächenwinkel der fünf regelmäßigen Polyeder mittels einer einzigen Formel zu berechnen und ebenso durch eine einzige Formel das Volumen der fünf regelmäßigen Polyeder als Funktion des Radius r der Umkugel, der Anzahl n der Flächen und der Anzahl l der Seiten einer Fläche auszudrücken. Die Formel in den Fall zu verwandeln, bei welchem statt des Radius r die Seite a des Polyeders bekannt ist.

Setzt man $\varrho = 180^\circ/l$, $\varphi = (n-l)180^\circ/nl$, so wird

$$V = \tfrac{1}{3}\, nl\, r^3 \cot^2\varrho \tang\varphi \frac{\sin^2\varrho - \sin^2\varphi}{\cos^2\varrho},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}x = \frac{\sin[(n-2)180^\circ/nl]}{\sin\varrho}.$$

Lp.

Wolstenholme. Question 13 494. Ed. Times (2) **23**, 43-46.

Es seien a, b, c die Längen von drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten eines Tetraeders vom Volumen V und x, y, z die Längen der entsprechenden gegenüberliegenden Kanten, dann ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b^2+c^2-x^2 & y^2+z^2-x^2 & a^2-b^2-z^2 & a^2-y^2-c^2 \\ c^2+a^2-y^2 & b^2-a^2-z^2 & z^2+x^2-y^2 & b^2-c^2-x^2 \\ a^2+b^2-z^2 & c^2-a^2-y^2 & c^2-x^2-b^2 & x^2+y^2-z^2 \end{vmatrix} = -1152\, V^2$$

Zwei Lösungen von A. L. Atkin und A. M. Nesbitt. Letzterer findet hierbei die Beziehung:

$$a^2 b^2 c^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos(ab) & \cos(ac) \\ \cos(ab) & 1 & \cos(bc) \\ \cos(ac) & \cos(bc) & 1 \end{vmatrix} = 36\, V^2,$$

wo a, b, c die obige Bedeutung haben und z. B. (bc) den von den Kanten b, c gebildeten Winkel bezeichnet.
Gd.

G. B. Halsted. The criterion for two term prismoidal formulas. Tôhoku Math. J. **3**, 64-66.

Altbekanntes. So wird die viel benutzte Formel $V = \frac{1}{4}h[f(0) + 3f(\frac{2}{3}h)]$ auch wieder einmal empfohlen. Lp.

E. Haentzschel. Über rationale Tetraeder mit kongruenten Seiten. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **12**, 101-108.

Rationale Tetraeder mit kongruenten Seiten sind solche, für welche die Kanten, die Seitenflächeninhalte und der Rauminhalt rationale Maßzahlen besitzen, außerdem sind je zwei gegenüberliegende Kanten einander gleich. Hoppe (Archiv der Math. u. Phys. (1) **61**, 86-98, 1877) und Güntsche (Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **6**, 38-53, 1907) haben diese Tetraeder untersucht. Dabei handelt es sich einzig und allein darum, das Fermatsche Problem

$$(1) \qquad \psi\vartheta\,(\psi\vartheta + \psi + \vartheta - 1)\,(\psi\vartheta - \psi - \vartheta - 1) = h^2$$

zu lösen. Es sollen also rationale Zahlen ψ, ϑ, h angegeben werden, die diese Gleichung erfüllen. Um eine umfassende Lösung dieser Gleichung zu geben, zeigt der Verf. (und damit weit über Hoppe und Güntsche hinausgehend), „wie nach Hinüberführen des vorliegenden Problems in das Gebiet der Weierstraßschen Theorie der elliptischen Funktionen uns sofort die Zahlentheorie in einer von Euler geführten, aber bis jetzt nicht beachteten Untersuchung hülfreich zur Seite tritt“. Es ergibt sich, daß sowohl das zweite, als auch das dritte Hoppesche Tetraeder Anfangsglieder von unendlich langen Ketten von Tetraedern sind, wobei jedes Glied einer solchen Kette eine Lösung darstellt. „Hiermit ist aber die Zahl der möglichen rationalen Tetraeder noch lange nicht erschöpft. Im Gegenteil, wir haben erst den Anfang zur Lösung des Problems, das in der Gleichung (1) enthalten ist, gemacht. Offenbar gibt das Weierstraßsche Additionstheorem der Funktion $\wp(u \pm v)$ Anlaß, neue Fermatsche Ketten in unbegrenzter Zahl zu bilden.“ Gd.

R. Bricard. Sur un hexaèdre particulier. Nouv. Ann. (4) **13**, 24-29.

Ein Körper, der von sechs Parallelogrammen begrenzt ist, heißt Parallelepiped; ein Körper, dessen sechs Grenzflächen Gegenparallelogramme (d. s. Vierecke mit paarweis gleichen, aber nicht parallelen, gegenüberliegenden Seiten) sind, heiße Gegenparallelepiped. Seine 12 Kanten liegen zu je vier auf drei Rotationshyperboloiden mit gemeinsamer Achse, seine acht Ecken auf einer Kugel. Es gibt ∞^3 solcher Hexaeder mit gegebenen Kantenlängen, und der Körper gestattet daher ganz analoge Deformationen wie das Parallelepiped. Sk.

E. Román y Retuerto. Espacios radicales. Revista R. Ac. de Madrid **12**, 96-115.

Örter der Mittelpunkte von Kugeln, die zwei gegebene Kugeln rechtwinklig oder im Durchmesser oder die eine rechtwinklig und die andere im Durchmesser schneiden. Lp.

H. Pfaff. Die konische Loxodrome. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 558-560.

Für den elementaren Unterricht als Grenze der Loxodrome auf dem Mantel einer geraden, regelmäßigen Pyramide behandelt. Lp.

E. v. Fedorow. Die Grundformeln der sphärischen und ebenen Tetragonometrie. Münch. Ber. 1913, 485-518.

Es werden die für die Kristallographie wichtigen Grundformeln der ebenen und sphärischen Tetragonometrie abgeleitet. Ba.

E. Leon y Ortiz. Analogías trigonométricas. Rev. Soc. Mat. Esp. **2**, 309-329; **3**, 1-16, 65-73.

In einer historischen Einleitung wird der Zusammenhang der Neperschen Analogien mit der Erfindung der Logarithmen dargestellt, und daran werden weitere Betrachtungen über die Formeln von Gauß-Delambre und Mollweide geknüpft. Der Hauptteil des Aufsatzes befaßt sich mit einer Herleitung der Formeln der sphärischen Trigonometrie, um zu zeigen, wie jene Analogien mit den übrigen Formeln zusammenhängen. Lp.

I. J. Schwatt. The summation of a type of a family of trigonometric series. Phil. Mag. (6) **26**, 895-898.

I. J. Schwatt. A method for the summation of a type of infinite series. Phil. Mag. (6) **26**, 898-902.

Es handelt sich um die beiden Summen:

$$S = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(bt\, nh)!} (a + ng)^m \sin^p (\alpha + n\gamma) .\, r^n,$$

$$S = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\pm 1^n\, r^m}{\pi\, (tn + m)} \quad (r > 0, m = 1, 2, \ldots, p).$$

Lp.

Weitere Literatur.

H. Beck. Raumlehre. Halle: Schrödel. VIII u. 173 S. 8°.

H. Beck. Lehrstoff für den Raumlehre-Unterricht. Halle: Schrödel. 72 S. 8°.

H. Bergmeister und J. B. Duport. Lehrbuch der Geometrie. Neue Auflage. Erster und dritter Teil. Wien: Deuticke. 111 u. 94 S. 8°.

S. Blumer. Raumlehre. Aarau: Trüb. 76 S. 8°.

E. Börner. Geometrie für Mädchenlyzeen. 1. u. 2. Heft. Wien: F. Tempsky. 36 S. + 49 S. 8°.

R. Böttcher und R. Sendler. Raumlehre. Erster Teil: Planimetrie. Vierte, verbesserte Auflage. Breslau: Handel. IV + 99 S. 8°.

P. Crantz. Ebene Trigonometrie zum Selbstunterricht. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner (Aus Natur u. Geisteswelt. 431.)

P. Crantz. Aufgaben aus der Trigonometrie, der Stereometrie, der analytischen Geometrie und über größte und kleinste Werte. Leipzig: B. G. Teubner. IV + 94 S. gr. 8⁰.

R. Droth. Kurzgefaßter Lehrgang der ebenen Geometrie für Mittelschulen und verwandte Lehranstalten. Breslau: E. Morgenstern. 72 S. 8⁰.

O. Dux. Sphärische Trigonometrie und ihre Anwendungen. Berlin-Schöneberg: Mentor. 66 S. (Mentor-Repetitorien 47.)

F. Fischer. Anfangsgründe der Mathematik. Zum Gebr. an höh. Schulen bearb. II. Planimetrie. 4. Aufl. Leipzig: G. Engel. 291 S. gr. 8⁰.

S. Giessen. Raumlehre. Ausgabe D. Münster: Coppenrath. 61 S. 8⁰.

J. Goller. Raumlehre mit geometrischem Zeichnen. Ausgabe A. Dritte Auflage. Stuttgart: Bonz. 48 S. 8⁰.

W. Lichtblau und B. Wiese. Raumlehre. I. Planimetrie. III. Trigonometrie. IV. Stereometrie. Breslau: Hirt. 144, 183, 200 S. 8⁰.

A. Lipnowski. Planimetrie. Strelitz: M. Hittenkofer. 56 S. Lex.-8⁰.

G. Mahler. Ebene Geometrie. 4. verb. Aufl. Samml. Göschen Nr. 41. Berlin: G. J. Göschen. 166 S. 8⁰.

Močnik's Geometrie u. geom. Zeichnen f. Knaben-Bürgerschulen. Bearb. v. H. Halbgebauer. 2. Aufl. Wien: F. Tempsky. 221 S. gr. 8⁰.

G. Müth. Leitfaden für den geometrischen Anfangsunterricht an den höheren Lehranstalten. Berlin: Weidmann. VII + 89 S. 8⁰.

F. Napravnik. Geometrie und geometrisches Zeichnen für Mädchen-Bürgerschulen. 2. Aufl. Ausg. in 1 Bd. Wien: F. Tempsky. 146 S. 8⁰.

F. Reidt. Einleitung in die Trigonometrie und Stereometrie für die Unter-Sekunda höherer Lehranstalten. 7. Aufl. Berlin: G. Grote. 32 S. 8⁰.

W. Reinhardt, N. Mannheimer, M. Zeisberg. Geometrie für höhere Lehranstalten. 2 Teile. Frankfurt a. M.: M. Diesterweg. VII + 142 S. u. VI + 138 S. 8⁰.

Rossmanith u. Schober. Grundriß der Geometrie in Verbindung mit dem geometrischen Zeichnen. 1. Teil. 13. Aufl. Bearb. von Frz. Bergmann. Unveränd. Abdr. d. 11. Aufl. Wien: A. Pichlers Ww. u. Sohn. 101 + II S. gr. 8⁰.

J. Rüefli. Kleines Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst einer Sammlung von Übungsaufgaben. 7. vollst. umgearb. Aufl. Bern: A. Francke. IV + 106 S. 8⁰.

K. Schwab und O. Lesser. Mathematisches Unterrichtswerk. II. Bd.: Lehr- und Übungsbuch der Geometrie. Von Schwab. Ausg. A. 1. Teil. Für die mittleren Klassen der Realanstalten. Leipzig: G. Freytag. 290 S. 8⁰.

K. Schwab, O. Lesser. Mathematisches Unterrichtswerk zum Gebrauch an höheren Lehranstalten für die weibliche Jugend. II. Bd.: Lehr- u. Übungsb. f. d. Unt. in der Geometrie u. Trigonometrie. Hrsg. v. M. Linnich. 3. Teil: Lehrstoff der Klassen II und I. Leipzig: G. Freytag. 229 S. 8°.

W. Seyffarth. Elementarmathematik. 3. Teil: Trigonometrie. Bearb. von W. Seyffarth. 2. Aufl. Dresden-Blasewitz: Bleyl u. Kaemmerer. VIII + 109 S. 8°.

W. Seyffarth. Elementarmathematik zum Gebrauch an Lehrerbildungsanstalten unter Mitwirkung von Hübsch hrsg. 4. Teil: Stereometrie. Bearb. von H. Dresden-Blasewitz: Bleyl u. Kaemmerer. IV + 112 S. gr. 8°.

H. Sievert und Chr. Dietsch. Lehrbuch der Elementargeometrie zum Gebrauch an Mittelschulen und beim Selbstunterricht. 1.-3. Teil. Erlangen-Leipzig: A. Deichert Nachf. Gr. 8°.

M. Vollkommer und T. Link. Geometrie für höhere Mädchenschulen. Dritter Teil. Nürnberg: Korn. III + 88 S. 8°.

C. G. Weitzel. Unterrichtsbriefe zur Einführung in die „höhere Mathematik". 2 Bde. — 1. Bd.: Unterrichtsbriefe für Stereometrie und Trigonometrie. 2. Bd.: Unterrichtsbriefe für höhere Mathematik (Analysis, analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung). Wien: A. Hartleben. VII + 472 S., VIII + 480 S. Lex.-8°.

Th. Wimmenauer. Leitfäden für den vorbereitenden geometrischen Anschauungsunterricht der Oberrealschule und Realschule. Dresden: L. Ehlermann. 36 S. 8°.

M. Zwerger und J. Klug. Einführung zur Raumlehre und ebenen Geometrie. 16. vollständig umgearbeitete Auflage. München: Lindauer. VII + 173 S. 8°.

M. Zwerger und J. Klug. Räumliche Geometrie. 14. Auflage. München: Lindauer. VII + 114 S. 8°.

F. Anderegg and E. D. Roe. Trigonometry for schools and colleges. Revised edition by F. Anderegg. Boston: Ginn. IX + 108 S. 12mo.

E. H. de V. Atkinson. A textbook of practical solid geometry. 2d edition, revised by B. R. Ward. New impression. London: Spon. 134 S. 8°.

G. W. Bauer and W. E. Brooke. Plane and spherical trigonometry. Boston: Heath. XII + 164 S. 8°.

R. W. Bayliss. A first formal geometry. London: Arnold. 160 S. 8°.

W. Borchardt und A. D. Perrott. Geometry for schools. 6 volumes. London: Ball. 544 S. 8°.

W. G. Borchardt and C. D. Perrott. A first manual trigonometry. With answers. London: Bell. 208 S. 8°.

S. J. Brown. Trigonometry and stereographic projections. Revised. Annapolis Md.: U. S. Naval Academy. IX + 132 S. 12mo.

W. N. Bush and J. B. Clarke. The elements of plane geometry. New York: Silver, Burdett & Co. XII + 239 S. 12mo.

L. J. Castle. Mathematics, Science and drawing for the preliminary technical course. London: George Routledge and Sons, Ltd. VII u. 149 S. [Nature **92**, 196.]

R. Deakin. A new school geometry. Part 2. London: Mills & Boon. 138 S. 8°.

W. J. Dobbs. A school course in geometry. Including the elements of trigonometry and mensuration and an introduction to the methods of coordinate geometry with 361 diagrams. London: Longmans, Green and Co. XXII u. 427 S. (Longmans' Modern Mathematical Series.)

W. B. Ford and C. Ammerman. Plane and solid geometry. Edited by E. R. Hedrick. New York: Macmillan. IX + 321 + 33 S. 12mo.

W. B. Ford and C. Ammermann. Solid geometry. New York: Macmillan. S. 215-321, 12mo.

C. A. Hart and D. D. Feldman. Key to plane and solid geometry. New York: American Book Co. 196 S. 12mo.

R. S. Heath. A textbook of elementary trigonometry. London: Clarendon Press. 220 S. 8°.

E. V. Huntington. Syllabus of mathematics compiled under the direction of the Committee on the teaching of mathematics to students of engineering by the chairman E. V. H. 2d edition. Ithaca N. Y. Society for the promoting of engineering education. 144 S. 8°.

A. M. Kenyon. Plane and spherical trigonometry. Edited by E. R. Hedrick. New York: Macmillan. 11 + 132 + 18 + 124 S. 8°.

F. O. Lane and J. A. C. Lane. A school geometry. London: Edward Arnold. VIII u. 333 S. [Nature **91**, 579.]

D. A. Low. Practical geometry and graphics. New York: Longmans. VIII + 448 S. 8°.

R. E. Moritz. A text-book on spherical trigonometry. New York: Wiley. VI + 67 S. 8°.

J. Perry. Elementary practical mathematics. London: Macmillan.

H. S. Redgrove. Experimental mensuration. An elementary textbook of inductive geometry. New York: Van Nostrand. XVII + 328 S. 12mo.

A. Schultze and F. L. Sevenoak. Plane geometry. Revised by A. Schultze. New York: Macmillan. X + 304 S. 12mo.

A. Schultze. Schultze and Sevenoak's plane and solid geometry. New York: Macmillan. X + 457 S. 12mo.

E. R. Smith in consultation with W. H. Metzlen. Solid geometry developed by the syllabus method. New York: American Book Company. IX u. 403 S.

M. Alliaume. Leçons de trigonométrie plane et sphérique. Louvain: 245 S.

H. Bos et A. Rebière. Éléments de géométrie. 7e édition. Paris: Hachette. 502 S. 8°.

G. Boucheny et A. Guérinet. La géométrie au cours complémentaire. Paris: Larousse. 256 S. 8°.

C. Bourlet. Éléments de géométrie. 4e édition, revue. Paris: Hachette. VI + 383 S. 8º.

C. Bourlet et P. Baudoin. Leçons de géométrie et éléments de géométrie descriptive. Paris: Dunod et Pinat. V + 432 S. 16mo.

P. Camman et C. Fassbinder. Algèbre et géométrie. Classe de 2e A et B. 2e édition, revue et corrigée. Paris: Gigord. 156 S. 12mo.

P. Camman et A. G. Rébouis. Cours élémentaire de géométrie. Premier cycle B, deuxième cycle A, B. Paris: Gigord. 481 S. 8º.

P. Camman et A. G. Rébouis. Cours élémentaire de géométrie plane. 3e édition, revue et corrigée. Paris: Gigord. 307 S. 12mo.

H. Chenard et J. Vialle. Géométrie. Paris: Delagrave. 351 S. 8º.

H. Commissaire. Leçons de trigonométrie. Classes de 1re C et D. Paris: Masson. VIII + 273 S. 8º.

F. Coulom et M. Weill. Nouveau cours de géométrie théorique et pratique. 1re année. Paris. Delagrave. 183 S.

P. Deltour. Éléments de géométrie. Namur: Wesmael-Charlier. 98 S.

F. G. M. Cours de trigonométrie rectiligne. Paris: Gigord. 250 S. 8º.

F. J. Éléments de géométrie comprenant des notions sur les courbes usuelles. Paris: Gigord. XII + 523 S. 16mo.

C. Fortin. La géométrie des baccalauréats littéraires. 1re partie. Paris: Société Saint-Augustin. 83 S. 8º.

A. Grévy. Géométrie plane. 5e édition. Paris: Vuibert. 296 S. 8º.

Mme. Jacquemard-Faurens et M. Jacquemard. Cours complet de géométrie élémentaire. Paris: Delahain. XVI + 479 S. 16mo.

E. Jacquet et A. Laclef. Cours de géométrie théorique et pratique. 3e édition, revue et augmentée. Paris: Nathan. 512 S. 16mo.

E. E. Marchand Bey. Géométrie plane. Quelques nouveautés intéressantes. Nouvelles méthodes de détermination de la vraie valeur de π, etc. Vannes: Lafolye. 36 S. 8º.

J. Poriniot. Leçons de géométrie pratique. Tamines: Duculot-Roulin. 96 S. (1912).

A. Viellefond. Précis de géométrie. Paris: Dunod et Pinat. II + 521 S. 16mo.

G. Bernardi. Soluzionario di esercizi di trigonometria piana. Terza edizione, nuovamente migliorata. Firenze: Le Monnier. 110 S. 16mo.

O. Carboni. Esercizî di geometria elementare. 2a edizione, riveduta. Livorno. Giusti. VIII + 170 S. 16mo.

F. Corsanego. Geometria, sistema metrico e monetario. Seconda edizione. Città di Castello: Lapi. 150 S. 8º.

F. Giudice. Geometria piana. 3a edizione. Pavia: Mattei. 270 S. 8º. (1914.)

G. Riboni. Elementi di geometria. 8a edizione con modificazioni ed aggiunte. Bologna: Zanichelli. 374 S. 16mo.

G. A. Serret. Elementi di trigonometria. 14a edizione. Firenze: Le Monnier. 127 S. 16mo.

G. A. Serret. Trattato di trigonometria. Traduzione con modificazioni e aggiunte di G. Tolomei. Nuova edizione, completamente rifatta. Firenze: Le Monnier. 271 S. 8°.

A. Socci e G. Tolomei. Elementi di matematica. Libro di testo. Vol. I. 8a edizione. Firenze: Le Monnier. 212 S. 8°.

A. Socci e G. Tolomei. Elementi di geometria secondo il metodo di Euclide. Vol. II. 10a edizione. Firenze: Le Monnier. IV + 324 S. 8°.

G. M. Testi. Corso di matematiche. Volume III: Geometria elementare. 3a edizione, corretta e modificata. Livorno: Giusti. X + 411 S. 8°.

G. Veronese e P. Gazzaniga. Elementi di geometria. 5a edizione. Padova: Drucker. 133 S. 8°.

G. Veronese. Nozioni elementari di geometria intuitiva. 4a edizione. Padova: Drucker. 108 S. 8°.

A. Villa. Trigonometria sferica e sue applicazioni. Milano: Sonzogno. 60 S. 16mo.

J. Adamczik. Transformation sphärisch-rechtwinkliger Koordinaten. Österr. Zeitschr. f. Vermessungswesen **11**, 139-141.

R. Bendl. Ein Beitrag zur Lösung des Apolloniusschen Problems durch Inversion. Progr. der Realsch. in Písek, 1912/13. 12 S. (Böhmisch.)

E. R. Cruewell. Die Regeln des Dreiecks. Fünfte, vermehrte Ausgabe. Diese Ausgabe enthält den Beweis für den Satz von Fermat. Berlin: Buschhardt. IV + 119 S. 8°.

H. Detlefs. Zum Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes. Unterrichtsbl. f. Math. **19**, 30.

Stetige Verwandlung und Drehung der Kathetenquadrate. Lp.

Fr. Faltus. Apolloniussches Problem im Raume. Progr. des Realgymn. in Neu-Bydžov. 14 S. (Böhmisch.)

A. Ferrari. Sulla somma degli angoli interni di un poligono piano convesso. Torino: Negro. 16 S. 8°.

A. Ferrari. Sopra una proprietà delle bisettrici interne di un triangolo. Torino: Negro. 16 S. 8°.

R. v. Förster. Ein Beweis des Satzes über die Seite des regelmäßigen Zehnecks. Unterrichtsbl. f. Math. **19**, 57.

W. Gallatly. The modern geometry of the triangle. Second edition. London: Hodgson. VIII + 126 S. 8°.

T. J. Garstano. Parallel straight lines and the method of direction. London: Wyman. 8 S.

I. Ghersi. Metodi per risolvere i problemi di geometria elementare. 2a edizione, rifatta. Milano: Hoepli. 271 S. 24mo.

L. E. B. T. ter Haas. Inversie met veranderlijke macht en oorsprong. Vriend der Wisk. **28**, 180-196, 231-251.

Eine eigene Bearbeitung der Eigenschaften schneidender Kreise und Kreisbüschel. Schn.

R. HENNIG. Zum Peripheriewinkel. Unterrichtsbl. f. Math. **19**, 39-40.

E. M. HORSBURGH. A simple linkage for describing equal areas. Edinb. M. S. Proc. **31**, 105-110.

KIESLING. Zwei Dreiecksaufgaben. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 21-24.

KRÜGER. Konstruktion zur Napoleonsaufgabe. Unterrichtsbl. f. Math. **19**, 152.

Konstruktion des Kreismittelpunktes nur mit dem Zirkel. Lp.

P. LOETZBEYER. Einige interessante Formeln für das Volumen des regelmäßigen Ikosaeders. Unterrichtsbl. f. Math. **19**, 117-118.

G. LUCKHAUB. Die Behandlung der sphärischen Trigonometrie mittels quadratischer und Hermitescher Formen. Math. és phys. lapok **22**, 273-322. (Ungarisch.)

P. MANSION. Sur les premières démonstrations de l'équivalence des figures symétriques. Mathesis **33** [(4) **3**], 278.

Aus Bibl. Math. (3) **10**, 277 (F. d. M. **40**, 63, 1909).

F. DE MARCO. La quadratura del circolo, e come è stato risolto il problema della scienza. Bologna: Galleri. 16 S. 8⁰.

H. A. NABER. Het theorema van Pythagoras. Handel. XIV. Nederl. Natuur en Geneesk. Congr., 213-216.

Anschaulicher Beweis. Lp.

J. NEUBERG. Sur une position particulière de deux triangles ou de deux tétraèdres. Mathesis **33** [(4) **3**], 93-97.

G. PHILIP. A problem of Robert Simson's. Edinb. M. S. Proc. **31**, 94-96.

F. PIERRE. Un problème de trigonométrie sphérique. Mathesis **33** [(4) **3**], 35-39.

Ein sphärisches Dreieck aus $A+a, B+b, C+c$ zu berechnen. Lp.

K. PILIZOTTI. Geometrographische Untersuchung einiger photogrammetrischer Probleme. Progr. Wien. 10 S. 8⁰.

T. PÖSCHL und K. v. TERZAGHI. Berechnung von Behältern nach neueren analytischen und graphischen Methoden. Berlin: J. Springer. IV + 80 S. gr. 8⁰.

D. ROBERTSON. A geometrical construction for the rainbow formula. Edinb. M. S. Proc. **31**, 97-100.

D. ROBERTSON. Geometrical constructions for refraction and reflection in a prism. Edinb. M. S. Proc. **31**, 101-104.

P. v. SCHÖNFELD. Die Berechnung der Zahl π auf Grundlage zyklischer und parabolischer Gesetze. Aussig: Selbstverlag.

J. Thomae. Dreieck aus den Mittelloten der Seiten bis zum Umkreismittelpunkt zu konstruieren. Unterrichtsbl. f. Math. **19**, 67-69.

J. Steiner. Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichtsanstalten. Hrsg. v. A. J. v. Oettingen. 2. Aufl. (Ostwalds Klass. Nr. 60.) Leipzig: W. Engelmann. 85 S. 8⁰.

M. Sykes and others. A source book of problems for geometry, based upon industrial design and architectural ornament. Boston: Allyn & Bacon. VIII + 372 S. 8⁰.

V. Thébault. Sur une droite du triangle. Mathesis **33** [(4) **3**], 201-204.

Über die Mannheimsche Gerade. Lp.

V. Thébault. Sur quelques propriétés d'un triangle. Mathesis **33** [(4) **3**], 204-208.

Dreiecke, bei denen $\alpha:\beta:\gamma = 1:2:4$. Lp.

J. Welsch. Théorème de Fuss. Polygones articulés. Assoc. Franç. (Nîmes) **41**, 79-80.

Ein gelenkiges Vieleck hat den größten Inhalt, wenn es einem Kreise eingeschrieben ist. Lp.

J. Welsch. Triangles inscrits ou circonscrits à un triangle donné et semblables à un autre triangle donné. Assoc. Franç. (Tunis) **42**, 34-37.

J. Ser. Essai de linéométrie. Première partie. Paris: Gauthier-Villars: 83 S. 8⁰.

Kapitel 4.

Darstellende Geometrie.

G. Loria. Vorlesungen über darstellende Geometrie. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fr. Schütte. Zweiter Teil. Anwendungen auf ebenflächige Gebilde, Kurven und Flächen. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. XII u. 294 S. gr. 8⁰.

Dem vor sechs Jahren erschienenen (F. d. M. 38, 554, 1907) ersten Bande der Methodenlehre, folgen jetzt die Anwendungen der darstellenden Geometrie Dabei werden ebenflächige Gebilde nur kurz behandelt, um so eingehender dagegen krumme Linien und Flächen. Und zwar, was für den theoretischen Geometer das Wichtigste ist, werden nicht nur die landläufigen Kurven- und Flächenklassen untersucht, sondern auch solche herangezogen, deren nähere Untersuchung noch heute manches Neue bieten dürfte. Hat doch der Verf. selbst erst vor kurzem eine ganze Reihe interessanter Eigenschaften der Spirale des Pappus mitgeteilt in einer Untersuchung, deren Ergebnisse mit Recht in dem vorliegenden Bande Aufnahme gefunden haben. Was die Darstellung betrifft, so ist der Verf., wie ja schließlich im Grunde jeder Geometer, Fusionist in dem Sinne, daß er die anschaulichen Grundlagen durch strenge analytische

Definitionen verstärkt und die Ergebnisse der geometrischen Schlußweisen gern durch analytische Rechnung sichert.

So wird der Leser von vornherein vor einer Einseitigkeit bewahrt, die ihn später, bei eigenen Untersuchungen, auf das schwerste schädigen würde. Der Inhalt im einzelnen sei durch die Kapitelüberschriften charakterisiert. I. Buch. Körperliche Ecken und Polyeder. 1. Das Dreiflach. 2. Polyeder im allgemeinen. 3. Darstellung der Polyeder. 4. Fundamentalaufgaben über Polyeder. II. Buch. Kurven. 1. Ebene Kurven. 2. Raumkurven im allgemeinen. 3. Untersuchung spezieller Raumkurven. (Spirale des Pappus und Schraubenlinie.) III. Buch. Flächen. 1. Allgemeines. 2. Die Flächen zweiter Ordnung. 3. Kegel und Zylinder. 4. Regelflächen. 5. Rotationsflächen. 6. Schraubenflächen.

Im allgemeinen werden die Konstruktionen mittels der Mongeschen Methode ausgeführt; doch bietet es dem Leser, der den ersten Band durchgearbeitet hat, natürlich keine Schwierigkeit, das Verfahren für irgendeine andere Projektionsmethode zu finden. Hinweise darauf sind im Text mehrfach gegeben.

Das Werk wird dem Studierenden der Mathematik manche Belehrung und Anregung bieten; nur wird er beachten müssen, daß die darstellende Geometrie auch für die Praxis ihre Bedeutung hat, und daß er bei dem Studium dieses rein theoretischen Werkes die praktischen Anwendungen auf die Technik, nebst ihren Schattenkonstruktionen, axonometrischen Rissen u. a. m. nicht vernachlässigen darf. Erst beides zusammen wird ihm die Beherrschung des Stoffs verleihen, deren er später in seiner eigenen Lehrpraxis bedarf. Sk.

K. Rohn und E. Papperitz. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Erster Band. Orthogonalprojektion. Vielflache, Perspektivität ebener Figuren, Kurven, Zylinder, Kugel, Kegel, Rotations- und Schraubenflächen. Vierte Auflage. Leipzig: Veit & Co. XX u. 502 S. gr. 8°.

Das Werk, von dem die dritte Auflage F. d. M. **37**, 555 (1906) nur mit dem Titel angezeigt werden konnte, beginnt mit dem vorliegenden ersten Bande zum vierten Male zu erscheinen. Mit der gründlichen Umarbeitung, namentlich in der Anordnung, die es bei der vorigen Auflage erfahren hat, scheint es seine endgültige und zweckentsprechende Form erlangt zu haben, und nur wenig hatte die neue Ausgabe zu ändern oder hinzuzufügen. Der erste Band, dessen Inhalt schon der Titel charakterisiert, ist ausschließlich der Mongeschen Projektionsart gewidmet, die ausführlich, auch theoretisch, nach allen Richtungen hin studiert wird. Es ist daher selbstverständlich, daß die Affinität in den Mittelpunkt der Theorie gerückt ist. Die jetzt hinzugekommenen Einzelheiten, die eingehendere Behandlung der stereographischen Projektion sowie der Anhang über die Einfachheit und Genauigkeit graphischer Konstruktionen werden vielen Lesern des Buchs willkommen sein. Das Buch wird seine Beliebtheit in den Kreisen, für die es bestimmt ist, auch fernerhin zu wahren wissen. Sk.

R. Rothe. Darstellende Geometrie des Geländes. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. IV u. 67 S. 8°. (Math. Bibl. von W. Lietzmann und A. Witting. XIV.) [1914.]

Um den Leser in dieses nur geringe Vorkenntnisse erfordernde Gebiet einzuführen, entwickelt der Verf. im ersten Abschnitte die Grundbegriffe und die elementaren Konstruktionen für gerade Linien und Ebenen. Die praktische Verwendbarkeit dieser Konstruktionen wird im nächsten Abschnitt an einigen Aufgaben gezeigt, wie Aufschütten eines Dammes, Anlegen eines ebenen Platzes, Anlegen eines Weges von gegebener Steigung auf einem ebenen Hange, Aufschütten einer Halde, Ausschachten einer Grube, Konstruktion einer Tunnelmündung. Nachdem auf diese Weise Gelegenheit zur Einübung der Fundamentalkonstruktionen gegeben und zugleich die Verwendbarkeit der Methode in Geologie, Berg- und Hüttenwesen, Wege- und Eisenbahnbau gezeigt worden ist, bringt der nun folgende Hauptabschnitt des Buches die Darstellung der Geländeflächen durch Schicht- und Fallinien, die Untersuchung der Krümmungsverhältnisse topographischer Flächen, die Darstellung der Gipfel-, Mulden- und Jochpunkte, der Wasserscheiden und Talwege usw. Der letzte Abschnitt des Bändchens enthält einige Aufgaben praktischer Art, die sich bei der Benutzung topographischer Karten darbieten, insbesondere Längen-, Flächen- und Volumenbestimmungen. Die Lösung dieser Aufgaben ist nur in ihren Grundzügen gezeichnet. Zch.

J. Jarosch. Methodik des Unterrichts in der darstellenden Geometrie und im geometrischen Zeichnen. Wien: A. Pichlers Ww. 104 S. gr. 8⁰.

In der Einleitung werden in kurzem historischen Überblick Inhalt und Art des Unterrichts in der darstellenden Geometrie entwickelt und der eigene Standpunkt des Verf. gekennzeichnet, der im wesentlichen durch die von Emil Müller gegebenen Richtlinien bestimmt ist. Der erste Teil entwickelt dann diese Gedanken in eingehender und ansprechender Weise, wobei auch auf Äußerlichkeiten, Lehrmittel, Zeichenbehelfe, Bezeichnungsweise der genügende Wert gelegt wird. Sodann folgt die eingehende Darstellung des Lehrgangs an der Realschule und am Realgymnasium, der ja bekanntlich weit über das an reichsdeutschen Schulen Erreichbare hinausgeht, trotzdem aber dem Lehrer der darstellenden Geometrie zur prüfenden Durchsicht zu empfehlen ist. Im Anhang sind die österreichischen Normallehrpläne, soweit sie die darstellende Geometrie betreffen, zusammengestellt. Das Buch ist anregend geschrieben und bietet außerdem zahlreiche Literaturangaben und ausführliche Zitate anderer Schriftsteller. Sk.

H. Getrost. Die freie Perspektive im Zeichenunterricht der Mittelklassen höherer Lehranstalten. Progr. (Nr. 917) Liebig-Oberrealsch. Darmstadt. 16 S. 4⁰.

Verf. betont die Wichtigkeit der perspektivischen Abbildung und will sie deshalb schon in Tertia gelehrt wissen. Nach einer längeren allgemeinen Einleitung gibt er eine allzu kurze Skizze seines Verfahrens, das in eine Reihe von Lehrsätzen ausläuft. Mit deren Hülfe löst er dann mehrere Aufgaben; doch ist es Ref. nicht gelungen, sich eine klare und befriedigende Vorstellung von der für das Streckenabtragen angewandten Methode zu bilden. Sk.

G. Loria. Proiezione centrale e omotetia. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 121-123.

Bei der in der darstellenden Geometrie üblichen Methode der Zentralprojektion pflegt ein beliebiger Punkt M bestimmt zu werden, indem seine Projektion M' und eine Gerade (T, I') oder eine Ebene $[t, i']$ gegeben wird, die ihn enthält. Dieses System hat die Unbequemlichkeit, daß derselbe Punkt zweier doppelt unendlichen Darstellungsreihen fähig ist. Statt der Punkte T, I' können nämlich als bestimmende Elemente von M zwei andere mit M' in einer Geraden liegende Punkte gewählt werden in solchen Abständen, deren Verhältnis μ gleich $M'' T : M' T$ ist, somit statt der Geraden t, i' zwei zu ihnen parallele in solchen Abständen von M', deren Verhältnis $M' t : M' i'$ gleich $M'' T : M' T = \mu$ ist. Das wesentliche Element, das neben der Projektion die Bestimmung des Punktes vervollständigt, ist somit die Zahl μ; man kann also schreiben $M \equiv (M' \mu)$, wo M' das Zentrum einer Ähnlichkeit mit dem Ähnlichkeitsverhältnis μ ist. Der Vorteil dieser Anschauung wird an neuen Lösungen der darstellenden Geometrie erläutert. Lp.

M. Grossmann. Die Zentralprojektion in der absoluten Geometrie Proc. 5. Intern. Math. Congr **2**, 66-69.

„Die deskriptiven Aufgaben der absoluten Zentralprojektion werden ebenso gelöst wie in der Zentralprojektion der euklidischen Geometrie.“ Als Beispiel für die Behandlung metrischer Aufgaben dient das Normalenproblem. Die Durchführung dieses Beispieles läßt erkennen, daß die metrischen Aufgaben der absoluten Zentralprojektion nur lösbar sind bei ausgiebiger Verwendung projektiver Methoden. Lp.

M. Grossmann. Perspektivische Konstruktionen für stereographische Netzentwürfe. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **21**, 296-298.

Konstruktion einzelner Punkte von Bildkreisen, wenn deren Mittelpunkte über die Grenzen des Zeichenblatts hinaus fallen. Sk.

Kaluza. Ein bewegliches Modell zur Zentralperspektive. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 387-390.

Das Modell soll dazu dienen, die bekannte Konstruktion des zentralperspektiven Bildes P' eines in der Grundebene gelegenen Punktes P mit Hülfe der beiden Distanzgeraden der Anschauung näher zu bringen. Lp.

Gg. Heussel. Die stereographische Projektion und ihre Anwendung auf die konstruierende Kugelgeometrie. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 245-255.

Der Verf. empfiehlt die stereographische Projektion für die konstruierende Geometrie der Kugel. Am Schluß der Darstellung der an verschiedenen Auf-

gaben erläuterten Methode bemerkt er, man könne einwenden, die Bilder seien weniger einfach als die Schrägbilder, besonders wenn es sich um Abbildung der ganzen Kugel handelt. „Man kann sich so helfen, daß man die beiden Halbkugeln von zwei verschiedenen, einander diametral gegenüberliegenden Punkten abbildet. Sind jedoch nur Teile der Kugel darzustellen, die sich nicht über eine Halbkugel hinaus erstrecken, so tut die stereographische Projektion dieselben Dienste wie die Parallelprojektion, hat aber vor dieser den Vorzug der Einfachheit in konstruktiver Hinsicht.“ Lp.

G. Loria. Détermination directe des projections des bissectrices d'un angle. A propos d'un article de M. Paterno. Ens. Math. **13**, 413.

Verf. weist auf seine Bemerkungen zu der Aufgabe im Periodico di Mat. (3) **2**, 41-44 (F. d. M. **35**, 546, 1904) und auf die Konstruktion in seinen Vorlesungen über darstellende Geometrie (**1**, 54-57) hin. Sk.

F. P. Paterno. Déterminations directes des projections des bissectrices d'un angle. Ens. math. **15**, 329-332.

Die ersten beiden Konstruktionen benutzen die symmetrischen Beziehungen beim gleichschenkligen Dreieck, die dritte den Satz vom Teilverhältnis, nach dem die Winkelhalbierenden die gegenüberliegende Dreiecksseite teilen. Sk.

R. Mehmke. **Über die Bestimmung des Inhalts eines durch zwei Projektionen gegebenen Tetraeders und über die entsprechende Aufgabe in höheren Räumen.** Arch. d. Math. u. Phys. (3) **21**, 305-309.

Angeregt durch die Veithensche Lösung desselben Problems (Arch. d. Math. u. Phys. (3) **19**, 286-287; F. d. M. **43**, 607, 1912), gibt Verf. hier eine wesentlich einfachere, die auf dem Satze beruht: „Der sechsfache Inhalt eines Tetraeders ist gleich dem Produkt aus dem in der Richtung einer beliebigen Achse gemessenen Abstand irgendeiner Ecke des Tetraeders von der gegenüberliegenden Seitenfläche und dem doppelten Inhalt der rechtwinkligen Projektion dieser Seitenfläche auf eine zu jener Achse senkrechte Ebene.“ Das Verfahren läßt sich leicht auf die Figur des Simplex im n-demensionalen Raum ausdehnen. Sk.

A. W. R. Thiel. Assenconstructie der cirkelperspectief. Nieuw Archief (2) **10**, 427-428.

Eine von der üblichen Konstruktion nicht wesentlich abweichende Bestimmung der Achsen des Kegelschnitts, der aus der Perspektive eines Kreises hervorgeht. Sk.

O. Danzer. Einfache Konstruktionen für metrisch spezielle Raumkurven vierter Ordnung zweiter Art. Wien. Ber. **122**, 1107-1134.

Die in der darstellenden Geometrie auftretenden beiden Spezialfälle der im Titel genannten Kurven sind: 1. die Striktionslinien des einschaligen Hyperboloids, 2. die Asymptotenlinien des Plückerschen Konoids. Zu 1 ersetzt die vorliegende Arbeit die bisher üblichen Konstruktionen der Normalrisse durch viel einfachere, lehrt die Konstruktion von Tangenten, stellt den Anschluß an die Arbeiten Em. Weyrs (F. d. M. **7**, 417, 1875 u. **8**, 497, 1876) her und „bringt diese Kurven dadurch konstruktiv vollständig in unsere Gewalt". — Zu 2 werden die bisher von Rohn-Papperitz und Sturm gefundenen Ergebnisse einfacher hergeleitet. — 16 Textfiguren dienen zur Erläuterung.
Z.

EMIL MÜLLER. Das Abbildungsprinzip. Deutsche Math.-Ver. **22**, 44-59.

Wiederabdruck der Rede zur Rektoratsübernahme, über die F. d. M. **43**, 602, 1912 berichtet worden ist.
Sk.

A. COMESSATTI. Alcune osservazioni teorico-pratiche di fotogrammetria illustrate da un esempio. Ven. Ist. Atti **72** [(8) **15**], 865-892.

Es handelt sich um die Aufgabe, aus zwei Perspektiven mit bekannter innerer Orientierung die Darstellung des Objekts in Grund- und Aufriß oder in kotierter Projektion zu gewinnen. Dabei kommt es vor allem darauf an, die Konstruktion so einzurichten, daß auch die praktisch günstigste Lösung erhalten wird. Die Darlegung wird durch schöne Zeichnungen gut erläutert.
Sk.

. . . . . . Nueva solución de un problema de fototopografía. Rev. Soc. Mat. Esp. **2**, 261-265.

Eine einfache Aufgabe über zwei projektive Büschel, die denselben Mittelpunkt besitzen.
Sk.

J. V. BERGER. Hauptmann Theodor Scheimpflugs (†) Aerophotogrammetrie. Österr. Flugzeitschrift **7**, 322-323, 345-349, 371-374, 398-401, 416-417. Mit 2 Tafeln.

I. Der Erfinder und sein Werk. II. Die Aufnahme. III. Die Ausarbeitung. IV. Schlußbemerkungen.

Die Aerophotogrammetrie ist die photogrammetrische Aufnahme der Erdoberfläche vom Luftfahrzeug aus. Bestimmend für die Abweichungen von der gewöhnlichen Photogrammetrie, der Geophotogrammetrie, sind die Unmöglichkeit der genauen Bestimmung des Standorts und die Notwendigkeit großer Bildwinkel.
Schr.

Weitere Literatur.

G. M. BRUNO. Nociones elementales de geometría aplicadas al dibujo lineal. 16ª edición. Paris: Procuraduria general. 112 S. 16mo.

P. Camman et G. Warisse. Géométrie descriptive. Classe de 1re C et D. Paris: Gigord. VII + 272 S. 8°.

T. Chollet et P. Mineur. Traité de géométrie descriptive. Première partie 8e édition. Paris: Vuibert. VI + 336 S. 8°.

F. Chomé. Cours de géométrie descriptive. Livre 1er. 5e édition, revue et augmentée. Paris: Gauthier-Villars. XXII + 211 S.

J. Claudel. L'introduction à l'art de l'ingénieur. Partie théorique. Revue et mise au point par G. Dariès. Deux volumes. Paris: Dunod et Pinat. VIII + 1858 S. 8°.

L. Cloquet. Traité de perspective pittoresque. Paris: Dunod et Pinat. 8°.

J. Chr. Deuss. Beginselen der beschrijvende meetkunde (Grundlagen der darstellenden Geometrie). Zwolle: W. E. J. Tjeenk Willink. 73 S., Atlas 36 S. kl. 8°. Lehrbuch für Realschulen mit Examenaufgaben. Schn.

H. Dock. Photogrammetrie und Stereophotogrammetrie. Berlin u. Leipzig: G. J. Göschen. 130 S. kl. 8°. (Samml. Göschen Bd. 699.)

C. van Drooge. Leerboek der beschrijvende meetkunde (Lehrbuch der darstellenden Geometrie). Bussum: C. A. J. van Dishoeck. 109 S., Atlas 48 S. Lehrbuch für Realschulen mit Examenaufgaben. Schn.

H. Franke. Die Umrisse der Kristallflächen und die Anfertigung von Kristallmodellen. Stuttgart: F. Enke. VIII + 111 S., 119 Abb., 26 Taf. Lex. 8°.

M. Gianni Marchioni. Corso di proiezioni ortogonali, teoria delle ombre, prospettiva. Milano: Villardi. 95 S. 16mo.

H. D. Hess. Graphics and structural design. New York: Wiley. VIII + 426 S. 8°.

F. Kadeřávek. Über Isophoten der Rotationsflächen zweiter Ordnung. Časopis **42**, 588-561. (Böhmisch.)

B. Kirsch. Darstellende Geometrie. Dortmund: F. W. Ruhfus. 94 S. + XIX S. 8°

J. Klíma. Deskriptiv-geometrische Lösung des Normalenproblems bei Kegelschnitten. Časopis **42**, 32-42, 401-406. (Böhmisch.)

P. Loetzbeyer. Zur Darstellung des regelmäßigen Ikosaeders in schiefer Parallelprojektion. Unterrrichtsbl. f. Math. **19**, 116-117.

H. Mandart. Leçons de géométrie descriptive, point, droite et plan. 2e édition Namur: Wesmael-Charlier. 80 S.

A. V. Miller and E. S. Maclin. Descriptive geometry. New York: Mc Graw-Hill. VII + 131 S. 8°.

C. Merizzi. Lezioni di geometria descrittiva. Livorno: Giusti. 202 S. 16mo.

C. Montanari. Elementi di geometria descrittiva. 3a edizione, riveduta e corretta. Livorno: Giusti. 40 S. 16mo.

R. Nicodemi. Piani quotati. Napoli: Pironti. 73 S. 8°.

G. PINCHERLE. La costruzione geometrica delle ombre. Milano: Sonzogno. 58 S. 16mo. (Biblioteca del popolo, 549.)

C. RANELETTI. Elementi di geometria descrittiva. Milano: Hoepli. XII + 197 S. 16mo. (Manuali Hoepli.)

JOH. RENNER. Lehrbuch der darstellenden Geometrie und des geometrischen Zeichnens für Realgymnasien. 2. Teil für die VI. Klasse. Wien: C. Fromme. VIII + 100 S., 18 Taf. gr. 8°.

E. J. ROTHUIZEN. Grondbeginselen der beschrijvende meetkunde. I. (Grundlagen der darstellenden Geometrie). Goes: Oosterbaan en le Cointre. 234 S., Atlas 84 S.

Zum Selbststudium für Techniker bestimmt. Schn.

C. RUNGE. Graphical methods. (Columbia University lectures.) New York: Lemcke and Buechner. VII + 148 S. 8°.

J. SCHWEITZER. Das Kristallzeichnen. Erster Teil: Die Formen des regulären Systems. Progr. Schwäb.-Hall.

H. THALER. Beleuchtungskonstruktionen an Kreiszylinderflächen. Progr. Stockerau. 16 S. 8°.

G. THOMPSON. Geometry of building construction. London: Routledge. 142 S. 8°.

K. H. W. VISSER. Leerboek der beschrijvende meetkunde (Lehrbuch der darstellenden Geometrie). Rotterdam: W. L. & J. Brusse. 72 S., Atlas 34 S.

Lehrbuch für mittlere technische Lehranstalten. Schn.

G. VITALE. La divisione degli archi e degli angoli nel disegno geometrico. Brescia: Unione. 11 S. 8°.

J. VONDERLINN. Schattenkonstruktionen. Durchgesehener Neudruck. Berlin u. Leipzig: G. J. Göschen. 118 S. kl. 8°. (Samml. Göschen, Bd. 236.)

Kapitel 5.

Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

H. GRASSMANN. Projektive Geometrie der Ebene unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt. In 2 Bänden. 2. Bd. Ternäres. 1. Teil. Leipzig: B. G. Teubner. XII + 410 S. 8°.

Den ersten Band des Werkes habe ich F. d. M. **40**, 590, 1909, besprochen. Dabei habe ich ein Versehen begangen, das ich berichtigen muß. Durch die Worte: „daß die Rechnung ... auszeichnet“ wird der Anschein erweckt, als ob der Verf. die projektive Geometrie auf die Punkt- und Streckenrechnung begründet und also das Unendlichferne ausgezeichnet hätte. Das ist aber nicht der Fall: die Strecken spielen in dem Buche nur eine beiläufige Rolle, und die projektive Geometrie wird durch die Punktrechnung allein begründet, ohne das Unendlichferne auszuzeichnen. — Von dem zweiten Bande des Werkes liegt

jetzt der erste Teil vor, der sich mit den linearen Verwandtschaften der Ebene, also mit Kollineation und Reziprozität, beschäftigt und besonders das Polarsystem und im Anschlusse daran die Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse sowie die Büschel solcher Kurven untersucht. In Abschnitt 25 und 26 werden die Dreieckskoordinaten eingeführt und die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks und Vierseits entwickelt. Die Abschnitte 27—29 sind der Kollineation gewidmet, wobei insbesondere auf die Untersuchungen über das Verschwinden des kombinatorischen Produktes dreier Punkt-Punkt-Kollineationen hingewiesen sei. Die Abschnitte 30—34 behandeln die Reziprozität, das Polarsystem mit seinen Ausartungen und die Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse in Dreieckskoordinaten, in kartesischen Punktkoordinaten und in Hesseschen Linienkoordinaten. Die Abschnitte 35—38 behandeln Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschar, ihre Beziehungen zu Geraden und zu Punkten, endlich die zugehörigen Pol- und Polarkegelschnitte. El.

E. Howard Smart. A first course in projective geometry. London: Macmillan and Co. XXIII u. 273 S.

Mit Ausnahme einer kurzen Einleitung in die Methode der räumlichen Projektion widmen sich die ersten sechs Kapitel der ebenen Geometrie der Dreiecke, Vierecke und Kreise; in ihnen werden die Prinzipien der Verwandtschaft und der Dualität, harmonische Gebilde, Inversion, Ähnlichkeit, Pole und Polaren in systematischer Folge entwickelt. In dem siebenten Kapitel werden weitere Sätze und Aufgaben über Projektion gegeben, und diese genügen für das, was der Verf. als Hauptzweck seines Buches ansieht, nämlich eine logisch gefestigte Erörterung der Geometrie der Kegelschnitte. In den letzten Kapiteln wird das Prinzip der Dualität frei eingeführt. Das Buch schließt mit typischen Beispielen reziproker Betrachtung. Vgl. Nature **92**, 658. [illegible] J. (Lp.)

G. Kohn. Zur Geometrie der Würfe: Ein Seitenstück zu projektiven Figuren. Deutsche Math.-Ver. **22**, 341-345.

Unter dem Wurf eines geometrischen Gebildes versteht der Verf. den Inbegriff der projektiven Eigenschaften des Gebildes. Während projektive Figuren sich dadurch definieren lassen, daß für sie gleiche Koordinatenmatrizen erzielbar sind, definiert der Verf. kontrajektive Figuren dadurch, daß korrespondierende Koordinatenmatrizen für sie erzielbar sind. Korrespondierend heißen die Matrix der Koeffizienten eines Systems von unabhängigen homogenen linearen Gleichungen und die Matrix eines Systems seiner unabhängigen Lösungen.

Der Verf. erhärtet an einer Reihe von Beispielen die folgende Regel: Überall da fehlen (bis zu dieser Stunde) die Verallgemeinerungen selbst einfacher und grundlegender Sätze der projektiven Geometrie, wo bei der Verallgemeinerung an Stelle von Figuren gleichen Wurfs, projektiven Figuren, Figuren entgegengesetzten Wurfs kontrajektive Figuren, einzuspringen hätten, oder besser gesagt, überall da, wo eine Kontrajektivität unter der Maske einer Projektivität sich verbirgt. So ergibt sich für den Satz $ABCD \overline{\wedge} BADC$, der für 4 Punkte einer Geraden gilt, die Möglichkeit folgender Verallgemeinerung für die Ebene:

Die 6 Ecken zweier Dreiecke in der Ebene sind kontrajektiv zu ihren 6 Gegenseiten, und für den Raum: Die 8 Ecken zweier Tetraeder sind kontrajektiv zu ihren 8 Gegenebenen, und analog für höhere Räume. Auf ähnliche Weise verallgemeinert der Verf. 1. den Satz von v. Staudt, nach welchem die 4 Punkte, welche auf einer Geraden durch Schnitt mit den 4 Seitenflächen eines Tetraeders hervorgehen, projektiv sind zu den 4 Ebenen, welche durch Verbindung der Geraden mit den 4 Gegenecken erhalten werden; 2. den Satz von Study, daß bei zwei aufeinander bezogenen Tetraedern des R_3 die Figur der 4 Verbindungslinien entsprechender Ecken projektiv ist zur Figur der 4 Schnittlinien entsprechender Ebenen; 3. den von ihm selbst herrührenden Satz, daß auf einer Seite eines vollständigen ebenen Fünfecks durch Schnitt mit den übrigen Seiten 5 Punkte entstehen, die in gewisser Reihenfolge projectiv sind zu den 5 Ecken des Fünfecks auf dem sie enthaltenden Kegelschnitt, und 4. den Satz von Desargues über den Schnitt der Gegenseitenpaare eines vollständigen Vierecks mit einer Geraden seiner Ebene. Zch.

J. de Vries. Een involutie van geassocieerde punten. Amst. Ak. Versl. **21**, 1269-1277.

Gegeben seien drei Büschel von Flächen zweiter Ordnung (a^2), (b^2), (c^2) mit den Grundkurven α^4, β^4, γ^4. Bringt man irgendeine Fläche a^2 mit irgendeiner Fläche b^2 und mit irgendeiner Fläche c^2 zum Schnitt, so entsteht eine Involution assoziierter Punkte I^8, die aus ∞^3 Gruppen besteht. Jeder Punkt, der nicht auf α^4, β^4 oder γ^4 liegt, gehört einer Gruppe an. Die Punkte der drei Grundkurven sind singuläre Punkte.

Durch einen Punkt A von α^4 geht eine b^2 und eine c^2. Diese haben eine Raumkurve vierter Ordnung $(A)^4$ gemein. Wenn A die Kurve α^4 durchläuft, so erzeugt $(A)^4$ eine Fläche A^{32} von der 32sten Ordnung. Die Punktpaare der Involution I^8 liegen auf den Strahlen eines Komplexes sechsten Grades. Die Involution besitzt 120 singuläre Sehnen, deren jede ∞^1 Paare der Involution enthält, nämlich die gemeinsamen Bisekanten der paarweise genommenen Grundkurven α^4, β^4, γ^4. Die Koinzidenzen der Involution I^8 liegen auf einer Fläche achter Ordnung Δ^8, die durch die Grundkurven α^4, β^4, γ^4 geht. Der Ort derjenigen Koinzidenzen, deren Träger eine Gerade l treffen, ist eine Raumkurve 26ster Ordnung δ^{26}, die l zur achtfachen Schnittlinie hat.

Diejenigen Septupel, die den Punkten einer Geraden l assoziiert sind, liegen auf einer Kurve 23ster Ordnung λ^{23}, die l zur achtfachen Schnittlinie hat. Der Ort der assoziierten Paare einer Ebene ist eine Kurve 15ten Grades φ^{15}. Die Septupel, die den Punkten einer Ebene φ assoziiert sind, liegen auf einer Fläche Φ^{23}, die von φ außer in φ^{15} in der Kurve δ^8 der in φ liegenden Koinzidenzen geschnitten wird. Eine willkürliche Ebene enthält 16 Tripel assoziierter Punkte.

Wenn die Büschel (a^2), (b^2), (c^2) die Gerade g gemein haben, so schneiden drei Flächen a^2, b^2, c^2 einander in 4 assoziierten Punkten; man hat dann eine Quadrupelinvolution assoziierter Punkte. Die Tripel, die den Punkten einer der Grundkurven assoziiert sind, liegen dann auf einer Fläche 16ter Ordnung, die 8mal durch g und 4mal durch jede der andern beiden Grundkurven geht. Die den Punkten von g assoziierten Punkte liegen auf einer Fläche 12ter Ordnung, die 7mal durch g und 2mal durch jede der Grundkurven geht. Es gibt 8 Transversalen der 4 Grundlinien und folglich 8 Punktpaare, die zu ∞^2 Gruppen der I^4

gehören. Die Paare von I^4 liegen auf den Strahlen eines Komplexes fünften Grades. g ist eine singuläre Gerade von I^4; die auf ihr liegenden Punktpaare bilden eine Involution (2, 2). Auch die 27 Bisekanten, welche α^3, β^3 und γ^3 paarweise noch gemein haben, sind singuläre Geraden von I^4. Der Ort der den Punkten einer Geraden assoziierten Punkte ist eine Kurve 17ter Ordnung. Die assoziierten Paare einer Ebene bilden eine Kurve neunter Ordnung. Zch.

C. Koehler. Über das Raumfünfeck und über die projektive Einteilung der durch ein Raumfünfeck bestimmten Polarfelder. Heidelb. Ak. Sitzber. 1913, 15 S.

Die Gegenelemente (Kanten und Seiten) eines vollständigen Raumfünfecks bestimmen in jeder ihm nicht angehörigen Ebene zehn Paare von Polarelementen eines Polarfeldes. Die Kriterien zur Unterscheidung der Gebiete der durch ein Raumfünfseit hervorgerufenen Raumteilung werden in der vorliegenden Arbeit so gefaßt, daß sich aus ihnen die dualistisch entsprechenden für das Raumfünfeck direkt ablesen lassen. Dann wird gezeigt, daß man, um die Lage einer Ebene in bezug auf ein Raumfünfeck zu bestimmen, nur festzustellen braucht, wie irgendeine Ecke desselben in bezug auf ein gewisses Raumfünfseit liegt. In der affinen Geometrie müssen je nach der Lage bezüglich der unendlich fernen Ebene zwei Typen von Raumfünfecken unterschieden werden. Hierauf werden die Kriterien für die projektive Beschaffenheit der durch ein Raumfünfeck bestimmten Polarfelder geometrisch hergeleitet und analytisch bestätigt. Zch.

R. Sturm. Über die Vorzeichenrichtigkeit metrischer Relationen in der Geometrie. Deutsche Math.-Ver. **22**, 39-43.

Die richtige Bestimmung der Vorzeichen macht in der Geometrie keine erheblichen Schwierigkeiten, wenn man folgende Regeln beachtet: 1. Man tut oft gut, nicht während der ganzen Ableitung auf Vorzeichenrichtigkeit zu bestehen, sondern zunächst mit der absoluten Richtigkeit sich zu begnügen. 2. Wertvoll ist ferner, eine Formel in der für die Erkenntnis der Vorzeichenrichtigkeit geeignetsten Gestalt zu schreiben. Man arbeite so viel als möglich mit Verhältnissen (oder Produkten) von Strecken auf derselben Geraden. 3. Es gibt vorzeichensichere und vorzeichenunsichere Formeln; doch auch bei letzteren empfiehlt es sich nicht, auf das Vorzeichen zu verzichten. Für diese Regeln gibt der Verf. Beispiele aus der synthetischen Geometrie. Sk.

F. S. Carey. On the anharmonic ratio of four complex elements. Quart. J. **44**, 297-308.

Der richtige Gedanke der Arbeit besteht darin, daß es nicht unmöglich ist, die komplexen Punkte der Ebene auf die reellen Geraden des Raumes abzubilden. Solche Abbildungen gibt es; auch Rezensent hat eine bearbeitet (F. d. M. **36**, 730, 1905). Die des Verf. ist unbrauchbar. Es soll das Doppelverhältnis von vier Geraden eines Büschels reell gedeutet werden. Das muß als mißlungen bezeichnet werden. Es gibt imaginäre Gerade von reeller Richtung; diese können nicht, wie Verf. meint, auf affine Transformationen bezogen werden. Es gibt

ferner Büschel mit uneigentlichem Scheitel; für diese passen die Formeln nicht. Trotz der Zusicherung „without any loss of generality" (die an sich übrigens gar keinen Sinn hat) werden von vornherein durch die gewählte Darstellung unzählig viele Geradenquadrupel ausgeschlossen. Weitere Formeln beachten nicht, daß auch in der Geometrie nicht durch Null dividiert werden darf. Der Verf. ist offenbar mit der Literatur über den Gegenstand nicht vertraut. Auch entfernt er sich von der sonst üblichen Terminologie, wenn er behauptet, im zweiten Teile „die lineare Funktion zweier komplexen Veränderlichen" diskutiert zu haben. Falls der Verf. sich einmal etwas mit Minimalgeraden beschäftigt hätte, würde er doch die „geometrical interpretation to the anharmonic ratio of a pencil of linear equations, some of which have imaginary parameters" erwähnt haben. B.

Weitere Literatur.

H. Berliner. Theorie der Polaren in bezug auf Dreiecke in synthetischer Behandlung. Diss. Bern, 65 S. 8° (1912).

P. Del Pezzo. Principî di geometria proiettiva. Lezioni dettate nell' Università di Napoli. Terza edizione. Napoli: De Rubertis. 431 S. 8°.

M. G. Gaba. A set of postulates for general projective geometry in terms of point and transformation. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 513.

E. Eichhorn. Konstruktive Überführung projektiver Grundgebilde. Progr. München, 44 S. 8°.

F. M. Exner. Über die Korrelationsmethode. Diss. Jena, 36 S. 8°.

J. L. S. Hatton. The principles of projective geometry applied to the straight line and conic. Camb. Univ. Press, X u. 366 S. 8° [Nature **92**, 196].

J. Kounovský. Grundlagen der projektiven Geometrie. Časopis **42**, 230-236, 369-377. (Böhmisch.)

G. Siegmund. Zyklische Kollineationen. Progr. Wien. 44 S. 8°.

S. Skópal. Involutorische Schnitte kollinearer Grundgebilde. Math. és phys. lapok **21**, 173-193. (Ungarisch, 1912.)

B. Besondere ebene Gebilde.

D. Fellini. Dal teorema di Desargues. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 127-129.

Unter anderem wird folgender Satz abgeleitet: Ein ebenes Viereck habe seine Ecken auf den vier Seiten eines anderen Vierecks. Wenn zwei Gegenseiten des ersten sich auf einer Diagonale des zweiten schneiden, so schneiden sich die beiden anderen Seiten des ersten auf der anderen Diagonale des zweiten. — Ein ähnlicher Satz für den Raum. Lp.

A. THIBINGER. Sobre una clase de cuadriláteros. Rev. Soc. Mat. Esp. **3**, 33-41.

Bekannte Eigenschaften zweier Vierecke, von denen das eine reziprok polar zu dem andern ist. Lp.

T. KUBOTA. Über eine Konstruktionsaufgabe ersten Grades. Tôhoku Math. J. **3**, 79-82.

Die wirkliche Durchführung linearer projektiver Aufgaben mit dem Lineal allein ist oft recht umständlich und nicht immer ohne weiteres anzugeben; ich erinnere nur, um den Beispielen des Verf. eins hinzuzufügen, an die Konstruktion des Polarsystems aus fünf Paaren konjugierter Punkte in Schröters Theorie der Kegelschnitte. In der vorliegenden kleinen Arbeit gibt der Verf. die Lösung folgender Aufgabe mit dem Lineal allein ausführlich an: Durch drei Systeme von je fünf Punkten sind drei Kegelschnitte gegeben, von denen man weiß, daß sie nur einen gemeinschaftlichen Punkt haben; diesen zu finden. C.

H. ERLER. Metrische Relationen an den vollständigen Figuren und am Kegelschnitt. Diss. Breslau. 76 S. 8°. 19 Figuren auf Tafeln.

Verf. beweist eine große Anzahl der metrischen Relationen, die von Schröter in dem Anhang der Steinerschen Vorlesungen über synthetische Geometrie mitgeteilt worden sind. 1. Doppelverhältnis von vier Paaren einer Involution. 2.—4. Metrische Relationen am Dreieck, am vollständigen Viereck, am Kreise. 5. Krümmungsmittelpunkt und Krümmungsradius eines Kegelschnitts. 6. Punkte und Tangenten eines Kegelschnitts. 7. Tangentendreieck der Parabel. 8. Involutionen auf konjugierten Durchmessern. 9. Polardreieck. 10. Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschar. Sk.

R. STURM. Die Basen, in bezug auf welche zwei Kreise oder zwei Kugeln zu einander polar sind. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **21**, 104-111.

Für zwei Kegelschnitte K_1, K_2 gibt es stets vier reelle oder imaginäre Kegelschnitte, in bezug auf welche sie zueinander polar sind. Diese Basen werden hier für den speziellen Fall, daß K_1 und K_2 Kreise sind, genauer bestimmt. Zwei Flächen zweiter Ordnung haben im allgemeinen acht Polartetraeder, die Kugeln aber, als Rotationsflächen mit gemeinsamer Achse, deren ∞^1. Die Basisflächen zweier Kugeln bestehen aus vier festen Rotationsflächen, deren Achse die Zentrale ist, und ∞^1 kongruenten Gruppen von je vier Flächen zweiten Grades, die aus einer von ihnen durch Drehung um die Zentrale hervorgehen. Sk.

R. STURM. Gleichseitige Polardreiecke bei einer Ellipse. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **21**, 50-53.

Bei dem Kreise gibt es nur stumpfwinklige (im Grenzfall rechtwinklige) Polardreiecke. Damit bei einer Ellipse gleichseitige Polardreiecke vorkommen können, muß $a \geqq b\sqrt{3}$ sein. Sk.

J. THOMAE. Über einen Satz von Rosanes. Leipz. Ber. **65**, 316-325.

Es wird ein einfacher geometrischer Beweis des folgenden Satzes aus der Theorie der Kegelschnittsysteme geliefert: Liegen die Punkte Q_1, Q_2, Q_3, die durch zwei gerade Linien g, g' durch P von P_1, P_2, P_3 harmonisch getrennt sind, wenn P_1, P_2, P_3 das gemeinsame Polardreieck des Büschels (k) ist, mit dem Punkte Q, der P für den Büschel (k) konjugiert ist, auf einer Geraden p, so gibt es im Büschel (k) einen Kegelschnitt k, der g, g' gleichzeitig berührt.

Ba.

L. KLUG. Einige Sätze über Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **21**, 317-324.

„Sind einem Kegelschnitt k zwei Vielecke mit je $2n$ Seiten einbeschrieben, und treffen $2n-1$ aufeinanderfolgende Seiten des einen ebensoviele aufeinanderfolgende Seiten des andern auf einer Geraden t, so treffen sich auch die restlichen Seiten auf dieser Geraden. Nennt man zwei solche Eckpunkte der Vielecke einander zugeordnet, aus welchen zwei sich auf t treffende Seitenpaare ausgehen, so umhüllen die Verbindungsgeraden der zugeordneten Eckpunkte einen Kegelschnitt, der k in den Treffpunkten mit t berührt.“ Hieraus folgt der (in seinem ersten Teile bekannte) Satz: „Treffen sich die $2n$ Gegenseitenpaare eines dem Kegelschnitt k einbeschriebenen $(4n+2)$-eckes auf einer Geraden t, so treffen sich die zwei restlichen Gegenseiten auch auf dieser Geraden, und die Verbindungsgeraden der gegenüberliegenden Eckpunkte (Hauptdiagonalen) umhüllen einen den k auf t doppelt berührenden Kegelschnitt.“ Die Anwendung auf den Pascalschen Satz $(n=1)$ ergibt die (bekannte) Folgerung: „Die vier Pascalgeraden jener vier Pascalsechsecke, welche dieselben Hauptdiagonalen haben, bilden ein Polvierseit. Die 60 Pascalgeraden des vollständigen Pascalsechseckes zerfallen in 15 Polvierseite.“

Die Proportionalität entsprechender Flächen affiner Systeme führt zu dem (bekannten) Satze: „Sind zwei Kegelschnitte konzentrisch-homothetisch, so schneiden die Tangenten des einen flächengleiche Segmente von dem andern ab; ferner sind die Flächen, welche von den aus den Punkten des einen ausstrahlenden Tangenten des andern Kegelschnittes und von den Bogen zwischen den Berührungspunkten begrenzt werden, einander gleich.“ Mit Hülfe einer konzentrisch-homothetischen Kegelschnittschar erhält man zu jedem beliebigen Vieleck $2 \cdot \infty^1$ Vielecke, von denen jedes mit ∞^1 derselben perspektiv-affin liegt, und alle diese Vielecke sind flächengleich.

Die letzten Sätze werden schließlich auf konzentrisch-homothetische Flächen zweiter Ordnung übertragen.

Zch.

K. ROHN. Das Schließungsproblem von Poncelet und einige Erweiterungen. Deutsche Math.-Ver. **22**, 330-340.

Nach einem einfachen analytischen Beweise des gewöhnlichen Ponceletschen Schließungssatzes und einer Ergänzung desselben (1) werden ebenfalls analytisch zwei Erweiterungen (2, 3) abgeleitet: 1. Schreibt man einem Kegelschnitt $f_{xx}=0$ irgend 2 Dreiecke um, so liegen ihre 6 Ecken auf einem Kegelschnitt $\varphi_{xx}=0$. Nun ordne man die Ecken der beiden Dreiecke einander in beliebiger Weise zu, dann bilden die Verbindungslinien entsprechender Ecken

ein drittes Dreieck, und ein viertes Dreieck wird von den Verbindungslinien der Berührungspunkte entsprechender Seiten gebildet. Das dritte Dreieck ist einem Kegelschnitt des Büschels $f_{xx} + \varrho\varphi_{xx} = 0$ umbeschrieben, und die Ecken des vierten sind die auf den Seiten des dritten liegenden Berührungspunkte. Es gibt im ganzen 6 derartige Dreieckspaare und 6 zugehörige Kegelschnitte im Büschel $f_{xx} + \varrho\varphi_{xx} = 0$. 2. Wird ein Kegelschnitt f von drei Kegelschnitten χ_1, χ_2, χ_3 je zweimal berührt, und sind g_1, g_2, g_3 die zugehörigen Berührungssehnen, so sind ihre 12 Schnittpunkte paarweise koordiniert, insofern die Verbindungslinie eines jeden Paares eine Ecke des Dreiecks g_1, g_2, g_3 enthält. Zu jedem Bogendreieck, dessen Seiten Teile der Kegelschnitte χ_1, χ_2, χ_3 bilden, gehört hiernach ein koordiniertes Bogendreieck. Die Ecken zweier koordinierten Bogendreiecke liegen entweder auf einem neuen Kegelschnitt φ, oder die Verbindungslinien koordinierter Ecken schneiden sich in einem Punkt. Im ersteren Falle berühren die Verbindungslinien koordinierter Ecken einen Kegelschnitt des Büschels $f + \varrho\varphi = 0$, und zwar fallen ihre Berührungspunkte in die Ecken des Dreiecks $g_1 g_2 g_3$. 3. Ist ein Büschel von Kegelschnitten gegeben, und schreibt man einem von ihnen ein Dreieck ein, dessen Seiten drei weitere Kegelschnitte des Büschels berühren, so kann man jenem eine unendliche Schar von solchen Dreiecken einbeschreiben, deren Seiten diese drei Kegelschnitte berühren, sobald von den drei Berührungspunkten des Dreiecks eine gerade Zahl (0 oder 2) auf den Verlängerungen der Dreiecksseiten gelegen ist. Die drei Verbindungslinien homologer Ecken von irgend zwei Dreiecken der Schar berühren einen Kegelschnitt des Büschels, ihre Berührungspunkte bestimmen ein Dreieck, dessen Seiten die homologen Seiten der ursprünglichen Dreiecke in ihren Berührungspunkten treffen. Dieser Satz kann auf n-Ecke ausgedehnt werden Zch.

W. Kodweiss. Über eine bemerkenswerte Lage dreier Kegelschnitte. Math.-naturw. Mitt. (2) **15**, 5-9.

Synthetisch-geometrischer Beweis des Satzes von Wölffing: „Sind drei Kegelschnitte K_a, K_b und K_c gegeben, so ist der geometrische Ort für alle Punkte, deren Polaren zu K_a und K_b konjugiert in bezug auf K_c sind, ein Kegelschnitt.“ Hat man einen Punkt des Ortes ermittelt, so kann man weitere Punkte desselben durch Konstruktion gewisser Zyklen von Polen und Polaren finden. Man erhält bei dieser Konstruktion zugleich die Örter der Punkte, deren Polaren zu K_b und K_c konjugiert bezüglich K_a und deren Polaren zu K_c und K_a konjugiert bezüglich K_b sind, sowie die dualen Örter. Zerfällt einer dieser Örter, so geschieht dasselbe mit den andern. Die Lage der so entstehenden Geraden- und Punktepaare wird zum Schluß untersucht. Zch.

H. Rothe. Über Hamiltonsche Sechsecke. Deutsche Math.-Ver. **22**, 183-191.

W. R. Hamilton hat für sphärische Sechsecke den Satz bewiesen: Lassen sich die drei Seiten $b_1 c_1$, $c_2 a_2$, $a_3 b_3$ eines einfachen Sechsecks $b_1 c_1 c_2 a_2 a_3 b_3$ durch bloße Verschiebungen (ohne Längenänderung) auf ihren Geraden zu einem Dreieck abc zusammensetzen, so gilt dasselbe von den drei andern Seiten $a_2 a_3$, $b_3 b_1$, $c_1 c_2$, aus welchen durch bloße Verschiebungen auf ihren Geraden ein Drei-

eck 123 gebildet werden kann. Der Verf. beweist denselben Satz für nichteuklidische ebene Sechsecke unter Zugrundelegung einer projektiven Maßbestimmung bezüglich eines absoluten Kegelschnitts. Nimmt man als absolutes Gebilde die unendlich ferne Doppelgerade, so erhält man denselben Satz für gewöhnliche euklidische Sechsecke. Ist umgekehrt ein einfaches ebenes Sechseck gegeben, so kann man auf ∞^2 Arten eine projektive Maßbestimmung so definieren, daß das Sechseck ein Hamiltonsches wird. Gehört dem durch die Gegenseitenpaare des Sechsecks bestimmten Kegelschnittnetz die unendlich ferne Gerade der Ebene an, so ist das Sechseck ein euklidisches Hamiltonsches Sechseck.

Zch.

V. Jeřábek. Geometrische Beweise einer Eigenschaft der Kegelschnitte. Časopis **42**, 217-225. (Böhmisch.)

A. Pleskot. Über eine Eigenschaft der Kegelschnitte. Časopis **42**, 494-497. (Böhmisch.)

In dem ersten Artikel beweist der Verf. geometrisch auf verschiedene Weise den Satz: In einem Punkte M eines Kegelschnittes (dessen Hauptachse $AB = 2a$ und Nebenachse $CD = 2b$) auf den Geraden MA, MB errichtete Senkrechte schneiden auf AB ein Segment von konstanter Länge aus, dessen Größe $2b^2/a$ beträgt.

In dem zweiten Artikel wird eine Verallgemeinerung dieses Satzes gegeben.

Pe.

P. Magron. Sur le point de Frégier dans l'hyperbole. Nouv. Ann. (4) **13**, 145-149.

1. Gegeben eine Hyperbel (H) mit den Asymptoten AB, AC und auf ihr der Punkt I, dessen Tangente BC ist. Der zu I gehörende Frégiersche Punkt F ist der Pol zu BC in bezug auf den Kreis ABC. 2. Sind β und γ die Fußpunkte der von B und C ausgehenden Höhen des Dreiecks ABC, so ist die Gerade $\beta\gamma$ die Polare des Frégierschen Punktes F in bezug auf die Hyperbel (H). 3. Beschreibt I die Hyperbel (H), so durchläuft F eine Hyperbel (F), welche denselben Mittelpunkt und dieselben Asymptoten wie die Hyperbel (H) besitzt.

Diese drei Sätze werden rein geometrisch bewiesen. Gd.

E. Breglia. Le curve delle componenti radiali coniche dedotte da forme reciproche nello spazio. Batt. G. **51** [(4) **3**], 60-65.

Mittels reziproker räumlicher Figuren wird der Satz bewiesen: Wenn in einem stetigen System von Kräften, die in einem Punkte angreifen, die Kurve der Größen ein Kegelschnitt ist, so ist auch die Kurve der radialen Komponenten ein Kegelschnitt, und umgekehrt. Aus der räumlichen reziproken Beziehung folgt ferner, daß jede der beiden Kurven Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, je nachdem die andere Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist. Endlich ergibt sich für jeden der drei Fälle leicht die Anzahl der gemeinsamen Tangenten beider Kurven, die parallel sind zu der willkürlichen Transversale, durch welche das Kräftesystem geschnitten wird.

Zch.

V. N. CARBONELL. Nota de geometría proyectiva. Rev. Soc. Mat. Esp. **2**, 189-190.

1. Einen Kegelschnitt so in einen Kreis zu transformieren, daß ein Punkt im Innern in den Mittelpunkt des Kreises übergeht. 2. Zwei Kegelschnitte, die nicht mehr als zwei reelle Punkte gemeinsam haben, in zwei Kreise zu projizieren. Die Lösungen folgen dem üblichen Gedankengang der projektiven Geometrie. Sk.

V. N. CARBONELL. Nota de geometría proyectiva. Rev. Soc. Mat. Esp. **3**, 43-45.

Bestimmung des Kreises, der zu einem gegebenen Kegelschnitt seiner Ebene homolog ist, wenn die Grenzgerade eine beliebige, den Kegelschnitt nicht schneidende Gerade ist. Anwendung: Bestimmung einer Kurve zweiter Ordnung durch eine elliptische Punktinvolution, den Pol ihres Trägers und einen Punkt oder eine Tangente oder ein Paar konjugierter Punkte. Zch.

DIESING. Zur Konstruktion konjugierter Durchmesser eines beliebigen Kegelschnittes. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 475-477.

1. Zu einem der Lage nach gegebenen Durchmesser den konjugierten zu finden. 2. Konstruktion konjugierter Durchmesser, die einen gegebenen Winkel einschließen. Lp.

R. L. HIPPISLEY. Question 17294. Ed. Times (2) **24**, 73.

O und O' sind zwei feste Punkte, um welche sich das Gestell $O' A C B$ bewegt. Die Gelenke $O' A$ und $O' B$ sind gleich, ebenso die Gelenke CA und CB. Der Schnittpunkt des Gelenkes OC mit der Geraden AB beschreibt einen Kegelschnitt mit O als Brennpunkt und AB als Tangente. — Lösung von A. M. Nesbitt. Gd.

J. MELICHAR. Über Kreise, welche einen Kegelschnitt zweifach berühren. Časopis **42**, 549-555. (Böhmisch.)

Es handelt sich um Kreise, deren Mittelpunkte auf den Achsen des Kegelschnittes liegen. Pe.

W. F. BEARD. Properties of a circle touching a parabola and passing through its focus. Ed. Times (2) **24**, 76-80.

Zahlreiche, zum großen Teil neue Eigenschaften des bezeichneten Kreises, die auf geometrische Weise abgeleitet werden. Gd.

F. BALITRAND. Sur la parabole de Chasles ou parabole des dix-huit droites. Nouv. Ann. (4) **13**, 198-206.

Für die Parabel, mit deren Hülfe Chasles (Traité des sections coniques, S. 145) die Normalen von einem gegebenen Punkte an einen gegebenen Kegelschnitt bestimmt, werden 18 bemerkenswerte Tangenten angegeben. Die Kenntnis dieser großen Zahl von Tangenten führt zu vielen teils neuen, teils bekannten Sätzen, insbesondere zu solchen über konfokale Kegelschnitte. Zch.

S. Holz. Eine Parabelkonstruktion. Zeitschr. f. d. Realschulwesen **38**, 206-208.

Konstruktion der Parabel aus zwei Tangenten und ihren Berührungspunkten. Schr.

O. Schenker. Das Dreieck und die Kiepertsche Parabel. Bern, Mitt. d. naturf. Ges. 1912, 1-52.

In dem Aufsatz „Über eine dem ebenen Dreieck eingeschriebene Parabel" (Bern. Mitt. 1909, 155-164) hatte der Verf. schon diese Parabel behandelt, hat aber erst nachträglich erfahren, daß es die Kiepertsche ist. Die jetzige Arbeit handelt ausführlich über sie und über ein System zyklischer Kurven dritten Grades, abgeleitet aus der Parabel und der Eulerschen Geraden (Rev. sem. $\mathbf{22}_1$, 113). Lp.

W. F. Beard. Question 17357. Ed. Times (2) **23**, 93-94.

AD, BE, CF sind die Höhen eines Dreiecks ABC und P' irgendein Punkt. Man betrachte die gleichseitige Hyperbel, welche PD als Durchmesser und zu AD, BC parallele Asymptoten besitzt. Diese Hyperbel und die beiden BE und CF entsprechenden Hyperbeln schneiden sich in drei Punkten, die auf dem Neunpunktekreis des Dreiecks liegen. — Beweise von C. E. Youngman und vom Aufgabensteller. Gd.

W. F. Beard. Question 17429. Ed. Times (2) **24**, 55-56.

Man betrachte die durch einen festen Punkt in der Ebene einer Parabel gezogenen Sehnen. Der über irgendeiner Sehne als Durchmesser beschriebene Kreis schneidet die Parabel nochmals in P und Q. Die Gerade PQ geht durch einen festen Punkt. — Geometrische Lösung von H. Riddell, der den vom Aufgabensteller für Fokalsehnen ausgesprochenen Satz in der voranstehenden allgemeineren Form beweist. Gd.

A. Pleskot. Un théorème sur l'hyperbole équilatère. Ens. math. **15**, 239-240.

Von einem Punkte O einer gleichseitigen Hyperbel ziehe man die Sekanten OA, OB, OC und fälle von dem Punkte S der Kurve die Lote auf OA, OB, OC. Diese Lote treffen die drei Seiten BC, CA, AB in drei Punkten α, β, γ einer Geraden. Lp.

C. Servais. Sur les hyperboles équilatères circonscrites à un triangle. Mathesis **33** [(4) **3**], 145-147.

Mittels der projektiven synthetischen Geometrie wird der folgende Satz bewiesen: In der Ebene eines Dreiecks ABC wird ein Punkt U willkürlich gewählt; in den Punkten $A' = (BC, AU)$, $B' = (CA, BU)$, $C' = (AB, CU)$ errichtet man auf den Seiten BC, CA, AB die Halbnormalen a', b', c', deren Richtungen passend zu wählen sind. Auf a', b', c' trage man bzw. Strecken $A'M_a$, $B'M_b$, $C'M_c$ ab, die bzw. zu den Rechtecken $BA'.CA'$, $BA' \cdot CB'$, $BC' \cdot CA'$ proportional sind. Dann gehen die Geraden AM_a, BM_b, CM_c durch einen Punkt M der gleichseitigen Hyperbel ($ABCU$). Mn. (Lp.)

C. Servais. Sur l'hyperbole d'Apollonius. Mathesis **33** [(4) **3**], 233-234.

Synthetischer Beweis von fünf Erzeugungsarten dieser Kurve. Mn. (Lp.)

L. Crelier. Étude géométrique des points d'inflexion des courbes du 3e degré et des tangentes de rebroussement des courbes de la 3e classe. Ens. math. **15**, 453-468.

Die Kurve dritter Ordnung mit Doppelpunkt wird durch zwei Büschel, einen einfachen und einen involutorischen, die projektiv aufeinander bezogen sind, erzeugt. Eine zweite Erzeugungsart ist diejenige durch einen Strahlenbüschel erster und einen zweiter Ordnung, die aufeinander projektiv bezogen werden. Es wird gezeigt, daß sich die Konstruktion der Wendepunkte der Kurven dritter Ordnung und dritter Klasse ebenso wie die duale Konstruktion mit Zirkel und Lineal ausführen läßt, und es werden mehrere verschiedene Lösungen angegeben. Zch.

C. E. Youngman. Notes on Maclaurin's Trisectrix. Ed. Times (2) **23**, 22-27.

Rein geometrische Untersuchung, die alte und neue Resultate liefert. Es werden unter anderem mehrere Erzeugungen gegeben, die Tangente und Normale konstruiert, und es wird gezeigt, daß diese Kurve die Inverse einer Hyperbel, 2. die Inverse einer Pascalschen Schnecke, 3. die reziproke Polare einer Kardioide und 4. die Enveloppe einer Parabel ist. Gd.

G. Nagy. Erzeugung der Kurven vierter Ordnung vom Geschlecht 2. Math. és phys. lapok **22**, 23-24. (Ungarisch.)

Erzeugung durch einen gewöhnlichen Kegelschnittbüschel und einen ausgearteten, der aus den Strahlenpaaren einer in einem Strahlenbüschel gegebenen Involution besteht. Sein Mittelpunkt liegt im Doppelpunkt der Kurve (Rev. sem. $\mathbf{22}_2$, 105). Lp.

B. Bydžovský. Konstruktion der ebenen Kurven sechster Ordnung vom Geschlechte 0 bis 3. Rozpravy **22**, Nr. 46, 20 S. (Böhmisch.)

Es wird eine direkte Methode der Konstruktion für diejenigen Kurven sechster Ordnung abgeleitet, welche 6 oder mehr Doppelpunkte besitzen. Dabei ist die betreffende Kurve eben durch jene Doppelpunkte und die erforderliche Anzahl der einfachen Punkte gegeben. Pe.

B. Kalicun. Über die Erzeugnisse krummer, projektiver Gebilde, deren Träger unikursale Plankurven sind. Wien. Ber. **122**, 365-378.

Es sei gegeben eine ebene Kurve K_m^n n-ter Ordnung m-ter Klasse (mit einem $(n-1)$-fachen Punkt V^{n-1} und ein Strahlenbüschel erster Ordnung $W(a', b', c', \ldots, x', \ldots)$. Jeder Strahl $a, b, c, \ldots, x$ durch V^{n-1} schneidet die K_m^n außer in V^{n-1} noch in je einem Punkt $A, B, C, \ldots, X$, in welchen die Tangenten bzw. mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \xi$ bezeichnet seien. Ordnet man die Strahlen des Büschels $V^{n-1}(a, b, c, \ldots, x)$ projektiv jenen von $W(a', b', c', \ldots, x')$ zu, so werden dadurch auch die Tangenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \xi$ auf $a', b', c', \ldots, x'$ eindeutig bezogen. Das Erzeugnis dieser Beziehung ist eine Kurve $\mathfrak{K}^{m+1}$ $(m+1)$-ter Ordnung mit dem m-fachen Punkte W, deren Klasse in bestimmter Weise von der Beschaffenheit von K_m^n abhängt. Die projektiven Büschel V^{n-1} $(a, b, c, \ldots, x)$ und $W(a', b', c', \ldots, x')$ erzeugen den „Projektivitätskegelschnitt" k^2. Die Kurve $\mathfrak{K}$ berührt die K_m^n in $n+1$ Punkten, in denen K von k^2 geschnitten wird. Die übrigen gemeinsamen Punkte von k^2 und $\mathfrak{K}$ befinden sich in den Schnittpunkten des k^2 mit den Vielfachpunkttangenten von K_m^n. Eine Wende- oder Undulationstangente h-ter Ordnung von K_m^n wird zur Undulations- oder Wendetangente $(h-1)$-ter Ordnung von $\mathfrak{K}$.

Hält man K_m^n und W fest und läßt man k^2 sich um V^{n-1} und W bewegen, so erhält man ∞^3 Kurven $\mathfrak{K}^{m+1}$. Auf jedem der ∞^3 Kegelschnitte k^2 kann ferner W ∞^1 Lagen einnehmen, so daß man durch die gegebene Kurve K_m^n ∞^4 Kurven $\mathfrak{K}^{m+1}$ erzeugen kann. Umgekehrt kann eine Kurve $\mathfrak{K}^{2n-1}$ mit einem $(2n-2)$-fachen Punkte W durch einen Strahlenbüschel (W) und durch die Tangentenbüschel von $\infty^4 \cdot \binom{2n}{n}$ Kurven n-ter Ordnung mit $(n-1)$-fachem Punkte erzeugt werden.

Schneidet man den Büschel $W(a', b', c', \ldots, x')$ mit einer Geraden w $(A'', B'', C'', \ldots, X'')$, so kann man die krumme Punktreihe $A, B, C, \ldots, X$ auf die gerade Punktreihe $A'', B'', C'', \ldots, X''$ beziehen. Das Erzeugnis ist eine Kurve $\mathfrak{C}_{n+1}$ $(n+1)$-ter Klasse, welche die Gerade w zu einer n-fachen Tangente besitzt und die Kurve K_m^n in $m+1$ Punkten berührt.

Ordnet man jeder Tangente ξ von K_m^n das auf sie aus einem gegebenen Punkte $\mathfrak{W}$ gefällte Lot x zu, so entsteht die ebenfalls unikursale Fußpunktkurve $\mathfrak{C}^{2m}$ $2m$-ter Ordnung. In dieser Kurve sind $\mathfrak{W}$ und die absoluten Punkte der Ebene m-fach. Der Fußpunkt des Lotes auf eine Doppel- oder Wendetangente der K_m^n ist ein Doppel- oder Rückkehrpunkt der $\mathfrak{C}^{2m}$, und der Fußpunkt des Lotes auf eine p-fache Tangente der K_m^n ist ein p-facher Punkt der $\mathfrak{C}^{2m}$. Die Fußpunktkurve $\mathfrak{C}^{2m}$ berührt die K_m^n in $m+n$ Punkten. Zch.

K. Bartel. O utworach szeregów i pęków inwolucyjuych (Über die durch involutorische Punktreihen und Strahlenbüschel erzeugten Gebilde). Wektor **1**, 379-416 (1912).

Zwei projektive involutorische Strahlenbüschel n-ten Grades erzeugen eine Kurve der Ordnung $2n$, die in den Scheiteln der Büschel zwei n-fache Punkte besitzt. Der Verf. untersucht den Fall $n = 2$ und den dualistisch entsprechenden Fall zweier Punktreihen. Die involutorischen Strahlenbüschel oder Punktreihen können hyperbolisch, elliptisch und parabolisch sein. In dem letzteren Falle zerfällt das Gebilde. Ebenso erfolgt eine Erniedrigung des Geschlechtes des Gebildes oder ein Zerfallen, wenn in der Projektivität Doppelelemente der Involutionen einander entsprechen, und wenn die Projektivität in Perspektivität ausartet. Es werden die einzelnen Fälle konstruiert und die entsprechenden Kurven gezeichnet. A. R.

C. E. Youngman. Questions 17 336 and 17 049. Ed. Times (2) **23**, 76-77, 111-112.

17 336. Die variable Sehne PQ einer dreispitzigen Hypozykloide geht durch eine der drei Spitzen, und die Tangenten in P und Q schneiden sich in T. Der Kreis TPQ berührt den durch die drei Spitzen der Hypozykloide gehenden Kreis. — 17 049. Die variable Sehne QR einer Kardioide berühre die Kurve in P, und es seien TQ, TR die Tangenten und NQ, NR die Normalen in Q und R. Die Gerade NT ist parallel zur Achse, und der Kreis $NQRT$ berührt zwei feste Kreise. — Rein geometrische Beweise dieser interessanten Sätze vom Aufgabensteller. Gd.

Weitere Literatur.

J. Klíma. Eine Bemerkung über einem Parallelogramme eingeschriebene Kegelschnitte. Časopis **42**, 497-501. (Böhmisch.)

J. Melichar. Konstruktion der gemeinsamen Punkte zweier Kegelschnitte, bei welchen die Hauptachsen in eine Gerade fallen. Časopis **42**, 345-350. (Böhmisch.)

R. Payer. Über berührende Kegelschnitte. Progr. Troppau. 14 S. 8°.

H. Pfaff. Kegelschnittsysteme am vollständigen Vierseit. Progr. Helmstedt. 26 S. 8°.

A. Pleskot. Über eine Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel. Časopis **42**, 343-345. (Böhmisch.)

Fr. Rogel. Direkte Bestimmung der gemeinsamen Punkte und Tangenten zweier Kegelschnitte, bei welcher zwei Achsen in eine Gerade fallen. Prag. Ber. 1913, Nr. 4, 22 S.

A. Silberbauer. Zur elementaren Behandlung der ebenen Schnitte von Zylinder und Kegel. Progr. Waldhofen a. d. T., 9 S. 8°.

B. M. Woods. A discussion by synthetic methods of two projective pencils of conics. Berkeley, Cal.: University of California, Publications in Mathematics 1913, S. 55-83, 4°.

K. Wörner. Zur Konstruktion der Ellipse aus zwei Punkten, aus dem Mittelpunkt und der Länge der großen Achse. Unterrichtsbl. f. Math. **19**, 130-152.

Dazu O. Richter, S. 152.

C. Besondere räumliche Gebilde.

V. Jaroĺimek. Einige Konstruktionen von Flächen zweiter Ordnung. Časopis **42**, 145-150. (Böhmisch.)

Konstruktionen eines Paraboloids, wenn von ihm 6 Punkte und die Richtung der Achse gegeben sind; Konstruktion eines Hyperboloids oder Ellipsoids, wenn der Schnitt der Fläche mit der unendlichfernen Ebene und 4 Punkte gegeben sind. Pe.

K. Emmerling. Eine Eigenschaft des Drehparaboloids. Zs. f. d. Realschulw. **38**, 656-661.

Der über einem Schnitt eines Drehparaboloids stehende Kegel, dessen Scheitel im Brennpunkte des Paraboloids liegt, ist ein gerader Kreiskegel. Jeder Rotationskegel mit dem Scheitel im Brennpunkt eines Drehparaboloids schneidet dieses nach zwei Kegelschnittlinien.

Wird im ersten Satze statt des Brennpunktes im Endlichen der andere im Unendlichen genommen, so ergibt sich der schon bekannte Satz, daß die Projektion eines ebenen Schnitts eines Rotationsparaboloids auf eine Ebene senkrecht zur Achse ein Kreis ist. Für diesen Satz hat H. Peters im X. Jahresbericht der Staatsrealschule in Reichenberg 1910/11 S. 24 einen sehr einfachen Beweis gegeben, der hier abgedruckt ist.

Im Achsenschnitt des genannten Kegels ergeben sich Sätze über die Berührungspunkte der In- und Ankreise. Schr.

H. Böheim. Verallgemeinerung jener Fläche, deren Punkte, mit zwei festen Punkten verbunden, gleiche Horizontalneigung liefern. Zs. f. d. Realschulw. **38**, 340-343.

Die Arbeit schließt sich an eine von G. da Fano im vorigen Jahrgang derselben Zeitschrift (F. d. M. **43**, 724, 1912) an. Es wird das Erzeugnis zweier Kegelbüschel, die Scheine desselben Kegelschnittbüschels sind, untersucht (ist der Kegelschnittbüschel unendlich fern, so entsteht die im Titel bezeichnete und von da Fano betrachtete Fläche). Die Fläche kann auch durch einen Kegelschnittbüschel und einen dazu projektiven Ebenenbüschel erzeugt werden. Es werden noch die 27 Geraden aufgestellt. Schr.

St. Juński. Ein Beitrag zur Theorie des F^2-Büschels und F^2-Bündels mit gemeinsamem Polartetraeder. Wien. Ber. **122**, 1659-1681.

Der Verf. entwickelt Beziehungen, welche zwischen der Kongruenz der Bisekanten einer Raumkurve vierter Ordnung erster Art oder dem Komplexe der Erzeugenden eines F^2-Bündels und den drei Büscheln linearer Komplexe bestehen, in bezug auf welche je ein Paar gegenüberliegender Kanten des gemeinsamen Polartetraeders konjugiert ist. Im ersten Teile werden von diesem Gesichtspunkte aus einige bekannte Eigenschaften der Raumkurve vierter Ordnung entwickelt. Im zweiten wird gezeigt, daß ein Komplex dritten Grades der Erzeugenden eines F^2-Bündels mit gemeinsamem Polartetraeder Erzeugnis

dreier trilinear verwandten Komplexbüschel und die Kongruenz der Bisekanten einer Raumkurve vierter Ordnung Erzeugnis einer quadratischen Tripelreihe linearer Komplexe ist. Zch.

R. Garnier. Sur les congruences engendrées par les transformations homographiques d'une quadrique en elle-même. Darboux Bull. (2) **37**, 84-95.

Es gibt zwei Arten der homographischen Transformation einer Fläche zweiter Ordnung in sich selbst; die Transformationen erster Art führen die Erzeugenden jeder der beiden Scharen in sich selbst über, während die Transformationen zweiter Art die Erzeugenden der einen Schar mit denen der andern Schar vertauschen. Die Geraden, welche je zwei entsprechende Punkte der Fläche verbinden, erzeugen eine Kongruenz, deren Fokalfläche aus zwei Flächen zweiter Ordnung zusammengesetzt ist. Dieser von Cayley, Voß und Zeuthen behandelte Satz wird hier auf andere Weise bewiesen. Für den Fall der Transformationen erster Art wird die Beschaffenheit der Fokalfläche durch zwei rein geometrische Methoden gefunden, mittels deren man die möglichen Fälle der Zerlegung vorhersehen und untersuchen kann. Zch.

R. Sturm. Die Komplexpunktepaare und die konsingulären Komplexe eines Komplexes zweiten Grades. Arch. der Math. u. Phys. (3) **22**, 22-30.

In Nr. 530 der „Liniengeometrie" des Verf., Bd. III (1896) werden die 6 Charakteristiken des doppelt unendlichen Systems der Punktepaare bestimmt, die sich unter den Komplexkurven eines Komplexes zweiten Grades befinden. Mehrere dort durch spezielle Lage geführte Beweise werden hier in allgemeinere umgestaltet. Sodann wird die Darstellung der Nr. 536, in der die weiteren Komplexe zweiten Grades abgeleitet und hergestellt werden, die mit einem gegebenen die singuläre Fläche gemein haben, abgeändert. Zch.

Th. Reye. Beitrag zur Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen. Math. Ann. **74**, 140-149.

Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen ist zuerst von S. Jolles (Math. Ann. **63**, 339-386; F. d. M. **38**, 580, 1907) bearbeitet worden. Er hat gezeigt, daß mit einer linearen Kongruenz zwei „Fokalkongruenzen" verknüpft sind. Diese bestehen aus den Leitstrahlen der ∞^1 orthogonalen Regelscharen zweiten Grades, die mit je einer der zwei „Fokalregelscharen" der Kongruenz verbunden sind. Die reellen oder konjugiert-imaginären Leitgeraden der Fokalkongruenzen sind die zwei Paar Fokalachsen der Kongruenz. Der Verf. knüpft an diese Jollessche Arbeit an und erörtert näher die Beziehungen, in denen die drei linearen Kongruenzen zueinander stehen.

Zwei windschiefe eigentliche Gerade u, v bestimmen drei geschart involutorische Räume Σ_i $(i = 1, 2, 3)$ nebst den drei linearen Kongruenzen K_i ihrer Doppelstrahlen. Ist $\varkappa_i$ die involutorische Kollineation von Σ_i, und sind g_l, g'_l zwei durch $\varkappa_i$ und $\varkappa_j$ einander zugeordnete Strahlen von K_l, so bilden

die sie schneidenden Strahlen von K_j eine Regelschar zweiten Grades R_j. Diese liegt mit g_l, g_l' und ihrer Leitschar R_l auf einer für $\varkappa_i$, $\varkappa_j$, $\varkappa_l$ invarianten Fläche zweiten Grades Φ_i. Die Strahlen von R_j sind durch $\varkappa_i$ und $\varkappa_l$ involutorisch gepaart und in K_j enthalten, also für $\varkappa_j$ invariant; diejenigen von R_l sind durch $\varkappa_i$ und $\varkappa_j$ involutorisch gepaart und in K_l enthalten, also für $\varkappa_l$ invariant. Zugleich mit den Regelscharen R_j, R_l enthält Φ_i die 2 Paar Leitgeraden der K_j, K_l. Solcher Flächen Φ_i gibt es ∞^1, die einen besonderen F^2-Büschel bilden. Dieser enthält ein gleichseitiges Paraboloid Π_i. Dieses ist das „Fokalparaboloid" von K_i, d. h. der Ort einer Ebene, der durch $\varkappa_i$ eine zu ihr rechtwinklige Ebene zugeordnet ist.

Jede der drei linearen Kongruenzen K_i hat die beiden andern zu Fokalkongruenzen. Jedes ihrer drei Fokalparaboloide Π_i enthält zwei Fokalregelscharen; mit den 6 Fokalregelscharen sind aber nicht 6, sondern nur 3 Büschel orthogonaler Hyperboloide Φ_i verbunden.

Zch.

H. de Vries. Over een nulstelsel (1, 9, 6), afgeleid uit twee kubische ruimtekrommen. Nieuw Archief (2) **10**, 258-268.

Gegeben seien zwei kubische Raumkurven k^3, k'^3, die keinen Punkt gemein haben. Durch jeden Punkt P des Raumes geht eine Sehne a von k^3 und eine Sehne a' von k'^3. Ordnet man dem Punkte P die durch ihn gehende Ebene (a, a') zu, so entsteht ein Nullsystem, dessen charakteristische Zahlen $\alpha = 1$, $\beta = 9$, $\gamma = 6$ sind. α ist die Zahl der einem Punkte P zugeordneten Ebenen, β die Zahl der Nullpunkte einer Ebene; γ gibt an, wie oft ein Nullpunkt P auf einer gegebenen Geraden l liegt, während zugleich seine Nullebene durch l geht.

Die Untersuchung dieses Nullsystems führt unter anderem zu folgenden Ergebnissen: Der geometrische Ort der Nullpunkte aller durch eine Gerade l gehenden Ebenen λ ist eine Raumkurve 15ter Ordnung k^{15}. Diese hat 12 Doppelpunkte auf k^3, 12 auf k'^3. Durch die 10 gemeinsamen Sehnen von k^3 und k'^3 läßt sich eine Fläche 12ter Ordnung legen, welche die eine Kurve einmal, die andere sechsmal und die Sehnen selbst als Doppelgeraden enthält: Es ist die Regelfläche, die von den die erste Kurve schneidenden Sehnen der zweiten Kurve gebildet wird. Der geometrische Ort der Punkte des Raumes, durch welche sowohl eine Sehne von k geht, die k' schneidet, als auch umgekehrt eine Sehne von k', die k schneidet, besteht aus k und k' selbst, jede sechsmal gezählt, den 10 gemeinsamen Sehnen von k und k', jede viermal gezählt, und einer Kurve 68ster Ordnung. Die Ebenen, die aus 2 kubischen Raumkurven 2 Dreiecke von der Beschaffenheit schneiden, daß eine Ecke des einen auf einer Seite des andern und umgekehrt eine Ecke von diesem auf einer Seite des ersten liegt, umhüllen eine abwickelbare Fläche 104ter Klasse. Es gibt im allgemeinen keine Ebene, welche die Kurven in solchen Dreiecken schneidet, daß 2 Ecken des einen auf 2 Ecken des andern liegen und umgekehrt 2 Ecken des zweiten auf 2 Seiten des ersten liegen.

Zch.

J. de Vries. Over bilineaire nulstelsels. Amst. Amk. Versl. **21**, 1061-1069.

J. de Vries Vlakke lineaire nulstelsels. Amst. Ak. Versl. **21**, 1070-1074.

Unter Nullsystem (nulstelsel) wird eine (algebraische) Verwandtschaft zwischen den Punkten und Geraden einer Ebene oder den Punkten und Ebenen

des Raumes verstanden, bei denen jedes zugeordnete Paar in Inzidenz ist. Entsprechen dabei jedem allgemeinen Punkte α (Null-) Geraden, bzw. Ebenen, jeder allgemeinen Geraden, bzw. Ebene β (Null-) Punkte, so wird die Verwandtschaft durch das Symbol (α, β) bezeichnet; sie heißt linear, wenn $\alpha = 1$, bilinear, wenn $\alpha = 1, \beta = 1$ ist. Ein ebenes $(1, k)$ besitzt $k^2 + k + 1$ singuläre Punkte, deren jedem die sämtlichen durch ihn gehenden Geraden zugeordnet sind. Die Nullpunkte der Geraden eines Punktes liegen auf einer Kurve C^{k+1} von der Ordnung $k + 1$. Die so den einzelnen Punkten entsprechenden C^{k+1} bilden ein Netz, das die singulären Punkte zu Grundpunkten hat. In den Fällen $k = 1$, $k = 2$ ist dieses allgemein, so daß man auch umgekehrt, von irgendeinem C^2- oder C^3-Netz ausgehend, eine Verwandtschaft $(1, 1)$ oder $(1, 2)$ erhalten kann. Im Falle $k = 1$ gehören zu einem Netze ∞^1 Nullsysteme. Nimmt man in der Ebene eines $(1, k)$ einen Kegelschnitt φ an, so erhält man ein neues Nullsystem, wenn man jedem Punkte P seine Verbindungsgerade mit dem Pol der ihm in $(1, k)$ zugeordneten Geraden zuweist. Diese neue Beziehung ist ein $(1, k + 1)$, jedoch von spezieller Natur. Wendet man diese „harmonische Transformation" noch einmal an, so zerfällt das erhaltene Nullsystem $(1, k + 2)$ in das ursprüngliche $(1, k)$ und ein $(0, 2)$, in dem bei jeder Geraden als neue Nullpunkte ihre Schnittpunkte mit φ hinzutreten.

Bei den Nullsystemen im Raume kommt neben α und β noch eine dritte Zahl γ in Betracht, die angibt, wie oft eine allgemeine Gerade g als „Nullstrahl" auftritt, d. h. wie viele Punkte auf g vorkommen, deren Nullebenen durch g gehen. Das Nullsystem wird dann genauer mit (α, β, γ) bezeichnet. Das Möbiussche Nullsystem ist ein $(1, 1, 0)$, da hier nur die Geraden des zugehörigen Komplexes als Nullstrahlen auftreten, eine jede unendlich oft. Bei einem bilinearen System $(1, 1, \gamma)$, $\gamma > 0$ hat man eine Kurve von singulären Punkten, deren jeder ∞^1 einen (linearen) Büschel bildende Nullebenen besitzt, ferner einzelne Hauptpunkte, bei denen jede inzidente Ebene Nullebene ist. Entsprechendes gilt für singuläre Ebenen und Hauptebenen. Ferner tritt eine Kongruenz von ∞^2 singulären Geraden auf, bei denen jeder Punkt eine durch die Gerade gehende Nullebene hat. Beim Nullsystem $(1, 1, 1)$ ist die Kurve der singulären Punkte ein Kegelschnitt σ^2, die singulären Ebenen umhüllen einen Kegel zweiter Ordnung. Die Spitze T des Kegels und die Ebene von σ^2 sind die einzigen Hauptelemente. Beim Nullsystem $(1, 1, \gamma)$ ist die Kurve der singulären Punkte vom Grade $\gamma(\gamma + 1)$, doch muß diese Kurve, wenn $\gamma > 2$ ist, zerfallen. — Eine ausführlichere Behandlung erfahren noch einige spezielle Fälle von Nullsystemen $(1, 1, 2)$. Stz.

G. Majcen. Geometrische Bestimmung der Striktionslinie des allgemeinen Hyperboloids. Belgrad Akad. **87**, 34-48 (1912).

Rein geometrische Bestimmung dieser Linie, einer rationalen Kurve vierter Ordnung. Einfache Konstruktion der Orthogonalprojektion dieser Linie auf eine der Hauptebenen des Hyperboloids (Rev. sem. 22_1, 112). Lp.

G. Majcen. Über die Striktionslinien auf den allgemeinen windschiefen Regelflächen. Agram Akad. **190**, 44-51 (1912).

Im Gegensatz zu den bisher bekannten unvollständigen Ordnungsbestimmungen solcher Flächen wird ein allgemeines Verfahren zur Ermittlung der Ordnungszahl der genannten Linien auf synthetischem Wege gegeben (Rev. sem. **22**$_1$, 102).

Lp.

C. Rosati. Sulle assintotiche della superficie di Kummer. Palermo Rend. **35**, 324-344.

Nach F. Klein können die Geraden des gewöhnlichen Raumes R_3 auf die Punkte einer Mannigfaltigkeit Φ zweiter Ordnung des Raumes von 5 Dimensionen S_5 abgebildet werden. Man denke sich in S_5 eine Schar Σ von Mannigfaltigkeiten zweiter Ordnung, die Φ enthält. Die ∞^1 Büschel, die durch Φ und die ∞^1 Individuen der Schar Σ bestimmt werden, erzeugen ein Segresches System S von ∞^2 Mannigfaltigkeiten. Die V_3^4, welche die Durchschnitte von Φ mit den Elementen von Σ bilden, erzeugen auf Φ das System Ω. Die Reihe Ω stellt in der Kleinschen Abbildung eine homofokale Reihe quadratischer Komplexe der Charakteristik [111 111] dar. Die Örter der Punkte von Φ, durch welche bzw. 2, 3, 4 unendlich benachbarte Elemente der Reihe Ω gehen, sind eine Mannigfaltigkeit M_3, eine Fläche N_2 und eine Kurve K_1, die „erste, zweite, dritte Enveloppe" der Reihe. Die Enveloppe M_3 ist das Bild des Komplexes zwölften Grades der Tangenten der Kummerschen Fläche F der Reihe der Komplexe. Ein Element Q der Reihe Ω schneidet die M_3 in einer Fläche R 32ster Ordnung. Durchläuft Q die Reihe Ω, so beschreibt R das System $\{R\}$. Die Flächen des Systems $\{R\}$ entsprechen den Asymptotenkurven der Kummerschen Fläche. Mit Hülfe dieser Abbildung auf den fünfdimensionalen Raum werden auf elegante Weise die Eigenschaften jener Kurven hergeleitet.

Zch.

C. Servais. Sur les biquadratiques gauches de première espèce. Ann. sc. Ac. Polyt. Porto **8**, 146-187.

Die Abhandlung zerfällt in drei Teile: 1. Projektivitäten, durch die diese Kurven erhalten bleiben (S. 146-171). 2. Die Tripel einer Raumkurve vierter Ordnung erster Art (S. 172-182). 3. Eine rationale Raumkurve von der Ordnung $p+1$.

In den beiden ersten Teilen befinden sich sehr viele Zusammenstellungen von Beziehungen in Tabellenformen. Als Quellschriften werden angeführt A. Harnack, Über die Darstellung der Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies und ihres Sekantensystems durch doppeltperiodische Funktionen (Math. Ann. **12**, 47-86; F. d. M. **9**, 550, 1877). E. Lange, Die 16 Wendeberührungspunkte einer Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies (Zs. f. Math. u. Phys. **28**, 1-33, 62-82; F. d. M. **15**, 720, 1883). H. Schroeter, Über zyklisch projektive Punktquadrupel in zwei kollinearen Räumen (Math. Ann. **20**, 231-254; F. d. M. **14**, 548, 1882). A. Ameseder, Über Konfigurationen auf der Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies (Wien. Ber. **87**, 1179-1225; F. d. M. **15**, 550, 1883). F. Schur, Über eine besondere Klasse von Flächen vierter Ordnung (Math. Ann. **20**, 254-296; F. d. M. **14**, 564, 1882). Laguerre, Sur un problème de géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre (Journ. de Math. (2) **15**, 139-216; F. d. M. **2**, 588, 1870). De La Gournerie, Note sur les quadricuspidales (Journ. de Math. (2) **15**, 264-269; F. d. M. **2**,

590, 1870). A. Voß, Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades (Math. Ann. **10**, 143-188; F. d. M. **8**, 530, 1876). H. Schroeter, Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies (Leipzig: B. G. Teubner, 1890; F. d. M. **22**, 675, 1890). C. Le Paige, Sur les involutions cubiques (Liége Mém. (2) **11**; F. d. M. **17**, 597, 1885).

Trotz dieser stattlichen Anzahl von Zitaten, die übrigens nie in genaue Beziehung zum Texte gebracht werden, sind noch manche wichtige Arbeiten anzuführen; wir wollen nur die nicht erwähnten Namen R. Sturm, Th. Reye und W. Stahl nennen.

Es ist unmöglich, das Eigentum des Verf. der Arbeit zu sondern von dem, was er früheren Forschern verdankt; er hat auch nirgends darüber eine Andeutung gemacht. Somit müssen wir uns damit begnügen, die Reichhaltigkeit der Abhandlung hervorzuheben und künftigen Arbeitern auf diesem Felde sie zur Beachtung zu empfehlen. Lp.

G. Majcen. Über eine projektive Erzeugungsweise der allgemeinen Fläche vierter Ordnung. Agram Akad. **195**, 180-192.

Eine (1, 2)-deutige Verwandtschaft zwischen einem Flächenbündel (F^2) von Flächen zweiter Ordnung und einer linearen involutorischen Kongruenz $[a, b]^2$. Die gefundene projektive Verwandtschaft wird zu einer Erzeugung der allgemeinen Fläche vierter Ordnung verwendet. Bemerkungen über die Raumkurven sechster Ordnung, in denen die erzeugte Fläche F^4 die Hyperboloide der Kongruenz schneidet (Rev. sem. $\mathbf{22}_1$, 102). Lp.

A. Plamitzer. Niektóre własności konoidy powierzchni szędu drugiego (Über einige Eigenschaften des Konoids einer Fläche zweiter Ordnung). Wektor **2**, 167-171, 209-219.

Bewegt sich eine Gerade derart, daß sie eine Leitgerade m schneidet, einer Ebene E parallel bleibt und eine Fläche Φ berührt, dann beschreibt sie ein Konoid, insbesondere ein gerades Konoid, wenn m auf E senkrecht steht. Der Verf. untersucht den Fall, wo die Fläche Φ eine Kugel ist. Das Konoid wird dann erzeugt von zwei involutorischen Ebenenbüscheln, zwischen denen je eine (1, 2)-Korrespondenz besteht. Die Achsen der Büschel sind die Gerade m und die auf der Ebene E im Unendlichen liegende Gerade l_∞. In jedem Ebenenbüschel gibt es zwei reelle Doppelelemente der Involution. Die Fläche ist von der vierten Ordnung mit 8 Kanten und 8 Spitzen, somit nach dem Sturmschen Satze von achtem Range. Es werden noch die Fälle untersucht, wo die Leitfläche eine beliebige Fläche zweiter Ordnung ist, und der Fall, wo die Leitgerade m zur Ebene E geneigt ist, aber eine Hauptachse der Fläche zweiter Ordnung schneidet und E zu dieser Achse senkrecht steht. A. R.

J. de Vries. Vraagstuk CXXIX. Wisk. Opgaven **11**, 339-344.

Auf drei einander nicht schneidenden Geraden sind die projektiven Punktreihen (A), (B), (C) gegeben. Die Kreise ABC liegen auf einer Fläche neunter Ordnung mit dreifach zählendem uneigentlichen Kegelschnitt. Lösungen von C. B. Biezeno, J. Wolff, W. Mantel. Schn.

Weitere Literatur.

R. P. Baker. The construction of the lines of a complex from given lines by ruler only. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**.

V. Hübner. Ein Beitrag zum einschaligen Rotationshyperboloide. Časopis **42**, 101-103. (Böhmisch.)

G. Krafft. Über die merkwürdigen Punkte des Tetraeders im nichteuklidischen Raume. Diss. Straßburg. 37 S. 8°.

D. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

P. H. Schoute. Analytical treatment of the polytopes regularly derived from the regular polytopes. Section I: The simplex. Amst. Ak. Verh. **11**, Nr. 3, 82 S., 1 Tafel, 3 Tabellen (1911).

Über den Inhalt der uns nicht zugegangenen Arbeit berichtet die Rev. sem. **20**$_1$, 96: „In dieser Abhandlung wünscht der Verf. die geometrischen Betrachtungen von Frau A. Boole-Stott (F. d. M. **42**, 513, 1911) zu vervollständigen, indem er das analytische Gegenbild gibt. Die Grundlage dieses analytischen Gegenbildes ist die Tatsache, daß die Koordinaten der Ecken des Tetraeders, Oktaeders und Ikosaeders durch die Symbole bzw. $(1, 0, 0, 0)$ oder $\frac{1}{2}[1, 1, 1]$ und $[1, 1, 1]$, $[1, 0, 0]$ und $[1+\sqrt{5}, 2, 0]:2$ dargestellt werden können. In diesem ersten Abschnitt, der sich nur mit dem Erzeugnis des regelmäßigen Simplexes befaßt, kommen die dem Symbol $(1, 0, 0, 0)$ des Tetraeders entsprechenden Symbole zum Vorschein. Die in dieser Abhandlung enthaltenen neuen Ergebnisse beziehen sich auf die vom Simplex herstammenden Netze im Raume S_n; diese Netze, deren Anzahl im allgemeinen gleich jener der verschiedenen zyklischen Partitionen von $n+1$ ist, werden vollständig für $n=4$ und $n=5$ entwickelt.“ Lp.

P. H. Schoute. On the characteristic numbers of the polytopes $e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}\, e_{n-1}\, S(n+1)$ and $e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}\, e_{n-1}\, M_n$ of space S_n. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 70-80.

In der vorstehend angezeigten Arbeit hat der Verf. gezeigt, wie es immer möglich ist, die charakteristischen Zahlen zu erhalten für jede Erweiterung oder Zusammenziehung (expansion and contraction), die aus einem der drei regelmäßigen Polytope, Simplex, Maßpolytop und Querpolytop, des S_n abstammen, indem man zunächst zu dem Koordinatensymbol übergeht. In dem Bewußtsein aber, daß dieser Weg ein indirekter ist, und daß gefordert werden muß, einen Richtweg zu finden, der von den Erweiterungs- und Zusammenziehungssymbolen unmittelbar zu den charakteristischen Zahlen führt, legt er

jetzt die Ergebnisse vor, die er in bezug auf das Maßpolytop M_n erreicht hat. „In der Hoffnung, daß ein anderer Mathematiker diese allgemeine Forschung zum Abschluß bringen möchte, will ich mich hier auf den Fall beschränken, daß alle Erweiterungsoperationen auf das regelmäßige Zell angewandt werden, und versuche, die charakteristischen Zahlen dieser Polytope als Funktionen der Dimensionszahl n zu finden, obgleich auch hier der leichteste Weg zum Gelingen der indirekte ist, der durch das Koordinatensymbol geht.“ Lp.

P. H. Schoute. On the four-dimensional angles of the semiregular polytopes of S_4. Amer. Journ. **35**, 357-368.

P. H. Schoute. On reciprocal nets. Nieuw Archief (2) **10**, 273-314.

Als halbreguläres oder archimedisches Polytop bezeichnet Verf. ein solches (konvexes) Polytop des R_4, dessen Ecken kongruent oder symmetrisch und dessen Kanten gleich sind. A. Boole Stott hat aus den regulären Polytopen vermittels einfacher Methoden halbreguläre hergeleitet (Amst. Ak. Verh. **11**, Nr. 1, 24 S.; F. d. M. **42**, 513, 1911) und Netze (Einteilungen des R_4) angegeben, die sich aus halbregulären, nicht notwendig kongruenten Polytopen zusammensetzen, und deren Ecken ein regelmäßiges Punktsystem bilden, so daß durch Bewegungen oder symmetrische Operationen, die das ganze Netz mit sich zur Deckung bringen, jede Netzecke in jede andere überführbar ist. Weitere solche Netze (sie seien kurz als archimedische bezeichnet) hat P. H. Schoute abgeleitet (Amst. Ak. Verh. **11**, Nr. 3; Referat vorstehend). — Von den vorliegenden Abhandlungen führt die erste die Berechnung des sphärischen Inhalts der Ecken der archimedischen Polytope durch, die zweite ist den zu den archimedischen reziproken Netzen gewidmet. Ein Netz und sein reziprokes können hier so angenommen werden, daß die Ecken des einen die Zellmittelpunkte des andern sind. Die Ecken des reziproken Netzes zu einem archimedischen sind im allgemeinen von verschiedener Art, dagegen sind seine Zellen sämtlich kongruent oder symmetrisch, so daß man es mit einer (speziellen) regelmäßigen Raumeinteilung zu tun hat. Die Polytope, welche als Zellen solcher Raumeinteilungen auftreten, erfahren eine genaue Untersuchung und Beschreibung. Stz.

J. F. van Oss. Over de synthetische meetkunde der systemen van kwadratische varieteiten in de ruimte van vier afmetingen (Über die synthetische Geometrie der Systeme quadratischer Mannigfaltigkeiten im R_4). Diss. Amsterdam: A. H. Kruyt. 78 S.

Der Verf. stellt sich die Aufgabe, einige Abbildungen linearer Formen in höheren Räumen zu untersuchen, wo die Singularitäten, die den Abbildungen in R_3 anhaften, verschwinden müssen. Die Behandlung ist streng synthetisch, und es wird systematisch weitergebaut auf den Grundlagen, die Reye in seinem dritten Teile bei der Behandlung von Systemen quadratischer Flächen und bei den damit verbundenen Abbildungen von Geraden und Ebenen gelegt hat.

Zur Definition des Büschels quadratischer Mannigfaltigkeiten wird das Analogon des tetraedralen Komplexes herangezogen. Dies ist die „pentatopische Linien- und Ebenenkongruenz“. Haupteigenschaft dieser Kongruenz ist,

daß ihre Strahlen durch die fünf R_3 der Kongruenz, die die zu ihr gehörigen tetraedralen Komplexe enthalten, in Punkten geschnitten werden, die projektive Sätze von 5 Punkten bilden. Das Reziproke gilt für die Ebenen der Kongruenz. Die invarianten Doppelverhältnisse der beiden einander zugehörigen Kongruenzen sind gleich.

Mit Hülfe des Büschels quadratischer Mannigfaltigkeiten und seiner Abbildung auf einen linearen Raumbüschel wird der Zweibüschel quadratischer Mannigfaltigkeiten (mit ∞^2 Elementen) definiert, und damit die zugehörigen Jacobischen Kurven, Flächen usw. Die Kernkurve des Zweibüschels ist zehnten Grades; sie besitzt ein Ebenensystem, dessen Ebenen die Kurve in 6 Punkten schneiden. Die Kernfläche des Dreibüschels ist zehnten Grades und besitzt ein System quadrisekanter Geraden, die eine Regelmannigfaltigkeit 30sten Grades bilden. Die Kernmannigfaltigkeit des Vierbüschels ist fünften Grades.

Mit Hülfe des Vierbüschels wird die Abbildung einer Ebene untersucht. Diese wird gebildet durch eine windschiefe Fläche vierten Grades und dritter Klasse, die ein System von Trisekanten enthält, und ein System von Ebenen, die durch die Fläche in einem Kegelschnitt und einem Punkt geschnitten wird. Die Projektion aus einem Punkt auf einen R_3 liefert eine Steinersche Fläche. Ferner wird die Abbildung einer Ebene in einem R_5 untersucht mit Hülfe eines Fünfbüschels quadratischer Mannigfaltigkeiten, und damit wird dann eine Fläche gefunden, die keine einzige Singularität mehr besitzt, und die bei Projektion wieder die Steinersche Fläche liefert.

Ein R_3 wird in derselben Weise untersucht mit Hülfe eines Vierbüschels und einer Mannigfaltigkeit achten Grades; die vollständige Untersuchung wäre in einem R_{10} durchzuführen.

Schn.

O. Veblen. Decomposition of an N-space by a polyhedron. Amer. Math. Soc. Trans. **14**, 65-72.

In Hilberts Grundlagen der Geometrie findet sich die Angabe, daß auf Grund der Axiome der Verknüpfung und Anordnung bewiesen werden kann, daß ein einfaches Polygon die Ebene in zwei Gebiete teilt. Einen korrekt durchgeführten Beweis hierfür hat wohl zuerst H. Hahn gegeben (Monatsh. f. Math. u. Phys. **19**, 289 ff., 1908). Das Analogon für den R_3 erledigte N. J. Lennes (Am. J. of Math. **33**, 37 ff., 1911). — Hier handelt es sich nun um die Ausdehnung auf den R_n. Es wird ein Axiomensystem zugrunde gelegt, das Verf. in seiner Dissertation eingeführt hat. Inhaltlich deckt es sich mit den Axiomen der Anordnung und Verknüpfung bei Hilbert mit der geringfügigen Modifikation, die durch den Übergang von 3 auf beliebig viele Dimensionen geboten ist. Nachdem die Begriffe „Simplex", „Gebiet", „Begrenzung eines Gebietes" (der letztere in einer Form, die nur, wenn man sich, wie es weiterhin geschieht, auf polyedrische Gebiete beschränkt, zulässig ist) eingeführt sind, wird der Begriff „polyedrisches Gebiet" durch Induktion definiert. Ein eindimensionales polyedrisches Gebiet ist eine Strecke ohne Endpunkte, eine Halbgerade ohne ihren Ausgangspunkt oder eine ganze Gerade. Ein n-dimensionales polyedrisches Gebiet ist entweder ein ganzer R_n oder hat eine endliche Anzahl von Punkten, 1-, 2-, . . ., $(n-1)$-dimensionalen polyedrischen Gebieten zur Begrenzung. Unter einem n-dimensionalen Polyeder ist eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ im Innern und auf der Begrenzung einer endlichen Anzahl n-dimensionaler polyedrischer Ge-

biete $F_1, \ldots, F_n$ zu verstehen, deren keine zwei einen Punkt gemein haben, und die noch die folgenden Bedingungen erfüllen: 1. Jedes $(n-1)$-dimensionale polyedrische Gebiet, das in der Begrenzung eines F_i auftritt, tritt in der Begrenzung einer geraden Anzahl der F_i auf. 2. Keine Teilmenge von $\mathfrak{M}$ besitzt die sämtlichen bisher genannten Eigenschaften. Es wird bewiesen: Ein $(n-1)$-dimensionales Polyeder in einem R_n zerlegt diesen in zwei Gebiete. Die hier gegebene Definition eines Polyeders (ohne mehrfache Punkte) ist etwas allgemeiner als die sonst übliche; aber gerade durch die Befreiung von unnötigen Einschränkungen gewinnt der Beweis an Einfachheit. Stz.

T. C. Lewis. Figures in n-dimensional space analogous to orthocentric tetrahedra. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 474-483.

$n+1$ Punkte $A_1, \ldots, A_{n+1}$ im R_n bilden die Ecken eines Simplexes, welches orthozentrisch heißt, wenn sich seine Höhen in einem Punkte $H = A_0$ (Höhenpunkt, Orthozentrum) schneiden. Als orthozentrisches System sei das System der $n+2$ Punkte $A_i (i = 0, \ldots, n+1)$ bezeichnet. Je $n+1$ dieser Punkte sind die Ecken eines Simplexes, welches den noch übrigen Punkt zum Orthozentrum hat. Allgemeiner bilden je $r+1$ Punkte A_i die Ecken eines r-dimensionalen orthozentrischen Simplexes. Verteilt man die $n+2$ Punkte A_i in zwei Gruppen von $r+1$ und $s+1$ Punkten $(r+s=n)$, so stehen die linearen Räume R_r, R_s, denen die beiden so bestimmten Simplexe angehören, aufeinander senkrecht und schneiden sich in einem Punkt, dem gemeinsamen Orthozentrum der beiden Simplexe. Dies setzt zunächst voraus, daß r und $s \geqq 2$ sind. Läßt man aber auch im Falle r (oder s) $= 1$ den angegebenen Punkt als Orthozentrum gelten, so behalten die folgenden Sätze auch für diesen Fall ihre Gültigkeit. Verteilt man die $n+2$ Punkte A_i auf $m+2$ Gruppen $(m \geqq 1)$ so, daß jede wenigstens 2 Punkte enthält, so liegen die Orthozentren der $m+2$ Simplexe in einem R_m und bilden in ihm ein orthozentrisches System. Die Punkte A_i sind die Mitten von $n+2$ Kugeln (Hypersphären), die einander orthogonal schneiden, und von denen stets eine imaginär ist. Zwischen ihren Radien r_i besteht die Beziehung $\sum\limits_{i=0}^{n+1} \frac{1}{r_i^2} = 0$. Bringt man in jedem Punkte A_i die Masse $\frac{1}{r_i^2}$ an, so ist A_i Schwerpunkt der übrigen Massen.

Mit dem orthozentrischen Simplex der $n+1$ Punkte $A_1, \ldots, A_{n+1}$, dessen Orthozentrum (A_0) und Schwerpunkt jetzt mit H und S bezeichnet seien (die Punkte mit der Masse 1 genommen), ist ein System merkwürdiger Kugeln verknüpft. Ist $1 \leqq r \leqq n$, und greift man aus den Punkten A $(i = 1, \ldots, n+1)$ irgendwelche $r+1$ heraus, so bestimmen sie einen linearen R_r, ein Simplex und mit diesem ein Orthozentrum H_r und einen Schwerpunkt S_r. $H_r S_r$ ist Durchmesser einer Kugel des R_r (die im Falle $r=1$ nur aus dem Punktepaar H_r, S_r besteht). Solcher Kugeln kann man $\binom{n+1}{r+1}$ bilden. Es zeigt sich, daß sie alle in einer bestimmten Kugel K_r des R_n enthalten sind. Die so erhaltenen Kugeln K_r, zu denen noch die dem ursprünglichen Simplex $A_1, \ldots, A_{n+1}$ umbeschriebene K_0 hinzutritt, gehören einem Büschel an, ihre Mittelpunkte O_r liegen in der Geraden HS, und es ist $HO_r = \frac{1}{2} \frac{n+1}{r+1} HS$.

Je zwei Kugeln K_r und K_{n-1-r} $(r < n)$ haben H und S zum äußeren und inneren Ähnlichkeitspunkt. Ist n gerade, $r = \frac{1}{2}n$, so fallen die $n+2$ Kugeln K_r, die zu den $n+2$ Simplexen eines orthozentrischen Systems $A_0, A_1, \ldots, A_{n+1}$ gehören, identisch aus. Ist n gerade, $r = \frac{1}{2}n - 1$, so haben diese Kugeln gleichen Radius. Im Falle $n = 2$ ist K_1 der Feuerbachsche Kreis. Die die Kugeln K_r betreffenden Sätze erweisen sich als Analoga zu bekannten Sätzen über diesen Kreis. Stz.

J. Vojtěch. Über Erzeugung einer Kollineation durch Projektionen oder durch Homologien. Časopis **42**, 324-336. (Böhmisch.)

Es werden folgende Sätze bewiesen: Eine Kollineation von zwei n-dimensionalen Räumen kann man immer durch eine Folge der perspektivischen Transformationen ersetzen, deren Anzahl die Zahl $n+1$ nicht übersteigt. Ebenso kann man sie ersetzen durch eine Folge von Homologien, deren Anzahl die Zahl $n+1$ nicht übersteigt. Pe.

C. Bragdon. A primer of higher space (the fourth dimension). Rochester, N. Y.; Manas Press. 8°.

J. A. Caparo. Hyperspace and the non-euclidean geometry of four dimensions. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 289-290.

E. Abzählende Geometrie.

R. Sturm. Zum Prinzip der speziellen Lage. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **22**, 94-95.

Bemerkungen zu den Bedenken, die gegen das Prinzip von verschiedener Seite geäußert wurden. Stz.

C. Juel. Note om det geometriske Sted for Dobbeltinflexions-tangente nes Röringspunkter med en almindelig Flade af n-te G ad (Über den geometrischen Ort der Berührungspunkte der Doppelinflexionstangenten einer allgemeineren Fläche n-ter Ordnung). Nyt Tidsskr. for Mat. (B) **24**, 24-26.

Es wird durch Methoden der abzählenden Geometrie die von Cayley analytisch bestimmte Ordnung der Kurve bestimmt, längs welcher die Tangenten vierpunktige Berührung haben. P. H.

A. Schmid. Abzählungen bezüglich der Ebene im n-dimensionalen Raum in algebraischer Behandlung. Diss. Tübingen. 26 S. 8°.

Neunter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

Kapitel 1.

Lehrbücher, Koordinaten, Prinzipien.

Fort und Schlömilch. Lehrbuch der analytischen Geometrie. Zweiter Teil. Analytische Geometrie des Raumes. 7. Auflage, bearb. von R. Heger. Leipzig: B. G. Teubner. VIII und 326. S. gr. 8°.

Das im Jahre 1855 zum ersten Male und 1898 in sechster Auflage erschienene Lehrbuch der Raumgeometrie hat im einzelnen manche Umgestaltung erfahren; doch hat der elementare Charakter des Ganzen, der das Buch für die Einführung in den Gegenstand empfiehlt, nicht gelitten. Neu hinzugekommen ist ein Kapitel über die Kugel und ein Abschnitt über sphärische Kegelschnitte; neu ist auch die Anwendung der Ebenenkoordinaten, umgearbeitet wurde die Untersuchung der Flächen zweiter Ordnung. Sk.

H. Egerer. Ingenieur-Mathematik. Lehrbuch der Mathematik für die technischen Berufe. Erster Band. Niedere Algebra und Analysis. Lineare Gebilde der Ebene und des Raumes in analytischer und vektorieller Behandlung. Kegelschnitte. Berlin: Julius Springer. VIII u. 501 S. gr. 8°. Mit 320 Textabbildungen und 575 vollständig gelösten Beispielen und Aufgaben.

Der Verf., der früher Repetitor für die Diplomprüfungen an der Technischen Hochschule in München gewesen ist, zurzeit die Stellung eines Professors für Ingenieur-Mechanik und Materialprüfung an der Technischen Hochschule zu Drontheim hat, will in dem geplanten Werke die Mathematik als Hülfswissenschaft für das technische Studium unter Berücksichtigung der Bedürfnisse des Technikers nach seinen Erfahrungen durch möglichst anschauliche Methoden zur Behandlung bringen. Der vorliegende erste Band ist der Hauptsache nach ein Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene und der linearen räumlichen Gebilde. In dem ersten Abschnitt über niedere Analysis und Algebra (S. 1—98) werden die für die analytische Geometrie erforderlichen ersten Hülfsmittel möglichst elementar entwickelt. Die Vektorenrechnung, deren Kenntnis als dem Ingenieur sehr notwendig bezeichnet wird, ist nur vorsichtig eingeführt,

von einer breiteren Darstellung im Texte ist trotz der Vorrede nicht viel zu spüren. Doch ist anzuerkennen, daß die Elemente dieser Rechnung in sehr verständlicher Form dargestellt sind und an geeigneten Stellen auch benutzt werden. Der Charakter des ganzen Buches liegt in der breiten Darstellung, die durch viele Beispiele der Veranschaulichung für den Leser gute Dienste leistet. Daher dürfte es für das Selbststudium recht brauchbar sein. Die sehr genau entworfenen Figuren bilden eine Zierde des Buches, das in seiner vorzüglichen Ausstattung jedem Liebhaber willkommen sein wird. Lp.

F. WLODARSKI. Geometrya analityczna na powierzchni kuli w rachunku wektorów (Analytische Geometrie auf der Kugelfläche in der Vektorenrechnung). Wiadomości matematyczne **17**, 225-301.

T. NISHIUCHI. Sphere-geometry and quaternions. Tôhoku Math. J. **4**, 107-113.

Durch Darstellung der Kugel in der Form:

$$[xi + yj + zk - (r + ai + bj + ck)]\,[xi + yj + zk - (-r + ai + bj + ck)] = 0$$

erhält der Verf. die analytische Grundlage der „höheren Kugelgeometrie“, Anwendung zur Aufstellung der Transformationen, die Kugeln in Kugeln überführen, und zur Charakterisierung der gegenseitigen Lage von zwei Kugeln. Sk.

A. C. L. WILKINSON. On tetrahedral coordinates. Ind. Math Soc. **5**, 43-55, 122-130, 202-210.

Die Tetraederkoordinaten $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ eines Punktes (x, y, z) werden durch die Gleichungen $x = \Sigma\,\alpha_i x_i$, $y = \Sigma\,\alpha_i y_i$, $z = \Sigma\,\alpha_i z_i$, $\Sigma\,\alpha_i = 1$ $(i = 1, \ldots, 4)$ eingeführt, in denen (x_i, y_i, z_i) die rechtwinkligen Koordinaten der Ecken des Bezugstetraeders bedeuten. Es wird durch Rechnung eine große Anzahl von metrischen Invarianten (Abstand und Winkel zweier Geraden, Abstand zweier Punkte u. a. m.) aufgestellt und eine Reihe von wohl meist bekannten Sätzen, z. B. über das Tetraeder, hergeleitet. Sk.

E. H. NEVILLE. The general theory of moving axes. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 28-34.

Statt des beweglichen rechtwinkligen Dreikantes, das in der Untersuchung der Raumkurven und Oberflächen allgemein gebraucht wird, hat der Verf. „das gute Glück gehabt, daß es ihm gelungen ist, eine allgemeine Theorie sich bewegender Achsen zu erhalten, bei denen der Rahmen nicht irgendwelchen Bedingungen der Rechtwinkligkeit oder der Starrheit unterliegt, und sozusagen die alte Waffe in solcher Weise gefechtsmäßig herzustellen, daß sie unmittelbar auf manche Dinge gerichtet werden kann, die bislang nicht in ihrem Bereiche lagen, und an manchen Punkten direkt zum Angriff gebraucht werden kann,

die vordem nur nach mehr oder weniger lästigen Umwegen überwältigt werden konnten". In dem Aufsatze werden nur die „Schritte der allgemeinen Theorie" angegeben. „Wenn ich mich aber auf eine bloße Ansage der Ergebnisse beschränke, so dürfte es mir doch gelingen, etwas von der Macht der neuen Methode und der Mannigfaltigkeit der Anwendungen zu zeigen, für die nach meiner Ansicht wir sie einst ansetzen werden". Lp.

E. Study. Die Begriffe Links, Rechts, Windungssinn und Drehungssinn. Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 193-226.

Widersprüche in der Terminologie des Zoologen und Technikers auf der einen, des Botanikers und Physikers auf der andern Seite. Eklektisches Verhalten des Mathematikers. Erste Hälfte: Windungssinn. Wer eine Wendeltreppe hinansteigt, deren Achse er zur Linken hat, bewegt sich auf einer rechtsgewundenen Schraubenfläche. Hinreichend benachbarte Erzeugende einer rechtsgewundenen Schraubenfläche bilden ein Paar rechtsgewundener gerader Linien. Der Windungssinn kann nur erklärt werden für gerade Linien, die sich weder schneiden noch senkrecht kreuzen. Windungssinn einer Schraubung, die keine Schiebung, Drehung oder Umschraubung sein darf. Windungssinn einer Regelfläche, die kein Kegel oder Zylinder ist. Eine Kurve ist dort linksgewunden zu nennen, wo ihre Tangentenfläche rechtsgewunden ist.

Der Windungssinn zweier Geraden, auf den sich alle übrigen Beispiele zurückführen lassen, hat seinen Ursprung in der projektiven Geometrie. Da das Vorzeichen der Determinante einer reellen räumlichen Kollineation wesentlich ist, gibt es zwei Arten solcher Kollineationen, „positive" und „negative". Die Bewegungen gehören zu den positiven, die Umlegungen zu den negativen Kollineationen. Gegenüber positiven Kollineationen gibt es zwei Klassen von reellen Gewinden, zwei Klassen hochimaginärer gerader Linien, zwei Klassen reeller Pentaeder, zwei Klassen von Tripeln reeller gerader Linien usw. Diese Klassen werden durch die Signatur (+) und (—) unterschieden, die invariant gegenüber positiven Kollineationen ist, während sie durch negative Kollineationen abgeändert wird. Rückt bei einem Geradentripel die dritte Gerade in die absolute Polare einer der beiden ersten, so heißen diese beiden linksgewunden, wenn die Signatur positiv war.

Zweite Hälfte: Drehungssinn (der nichts mit Windungssinn zu tun hat). Orientierte Elemente. — Kein Geometer wird sich der sorgfältigen Lektüre dieses Aufsatzes entziehen dürfen. B.

A. C. Dixon. A geometrical discussion of the results of Jacobi's transformation theory in relation to coaxial circles and linkages. Quart. J. **44**, 331-363.

Der Verf. betrachtet orientierte gerade Linien, orientierte Kreise und orientierte Punkte gleichzeitig. Daß so etwas nicht möglich ist, würde eine analytische Behandlung gezeigt haben. Festsetzungen allein tun es nicht. Auf

diesem verfehlten Fundament wird eine „Theorie“ „koaxialer“ Kreise aufgebaut. Was das sein soll, wird nicht gesagt. Rezensent hat seine stundenlangen Bemühungen, dahinter zu kommen, aufgegeben. Für begabtere Leser sei angeführt: „Eine Linie AB berührt einen Kreis K in C eigentlich, wenn AC die Vorwärtstangente von A und BC die Rückwärtstangente von B ist.“ „In einem koaxialen System gibt es nur einen Kreis, der AB eigentlich berührt.“

Ob in den §§ 1-44 etwas Brauchbares enthalten ist, wissen wir nicht zu sagen.

B.

H. Beck. Zur Geometrie in der Minimalebene. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **12**, 14-30.

Eine rationale Bewegungsinvariante, die „Sperrung“ zweier geraden Linien in einer Minimalebene, die den unbrauchbar werdenden Winkel in weitem Umfang ersetzt. Vom Winkel zur Sperrung führt derselbe Prozeß wie von der nichteuklidischen Entfernung zur euklidischen. Damit wird eine Lücke der bisherigen Systematik ausgefüllt. An Stelle der (stets verschwindenden oder unbestimmt werdenden) Krümmung tritt der Begriff der „Abweichung“. Ist diese konstant und von Null verschieden, so erhält man die Parabeln von der Krümmung Null (parabolische Kreise). Abbildung dieser Kurven auf den Punktraum. Aufzählung der eingliedrigen kontinuierlichen automorphen Bewegungsgruppen.

B.

A. Kanda. Beiträge zur reinen Differentialgeometrie. Monatsh. f. Math. **24**, 33-64.

„Die geometrischen Ableitungen sind nichts Neues. Anfänge hierzu bedeuten schon die Robervalschen Tangentenkonstruktionen. Sehr genau ausgearbeitet ist das Wesentliche aber in einer größeren Abhandlung von R. von Mises (Zs. f. Math. u. Phys. **52**, 44-85; F. d. M. **36**, 618-619, 1905): „Zur konstruktiven Infinitesimalgeometrie der ebenen Kurven.“ Dort sind auch verschiedene literarische Nachweisungen zu finden. Als Bezeichnung für die Ableitung von Punkten ist, wie im vorliegenden, der Akzent verwendet; x' heißt bei v. Mises aber „Charakterstik“, während Peano (Appl. geom. del calc. inf., Torino 1887; F. d. M. **19**, 248-251), der ebenfalls zu diesem Begriff gelangt, den Namen „derivata della posizione d'un punto“ gebraucht. Von den Ableitungen der Geraden definiert v. Mises nur die von uns Normalableitung genannte und nennt sie ebenfalls Charakteristik. Obwohl er selbstverständlich auch die abgeleiteten Umgebungen auf Nachbarlinien zeichnet, benutzt er sie doch nicht in besonderer Weise. Peano (a. a. O.) nennt sie „Polaren im betreffenden Punkte der Geraden“ und zeichnet auch, ohne einen Namen einzuführen, die Ableitung der Geraden für eine beliebige Richtung. Eine Abhandlung von Joh. Petersen (Grundprinciper for den infinitesimale Descriptivgeometri med Anwendelse paa Laeren om variable Figurer. Inaug.-Diss.; F. d. M. **38**, 505-507, 1897) beschäftigt sich ebenfalls mit geometrischen Ableitungen, nennt x' Fluxion von x und unsere abgeleitete Umgebung Fluxionslinie.“

Durch diese Sätze am Schluß des ersten Abschnittes der Arbeit ist die Richtung gekennzeichnet, in der sich die Untersuchung bewegt. Der Verf. geht von den einfachsten elementaren Betrachtungen aus und gelangt in kon-

sequentem Fortschreiten zu einem festgefügten Aufbau mit einer Reihe von Anwendungen auf die Geometrie der Ebene und des Raumes. Zu genaueren Angaben über den in 16 Nummern geordneten Stoff ist hier nicht der Raum vorhanden. Lp.

Weitere Literatur.

C. Bourlet. Cours de mathématiques. Éléments d'analyse et de géométrie analytique. 2e édition, entièrement refondue. Paris: Gauthier-Villars. VI + 252 S. 8°.

A. L. Bowley. A general course of pure mathematics from indices to solid analytical geometry. London: Clarendon Press. 284 S. 8°.

H. B. Fine and H. D. Thompson. Coordinate geometry. New reprint. New York: Macmillan. 12mo.

B. Habenicht. Funktionen mit ganzzahligen Hauptpunkten. Linden-Hannover: Ellermann. 9 S. 8°.

A. Kanda. Über rationale Kurvenpunkte. Progr. Wien. 10 S. 8°.

V. u. K. Kommerell. Analytische Geometrie. Für den Schulgebrauch bearb. I. Tl., 2., verb. Aufl. Tübingen: H. Laupp. VIII + 204 S. gr. 8°.

E. Lutz. Analytische Geometrie der Ebene. Elementares Lehrbuch. Leipzig: B. G. Teubner. X + 301 S. 8°.

P. L. Monteil. Théorie du point. Géométrie curviligne II. Courbes dérivées de la circonférence. Paris: Dunod et Pinat. 124 + 49 S. 8°.

H. Müller und R. Baltin. Graphische Darstellungen, graphische Behandlung der Gleichungen, Grundlehren von den Kegelschnitten. Leipzig u. Berlin: B. G Teubner. 78 S. 8°, mit 40 Textfig.

Anzeige im Arch. der Math. (3) **22**, 58.

G. Papelier. Leçons sur les coordonnées tangentielles. Avec une préface de P. Appell. 1re partie: Géométrie plane. 2e édition. Paris: Vuibert. VI + 331 S. 8°.

T. R. Running. Graphical solutions of differential equations occurring in finite geometries. Amer. M. S. Bull. (2) **20**, 79.

C. Schmehl. Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Zweite, verbesserte Auflage. Gießen: E. Roth. VII + 111 S. 8°.

A. Tresse et A. Thybaut. Cours de géométrie analytique. 2e édition, complètement refondue. Paris: Collin. III + 577 S. 8°.

A. Villa. Geometria analitica del piano e sue applicazioni. Milano: Sonzogno. 63 S. 16mo.

M. Vasnier. Cours de géométrie. 3e partie: Courbes et surfaces usuelles. Paris. 167 S. 8°

A. Ziwet and L. A. Hopkins. Analytic geometry and principles of algebra. Edited by E. R. Hedrick. New York: Macmillan. VIII + 369 S. 12mo.

Kapitel 2.

Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Kurven.

E. Kasner. Conformal geometry. Proc. 5. Intern. Math. Congr. 2, 81-87.

„Konforme Geometrie, d. h. die Erforschung jener Eigenschaften geometrischer Gestaltungen, die unter allen konformen Transformationen invariant bleiben, ist noch nicht in eine systematische Theorie gebracht worden, die beispielsweise mit der projektiven Geometrie vergleichbar wäre ... Eine einzige Kurve hat keine Invarianten.... Die erste Gestalt von wirklichem Interesse besteht aus zwei Kurven, die einen gemeinschaftlichen Punkt haben, also ein krummliniger Winkel θ .. Wenn zwei krummlinige Winkel konform äquivalent sind, haben sie sicher dasselbe θ; genügt dies aber? Wenn zwei Winkel an Größe gleich sind, d. h. dasselbe θ haben, sind sie dann notwendig konform äquivalent? Das ist sicher eine Grundfrage in der konformen Geometrie. Wir werden zeigen, daß die Antwort nicht immer bejahend ausfällt. Es ist z. B. möglich, einen krummlinigen Winkel herzustellen, der durch zwei sich rechtwinklig schneidende analytische Bogen gebildet wird, ohne in einen Winkel konform transformiert werden zu können, der durch ein Paar rechtwinkliger Geraden gebildet wird (wobei die Transformation am Scheitel natürlich regulär ist).

Diese Tatsache weist auf die Existenz anderer Invarianten als θ hin. Die Hauptaufgabe dieser Arbeit ist es, diese absoluten Invarianten höherer Ordnung zu finden. Die betrachteten Invarianten sind Differentialinvarianten, welche Krümmungen und Derivierten der Krümmungen der Schenkel der krummlinigen Winkel umfassen. Nur Invarianten endlicher Ordnung werden einbezogen. Die Existenz von Invarianten unendlicher Ordnung, d. h. solcher, die alle Koeffizienten in den die Schenkel des Winkels darstellenden Potenzreihen einschließen, wird nicht entschieden. Es wird gezeigt, daß, wenn θ ein rationaler Teil von π ist („rationaler Winkel"), höhere Invarianten vorhanden sind. Wenn der Winkel nicht rational ist, bestehen, wie gezeigt wird, keine höheren Invarianten.

Unter den rationalen Winkeln ist der Fall enthalten, wenn θ Null ist; ein solcher Winkel wird „Hornwinkel" benannt. Jeder Typus eines Hornwinkels hat eine einzige Invariante, deren Ordnung von dem Grade der Berührung der Seiten abhängt.

Die Frage, wann zwei krummlinige Winkel konform äquivalent sind, ist nicht vollständig gelöst. Damit zwei Winkel äquivalent seien, ist es notwendig, daß nicht nur θ, sondern die höheren Invarianten, die in dieser Abhandlung erhalten werden, gleich sind. Ob dies auch hinreicht, das hängt von der Existenz von Invarianten unendlicher Ordnung ab.

Am Schluß der Abhandlung wird kurz die entsprechende (duale) Eigenschaft der äquilongen Geometrie betrachtet." Lp.

E. Turrière. Sur la classification et la construction des courbes transcendantes. Ens. math. 15, 112-122.

Bekanntlich versteht man unter panalgebraischen Kurven solche transzendenten Kurven, die Integrale einer irreduziblen, in x, y, y' algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung sind. Und eine panalgebraische Kurve kann nur Integralkurve einer einzigen derartigen Differentialgleichung sein. Weiter kann eine transzendente Kurve, die nicht eine panalgebraische Kurve ist, nur einer einzigen algebraischen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen. Sei nun allgemein eine transzendente Kurve zugleich Integral zweier algebraischen Differentialgleichungen n-ter Ordnung, so führt die Elimination von $y^{(n)}$ zu nur einer Gleichung von $(n-1)$-ter Ordnung. Mit andern Worten, wenn eine transzendente Kurve einer oder mehreren Differentialgleichungen genügt, so gibt es sicher eine und nur eine Differentialgleichung von niedrigster Ordnung ω. Die Bestimmung dieser Gleichung läßt sich unschwer ausführen, wenn man zwei algebraische, voneinander unabhängige Differentialgleichungen kennt, denen die Kurve genügt. Unter unabhängigen Differentialgleichungen werden dabei solche verstanden, bei denen diejenige höherer Ordnung nicht eine Folge derjenigen niedrigerer Ordnung ist. Nach der so bestimmten Ordnungszahl ω werden nun die transzendenten Kurven klassifiziert.

Die Kurven von der Ordnung 0 sind die algebraischen Kurven. Die Kurven von der Ordnung 1 sind die panalgebraischen. Die Kurven von der Ordnung 2 enthalten z. B. die Eulersche Kurve, die Kettenlinie gleichen Widerstandes, die Kurven $y = x^x$ und $y = x^{1/x}$ und viele andere. Zu den Kurven dritter Ordnung gehört die Klothoide, die Kurve $y = x^{\operatorname{tg} x}$.

Beispiele von Kurven höherer Ordnung sind

$$y = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot}}}}, \quad y = e^{e^{e^{x}}}$$

Es werden dann noch Bemerkungen zur Konstruktion transzendenter Kurven gemacht. Ba.

E. Turrière. Sur la notion de courbe interscendante. Ann. sc. Ac. Pol. Porto 8, 111-115, 188-192.

In diesen Briefen an Teixeira gibt der Verf. Erläuterungen und historische Bemerkungen zu seinem Aufsatz „Courbes transcendantes et interscendantes" (F. d. M. 43, 646, 1912). Er verspricht, in einer größeren Veröffentlichung auf den Gegenstand näher einzugehen. Lp.

E. Turrière. Sur les spirales logarithmiques osculatrices à une courbe plane. Ens. math. 15, 122-129.

Der Verf. geht von folgender Betrachtung aus. Es sei eine ebene Kurve C gegeben und M ein Punkt auf ihr. In M werde der Krümmungsradius gezeichnet, über ihm als Durchmesser der Kreis. Bewegt sich M auf der Kurve, so wird der Kreis eine Kurve einhüllen, die in die gegebene Kurve C zerfällt und in eine andere Kurve S. Diese Kurve S untersucht der Verf. und beweist für sie, daß sie der Ort der Pole der logarithmischen Spiralen ist, die die Kurve C oskulieren. Ba.

E. Turrière. Sur la relation de Booth et les courbes de Ribaucour. Ann. sc. Ac. Pol. Porto 8, 242-248.

In der Abhandlung „On the logocyclic curve, and the geometrical origin of logarithms" (Quart. J. 3, 135, 1860) hat Booth eine Formel gegeben, die sich auf die Krümmungsradien zweier inversen Kurven in entsprechenden Punkten bezieht. Sind M und M_1 diese Punkte, und schneiden die Krümmungskreise in ihnen auf den Fahrstrahlen $OM = r$ und $OM_1 = r_1$ die Strecken γ und γ_1 ab, so besteht die Beziehung $r/\gamma + r_1/\gamma_1 = 1$. Der Verf. beweist diese Sätze und erweitert sie auf die allgemeinere Transformation $Z = z^n$ zwischen zwei komplexen Zahlen Z und z; der Fall $n = -1$ ist der der Inversion. „Die merkwürdige Boothsche Beziehung ist eine bsonderer Fall einer einfachen Formel in bezug auf konjugierte Kurven in der durch die Gleichung $Z = z^n$ definierten konformen Abbildung zwischen zwei komplexen Veränderlichen; diese Gleichung verallgemeinert nicht nur die Boothsche Beziehung, sondern enthält als besonderen Fall den analytischen Ausdruck einer von Maclaurin entdeckten geometrischen Eigenschaft. Der Wunsch, eine ebenfalls einfache Deutung der erhaltenen allgemeinen Beziehung zu gewinnen, führt dazu, das Verhältnis zu betrachten, nach welchem eine feste Gerade die Krümmungsradien einer beliebigen Kurve teilt. Hat man in dieses Verhältnis Einsicht gewonnen, so wird man zur Beleuchtung der Theorie durch Beispiele dazu geführt, ebene Kurven zu betrachten, für welche dieses Verhältnis konstant ist; hierbei würden sich die Ribaucourschen Kurven von selbst einstellen." Lp.

E. Turrière. Sur les courbes de Ribaucour. Ens. math. **15**, 468-477.

Von dem Begriffe der Zwischenevolute ausgehend, den Braude in seiner Dissertation aufgestellt hat (F. d. M. **42**, 596, 1911; vgl. auch F. d. M. **43**, 653, 1912), kehrt der Verf. die Fragestellung um: Es sei eine ebene Kurve (Γ) gegeben; von welchen Kurven (C) kann (Γ) eine Zwischenevolute sein? In dem einfachsten Falle, wo (Γ) eine Gerade ist, sind die zugehörigen Kurven (C) die von Johann Bernoulli schon 1716 behandelten Kurven, die zu Ehren von Ribaucour, der sie in seiner Étude sur les élassoïdes 1880 benutzt hat, jetzt nach diesem Mathematiker benannt zu werden pflegen. Der Verf. entwickelt verschiedene sie betreffende Einzelheiten und begegnet sich dabei oft mit Braude in dessen Arbeiten über Kurvenerzeugungen. Zuerst wird der Nachweis erbracht, daß die Differentialgleichung der Ribaucourschen Kurven $dx = dy/\sqrt{cy^\mu - 1}$, wo $\mu = 2/m$, im Falle $m = 0$ die Kurve $e^y \cos y = 1$ ergibt, die von Coriolis bestimmte Kettenlinie gleichen Widerstandes. Dann wird die Tangentialgleichung der Ribaucourschen Kurven aufgestellt:

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi \equiv \overline{\omega} = \cos\varphi \int_0^\varphi \frac{\sin^m \varphi}{\cos^2 \varphi}\, d\varphi.$$

Diese ergibt für $m = 0$ einen Punkt, für $m = -1$ die gemeine Kettenlinie, für $m = -2$ die Parabel, für $m = 2$ die gemeine Zykloide (woraus folgt, daß die Zykloide die negative Fußpunktkurve von $r = \theta \sin\theta$ ist). Ferner

wird gezeigt, daß die Radiale der Ribaucourschen Kurve eine Clairaultsche Kurve $r = m \sin^{m-1}\theta$ ist, woraus dann wieder verschiedene bekannte Sätze fließen. Die Kurve $dx = dy/\sqrt{cy^m + 1}$, $\mu = 2/m$, werden kurz gestreift, usw. Lp.

E. Turrière. Généralisation des courbes de Ribaucour. Nouv. Ann. (4) **13**, 275-287.

Während die Ribaucourschen Kurven durch die Eigenschaft ausgezeichnet sind, daß der Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte von einer festen Geraden in einem konstanten Verhältnis geteilt wird, beschäftigt sich der Verf. mit Kurven, bei denen der Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte von einem festen Kreise in einem konstanten Verhältnis geteilt wird. Dabei ist es gleichgültig, welcher der beiden Schnittpunkte ausgewählt wird. Es sind also diejenigen Kurven, deren Zwischenevolute ein Kreis ist. Ba.

E. Turrière. Sur la courbure des lignes et des surfaces. Palermo Rend. **36**, 369-378.

Von den Rodriguesschen Formeln der Flächentheorie ist jede eine Folgerung der dritten; es ist möglich, und dies ist das erste Ziel des Verf., zwei Relationen aufzustellen, die ihnen gleichwertig sind. Etwas Analoges ergibt sich für mehrdimensionale Räume, während in der Ebene eine der Gleichungen identisch erfüllt ist. Die andere Gleichung führt naturgemäß auf das Problem der Kurven, unter deren Zwischenevoluten sich Kreise befinden. Ihrer Untersuchung ist der Hauptteil der Arbeit gewidmet, die sich im Stoff, nicht aber in der Methode, mit einer Abhandlung von L. Braude (Monatshefte f. Math. u. Phys. **23**; F. d. M. **43**, 653, 1912) berührt. Sk.

L. Braude. Die Teilkurven der Polarnormale und Polartangente. Palermo Rend. **36**, 127-139.

Wenn der Krümmungsradius einer Kurve der Normale proportional ist (z. B. Ribaucoursche Kurven), so teilt die Zwischenevolute zugleich die Normale in konstantem Verhältnis. In Polarkoordinaten haben die Sinusspiralen die entsprechende Eigenschaft, daß der Krümmungsradius der Polarnormale proportional ist; daher ist hier jede Zwischenevolute zugleich Ort der Punkte, welche die Polarnormale in konstantem Verhältnis teilen. Solche Kurven sowie die entsprechenden Teilkurven der Polartangente betrachtet der Verf. und erhält dabei allgemeine Eigenschaften, die denen der Zwischenevoluten entsprechen. Nach Aufstellung der allgemeinen Formeln werden diese angewendet auf den Kreis, die Pascalsche Schnecke, die Kardioide, die archimedische Spirale, die Rosenkurven, die Multiplikatrixkurven, die Sinusspiralen usw. Zum Schluß werden auch Fragen des Abrollens von Kurven, die dem Verf. ja sehr geläufig sind, mit den behandelten Fragen in einen gewissen losen Zusammenhang gebracht. Lp.

C. Jordan et R. Fiedler. Courbes orbiformes. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **21**, 226-235.

Zunächst werden die Eigenschaften der Kurven Π wieder vorgeführt, die in den vorjährigen Veröffentlichungen der beiden Verf. abgeleitet sind (F. d. M. **43**, 647-648, 1912). Dann wird gezeigt, unter welchen Bedingungen jene Kurven orbiform oder von konstanter Breite sind, nämlich solche Kurven Π, 1. bei denen die Zentrik ein Kreis, 2. die konstante Durchmesser haben, 3. bei denen der Abstand der gegenüberliegenden Tangenten konstant ist, 4. bei denen alle Normalen Doppelnormalen sind, 5. bei denen die Summe der Krümmungsradien konstant ist, 6. die Parallelkurven zu den Kurven Π_0, 7. die Evolventen der Kurven Π_0, 8. die zu sich selbst parallelen Π-Kurven. — Es folgen einige Beispiele.
Lp.

M. Fujiwara. **Remark on my previous note „on some curves of constant breadth“.** Tôhoku Math. J. **3**, 21-22.

Vgl. F. d. M. **43**, 649, 1912. — Bedingung, daß die Evolute der Kurve eine ungerade Anzahl von Spitzen hat.
Lp.

Ch. Bioche. Sur les courbes de largeur constante. S. M. F. C. R. 1913, 19.

Die Hüllkurve der Geraden $x \cos \alpha + y \sin \alpha - (8 + \cos 3\alpha) = 0$ ist konvex, ist zu jeder Normale in den beiden Punkten senkrecht, wo sie von ihr geschnitten wird, und die Entfernung zweier solchen Punkte ist 16, der Umfang 16π.
Lp.

F. G. Teixeira. Extrait d'une lettre à M. Haton de la Goupillière. Journ. de Math. (6) **9**, 165-170.

„Developpoide“ ist die Kurve, welche von der Geraden eingehüllt wird, die durch den Berührungspunkt der Tangente einer gegebenen Kurve geht und mit dieser Tangente einen vorgegebenen Winkel ω einschließt. Der Verf. beweist den Satz: Die Brennpunkte einer Kurve C sind auch Brennpunkte ihrer Developpoide. Als Anhang der Note wird ein Satz über die Kurven (Glissettes, Gleitkurven) bewiesen, die ein mit einer ebenen Kurve fest verbundener Punkt beschreibt, während diese Kurve eine gegebene gerade Linie in einem vorgegebenen Punkte berührt und an ihm gleitet. „Die Gleitkurve des Mittelpunktes des festen Kreises einer beliebigen Epi- oder Hypozykloide ist eine Ellipse“. Ohne Beweis wird der Satz gegeben: „Die gewöhnliche Rollkurve und die Rollkurve mit proportionaler Gleitung, welche von dem Mittelpunkte einer gemeinsamen Epi- oder Hypozykloide beschrieben werden, die auf einer festen Geraden rollen, werden durch eine Folge von Ellipsenbogen gebildet.“
Lp.

M. F. Egan. On some theorems of Czuber's concerning envelopes. Messenger (2) **42**, 178-190.

„In dem Arch. der Math. u. Phys. (3) **2**, 113-122 (F. d. M. **32**, 618, 1901) hat E. Czuber den folgenden Satz bewiesen: Wenn die Koordinaten x, y eines Punktes in einer Ebene in Ausdrücken mit den Parametern u, v durch die Gleichungen $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ ausgedrückt sind, so haben die Familien von Kurven, die durch $u =$ const. und $v =$ const. gegeben werden, dieselbe Einhüllende, die durch:

$$J(u, v) = \frac{\partial (fg)}{\partial (uv)} = 0$$

gegeben wird." Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, manche Fragen zu beantworten, die hierbei auftauchen, in bezug auf die Sätze (z. B. hinsichtlich der Ordnung der Berührung) über Kurven und Oberflächen, die Czuber in dem angeführten Aufsatze gegeben hat, und gewisse Verallgemeinerungen jener Sätze zu begründen. Lp.

L. Braude. Sur quelques enveloppes. Nouv. Ann. (4) **13**, 337-353.

Die Diskussion der Einhüllenden ist oft ziemlich schwierig, wenn man allein kartesische Koordinaten anwendet. In solchen Fällen ist es empfehlenswert, sich der natürlichen Koordinaten zu bedienen. Auf diese Weise sind zahlreiche Beispiele von Cesàro in seinen „Vorlesungen über natürliche Geometrie" behandelt worden. Braude verallgemeinert einige hierauf bezügliche Resultate und leitet unbekannte Eigenschaften gewisser Kurvenfamilien her. Dabei stellt sich fast immer ein Zusammenhang mit den Zwischenevoluten heraus, die als Ort des Punktes definiert sind, der die Krümmungsradien in einem konstanten Verhältnis teilt. Im ersten Teil der Arbeit wird folgende Aufgabe gelöst: Man ziehe durch jeden Punkt P der Kurve Γ und durch den Punkt P_λ, der den Krümmungsradius der Evolute von Γ im konstanten Verhältnis $(1-\lambda)/\lambda$ teilt, eine Gerade. Welches ist die Enveloppe E_λ dieser Geraden? Im zweiten Teile werden die Krümmungskreise einer Kurve vom Krümmungsmittelpunkt oder vom Berührungspunkte dilatiert und die zugehörigen Enveloppen bestimmt. In bezug auf die zahlreichen Folgerungen, die sich für gewisse Kurven oder Kurvenfamilien ergeben, muß auf die Abhandlung selbst verwiesen werden. Gd.

M. Bottasso. Le curvature negli inviluppi di rette e di piani con applicazione alle polari reciproche di una linea data. Ven. Ist. Atti **72**, 281-307.

Die Bestimmung des Krümmungsradius einer ebenen Kurve, als Einhüllende ihrer Tangenten betrachtet, welche Ref. im Jahre 1911 durchgeführt hat (vgl. F. d. M. **42**, 598, 1911), hat Bottasso auf den Gedanken geführt, dieselben Resultate durch die Vektorenrechnung abzuleiten. Aus diesem Bestreben ist die vorliegende Abhandlung entstanden, in der die Begriffe und die Bezeichnungen von Burali-Forti und Marcolongo auf verschiedene Fragen der ebenen und der räumlichen Geometrie glücklich angewandt werden. Einige der vom Verf. aufgestellten Formeln sind schon bekannt, andere aber sind neu und nicht unwichtig; mit Recht schreibt der Verf. sie nicht nur in den Bezeichnungen der Vektorenrechnung, sondern auch in kartesischen Koordinaten. Der Inhalt der Arbeit erhellt aus den Überschriften der verschiedenen Paragraphen: I. Einhüllende von Geraden in einer Ebene. II. Einhüllende von Ebenen. III. Rückkehrkante einer abwickelbaren Fläche. IV. Anwendungen auf die Polarreziprozität in der Ebene. V. Polarreziproke Raumkurven. La.

M. Vegas. Curvatura de líneas y superficies en un punto del infinito. Rev. Soc. Mat. Esp. **2**, 190-193, 220-223, 250-255, 277-283.

Bemerkungen über die Berührung höherer Ordnung von Kegelschnitten mit Kurven, von Flächen zweiten Grades mit Flächen in unendlich fernen Punkten.

Re.

A. C. L. Wilkinson. Curvature in areal coordinates. Indian Math. Soc. **5**, 179-183.

Nach Cesàro, Lezioni di geometria intrinseca, Kap. VII; deutsche Übersetzung S. 125 ff.

Lp.

J. Haag. Détermination des courbes planes par certaines propriétés de leur rayon de courbure. Nouv. Ann. (4) **13**, 394-400.

Der Verf. beschäftigt sich mit denselben Kurven, die E. Turrière Nouv. Ann. (4) **13**, 275-287 behandelt hat (S. 637 dieses Bandes), die durch eine besondere Eigenschaft ihrer Krümmungsradien definiert sind, und wendet sich dann allgemeineren Kurven zu, deren Gleichungen die Form $d\theta/ds = f(\varrho)$ haben. Darin bedeutet θ den Winkel des Radiusvektors eines Kurvenpunktes mit der Abszissenachse, s die Bogenlänge, ϱ den Krümmungsradius und $f(\varrho)$ eine gegebene Funktion desselben. Es ergibt sich $\theta = \int \frac{dr}{\sqrt{1/f^2(\varrho) - r^2}}$, wo r der Radiusvektor ist.

Ba.

S. W. Reaves. On the projective differential geometry of plane anharmonic curves. Annals of Math. (2) **15**, 20-26.

Im Anschluß an die von Halphen und von Wilczynski gegebenen Formeln für gewisse projektiv-invariante geometrische Örter ebener Kurven werden diese speziell für die Kurven $y = x^\lambda$, $r = e^{m\varphi}$, $y = e^x$ bestimmt, was keine Schwierigkeiten macht. Unter anderem wird gefunden: Der oskulierende, d. h. in vierter Ordnung berührende Kegelschnitt ist für alle Punkte einer logarithmischen Spirale eine Ellipse, und zwar sind alle diese Ellipsen ähnlich; der Mittelpunkt liegt jedesmal auf dem Kreise, der, mit dem halben Krümmungsradius beschrieben, die Kurve berührt. Für $y = x^\lambda$ ist der oskulierende Kegelschnitt eine Hyperbel, Parabel, Ellipse, je nachdem der Ausdruck

$$\lambda^2 (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)(2\alpha - 1) y^{2\lambda+2} \gtreqless 0$$

ist. Für $y = e^x$ ist er stets eine Hyperbel. Wohl zum Teil bekannte Sätze, die sich unter anderem aus einer von Minkowski angegebenen Bedingung für „hyperbolisch, parabolisch, elliptisch“ gekrümmte Kurven leicht ableiten ließen.

Re.

F. G. Teixeira. Sur les courbes à développée intermédiaire circulaire. Monatsh. f. Math. u. Phys. **24**, 347-354.

L. Braude hat in den Monatsh. f. Math. u. Phys. **23**, 283-288 (vgl. F. d. M. **43**, 653, 1912) die natürliche Gleichung derjenigen Kurven bestimmt, unter deren Zwischenevoluten sich Kreise befinden. Teixeira stellt die Parametergleichungen dieser Kurven auf, indem er ihre Polarkoordinaten als

Funktionen eines Parameters bestimmt. Diese Aufgabe hängt von einer einzigen Quadratur ab. Darauf werden die von Braude auf anderem Wege erhaltenen Resultate abgeleitet. Gd.

L. Braude. Sur quelques applications des coordonnées intrinsèques. Nouv. Ann. (4) **13**, 492-513.

Teilt man die Krümmungsradien einer ebenen Kurve (C) von dieser aus im Verhältnis $1:\lambda$, so liegen die Teilpunkte auf der λ-ten Zwischenevolute (C_λ) von (C). Der Wert $\lambda = 0$ liefert die Evolute (C_0) von (C). Die Normale von (C_λ) schneidet den Krümmungsradius von (C_0) so, daß er wieder im Verhältnis $1:\lambda$ geteilt wird. Der Teilpunkt beschreibt also die λ-te Zwischenevolute $(C_{0\lambda})$ von (C_0). In dieser Arbeit wird nun die Frage behandelt, die Kurve zu finden, die man auf $(C_{0\lambda})$ rollen lassen muß, um als Rollkurve eines damit fest verbundenen Punktes die Kurve (C_λ) zu erhalten. Diskussion spezieller Fälle. Re.

H. W. Reddick. Systems of plane curves whose intrinsic equations are analogous to the intrinsic equation of an isothermal system. Annals of Math. (2) **14**, 179-185; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 165.

Hat die Differentialgleichung eines einfach unendlichen Systems von ebenen Kurven die Form $y' = \tan\lambda(x, y)$, so ist die Krümmung k einer Kurve des Systems und die Krümmung k_1 einer Kurve des orthogonalen Systems durch die Formeln gegeben:

$$k = \lambda_x \cos\lambda + \lambda_y \sin\lambda, \qquad k_1 = \lambda_y \cos\lambda - \lambda_x \sin\lambda,$$

wo die Indexe x und y die partielle Differentiation bezeichnen. Mit diesem Kurvensystem und seinem orthogonalen System sind die vier natürlichen Größen T, N, T_1, N_1 verbunden. Es bezeichnet $T = dk/ds$ die Variation der Krümmung einer Kurve des gegebenen Systems längs der Kurve in einer willkürlich als positiv angenommenen Richtung, $N = dk/dn$ die Variation der Krümmung einer Kurve des gegebenen Systems längs einer Kurve des orthogonalen Systems in positiver Richtung, die einen Winkel von $+90^0$ mit der positiven Richtung der Kurve des gegebenen Systems bildet; $T_1 = dk_1/ds_1$ und $N_1 = dk_1/dn_1$ sind in entsprechender Weise definiert. Es ist bekannt, daß $T + T_1 = 0$ die natürliche Gleichung des isothermischen Systems ist. In der vorliegenden Arbeit werden die 12 Kurvensysteme betrachtet, deren natürliche Gleichungen dadurch entstehen, daß die Summen und Differenzen von je zwei der vier Größen $T, N, T_1. N_1$ gleich Null gesetzt werden. Hierbei ergibt sich folgende charakteristische geometrische Eigenschaft des Systems $T - T_1 = 0$: die Familie der ∞^1 Kurven durch einen gegebenen Punkt, isogonal zu einem gegebenen einfach unendlichen System $y' = \tan\lambda(x, y)$, enthält zwei isogonale Kurven, welche von ihren Krümmungskreisen hyperoskuliert werden. Wenn das gegebene System die Form $T - T_1 = 0$ hat, und zwar nur in diesem Falle, so sind die Richtungen θ_1 und θ_2 dieser beiden isogonalen Kurven derart, daß die Richtung $\theta_1 + \theta_2$ orthogonal zur Richtung 2λ ist für jeden Punkt der Ebene. Gd.

L. Braude. Sur deux transformations de courbes planes. Ann. sc. Ac. Pol. Porto 8, 29-42.

Hüllkurve der Geraden, die durch die Projektionen eines Kurvenpunktes P auf die Koordinatenachsen gezogen wird; ebenso die der Geraden, die durch die Projektion von P auf eine der Koordinatenachsen parallel zu der Tangente oder der Normale in P gezogen wird. Lp.

L. Braude. Supplément à un article précédent. Ann. sc. Ac. Pol. Porto 8, 107-110.

Man projiziert jeden Punkt P einer Kurve, deren Gleichung in Polarkoordinaten $r = f(\varphi)$ ist, auf die Polarachse und zieht dann durch diese Projektion eine Gerade g senkrecht zum Radiusvektor OP; die Hüllkurve von g zu finden. Lp.

W. Gaedecke und L. Braude. Lösung zu 377 (L. Braude). Arch. der Math. u. Phys. (3) 20, 272-274.

Bildet man von einer Kurve Γ die n-te Fußpunktkurve F_n, so ist die n-te Fußpunktkurve der Inversen von F_n wieder Inverse von Γ, wobei alle Fußpunktkurven und Inversen auf denselben Punkt P bezogen sind. Anwendung auf Sinusspiralen. — W. Gaedecke fügt noch hinzu, daß auf Grund eines bekannten Satzes die Krümmungsmittelpunkte sämtlicher in der Aufgabe auftretenden Kurven auf sehr einfache Weise konstruierbar sind. Gd.

A. B. Basset. On the reciprocation of the singularities of plane curves. Quart. J. 45, 52-65.

A. B. Basset. A new method of generating singularities of plane curves. Quart. J. 45, 65-76.

Ein früher (Quart. J. 37, 313, 1906) vom Verf. aufgestelltes Reziprozitätsgesetz wird für eine große Anzahl von Fällen bewiesen. Daraus wird ein Verfahren abgeleitet, Singularitäten ebener Kurven zu erzeugen. Zahlreiche Beispiele. B.

A. Rosenthal. Über die Singularitäten der reellen ebenen Kurven. Math. Ann. 73, 480-521.

Abdruck der Habilitationsschrift des Verf. (F. d. M. 43, 649, 1912) mit unwesentlichen Änderungen. Lp.

I. L. Csada di Modor. Risoluzione della quistione 781. Periodico di Mat. 28, [(3) 10], 279-280.

Den Ort der Scheitel eines rechten Winkels zu finden, dessen Schenkel zwei Kurven berühren, deren Gleichungen in Plückerschen Koordinaten $F(u, v) = 0$, $f(u, v) = 0$ sind. Fall, bei dem eine der Kurven oder beide Kurven Kreise sind. Lp.

A. DE SAINT GERMAIN. Sur les podaires. Nouv. Ann. (4) **13**, 38-39.

Der Ort der Punkte, für die der Inhalt der Fußpunktkurve einer gegebenen Kurve einen konstanten Wert hat, ist im allgemeinen ein Kreis. Vgl. Barisien, Nouv. Ann. (4) **12**, 331; F. d. M. **43**, 651, 1912. Sk.

C. VERNIÈRES. Note sur les conchoïdes. Revue de Math. spéc. **23**, 113.

Wie schon die Schriftleitung in der Schlußnote bemerkt, unterscheidet sich die angegebene Tangenten- und Normalenkonstruktion nicht von der üblichen, die den augenblicklichen Drehpol benutzt. Sk.

V. LÁSKA. Über Konstruktion der Tangenten bei gewissen ebenen Kurven. Časopis **42**, 13-20. (Böhmisch.)

Eine Anwendung der nomographischen Koordinaten. Pe.

Weitere Literatur.

E. G. BILL. Analytic curves in non-euclidean space (third paper). Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 505.

A. EMCH. On closed continuous curves. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 221-222.

A. EMCH. On some properties of closed continuous curves. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 282-283.

E. KASNER. On the ratio of the arc to the cord for analytic curves. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 72-73.

F. P. PATERNÓ. Une nouvelle définition des points d'inflexion des courbes planes. Ens. math. **15**, 47-48.

S. W. REAVES. On the projective differential geometry of plane anharmonic curves. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 220-221.

B. Theorie der algebraischen Kurven.

J. v. SZ. NAGY. Über arithmetische Eigenschaften algebraischer Kurven. Ungar. Ber. **26**, 168-195.

Fermat gab schon allgemeine Methoden zur Lösung der unbestimmten Gleichungen mit rationalen Koeffizienten:

$$(1) \qquad \begin{cases} y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3, \\ y^2 = a + bx + \cdots + ex^4; \end{cases}$$

$$(2) \qquad y^3 = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Oder auch in geometrischer Form: es sollen die rationalen Punkte der algebraischen Kurven (1), (2) gesucht werden.

Fermat ging dabei von der Kenntnis eines einzelnen solchen Punktes aus. Euler brachte das Verfahren in mathematische Form.

Jacobi zeigte, daß der Fermatsche Algorithmus zur Aufsuchung neuer rationaler Punkte der Kurve (1) aus einem ersten übereinstimmt mit dem algebraischen Algorithmus der Multiplikation der zu (1) gehörigen elliptischen Integrale erster Gattung.

Jacobi stellte auch einen analogen Satz auf für hyperelliptische Kurven mit rationalen Koeffizienten:

$$y^2 = R(x) = a_0\, x^{2p+2} + \cdots + a_{2p+2}.$$

Es gibt dann unendlich viele Gleichungen p-ten Grades mit rationalen Koeffizienten, so daß, wenn x_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ eine beliebige Wurzel einer solchen Gleichung ist, $\sqrt{R(x_k)}$ rational ausdrückbar ist in x_k und rationalen Zahlen.

Poincaré (F. d. M. **32**, 564, 1901) hat sich in dieser Hinsicht besonders mit den unikursalen und bikursalen Kurven beschäftigt. Bei den Kurven vom Geschlecht p ging er aber nicht von einem rationalen Punkte aus, sondern von einer „rationalen Gruppe" von p Punkten, bei denen die elementaren symmetrischen Verbindungen ihrer Koordinaten rational sind, und leitete daraus andere solche Punktgruppen her.

Vermöge einer birationalen Transformation T (mit rationalen Koeffizienten) entspricht jedem rationalen Punkt und jeder rationalen Gruppe von q Punkten wieder ein solcher Punkt und eine solche Punktgruppe.

L. Schlesinger (F. d. M. **39**, 258, 1908) ging auf den inneren Zusammenhang der Abhandlungen von Fermat, Euler, Jacobi und Poincaré näher ein.

Die Kurven dritter Ordnung C_3 hat sodann B. Levi genauer untersucht (F. d. M. **37**, 251, 1906; **39**, 275, 1908). Es gibt solche speziellen C_3, auf denen aus einem bestimmten rationalen Punkte nur endlich viele weitere ableitbar sind.

Sei (3) $f(x, y) = 0$ eine algebraische Gleichung mit rationalen Koeffizienten, von der Ordnung n und vom Geschlecht p. Kennt man auf der Kurve (3) C_n eine rationale Gruppe von p Punkten, so lassen sich nach Poincaré ∞ weitere solche „p-elementige" Gruppen mit Hülfe adjungierter Kurven (mit rationalen Koeffizienten) aus der C_n ausschneiden, was vom Verf. genauer verfolgt wird.

Nach Jacobi werden die auf der C_n befindlichen p-elementigen Punktgruppen durch die Summen α_k der p zu (3) gehörigen Abelschen Integrale erster Gattung u_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ charakterisiert; so daß (4) $\alpha_k = \sum\limits_{i=1}^{p} \int\limits_{(a_i, \lambda_i)}^{(x_i, y_i)} du_k$ ist.

Die Punktgruppe (x_i, y_i) wird damit bestimmt, wenn der Integrationsweg in jeder Integralsumme auf der zu (3) gehörigen Riemannschen Fläche derselbe ist. Man darf die festen unteren Grenzen einander gleich wählen, so daß $a_i = a, b = b$ wird. Die α_k heißen die Argumente der Punktgruppe (α).

Nach dem Abelschen Theorem sind die für die nq Schnittpunkte der C_n mit einer C_q geltenden Argumente α_k unabhängig von den Koeffizienten der C_q. Haben also die α_k für eine Gerade ($q = 1$) die Werte $\varkappa_k$, so für eine C_q die Werte $q\varkappa_k$. Sind δ_k die zu den d Doppelpunkten gehörigen Argumente, und ist im besonderen die C_q eine Adjungierte der C_n, so werden die Argumente α_k für die $nq - 2d$ Schnittpunkte gleich $q\varkappa_k - \delta_k$.

Mit diesen Hülfsmitteln lassen sich durch die Argumente α_k einer p-elementigen Gruppe die Argumente der daraus ableitbaren p-elementigen Punktgruppen darstellen. Man wird auf zwei Gleichungsserien geführt, die einen gewissen Algorithmus für die Konstruktion der gesuchten Punktgruppen aufstellen lassen. Sind alle auf der C_n befindlichen p-elementigen Gruppen durch die r_p voneinander unabhängigen α, β, γ ableitbar, so heißen die ersteren „primitiv" und r_p die „Rangzahl". Sodann werden die birationalen Transformationen T mit rationalen Koeffizienten, denen gegenüber die arithmetischen Eigenschaften der C_n invariant bleiben, genauer studiert. Invariante Zahlen sind die Anzahl der auf C_n befindlichen rationalen Punkte nebst den Anzahlen aller 2-, 3-, ... elementigen rationalen Punktgruppen. Gibt es unendlichviele s-elementige Punktgruppen, so ist die bezügliche invariante Zahl die Ordnung der Unendlichkeit, das ist die Rangzahl r_p.

Ausführlicher wird der Fall $p = 2$, das ist der einer $C_n^{(2)}$, behandelt. Hier gibt es im allgemeinen immer rationale Punktepaare. Vermöge einer gewissen T geht, was von Bedeutung ist, die Kurve $C_n^{(2)}$ in eine $C_4 = C$ (niedrigster Ordnung) mit einem Doppelpunkt über. Jedem rationalen Punkte der $C_n^{(2)}$ entspricht ein rationaler Punkt der C, und umgekehrt, und das nämliche gilt von den rationalen Punktepaaren. Man darf daher beide Kurven als äquivalent betrachten und sich somit auf die C beschränken. Der Strahlbüschel durch den Doppelpunkt D von C schneidet die ∞^1 „perspektiven" rationalen Punktepaare aus, sowie ein weiterer die zwei Tangenten von D. Aus diesen lassen sich ∞^2 rationale Punktepaare auf C linear konstruieren. Sodann werden die Argumente dieser Punktepaare abgeleitet.

Aus einem solchen Paare (α_1, α_2) gehen alle die hervor, die von der Form sind: $n\,\alpha_1 + m\,\varkappa_1, n\,\alpha_2 + m\,\varkappa_2$ (n, m willkürlich ganzzahlig). Geometrisch kommt das einfach darauf hinaus, daß man durch zwei rationale Punktepaare einen adjungierten Kegelschnitt legt, der aus C ein drittes solches Paar ausschneidet.

Im besonderen kann es wieder primitive Punktepaare geben. Vgl. das folgende Referat über die verwandte Arbeit des Verf. in den Math. Ann. My.

J. v. Sz. Nagy. Zur arithmetischen Theorie der ternären Gleichungen von höherem Geschlechte. Math. Ann. **73**, 230-240.

Nach Hilbert und Hurwitz (F. d. M. **23**, 190, 1891) ist jede unikursale Kurve C_n mit rationalen Koeffizienten durch birationale Transformation T mit rationalen Koeffizienten in eine C_2, und bei ungeradem n sogar in eine C_1 transformierbar. Diese Sätze hat später auch Poincaré (F. d. M. **32**, 564, 1901) bewiesen und weiter eine Reihe wichtiger arithmetischer Eigenschaften der bikursalen Kurven (mit rationalen Koeffizienten) ermittelt, ohne indessen einen zu den unikursalen Kurven analogen Satz zu finden.

Dagegen hat der Verf. (in den Ungar. Ber., s. das vorstehende Referat)

für $p = 2$ gefunden, daß sich eine solche Kurve mittels einer T in eine C_4 mit einem Doppelpunkte transformieren läßt, in genauer Analogie mit dem eingangs erwähnten Satze.

Dies wird im folgenden verallgemeinert, wo von den Gleichungen aller vorkommenden Kurven und birationalen Transformationen stillschweigend vorausgesetzt wird, daß sie rationale Koeffizienten besitzen; entsprechend wird unter einer m-elementigen Punktgruppe auf einer Kurve eine rationale solche Gruppe verstanden.

Ist die Kurve C_n^p, mit der Gleichung $f = 0$, vom Geschlechte p, so bedeute ihre „Grundzahl" $Q = [n, 2p - 2]$ den größten gemeinsamen Teiler von n und $2p - 2$.

Ist dann h eine beliebige, nur der Bedingung $hQ > p - 1$ genügende ganze Zahl, so existieren auf jeder C_n^p ∞ hQ-elementige Punktgruppen.

Gibt es auf einer C_n^p eine $m(> p + 1)$-elementige Punktgruppe (d. h. außerhalb der singulären Punkte), so ist, und nur dann, die C_n^p durch eine T in eine C_m^p überführbar. Dabei ist m ein Vielfaches von Q.

Im besonderen läßt sich also eine $C_n^p (p > 2)$ in eine C_{2p-2}^p transformieren.

Diese Sätze sind das genaue Analogon zu dem eingangs erwähnten Hilbert-Hurwitzschen Satze über unikursale Kurven. Sie bleiben auch dann bestehen, wenn die ternäre Form f keine rationalen Koeffizienten hat; es müssen dann nur die rationalen Punktgruppen und die Koeffizienten von T im Zahlkörper der Koeffizienten von f rational sein. Der Beweis beruht darauf. daß aus solchen bekannten Punktgruppen, die aus der C_n^p durch eine andere C ausgeschnitten werden, vermöge adjungierter Kurven noch andere Punktgruppen abgeleitet werden.

Durch eine $(kn + 2p - 2)$-elementige Gruppe der ersteren Art, die von einer adjungierten Kurve $(n - 3 + k)$-ter Ordnung ausgeschnitten wird, lege man λ-mal eine adjungierte Kurve einer genügend hohen Ordnung $(n - 3 + k)$. Damit erhält man eine neue Gruppe von $m = hQ$ Elementen $(m > p + 1)$, und umgekehrt gehören zu jedem h (in $hQ < p - 1$) $m = hQ$-elementige Gruppen.

Aus einer so erhaltenen m-elementigen Gruppe lassen sich, wiederum mittels adjungierter Kurven, unendlich viele weitere m-elementige Gruppen ableiten, und dieser Prozeß läßt sich wiederholen.

Diese m-elementigen Gruppen dienen nun zur Begründung der Transformationen T von C_n^p. Geht die C_n^p vermöge einer T in eine C_m^p über, so entspricht vermöge T^{-1} jeder s-elementigen Gruppe auf C_m^p eine ebensolche auf C_n^p. Auf C_m^p schneiden aber die (rationalen) Geraden ∞ m-elementige Gruppen aus. Somit muß die C_n^p m-elementige Gruppen besitzen, wenn sie in die C_m^p transformierbar ist.

Diese Bedingung ist aber auch hinreichend, wenn $m > p + 1$. Es folgt daraus, daß eine C_n^p in eine C_m^p transformierbar ist, wenn $m = hQ$ ist. „Normalkurve" heißt eine Kurve niedrigster Ordnung, in die eine C_n^p transformierbar ist.

Dann sind im besonderen die Normalkurven der C_n^0 die C_2^0, die der C_n^2 sind die C_9^2, die der C_n^p die C_{2p-2}^p.

In den Fällen, wo $n < p + 2$ ist, treten besondere Eigenschaften der C_n^p auf. So bestehen für die $C_{2p-2-nk}^p$ $(k \leqq \alpha_1)$ und C_{hn}^p, für die die Ordnung $< p + 2$ ausfällt, die Ungleichungen $2p - 2 - nk < p + 2$ und $k \leqq \alpha_1$, bzw. $hn < p + 2$.

Die Sonderfälle $p = 0, 1, 2, 3, 4$ werden durchgeführt. Für $p = 0$ sind die Normalkurven die C^2. Für $p = 1$ ist $Q = n$.

Das Verfahren liefert nur solche Bildkurven C^1_m, für die $m = hn$ ist. Es scheint in diesem Falle keine Normalkurven zu geben.

Im Falle $p = 2$ sind die Normalkurven die C^2_4. Im Falle $p = 3$ hat man die drei verschiedenen Grundzahlen 1, 2 und 4. Jede nicht hyperelliptische Kurve C^3_n ist in eine C^3_4 als Normalkurve transformierbar, die hyperelliptische C^3_n in eine C^3_6. Endlich für $p = 4$ sind die Normalkurven die C^4_6. Erst bei $p = 4$ treten Kurven auf, nämlich die C^4_5, für die eine Adjungierte der Ordnung $n - 4$ immer existiert. My.

L. Brusotti. Sulla generazione di curve algebriche reali mediante „piccola variazione“ di una curva spezzata. Annali di Mat. (3) **22**, 117-169, 3 Taf.

„In den Untersuchungen verschiedener Richtung wird die wirkliche Konstruktion von Kurven, die vorgegebene Bedingungen befriedigen, allgemein mittels kleiner Änderung einer zerfallenden (spezzata) Kurve bewirkt. Die Methode besteht darin, $h \gtreqless 2$ Kurven $f_i = 0$ von der Ordnung n_i $(i = 1, 2, \ldots, h)$ mit reellen Punkten und eine reelle Kurve $g = 0$ von der Ordnung $n_1 + n_2 + \ldots + n_h$ einzuführen, die so gewählt sind, daß die Kurve

$$(\alpha)\ f_1 f_2 \ldots f_h + tg = 0$$

für ein reelles t von passendem Vorzeichen und hinreichender Kleinheit die gewollte Eigenschaft besitzt. In der vorliegenden Abhandlung will ich die Methode der kleinen Änderung einer systematischen Behandlung unterwerfen. . . .

In der Absicht, die beiden Ordnungen der Überlegungen rein geschieden zu halten, habe ich die Arbeit in zwei Teile geteilt. Der erste (§§ 1—7) hat einen streng topologischen Inhalt, der zweite (§§ 8—12) wendet die Schlüsse des ersten auf die reellen algebraischen Kurven an.

Der § 1 enthält einige Vorbereitungen über die Züge (circuiti) in der projektiven Ebene und über die durch ein System in endlicher Zahl vorhandener Züge erzeugten Gebiete. Für manche Unterscheidungen ist das Auftreten des Begriffes Segment zweiter Art in bezug auf einen geraden Zug zu beachten. Die §§ 2—5 beziehen sich auf Systeme von Zügen, die der Bedingung unterliegen, daß durch einen Punkt der Ebene höchstens zwei Züge des Systems gehen. In § 2 wird die kleine Änderung eines Systems Σ durch die Methode der Vereinigung untersucht, d. h. mittels einer topologischen Operation im Innern jedes gegenseitigen Schnittes O zwischen Zügen von Σ. In § 3 wird die Methode der Übergänge eingeführt, bei der die Betrachtung der geraden oder der ungeraden Zahl der Schnitte eines Segments (oder eines Zuges) mit seinem transformierten wesentlich ist (Parität der Übergänge). Bei der Bestimmung einer kleinen Änderung durch eine solche Methode treten die Begriffe des Streckenkomplexes und des Baumes auf. Der § 4 stellt eine obere Grenze für die Zahl a' des aus Σ transformierten Systems Σ' auf. Wenn Σ a Züge besitzt und $k \neq 0$ Durchschnitte, so wird bewiesen, daß $a' \lesseqgtr a + k - 2$ ist. Wird nun Σ als in h Systeme S_i zerlegbar angenommen, so daß Züge desselben S_i keine gegenseitigen Durchschnitte haben, so wird gefunden: $a' \lesseqgtr a + k - 2(h - 1)$, sobald zwei Systeme S_i, S_j immer $k_{ij} \neq 0$ gegenseitige Durchschnitte besitzen. Für $h = 2, 3, 4$ kann die obere Grenze ein Maximum werden bei dem Auftreten

besonderer Zweier, Dreier, Vierer von Zügen; für $h > 4$ ist dies jedoch ausgeschlossen. Die Annahme, daß die k_{ij} nicht notwendig alle $\neq 0$ sind, führt zur Hineinnahme einer Konstante d und zu der Beziehung $a' \gtreqless a + k - 2(k - d)$. Der § 5 ist eine topologische Forschung der Zweier, Dreier, Vierer von Zügen, die zu den in § 4 behandelten Maximalfällen gehören. Die ermittelten Typen sind in den Tafeln außerhalb des Textes dargestellt. In den §§ 6, 7 wird eine vorgängige Beschränkung mit der Annahme aufgehoben, daß durch einen Punkt der Ebene mehr als zwei Züge von Σ gehen können. In § 6 wird in diesem Sinne der Begriff der kleinen Änderung mit der Einführung passender elementarer Operationen verallgemeinert. In dem § 7 werden die Ergebnisse des § 4 auf die neuen Systeme ausgeführt.

Der § 8, mit dem der zweite Teil anhebt, untersucht die Kurve (α) unter den Voraussetzungen, daß durch einen reellen Punkt der Ebene höchstens zwei der $f_i = 0$ gehen, und daß die Kurve $g = 0$ keinen der gegenseitigen reellen Durchschnitte der $f_i = 0$ enthält. Es folgt, daß das aus den Zügen von (α) hervorgehende System Σ' sich aus dem System Σ der Züge der zerfallenden Kurve $f_1 f_2 \dots f_n = 0$ durch ein Verfahren der kleinen Änderung im Sinne der §§ 2, 3 ergibt. Nun erhebt sich die Frage, ob umgekehrt eine bestimmte topologische kleine Änderung algebraisch in der angedeuteten Weise ausführbar sei. Der § 9 beantwortet unter Beibehaltung der beschränkenden Voraussetzungen des § 8 diese Frage bejahend. In dem Falle zweier Kurven $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ kommt die Behandlung auf die Konstruktion einer Kurve $g = 0$ zurück, die (etwa eine Gerade ausgenommen) in ihrem wesentlichen Teile aus $m \gtreqless \frac{1}{2} n_1 n_2$ Ovalen gebildet ist, welche ebensoviele gegenseitige reelle Durchschnitte der $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ umschließen. Bemerkenswert ist das Auftreten der Kurven von der Ordnung $\frac{1}{2}(n_1 + n_2)$ oder $\frac{1}{2}(n_1 + n_2 - 1)$, die durch die erwähnten m Durchschnitte gehen. Für $h > 2$ Kurven $f_i = 0$ gründet sich die Behandlung auf die des vorangehenden Falles $h = 2$. Der § 10 löst durch wesentlich andere Methoden die Frage des § 9 in einigen besonderen Fällen. Bei ihnen ist eine der $f_i = 0$ eine Kurve des Geschlechtes p, die $p + 1$ oder p Züge besitzt; die $g = 0$ ist eine ihr adjungierte Kurve, bestimmt mit Hülfe von Betrachtungen der Geometrie auf der Kurve. Der § 11 hebt die oben erwähnten Beschränkungen des § 8 auf; einer so erweiterten algebraischen kleinen Änderung entspricht eine topologische kleine Änderung in dem weiteren Sinne des § 6. In dem § 12 sind die notwendigen und die hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, daß eine algebraische kleine Änderung (in dem weiteren Sinne von § 11) eine Kurve erzeugt, welche die Meistzahl der mit ihrer Ordnung verträglichen Züge besitzt. Mit Benutzung der Ergebnisse der §§ 4 und 7 führt die Erörterung auf die einzigen fünf verschiedenen Typen, bei denen in jedem Falle die Anzahl der $f_i = 0$ nicht größer als 4 ist."

Die Arbeit, die in einer früheren Veröffentlichung des Verf. angekündigt wurde (F. d. M. **41**, 650, 1910), schlägt einen so eigentümlichen Weg ein, daß es nötig schien, durch die Wiedergabe der Einleitung eine gewisse Vorstellung davon zu geben.

Lp.

W. van der Woude. Over het bepalen van algebraische krommen door meervoudige punten. Handel. XIV. Nederl. Nat. en Geneesk. Congr. 1913, 200-203.

Es sei eine gewisse Anzahl vielfacher Punkte von gegebenen Ordnungen der Vielfachheit gegeben, so daß sie ohne Zweideutigkeit eine Kurve C_n be-

stimmen. Der Verf. stellt die Bedingung dafür auf, daß C_n in zwei verschiedene oder zusammenfallende Kurven ausartet (Rev. sem. 22_2, 102). Lp.

S. Wigert. Remarque sur la théorie des asymptotes d'une courbe algébrique plane. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. **9**, Nr. 4, 3 S.

Hat man für die Gleichung der Asymptote einer algebraischen ebenen Kurve $y = ax + b$ in bekannter Weise die Konstante a bestimmt, so versagt bei der folgenden Aufsuchung der zugehörigen Konstante b die gewöhnlich gegebene Regel, wenn der Berührungspunkt der Asymptote im Unendlichen ein vielfacher Punkt ist. Der Verf. gibt für diesen Fall eine Methode, die er in der Literatur nicht gefunden hat. Lp.

S. Lefschetz. On the existence of loci with given singularities. Amer. Math. Soc. Trans. **14**, 23-41.

Die Umkehrung der Aufgabe, die Plückerschen Zahlen einer algebraischen ebenen Kurve zu finden, besteht darin, die Existenz einer solchen Kurve mit vorgegebenen Plückerschen charakteristischen Zahlen nachzuweisen, und ist äquivalent mit der Bestimmung der Meistzahl k von Rückkehrpunkten, die eine Kurve von der Ordnung m und dem Geschlecht p haben kann. Veronese hat diese Frage für rationale Kurven gelöst (Math. Ann. **19**, 209; F. d. M. **13**, 488, 1881). Als ein Beispiel von Fehlern, die in dieser Beziehung gemacht worden sind, zitiert der Verf. die Aussage von Salmon-Fiedler (Höhere ebene Kurven, S. 83), daß eine Kurve siebenter Ordnung 13 Rückkehrpunkte haben könne; dann würde sie aber -2 Doppeltangenten haben.

In der vorliegenden Arbeit wird aus der Theorie der Invarianten eine Bedingung für die charakteristischen Zahlen einer Kurve abgeleitet; dann folgt eine Erörterung der a priori möglichen Kurven, und es wird die Existenz der Kurven vom Geschlecht 1, 2, 3, 4, 5 nachgewiesen. Schließlich wird einiges über die Ausdehnung der Theorie auf Oberflächen und höhere Mannigfaltigkeiten beigebracht.

Die Ergebnisse der Erörterung über die Anzahl der Spitzen werden in folgender Tabelle zusammengefaßt:

$$\begin{array}{c|ll|} m & 7 \cdots 2p+1+\sqrt{8p+1} & \cdots +\infty \\ p \leqq 9 & \varkappa \leqq \varkappa_1, & \varkappa \leqq \tfrac{3}{2}(m+2p-2) \end{array},$$

$$\begin{array}{c|lll|} m & 7 \cdots \tfrac{1}{2}\{2p+5-\sqrt{16p+1}\} & \cdots 2p+1+\sqrt{8p+1} & \cdots +\infty \\ p > 9 & \varkappa \leqq 3m+p-9, & \varkappa \leqq \varkappa_1, & \varkappa \leqq \tfrac{3}{2}(m+2p-2) \end{array},$$

wo $\varkappa_1 = \frac{1}{2}\{4(m+p)-11-\sqrt{-8m+24p+25}\}$ gesetzt ist.

Während eine Oberfläche vierter Ordnung höchstens acht binodale Punkte haben kann, ist bei Oberflächen fünfter Ordnung die Meistzahl der binodalen Punkte 20. Lp.

J. E. Rowe. Cusp and undulation invariants of rational curves. Annals of Math. (2) **14**, 199-210.

Die im Titel genannten Invarianten sind in Gliedern der dreireihigen Determinanten der Matrize aus den Koeffizienten der Parametergleichungen ausdrückbar. W. Fr. Meyer hat (Math. Ann. 38, 369-404; F. d. M. 23, 758, 1891) gezeigt, daß die Bedingung für die Spitze von der Ordnung $2(n-1)$ ist, die für die Undulation von der Ordnung $4(n-3)$ in diesen Determinanten; es würde aber schwer halten, sie mit Benutzung seiner Methoden niederzuschreiben. Es ist auch möglich, mit Hülfe der perspektiven Kurven, wie dies von W. Stahl geschehen ist (Math. Ann. 38, 561-585; F. d. M. 23, 754, 1891), die Spitzenbedingung als eine Determinante von der Ordnung $6(n-1)$ zu schreiben; allein die hohe Ordnung dieser Determinante entwertet diese Methode für den wirklichen Gebrauch. Der Verf. liefert eine fördersame Methode, jene Invarianten einer rationalen Kurve von der Ordnung n als Determinanten von den Ordnungen $2(n-1)$ und $4(n-3)$ niederzuschreiben, deren Elemente die oben erwähnten dreireihigen Determinanten sind. Diese Methoden sind wertvoll, weil sie direkt zur Aufsuchung der entsprechenden Singularitäten in höheren Dimensionen verallgemeinert werden können. Andere interessante Tatsachen der Arbeit sind die eigentümliche Beziehung der Spitzenbedingung und der Undulationsbedingung der ebenen rationalen Kurve fünfter Ordnung, die ein besonderer Fall einer allen Invarianten der ebenen rationalen Quintiken eigentümlichen Beziehung ist, und die Verallgemeinerung dieser Tatsachen in höhere Dimensionen. Lp.

J. I. Tracey. Note on the equation giving the points of inflection of a plane rational curve. Johns Hopkins Univ. Circ. 1913, Nr. 7, 41.

Die Parameter der $3(n-2)$ Wendepunkte einer Kurve n-ter Ordnung sind Wurzeln einer Gleichung, von der sich jedes Glied, z. B. das r-te, in der Form schreiben läßt:

$$\Sigma \tfrac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)\begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix} t^{3n-5-r},$$

wo $i<j<k$ und jedes von diesen dreien alle möglichen Werte von 0 bis n annimmt, aber so, daß $i+j+k=r+2$ bleibt; r nimmt nacheinander alle ganzzahligen Werte von 1 bis $3n-5$ an. Z.

J. C. Fields. Relations between the branch points and the double points of an algebraic curve. Math. Ann. 73, 560-570.

Sei (1) $F(z,u)=u^n+F_{n-1}u^{n-1}+\cdots+F_n=0$ die Gleichung einer Kurve C_n mit Doppelpunkten oder (gewöhnlichen) Spitzen. Mittels (1) läßt sich irgendeine rationale Funktion von z,u in die reduzierte Form bringen: (2) $H(z,u)=h_{n-1}u^{n-1}+\cdots+h_0$, wo die h_i rational in z sind. Durch Zerlegung in Partialbrüche wird $H(z,u)$ weiter umgeformt in:

$$(3) \qquad H(z,u)=\sum_{\lambda}\frac{\varphi^{(i_\lambda)}(z,u)}{(z-\alpha_\lambda)^{i_\lambda}}+P(z,u),$$

wo die φ und P reduziert sind, und i_λ den Grad von $\varphi^{(i_\lambda)}$ in z angibt.

In der Nachbarschaft von $z = a$ läßt sich die Gleichung (1) auf die Gestalt bringen:

$$(4) \qquad F(z, u) = (u - P_1) \ldots (u - P_n) = 0,$$

wo die P Potenzreihen sind, die nach ganzen oder gebrochenen Exponenten von $z - a$ fortschreiten. Man darf für $z = \infty$ setzen:

$$(5) \qquad P_s = k_s z + k_s^{(0)} + k_s' \frac{1}{z} + k_s'' \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \cdots,$$

so daß hier keine gebrochenen Exponenten auftreten.

Wird die Funktion H in (3) nur für gewöhnliche Zweigpunkte der Kurve unendlich, so erstreckt sich die Summation bezüglich λ auf solche Werte $z = a_\lambda$, die gewöhnlichen Punkten, Doppelpunkten oder Spitzen entsprechen. Wird aber H unendlich von der Ordnung $\frac{1}{2}$ für einen durch einen gewöhnlichen Punkt gehenden Zweig, so kann man jedem der Exponenten i_λ den Wert 1 beilegen.

Aus (3) ergibt sich für $\frac{du}{dz}$ eine Entwicklung von der Gestalt:

$$(6) \qquad \frac{du}{dz} = \sum_\lambda \frac{\varphi_\lambda(u)}{z - a_\lambda} + P(z, u),$$

und du/dz wird für $z = \infty$ nicht unendlich. Es zeigt sich, daß das Zusatzglied P verschwindet, daß also

$$(6') \qquad \frac{du}{dz} = \sum_\lambda \frac{\varphi_\lambda(u)}{z - a_\lambda},$$

wird, wo die Zähler φ_λ noch genauer ermittelt werden. Die Formel (6′) geht dadurch über in:

$$(6'') \qquad \frac{du}{dz} = \sum_\lambda \frac{\gamma_\lambda F(a_\lambda, u)}{(z - a_\lambda)(u - b_\lambda)},$$

wo sich die Summation in λ erstreckt auf alle gewöhnlichen und Doppelpunkte der Kurve, und der Koeffizient γ_λ jeweils einen andern Wert hat, jenachdem der Punkt (a_λ, b_λ) ein gewöhnlicher Kurvenpunkt ist oder ein Doppelpunkt oder eine Spitze. Sieht man von Gliedern negativer Dimension ab, so reduziert sich die rechte Seite von (6″) einfach auf u/z; hieraus folgt, daß zwischen den Zweigpunkten und den Doppelpunkten gewisse Bedingungen bestehen müssen, die mit Hülfe der Theorie der algebraischen Funktionen ermittelt werden. Man gelangt schließlich zu den gesuchten Bedingungen in der Form, daß gewisse Summen rationaler Funktionen konstante Werte besitzen. Es wäre zu wünschen, daß diese analytischen Ergebnisse geometrisch noch weiter verfolgt und gedeutet würden. My.

R. A. F. Frazer. On the invariant geometry of binary forms in the complex variable. Quart. J. 44, 308-325.

Es sei $f(z, 1; a_i) \equiv a_0 \prod_1^n (z - z_r)$ eine binäre Form n-ter Ordnung mit komplexer Variable $z = x + iy$ und komplexen Koeffizienten a_i.

Es sollen verschiedene Kovarianten von f geometrisch gedeutet werden.

Zu dem Behufe setze man die Wurzeln $z_r = x_r + iy_r$ und lege durch einen der beiden „Kreispunkte" K die n „zyklischen" Geraden, die ihn in der Gaußschen Ebene mit den n reellen Punkten $P_r(z_r)$ verbinden; dann wird f vermöge dieser n Geraden g_r bestimmt. Ebenso charakterisiert die konjugierte Form $\bar{f} = (\bar{z}, 1; \bar{a}_i)$ die n Geraden $\bar{g}_r$, die den konjugierten Kreispunkt $\bar{K}$ mit denselben Punkten P_r verbinden. Es handelt sich dann um die Geometrie der n^2 Schnittpunkte der Geraden g_r und $\bar{g}_r$, insbesondere der n reellen Punkte P_r, soweit sie invariant mit den Formen $f, \bar{f}$ verknüpft ist, also um Eigenschaften, die gegenüber der Gruppe der Kreisverwandtschaften ungeändert bleiben.

Aus der Figur von n zyklischen Geraden lassen sich bereits verschiedene Sätze ableiten, wobei zu beachten ist, daß durch Inversion eine zyklische Linie wieder in eine solche übergeht.

Man bezeichne den in bezug auf ein Punktepaar Q, R zu einem Punkte P harmonischen Punkt mit $P.\,QR$.

Dann folgt unter anderem aus dem bekannten projektiven Satze: „Der Ort eines Punktes P, von dem zwei harmonische Tangentenpaare an zwei Kegelschnitte S_1, S_2 gehen, ist ein Kegelschnitt F durch die acht Berührungspunkte B_i der vier gemeinsamen Tangenten", unter Verwendung der Kreispunkte $K, \bar{K}$, der metrische Satz: „Liegen die Brennpunkte von zwei Kegelschnitten S_1, S_2 harmonisch, so liegen die acht Punkte B_i auf einem Kreise."

Weiter folgt aus dem Begriff der Involution der Satz: „Die Brennpunktepaare der Inkegelschnitte eines Vierseits bilden eine Involution, d. h. sie sind harmonisch zu einem festen Punktepaar."

Eine kubische Form f wird durch ein Dreieck ABC repräsentiert. Den beiden Wurzeln der Hesseschen Form H von f entsprechen die beiden „Hesseschen Punkte" H_1, H_2 und den Wurzeln der kubischen Kovariante Q ein Dreieck $A_1\,B_1\,C_1$. Für diese Punkte werden einfache Konstruktionen angegeben.

Weiter wird die Polarentheorie geometrisch gedeutet. Wir führen z. B. den Satz an: „Die zweite Polare eines Punktes P eines Dreiecks ABC ist ein Punkt, der zugleich den drei Kreisen $(P, P.\,BC, A)$ $(P, P.\,CA, B)$, $(P, P.\,AB, C)$ angehört."

Im besonderen ergeben sich zahlreiche Sätze über Involutionen.

„Sind z. B. (AA'), (EF), (BC) drei Paare einer Involution, und ist D zu A' harmonisch in bezug auf das Paar $(A.\,EF.\,BC, A)$, dann sind die beiden Dreiecke ABC und DEF apolar."

Eine Reihe interessanter Eigenschaften wird für den Ort der Brennpunkte der Inkegelschnitte eines Vierseits abgeleitet.

Von derartigen Sätzen wird eine systematische Anwendung auf die neuere Dreiecksgeometrie gemacht. Wir erwähnen den Satz: „Sind P, P' Spiegelpunkte in bezug auf den Umkreis (ABC), und ist K der Punkt $P'.\,H_1\,H_2$, so gehen die Kreise PAA_1, PBB_1, PCC_1 durch K. Die fünf Punkte $P.AA_1$, $P.BB_1$, $P.CC_1$, K und P' liegen auf einem Kreise, für den H_1, H_2 Spiegelpunkte sind." Läßt man P ins Unendliche rücken, so folgt: „Ist K der Lemoinesche Punkt eines Dreiecks ABC, so sind die beiden Brocardschen Punkte Ω, Ω' die Hesseschen Punkte des Dreiecks $K\,H_1\,H_2$."

Darüber hinaus wird eine allgemeine Methode entwickelt, um Kovarianten als die Brennpunkte gewisser Klassenkurven zu deuten. Man denke sich umgekehrt die Wurzeln einer gegebenen Kovariante Φ einer Form $(P_1, \ldots, P_n)$ als

Brennpunkte einer Klassenkurve, so läßt sich eine solche konstruieren und eine Reihe verschiedener merkwürdiger Eigenschaften für sie herleiten. Man bilde eine gewisse Seminvariante $\psi(z, \ldots, z_n)$ und ersetze hier jedes z_ν durch die Form A_ν des Punktes P_ν. Dann sind die Brennpunkte der Klassenkurve $\psi(A_1, \ldots, A_n) = 0$ die Wurzeln der Kovariante Φ.

Im besonderen ergibt sich z. B. für eine Parabel: Ist ABC ein Tangentendreieck, und berührt die Seite AB im Mittelpunkte, so ist der Punkt $C. AB$ der Brennpunkt der Parabel. My.

O. Göhner. Über Systeme algebraischer Korrespondenzen. Diss. Tübingen. 53 S. gr. 8°.

Ein von Comessatti (Ven. Ist. Atti **69**, 871; F. d. M. **41**, 633, 1910) angegebenes Verfahren wird dazu benutzt, um die von Brill (Math. Ann. **36**) aufgestellten Rekursionsformeln zu gewinnen, die die Anzahlen der Lösungen von Korrespondenzsystemen verknüpfen. Explizite Formeln lassen sich für den Fall symmetrischer Korrespondenzen allgemein aufstellen, für unsymmetrische Korrespondenzen nur, wenn die Wertigkeitszahlen einer und derselben Korrespondenzgleichung einander gleich sind. Für die Anzahl der Gruppen von $\mathfrak{r}$ Punkten, die r lineare Scharen $g_{n_h}^{\mathfrak{r}-1}$ gemeinsam haben, stellt der Verf. eine Formel auf, die einen Irrtum in der Arbeit von Comessatti berichtigt. Es folgen noch Anzahlbestimmungen für algebraische Kurven im $R_{\mathfrak{r}}$. Die Untersuchungen führen, der Sachlage entsprechend, auf ziemlich verwickelte Schlußformeln, die im Original nachgelesen werden müssen. Sk.

A. Comessatti. Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica. Palermo Rend. **36**, 35-57.

Die Brill-Noethersche Theorie der Geometrie auf einer algebraischen Kurve vom Geschlecht $p > 0$ wird beherrscht von linearen Reihen von Punktgruppen. Seit einiger Zeit werden auch algebraische (nicht lineare) Reihen in Betracht gezogen; im besonderen die ∞^1 Reihen γ_m^1 von Punktgruppen der Ordnung m und vom Index ν. So stellt Castelnuovo (F.d.M. **37**, 1906, 600) ein arithmetisches Kriterium auf, das gestattet, die aus äquivalenten Gruppen bestehenden Reihen zu charakterisieren. Die Anzahl z der Gruppen einer γ_m^1, die in einer linearen (nicht speziellen) Reihe g_{m-1+p}^{m-1} enthalten sind, wird, wenn $2d$ die Anzahl der Doppelpunkte der γ_m^1 bedeutet, bestimmt durch $z = \nu(m+p-1) - d$.

Diese Anzahl z verschwindet dann und nur dann, wenn die Gruppen der Reihe äquivalent sind, d. h. wenn die γ_m^1 in einer linearen Reihe derselben Ordnung m enthalten ist. Dies sagt zugleich aus, daß die auf die Gruppen der γ_m^1 bezüglichen Summen der p linear unabhängigen Abelschen Integrale erster Gattung konstant sind.

Der Verf. fragt allgemeiner nach einem mittels der Zahlcharaktere der Reihe ausdrückbaren Kriterium dafür, daß sich unter den obigen Summen nur $r \leq p$ unabhängige befinden.

Zu dem Behuf wird an Stelle der Anzahl z das System der $p+1$ Anzahlen $Z_0 (= z), Z_1, \ldots, Z_r, \ldots, Z_p$ (wo $Z_p = 0$) eingeführt. Hier bedeutet Z_r die Anzahl der Gruppen einer linearen (nicht speziellen) Reihe $g_{(r+1)(m-1)+p}^{(r+1)(m-1)}$, die r Gruppen von γ_m^1 enthalten. Das gesuchte Kriterium besteht dann darin,

daß Z_r verschwindet, während die vorausgehenden $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{r-1}$ von Null verschieden sind.

Auf der irreduzibeln Kurve C vom Geschlecht $p\,(>0)$ sei $I_1, \ldots, I_p$ ein System von Integralen erster Gattung. Auf C nehme man einen Punkt P als Anfangspunkt der Integration an und eine Gruppe G_q von $q \leqq p$ Punkten; die bezüglichen Integralsummen seien $I_1^{(q)}, \ldots, I_p^{(q)}$. Ferner werde auf C eine aus Gruppen von q Punkten bestehende h-fach ausgedehnte algebraische Mannigfaltigkeit W_k angenommen, so daß jene Summen an $t \leqq p$ lineare unabhängige Relationen gebunden sind. Man kann dann die I so normieren, daß die Summen, $I_k^{(q)} (k = 1, \ldots, t)$, bis auf Vielfache von Perioden, Konstanten gleich werden. Ist überdies W_h der Ort aller Gruppen (von q Punkten) mit jener Eigenschaft, so heißt W_h von konstantem Gewicht für die t Integrale.

Es gilt dann zunächst der Satz: (I) „Wenn die Mannigfaltigkeit der Gruppen von q Punkten auf C ein ∞^{q-h}-System $(h > 0)$ von algebraischen W_h der obigen Art enthält, so ist $h = q - t$."

Für $q = p$ kommt dieser Satz auf einen von Castelnuovo (F. d. M. **36**, 488, 1905) aufgestellten zurück.

Es ist noch zu beachten, daß die t Integrale $I_1, \ldots, I_t$ ein lineares vollständiges System von reduziblen Integralen — mit $2t$ reduzierten Perioden — bilden. Aus dem Satze (I) läßt sich das eingangs erwähnte Kriterium ableiten.

Unter den Folgerungen ist besonders folgende von Interesse. Wenn zwischen zwei algebraischen irreduzibeln Kurven Γ und C eine algebraische Korrespondenz stattfindet, die in dem einen Sinne nullwertig ist, so ist sie es auch in dem entgegengesetzten Sinne.

Im zweiten Abschnitt werden Rekursionsformeln entwickelt, die die Anzahl Z_r mit den vorangehenden $Z_{r-1}, \ldots, Z_0$ verbinden, sowie für gewisse, mit den Z invariant verknüpfte Charaktere $\varphi_i, \delta_i, \sigma_i, \eta_i$. Dagegen stößt die direkte Darstellung der Z durch diese Charaktere auf eigentümliche Schwierigkeiten. Von Interesse sind verschiedene besondere Fälle. Ist z. B. die γ_m^1 eine Involution vom Geschlecht π, so gewinnt man mit Hülfe der Zeuthenschen Formel $d = p - 1 - m(\pi - 1)$ für Z_r den einfachen Ausdruck: $Z_r = m^{r+1}\binom{\pi}{r+1}$.

Für die Zahl Z_1 läßt sich ein allgemeines Bildungsgesetz angeben. Aus ihm folgt unter anderem, daß auf einer Kurve C vom Geschlechte $p > m$ die elliptischen (nicht aus äquivalenten Gruppen gebildeten) γ_m^1 involutorisch sind.

My.

A. Comessatti. Sopra certe disuguaglianze fra i caratteri di una varietà algebrica. Rom. Acc. L. Rend. **22**$_2$, 316-321.

A. Comessatti. **Ancora sopra certe disuguaglianze fra i caratteri d'una varietà algebrica.** Rom. Acc. L. Rend. **22**$_2$, 361-366.

Diese zwei Aufsätze bilden ein Ganzes, dessen Hauptzweck die Bestimmung zweier Ungleichheiten ist, die zwischen den Charakteren einer algebraischen Mannigfaltigkeit bestehen. Die Untersuchung wird unter der Voraussetzung geführt, daß die betrachtete Mannigfaltigkeit die Dimension 3 habe; aber zum Schluß macht der Verf. auf die Tatsache aufmerksam, daß seine Methode auf beliebige Räume verallgemeinert werden kann.

Ist die gegebene Mannigfaltigkeit V irreduzibel, und besitzt sie die zweidimensionale Unregelmäßigkeit q sowie das geometrische Geschlecht p_g und das arithmetische p_a, so ist

(1) $p_g \leqq 3(q-3)$, (2) $p_g - p_a \leqq q - 4$.

Unter den Folgerungen, welche der Verf. aus diesen Ungleichungen zieht, führen wir die folgenden an:

a) Die dreidimensionalen algebraischen Mannigfaltigkeiten, deren geometrisches Geschlecht $p_g = 1$ ist, und deren zweidimensionale Unregelmäßigkeit $q > 0$ ist, enthalten entweder eine aus algebraischen Kurven bestehende Kongruenz von dem Index 1 und der Unregelmäßigkeit q oder einen Büschel algebraischer Flächen vom Geschlecht q; wenn aber $q = 3$ ist, sind sie in die betreffende Picardsche Mannigfaltigkeit transformierbar.

b) Die algebraischen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, für welche $p_g - p_a < 0$ und $q > 0$ ist, enthalten einen irrationalen Flächenbüschel, dessen Geschlecht, wenn $q > 1$ ist, mindestens gleich 2 ist; wenn aber $p_g - p_a = -1$ und $q = 2$ ist, enthalten sie eine Kongruenz vom Index 1, die aus algebraischen Kurven bestehen, deren Geschlechter $p_g = 1, p_a = -1$ sind. La.

F. Severi. Sopra alcune proprietà aritmetiche delle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica. Torino Atti **48**, 660-674.

Das Ziel, das der Verf. in diesem Aufsatze sich gesteckt hat, ist der Beweis des folgenden neuen Satzes: „Ist u die Zahl der vereinigten Punkte einer beliebigen Korrespondenz T zwischen den Punkten einer algebraischen Kurve vom Geschlecht p, welche die Indexe α, β und den Grad 2 hat, so besteht die folgende Ungleichung:

$$(u - \alpha - \beta)^2 \leqq 4p(\alpha\beta - \mu),$$

wo das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn die betrachtete Korrespondenz T eine Wertigkeit besitzt."

Der Beweis ist geometrisch und benutzt Begriffe und Sätze aus der Theorie der algebraischen Kurven und Flächen; aber zum Schluß bemerkt der Verf., daß dieselben Resultate mittels des bekannten Hurwitzschen transzendenten Verfahrens (Math. Ann. **28** und **32**) abgeleitet werden können. La.

R. Torelli. Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti a una curva algebrica. Rom. Acc. L. Rend. (5) **22**$_1$, 772-775.

Auszug aus einer Abhandlung, die in Palermo Rend. **37**, 25-46, 1914, erschienen ist, und über die im nächsten Band der F. d. M. berichtet werden wird. La.

R. Torelli. Sulle varietà di Jacobi. Rom. Acc. L. Rend. (5) **22**$_2$, 98-103, 437-441.

Als Nachtrag zu § 5 der vorstehend angeführten Abhandlung beweist der Verf. in dem ersten Aufsatze den folgenden Satz: Man habe auf einer Kurve C_p

vom Geschlecht p eine irreduzible Reihe γ_p, welche die Ordnung und das Geschlecht p habe, keine Spezialgruppe enthalte und die Eigenschaft besitze, daß kein Integral erster Gattung von C_p eine konstante Summe längs ihrer Gruppen gebe; unter diesen Voraussetzungen enthält die durch γ_p bestimmte Klasse die aus den Punkten von C_p bestehende Involution (erster Ordnung).

Mittels dieses Satzes beweist der Verf., daß „zwei Kurven desselben Geschlechtes, welche zwei Systeme von Normal-Integralen erster Gattung mit derselben Periodentabelle besitzen, birational identisch sind".

In dem zweiten Aufsatze macht der Verf. neue Bemerkungen über die Jacobische Mannigfaltigkeit und über die Kurven, welche man auf ihr ziehen kann, falls die Moduln ganz allgemein sind. Ohne weitläufig zu werden, kann man die (sonst beachtbaren) Resultate nicht wiedergeben. La.

C. Rosati. Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica. Rom. Acc. L. Rend. **22**$_2$, 385-390, 431-436.

Der Ausgangspunkt der Betrachtungen des Verf. ist die klassische Abhandlung von Hurwitz: „Über algebraische Korrespondenzen und das verallgemeinerte Korrespondenzprinzip" (Math. Ann. 28, 1886). Nach den in ihr abgeleiteten Resultaten kann man bekanntlich auf einer beliebigen algebraischen Kurve eine „Minimalbasis" ($T', T'', \ldots, T^{\mu}$) solcher Art finden, daß jede andere algebraische Korrespondenz U, deren Wertigkeit nicht gleich Null ist, wie folgt ausgedrückt werden kann: $U \equiv \lambda_1 T' + \lambda_2 T'' + \cdots + \lambda_\mu T^{\mu}$, wo $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ ganze Zahlen sind, die nicht alle verschwinden. Wenn man nun den Punkt P des $(\mu - 1)$-dimensionalen Raumes betrachtet, dessen homogene Koordinaten $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ sind, so kann man ihn als „Bild" der Korrespondenz U annehmen. Mittels dieser Hülfsdarstellung, wie auch durch Anwendung einiger Sätze, die man Castelnuovo und Severi verdankt, beweist der Verf. viele Theoreme über die algebraischen Korrespondenzen, von denen einige neu sind; diese betreffen meistens gewisse neue Begriffe, welche zu der Lehre dieser Korrespondenzen gehören, und zu denen jene Darstellung führt. La.

S. Allen. Sopra le serie algebriche appartenenti ad una curva algebrica. Rom. Acc. L. Rend. **22**$_2$, 424-428.

Vorläufige Mitteilung über die Abhandlung „Su alcuni caratteri di una serie algebrica, e la formola di de Jonquières per serie qualsiasi" die in Palermo Rend. 37, 345-370, 1914, inzwischen erschienen ist; Anwendung einiger Resultate auf gewisse algebraische Mannigfaltigkeiten. La.

J. E. Rowe. Three or more ra'ional curves collinearly related. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 283 u. 395-401.

„Manche rationalen ebenen Kurven besitzen Systeme kovarianter rationaler Punkte oder Linienkurven, die folgendermaßen zusammenhängen: Wenn A, B, C drei Punktkurven eines solchen Systems sind, so liefert jeder in die

Parametergleichungen von A, B, C eingesetzte Parameterwert die Koordinaten dreier kollinearen Punkte. Sind A', B', C' drei Linienkurven eines solchen Systems, so liefert jeder in die Parametergleichungen von A, B, C eingesetzte Parameterwert die Koordinaten dreier in einen Punkt zusammenlaufenden Geraden (vgl. F. d. M. **43**, 182, 1912). Die gegenwärtige Abhandlung beschäftigt sich mit solchen Kurven und weist an Beispielen ihre Existenz nach".

§ Ia. Entstehung einer Kovariante R^k von R^n. § Ib. Die Rolle der Polaren. § IIa. Ein System kollinearer Kegelschnitte. § IIb. Ein System kollinearer Linienkurven. § III. Ausdehnung auf den Raum. Lp.

F. Morley. On the extension of a theorem of W. Stahl. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 11-17.

Erweiterung eines Satzes von W. Stahl über Fundamentalinvolutionen auf rationalen Kurven vierter Ordnung (J. für Math. **101**, 1887) auf Kurven fünfter, sechster, ... Ordnung; der Beweis wird für Kurven fünfter Ordnung geführt. Lp.

M. de Franchis. Un teorema sulle involuzioni irrazionali. Palermo Rend. **36**, 368.

Eine algebraische Kurve kann nicht unendlich viele Involutionen stützen, deren Geschlecht größer ist als 1. Sk.

P. A. Okken. Involutorische transformaties van de zesde klasse in het platte vlak. (Involutorische Transformationen der sechsten Klasse in der Ebene). Groningen: M. de Waal. Diss. Groningen. 92 S.

Im Anschluß an Arbeiten von Bertini, Martinetti und Berzolari (F. d. M. **15**, 745, 1883; **17**, 597, 1885; **20**, 855, 1888) werden die involutorischen Cremona-Transformationen sechster Klasse in der Ebene untersucht. Als Ausgangspunkt dient das Netz der isologen Kurven. Schn.

A. Myller. Sur les courbes autopolaires. Nouv. Ann. (4) **13**, 562-566.

In Nouv. Ann. (3) **13**, 206-210 (F. d. M. **25**, 1114, 1894) hat Appell einige grundlegende Sätze über autopolare Kurven abgeleitet, d. h. über solche Kurven, die mit ihren in bezug auf einen gegebenen Leitkegelschnitt entstandenen reziproken Polaren zusammenfallen. So hat er unter anderem gezeigt, daß jede autopolare Kurve als die Eingehüllte einer Schar autopolarer Kegelschnitte angesehen werden kann. Von diesem Ergebnis ausgehend, stellt der Verf. einige Eigenschaften dieser Kurven auf, aus denen dann ein einfaches geometrisches Verfahren zu ihrer Konstruktion folgt. Lp.

J. E. Rowe. The relation between the pencil of tangents to a rational plane curve from a point and their parameters. Messenger (2) **43**, 114-120; Americ. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 504-505.

Zuerst wird ein vollständiges System kovarianter Kurven der gegebenen Kurve R^n abgeleitet, die durch projektive Beziehungen für den Tangentenbüschel von einem Punkte an R^n definiert werden; das erfordert die weitere Entwicklung eines gewissen Kombinantentypus zweier binären Formen. Danach wird ein vollständiges System kovarianter Kurven von R^n abgeleitet, die durch projektive Beziehungen zwischen den Parametern der Tangenten von einem Punkte an R^n definiert werden. Endlich wird eine Vergleichung dieser beiden Kurven vorgenommen, woraus schließlich das Endergebnis folgt. Der Gedankengang wird an den Kurven R^3 und R^4 erläutert. Lp.

L. Braude. Sur deux transformations de courbes planes. Ann. Ac. Pol. Porto 8, 29-42.

1. Man projiziert die Punkte einer gegebenen Kurve auf die Koordinatenachsen, verbindet die Projektionen und sucht die Hüllkurve der Geraden, die mit der Verbindungslinie einen konstanten Winkel bilden. 2. Man projiziert die Punkte einer Kurve auf eine Koordinatenachse und bestimmt die Hüllkurve der Geraden, die durch die Projektionen zur Tangente parallel gezogen sind. Zahlreiche Beispiele. Sk.

J. Neuberg. Sur une transformation par affinité. Brux. S. sc. **37** (B), 153-169; Mathesis **33** [(4) **3**], Suppl. 3.

Untersuchung der Verwandtschaft zwischen den Punkten M und M', die auf folgende Weise miteinander verknüpft sind: M ist ein beweglicher Punkt in der Ebene eines Bezugsdreiecks $A_1 A_2 A_3$; die Projektionen von M auf die Seiten $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ sind M_1, M_2, M_3. Der Schwerpunkt der Punkte M_1, M_2, M_3 beladen mit den Massen μ_1, μ_2, μ_3 ist M'. Einige besondere oder auch ausgeartete Transformationen werden behandelt. Mn. (Lp.)

M. T. Naraniengar. The harmonic centre. Ind. Math. Soc **5**, 14-15.

Als Fortsetzung der Betrachtungen in der Note gleichen Titels (F. d. M. **43**, 657, 1912) betrachtet der Verf. jetzt die $n-1$ Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\lambda_1}{\varrho-\varrho_1}+\frac{\lambda_2}{\varrho-\varrho_2}+\cdots+\frac{\lambda_n}{\varrho-\varrho_n}=0,$$

wo $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ die durch die Gleichung

$$f(\varrho)=\varrho^n+p_1\varrho^{n-1}+\cdots+p_n=0$$

definierten Abstände einer Punktreihe sind. Jene Wurzeln sind die „harmonischen Mittelpunkte" der Reihe für das System der Vielfachen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ Lp.

C. DE JANS. Over middelvlakken en middelkrommen. Handel. 17. Vlaamsch Nat.- en Geneesk. Congr. Gent 1913. 54 S.

Es seien n algebraische Flächen $F_1, F_2, \ldots$ gegeben. Durch einen Punkt O ziehe man alle möglichen Geraden und nenne ihre Schnittpunkte mit den Flächen $M_{11}, M_{12}, \ldots, M_{1n}, M_{21}, M_{22}, \ldots$ usw. Dann trage man auf jeder Geraden die Strecken OP ab, die durch die Gleichung

$$OP^n = OM_{1i} \cdot OM_{2j} \cdot OM_{3k} \ldots OM_{nr}$$

bestimmt sind. Den Rest der Punkte bezeichnet man als die polare Mittelfläche der gegebenen Flächen, bezogen auf den Pol O. In analoger Weise definiert man die polare Mittelkurve von n ebenen Kurven. Durch Spezialisierung der Basisflächen und Kurven erhält man bemerkenswerte Typen, die noch genauer untersucht werden. Sk.

W. ESSON. The characteristics of plane curves. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 59-65.

Der Verf. wiederholt die Ergebnisse seiner Arbeit in Lond. M. S. Proc. **28**, 491-499 (F. d. M. **38**, 473, 1897). Lp.

P. STÄCKEL. Über die Rektifikation algebraischer Kurven. Annali di Mat. (3) **20**, 193-200.

Aufhellung einiger Schwierigkeiten, die sich in Eulerschen Arbeiten zur Kurvenrektifikation bei der Herausgabe seiner Werke herausgestellt haben, insbesondere der strenge Nachweis, daß es keine algebraische Kurve gibt, deren Bogenlänge in der Form $s = a \log v$ dargestellt werden kann. Sk.

M. FUJIWARA. On the deduction of geometrical theorems from algebraical identities. Tôhoku Math. J. **4**, 75-77.

Geometrische Deutung zweier Sonderfälle der Identität

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^m}{f'(z_k)} \equiv 0 \; (m = 0, 1, 2, \ldots, n-2),$$
$$\equiv 1 \; (m = n-1),$$

wenn $f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$. B.

G. VALIRON. Sur quelques théorèmes de Laguerre. Nouv. Ann. (4) **13**, 149-163.

Laguerre hat in der Note „Sur les courbes planes algébriques“ (C. R. 1865) einige bemerkenswerte Theoreme mitgeteilt, die er in verschiedenen andern Abhandlungen (vgl. Werke **2**, 23, 64, 178, 480, 537) angewandt hat. In der vorliegenden Arbeit werden einfache Beweise für einige dieser Sätze erbracht. Gd.

Weitere Literatur.

R. J. T. Bell. A method of finding (I) the double points of a unicursal curve, (II) unicursal quartics with three given double points. Edinb. M. S. Proc. **31**, 35-46.

E. Kasner. Systems of curves connected with equilong transformations. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 395.

F. R. Sharpe and C. F. Craig. Plane curves with consecutive double points. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 76.

J. Welsch. Lignes diamétrales des courbes algébriques. Assoc. Franç. (Tunis) **42**, 37.

C. Gerade Linien und Kegelschnitte.

D. M. Y. Sommerville. The pedal line of the triangle in non-euclidean geometry. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 93-101.

Rechnerisch werden nach den Methoden der analytischen Geometrie Sätze abgeleitet, welche Verallgemeinerungen bekannter Sätze für das ebene Dreieck in der euklidischen Geometrie sind. Lp.

K. Yanagihara. Notes on the geometry of the triangle. Tôhoku Math. J. **4**, 25-32.

Der Verf. betrachtet die Kegelschnitte, die die Seiten eines gegebenen Dreiecks ABC berühren, und stellt eine Reihe von Sätzen auf für den Fall, daß die Berührungspunkte A', B', C' gewissen Bedingungen unterworfen sind. Ba.

K. Yanagihara. Note on the geometry of the triangle. Tôhoku Math. J. **4**, 138-142.

Der Verf. betrachtet die Berührungspunkte des Feuerbachschen Kreises eines Dreiecks ABC mit seinem Inkreis und seinem Ankreis, legt in den Berührungspunkten die Tangenten an die Kreise und leitet für diese Gebilde eine Reihe von Eigenschaften ab. Ba.

S. Nakagawa. On some problems of concurrence in the geometry of the triangle. Tôhoku Math. J. **4**, 1-9.

Lösung der folgenden beiden Aufgaben: 1. Von einem Punkte P in der Ebene eines Dreiecks ABC werden auf die Seiten die Lote gefällt. Auf ihnen die Punkte A', B' und C' zu finden, so daß sich die Geraden AA', BB', CC' in einem Punkte schneiden. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ergibt sich in Form einer Determinante.

2. Den Ort der Punkte P zu finden, für die zwischen den Längen PX,

PY, PZ der Lote auf die Seiten des Dreiecks ABC und den Längen PA', PB', PC' der vorigen Aufgabe die Beziehungen bestehen:

$$PA' = \lambda \cdot PX, \quad PB' = \lambda \cdot PY, \quad PC' = \lambda \cdot PZ,$$

wo λ eine Konstante ist. Für $\lambda = \pm 1$ ergeben sich Kurven dritter Ordnung.

Ba.

W. Stegemann. Lösung zu 399 (E. Steinitz). Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 89-90.

Es sei $P_0 P_1 P_2$ ein bei P_2 rechtwinkliges Dreieck, $P_2 P_3$ das Lot von P_2 auf $P_0 P_1$, ebenso $P_3 P_4 \perp P_1 P_2$, $P_4 P_5 \perp P_2 P_3$ usw. Der Punkt $P_\infty = \lim_{n=\infty} P_n$ ist der erste Brocardsche Punkt. Fällt man aber $P_3 P_4$ nicht auf $P_1 P_2$, sondern auf $P_0 P_2$ und führt die Konstruktion fort, so erhält man einen zweiten Grenzpunkt P'_∞, und dieser ist der zweite Brocardsche Punkt des genannten Dreiecks.

Ba.

E. G. Hogg. On isogonal transformations. Messenger (2) **42**, 129*-134*.

In der Note wird gezeigt, wie die isogonale Transformation bei einem Dreieck auf kürzestem Wege zu den Gebilden führt, die in der Dreiecksgeometrie behandelt werden.

Lp.

I. Iversen. Lineære Identiteter mellem Potenser til Cirkler og Kugler (Lineare Identitäten zwischen Potenzen in bezug auf Kreise und Kugeln). Nyt Tidsskr. for Mat. (A) **24**, 73-81.

Einer von den beiden Gleichungen, die in der Ebene zwischen den Potenzen eines Punktes in bezug auf vier Kreise stattfinden, kann man lineare Form geben. Die geometrische Bedeutung der Koeffizienten wird bestimmt, und das Resultat wird zur Herleitung einer Reihe von Identitäten der Dreiecksgeometrie verwendet. Danach folgen analoge Untersuchungen im Raume.

P. H.

R. Leonardi. Alcuni teoremi sulle coniche a centro. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 180-186.

Die Gleichungen zweier Geraden in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung O seien $y = m_1 x + p_1$, $y = m_2 x + p_2$. Ein Strahl durch O schneide die Geraden in A_1 und A_2; man bilde $r = OA_2 - OA_1 = OP$. Dann hat der Ort von P (die Zissoide der beiden Geraden in bezug auf O als Pol) die Gleichung

$$m_1 m_2 x^2 - (m_1 + m_2)\, xy + y^2 + (m_1 p_2 - m_2 p_1)\, x + (p_1 - p_2)\, y = 0,$$

also einer Hyperbel mit den Asymptoten $y = m_1 x - p_1$, $y = m_2 x - p_i$. Sind die beiden Ausgangsgeraden imaginär, so erhält man eine Ellipse. Diese Erzeugungsart wird zur Ableitung von Sätzen über die Mittelpunktskurven zweiter Ordnung benutzt.

Lp.

H. PFAFF. Koaxiale Kegelschnitte am Dreieck. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **44**, 123-131.

Die Bestimmung der Achsenrichtungen eines Kegelschnittes, dessen Mittelpunkt gegeben ist, und der entweder a) ein gegebenes Dreieck zum Polardreieck hat, oder b) durch drei feste Punkte geht, oder c) von drei festen Geraden berührt wird, ist im allgemeinen eindeutig und stets, auch wenn der Kegelschnitt selbst imaginär wird, reell, da sie sich in jedem der drei Fälle, wie gezeigt wird, auf die Konstruktion eines Kegelschnittes aus fünf Punkten zurückführen läßt. Wenn zwei von drei konzentrischen, in der nach a), b), c) vorgeschriebenen Weise auf dasselbe Dreieck bezogenen Kegelschnitten zusammenfallende Achsen haben, besitzt auch der dritte dasselbe Achsenkreuz. Der geometrische Ort der Mittelpunkte solcher koaxialen Kegelschnitte ist eine für jedes Dreieck leicht bestimmbare, durch die Ecken, die Seitenmitten und die Höhenmitten gehende Kurve dritter Ordnung, die vom Verf. schon in einer früheren Abhandlung gefunden und untersucht war (F. d. M. **39**, 655, 1908). Lp.

E. K. WAKEFORD. A property of three triangles circumscribing a conic. — Note on a previous paper. Messenger (2) **42**, 143*-144*; **43**, 28.

Beweis des Satzes: Die drei Kegelschnitte, die durch die Ecken je zweier von drei einem Kegelschnitt umgeschriebenen Dreiecken gehen, treffen sich außerdem in einem und demselben Punkt. — Der Satz steht schon bei C. Taylor, „Ancient and modern geometry of conics“. Lp.

J. ROSANES. Zur Theorie der Kegelschnitte. J. für Math. **142**, 271-277.

Wie der Pascalsche Satz das Kennzeichen dafür angibt, daß 6 Punkte einem Kegelschnitt angehören, so gilt der folgende Satz für 6 gemischte Elemente: Sind $\beta\gamma\delta\varepsilon\, aa'$ vier Punkte und zwei Tangenten eines und desselben Kegelschnitts $f(\xi\xi)$ (in allgemeiner Lage), dann ist die das Diagonaldreieck von $\beta\gamma\delta\varepsilon$ zu einem Polarvierseit von aa' ergänzende Gerade l inzident mit dem Punkte $1'$, der mit $1=(aa')$ konjugiert ist für den Büschel $\beta\gamma\delta\varepsilon$. Zugleich ist l die Polare von 1 bezüglich $f(\xi\xi)$. Sind umgekehrt $\beta\gamma\delta\varepsilon aa'$ vier Punkte und zwei Geraden der Ebene in allgemeiner Lage, und ist die Gerade l, welche das Diagonaldreieck 234 von $\beta\gamma\delta\varepsilon$ zu einem Polarvierseit von aa' ergänzt, inzident mit dem Punkte $1'$, der zu 1 konjugiert ist für den Büschel $\beta\gamma\delta\varepsilon$, dann existiert ein Kegelschnitt $f(\xi\xi)$, der durch $\beta\gamma\delta\varepsilon$ hindurchgeht und aa' zu Tangenten hat. Zugleich ist l die Polare des Punktes $(a\,a')$ bezüglich $f(\xi\xi)$.

Läßt man in dem dualen Satze (über die vier Geraden $bcde$ und die beiden Punkte $\alpha\alpha'$) die beiden Punkte $\alpha\alpha'$ mit den imaginären Kreispunkten zusammenfallen, so ergibt sich: Ist $bcde$ ein Kreistangentenvierseit in allgemeiner Lage, dann ist der Höhenpunkt des Diagonaldreiecks inzident mit der Mittellinie von $bcde$ (Ort der Mittelpunkte aller Kegelschnitte der Schar $bcde$). Zugleich ist der Höhenpunkt der Mittelpunkt der Kreislinie, und umgekehrt.

Daraus folgt ferner: Weiß man von einem Polardreieck eines eigentlichen Kegelschnitts $\varphi(uu)$, daß sein Höhenpunkt λ mit dem Zentrum des Kegelschnitts identisch ist, so gilt das gleiche von jedem Polardreieck von φ, und $\varphi(uu)=0$ stellt eine Kreislinie dar. Zch.

N. SANKARA AIYAR. Question 17 250. Ed. Times (2) **23**, 34.

Wenn ein Kegelschnitt K einen andern Kegelschnitt K_1 doppelt berührt, so hat auch jeder zu K konfokale Kegelschnitt doppelte Berührung mit einem bestimmten, zu K_1 konfokalen Kegelschnitt, und die vier gemeinsamen Tangenten zu irgendeinem zu K konfokalen Kegelschnitt und zu irgendeinem zu K_1 konfokalen Kegelschnitt umhüllen einen Kreis. — Beweis von A. M. N e s - b i t t.

Gd.

H. PFAFF. Kegelschnittsysteme am vollständigen Vierseit. Progr. (Nr. 989) Herzogl. Gymnas. Helmstedt. 26 S.

Es handelt sich im wesentlichen um die Verallgemeinerung folgender Sätze: 1. Die vier den Dreiecken eines Vierseits umschriebenen Kreise schneiden sich in demselben Punkte; 2. die vier Kreise, welche die Dreiecke eines Vierseits zu Polardreiecken haben, bilden einen Büschel. Die Verallgemeinerung erstreckt sich auf Kegelschnitte und beruht auf derBemerkung, daß sich die Eigenschaften der auf geradlinige Figuren bezogenen Kreise und Kreissysteme auf Kegelschnitte übertragen lassen, wenn man die imaginären Kreispunkte durch ein beliebiges Punktepaar ersetzt und so die allen Kreisen gemeinsame unendlich ferne Sehne ins Endliche verlegt. Da man über das Punktepaar willkürlich verfügen kann, so ermöglicht die Ermittlung der im erweiterten Umfang gültigen Sätze und ihres analytischen Ausdrucks eine umfassende Diskussion der Rechnungsergebnisse und damit eine eingehende Prüfung der nach Gestalt und Lage variablen Kurven. Die Rechnung wird analytisch mittels trimetrischer Punktkoordinaten geführt und, soweit möglich, durch dualistische Deutung der Rechnungsergebnisse auch auf das Viereck übertragen.

Ba.

R. SOREAU. Nouvelle formule approchée de la longueur de l'ellipse. C. R. **156**, 1513-1515.

Die Formel ist

$$L = 4a\,\frac{k\pi}{\sin k\pi}, \text{ wo } k = \frac{b}{a+b};$$

sie ist für $\frac{b}{a} = 0$ und $= 1$ genau und hat bei $\frac{b}{a} =$ ungefähr $\frac{1}{5}$ den größten Fehler von etwa 0,003 (nach unten). Die Abweichungen am Anfang und am Ende des Intervalls von 0 bis 1 bleiben lange klein.

Noch günstiger, aber weniger einfach, ist die Wahl $k = \frac{b + 0{,}03a}{0{,}97\,b + 1{,}09\,a}$.

Schr.

C. HOFFMANN. Lösung zu 390 (F. M e t z n e r). Arch. der Math. u. Phys. (3) **20**, 275-276.

Ein Ellipsenpunkt P und der Schnittpunkt seiner Krümmungssehne mit der Verbindungslinie der orthogonalen Projektionen von P auf die Achsen der Kurve begrenzen den vierten Teil der Krümmungssehne. Hieraus ergibt sich folgende Konstruktion des Krümmungszentrums für den Ellipsenpunkt P:

Man ziehe PS derart, daß PS in bezug auf die Ordinate PP_1 symmetrisch zur Tangente in P liegt, mache auf PS die Strecke $PT = 2PS$ und bringe das Lot in T auf PT mit der Normale in P zum Schnitt. Gd.

R. F. Davis. Question 17 449. Ed. Times (2) **24**, 73-74.

Auf der großen Achse einer gegebenen Ellipse liegen zwei feste Punkte E, F in gleichem Abstande vom Mittelpunkt. Irgendein Punkt P auf der Ellipse wird mit E und F verbunden und PE, PF mit der Ellipse in Q, R zum Schnitt gebracht. Die Einhüllende von QR ist eine Ellipse mit derselben großen Achse, der Berührungspunkt von QR mit der Einhüllenden hat den gleichen Abstand wie der Punkt P von der kleinen Achse. — Lösungen von C. W. Adams und H. Riddell. Gd.

V. Ramaswami Aiyar. Question 11 403. Ed. Times (2) **23**, 29-30.

Es seien $u = 0$ und $v = 0$ zwei gegebene gleichseitige Hyperbeln. Berühren sich irgend zwei Kegelschnitte des Systems $au + bv + c = 0$, so liegt der Berührungspunkt auf einem festen Kreise; der Ort ihrer beiden Schnittpunkte ist eine dreispitzige Hypozykloide, und die geraden Linien des Systems sind Tangenten dieser Hypozykloide. — Geometrischer Beweis von M. T. Naraniengar. Gd.

W. Stegemann und C. Hoffmann. Lösung zu 444 (J. Neuberg). Arch. der Math. u. Phys. (3) **22**, 93.

Eine Gerade d ist auf zwei rechtwinklige Achsen Ox, Oy bezogen. Irgendein Punkt M von d projiziert sich auf Ox in P. Man suche die Einhüllende der gleichseitigen Hyperbel, deren Zentrum P ist, und die in M einen reellen Scheitel hat. Man löse dieselbe Aufgabe, wenn M das Zentrum und P ein Scheitel ist, oder wenn M und P die beiden reellen Scheitel sind. Gd.

W. Stegemann. Lösung zu 396 (W. Gaedecke). Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 89.

Die Leitlinien und Scheiteltangenten derjenigen Parabeln, die durch einen Punkt gehen und den Brennpunkt gemein haben, hüllen Kreise ein. Der Fußpunkt des von dem gemeinsamen Brennpunkt auf die Leitlinie gefällten Lotes und der Scheitel der Parabeln beschreiben Kardioiden. Ba.

W. Stegemann. Lösung zu 392 (C. Hoffmann). Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 88-89.

Gegeben seien zwei Parabeln $P \equiv y^2 - 2px = 0$ und $Q \equiv y^2 - 2q(x - a) = 0$. Dreht man die endliche von beiden Parabeln begrenzte Fläche um die x-Achse, so ist das erzeugte Volumen gleich der Hälfte des Zylinders über dem von der gemeinsamen Sehne beschriebenen Kreise mit der Höhe a. Wählt man

$a = \frac{225\,pq\,(q-p)}{128(3q-2p)^2}$, so wird bei der Rotation um die y-Achse von dieser Fläche dasselbe Volumen erzeugt. Ba.

O. Degel. Lösung zu 433 (E. N. Barisien). Arch. der Math. u. Phys. (3) **22**, 87-88.

Der Neunpunktekreis desjenigen Dreiecks, das von drei Parabeltangenten gebildet wird, geht durch den Scheitel der Parabel, wenn die Normalen in den Berührungspunkten der Tangenten in einen Punkt zusammenlaufen. Gd.

O. Degel. Lösung zu 441 (W. Gaedecke). Arch. der Math. u. Phys. (3) **22**, 89-90.

Die Normale in einem Punkte $M \equiv a\cos\varphi, b\sin\varphi$ einer Ellipse schneidet die Achsen in P und Q. Die Fußpunkte R, S, T der drei übrigen Normalen, die von der Mitte von PQ an die Ellipse gezogen werden können, besitzen die exzentrischen Anomalien $\frac{1}{3}(\pi-\varphi)$, $\frac{1}{3}(3\pi-\varphi)$, $\frac{1}{3}(5\pi-\varphi)$. Das Dreieck RST ist ein größtes der Ellipse einbeschriebenes Dreieck. Gd.

O. Degel. Lösung zu 391 (J. Neuberg). Arch. der Math. u. Phys. (3) **20**, 276-277.

Gegeben eine Parabel. Man betrachte die Sehnen $M_0M_1, M_1M_2, M_2M_3, \ldots, M_{n-1}M_n$, von denen jede in ihrem ersten Endpunkt normal zur Parabel verläuft. Zu beweisen, daß einem gegebenen Punkt M_n entsprechen 2^n Punkte M_0, deren Ordinatensumme gleich der Ordinate von M_n ist, multipliziert mit $(-1)^n$; das Produkt der Ordinaten der Punkte M_0 ist konstant. Gd.

W. F. Beard. Question 17 319. Ed. Times (2) **23**, 92.

Es seien TP, TQ zwei Tangenten einer Parabel. Dreht sich PQ um einen festen Punkt, so durchläuft der Umkreismittelpunkt des Dreiecks TPQ eine andere Parabel. — Geometrischer Beweis von R. F. Davis und dem Aufgabensteller, analytischer Beweis von C. W. Adams und C. M. Roß. Gd.

N. Sankara Aiyar. Question 17 231. Ed. Times (2) **23**, 56-57.

Die drei Tangenten in den Punkten L, M, N einer Parabel bilden ein gleichseitiges Dreieck. Der Brennpunkt dieser Parabel liegt auf derjenigen Ellipse, welche die Seiten des Dreiecks LMN in ihren Mitten berührt. — Beweise von C. E. Youngman, R. F. Davis und A. M. Nesbitt. Gd.

M. T. Naraniengar. Question 17 232. Ed. Times (2) **24**, 33-34.

Die Normale im Punkte P einer Parabel mit dem Scheitel A schneide diese Kurve in Q, und die Normale im Punkte Q schneide die Achse in G. Die vier Punkte A, P, Q, G liegen auf einem Kreise. — Geometrischer und analytischer Beweis von R. Srinivasan, R. F. Davis und C. M. Ross. Gd.

C. M. Ross. Question 17 256. Ed. Times (2) **24**, 68-69.

Ein Rad vom Radius r dreht sich um seinen festen Mittelpunkt in einer vertikalen Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{2gh}/r$, wobei von seinem Rande Wassertropfen fortgeschleudert werden. Der Ort der Wassertropfen hüllt eine Parabel mit vertikaler Achse ein, deren Brennpunkt um $r^2/4h$ vom Mittelpunkte des Rades entfernt ist. — Lösungen von R. Srinivasan und vom Aufgabensteller. Gd.

R. Dontot. Transformation d'une propriété tangentielle en propriété métrique. Revue de Math. spéc. **23**, 137-138.

Folgerungen aus der Polargleichung der Kegelschnitte. Sk.

R. Weitzenböck. Zur Elementargeometrie eines Kegelschnittes. Tôhoku Math. J. **3**, 67-78.

„In dieser Arbeit zeigen wir . . ., daß die gewöhnlich nur in der projektiven Geometrie von algebraischen Kurven verwendete symbolische Darstellung auch in der Elementargeometrie vorteilhaft gebraucht werden kann.“ Die für einen irreduziblen Kegelschnitt F zu einem Punkte z gehörige apollonische Hyperbel. Die Fußpunktkurve. Die Evolute in Punkt- und in Linienkoordinaten. B.

T. Kubota. On the extended Ptolemy's theorem in hyperbolic geometry. Tôhoku Sc. Rep. **1**, 131-156

Werden vier Kreise von einem fünften berührt, so ist $t_{12}\,t_{34} + t_{23}\,t_{14} = t_{13}\,t_{24}$, wo t_{ik} die gemeinsame Tangente des i-ten und k-ten Kreises bedeutet (Casey, Dublin Proc. 1866). Der Satz wird auf die hyperbolische Geometrie übertragen; an Stelle von t_{ik} tritt dann sinh $\frac{t_{ik}}{2}$. — Elegante Handhabung des analytischen Apparates. B.

Balitrand. Un théorème sur la développée de l'ellipse. Assoc. Franç. (Tunis) **42**, 23-25.

Zieht man von einem Punkte der Ellipse $a^2 x^2 + b^2 y^2 = c^4$ die vier Normalen an die Ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, so liegen die vier Krümmungsmittel-

punkte der vier Fußpunkte der Normalen in einer Geraden, die Tangente zu der Evolute der letzteren Ellipse, also Normale der Ellipse ist. Lp.

Weitere Literatur.

BALITRAND. Construction du centre de courbure de l'ellipse et de la développée de l'ellipse. Assoc. Franç. (Tunis) **42**, 22-23.

E. N. BARISIEN. Sur deux ellipses, dérivées du cercle de Joachimsthal. Assoc. Franç. (Tunis) **42**, 25-28.

C. A. CIKOT. Het punt van Fagnano op de ellips. Wisk. Tijdschr **9**, 103-106, 141-143.

Zusammenstellung der Eigenschaften desjenigen Punktes einer Ellipse, dessen Tangente, zwischen den Hauptachsen gemessen, ein Extrem ist. Schn.

W. SIERPIŃSKI. O pewnej własności paraboli. (Über eine Eigenschaft der Parabel). Wektor **1**, 20-22 (1912).

P. U. WILDHABER. Zur projektivischen Dreiecksgeometrie in sphärischen Koordinaten. Diss. Freiburg (Schweiz). 61 S. 8°.

D. Andere spezielle Kurven.

L. MOHRMANN. Über den Büschel von ebenen Kurven dritter Ordnung mit neun reellen Grundpunkten. Math. Ann. **74**, 319-340.

Der Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, den allgemeinen Büschel von ebenen Kurven dritter Ordnung mit neun reellen Grundpunkten hinsichtlich der Art und der Realität seiner rationalen Kurven zu studieren. Es ergibt sich, daß nur sechs in diesem Sinne voneinander verschiedene Typen allgemeiner C_3-Büschel existieren, nämlich so viele, wie Kombinationen zu zweien mit Wiederholung der Wörter hyperbolisch, parabolisch, elliptisch. Der doppelt hyperbolische Büschel enthält die Maximalzahl 2 von Kurven mit isoliertem Doppelpunkt. Es gibt mithin (zweifach unendlich viele) Paare von Kurven dritter Ordnung, deren unpaare Züge dieselben neun (reellen) Punkte miteinander gemein haben, und deren Ovale einander ausschließen; aber es gibt kein Tripel solcher Kurven.

Es ist zu vermerken, daß es Paare von allgemeinen C_3-Büscheln mit neun reellen Grundpunkten und der gleichen Anzahl und Art der reellen rationalen Kurven geht, die durch stetige reelle Variation der Grundpunkte nicht anders ineinander übergeführt werden können, als daß im Verlaufe des Variationsprozesses mindestens einmal drei Grundpunkte des variierten Büschels auf einer Geraden liegen. Dabei können die Grundpunkte der Büschel ein und demselben Zuge ein und derselben (irreduziblen) Kurve (dritter Ordnung) angehören. In solchen Büscheln sind die Grundpunkte in verschiedener Weise auf die paaren Teile der schleifenförmigen Kurven verteilt. Betrachtet man den allgemeinen C_3-Büschel aus diesem Gesichtspunkte, so wächst die Anzahl der Typen beträchtlich.

Die Verteilung der Grundpunkte eines allgemeinen C_3-Büschels auf die paaren Teile seiner schleifenförmigen Kurven ist im letzten Paragraphen studiert.

Hierbei ergibt sich unter anderem die merkwürdige Tatsache, daß jeder allgemeine C_3-Büschel mit neun reellen Basispunkten (mindestens) ein Kontinuum zweiteiliger Kurven enthält, deren paare Züge vier Grundpunkte tragen, was für keine andere Anzahl (0 eingeschlossen) gilt.

Nach dieser der Einleitung entnommenen Übersicht lassen wir die Überschriften der Teile folgen.

§ 1. Einige allgemeine Sätze über den Büschel von ebenen Kurven dritter Ordnung (C_3-Büschel). § 2. Die stetigen reellen Variationen der Grundpunkte eines C_3-Büschels. I. Variationen. 1. Gattung 1. und 2. Art. II. Variationen. 2. Gattung 1. und 2. Art. III. Variationen 3. Gattung. § 3. Eine besondere Art spezieller C_3-Büschel. § 4. Die möglichen Typen der allgemeinen C_3-Büschel mit neun reellen Grundpunkten hinsichtlich der Realität und Art ihrer rationalen Kurven. § 5. Die Verteilung der Grundpunkte eines allgemeinen C_3-Büschels mit neun reellen Grundpunkten auf die paaren Züge der in ihnen enthaltenen zweiteiligen Kurven. I. Bestimmung der Maximalzahl 2 der Kontinuen zweiteiliger Kurven, deren paare Züge 2, 4 oder 6 Grundpunkte tragen. II. Die Nichtexistenz eines Büschels mit zwei Kontinuen zweiteiliger Kurven, auf deren Ovalen acht Grundpunkte liegen. Lp.

B. Hostinský. Sur les hessiennes successives d'une courbe du troisième degré. Proc. 5. Intern. Math. Congr. 2, 102-104.

Die Gleichung der Kurve sei

$$H_0 \equiv x^3 + y^3 + z^3 + 6\,mxyz = 0.$$

Man bilde

$$H_k = \frac{1}{6}\frac{D\left(\frac{\partial H_{k-1}}{\partial x}, \frac{\partial H_{k-1}}{\partial y}, \frac{\partial H_{k-1}}{\partial z}\right)}{D(x, y, z)}$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Die Kurven $H_0, H_1, \ldots, H_{n-1}, H_n, \ldots$ bilden eine Folge Hesse scher Kurven. Der Verf. untersucht die Frage, unter welcher Bedingung diese Folge periodisch ist, und beantwortet sie für $n = 1, 2, 3, 4$. Lp.

J. A. Nyberg. Projective differential geometry of rational cubic curves. American J. 35, 453-464.

Von einer durch ihre Gleichung in kartesischen Koordinaten gegebenen ebenen Kurve dritter Ordnung werden die Differentialgleichung dritter Ordnung aufgestellt, die semikovarianten Kurven C_x und C_ϱ bestimmt, ebenso die Gleichung des Schmiegungskegelschnittes und der Ort seines Mittelpunktes; endlich wird der Ort der Halphen schen Punkte gefunden. Die Arbeit stellt eine Anwendung der von Wilczynski in dem Buche „Projective differential geometry of curves and ruled surfaces" (F. d. M. 37, 620, 1906) entwickelten Prinzipien dar. Sk.

K. Ogura. Invariant cubics for isogonal transformation in the geometry of the triangle. Tôhoku Math. J. 4, 132-137.

Das Koordinatendreieck $\varDelta(A_1 A_2 A_3)$ sei das Fundamentaldreieck der

isogonalen Verwandtschaft $T: x_1' : x_2' : x_3' = x_2 x_3 : x_1 x_3 : x_1 x_2$, wo die x Normalkoordinaten sind.

Soll eine Kurve dritter Ordnung $C_3 : \sum o_{ikl} x_i x_k x_l = 0$ vermöge T in eine C_3' übergehen, so muß C_3 entweder durch die drei Ecken von Δ gehen, oder aber in einer Ecke von Δ einen Doppelpunkt besitzen und noch eine zweite Ecke enthalten. Es wird hier der erstere Fall behandelt, so daß $a_{111} = a_{222} = a_{333} = 0$, und zugleich verlangt, daß die C_3 vermöge T in sich übergeht.

Dazu ist notwendig und hinreichend, daß

$$(1) \qquad \frac{a_{112}}{a_{233}} = \frac{a_{113}}{a_{223}} = \frac{a_{122}}{a_{133}} = \frac{a_{223}}{a_{113}} = \frac{a_{133}}{a_{122}} = \frac{a_{233}}{a_{112}} = \frac{a_{123}}{a_{123}} = K (K \neq 0).$$

Somit ist entweder:

$$(A) \qquad a_{112} = a_{233},\; a_{113} = a_{223},\; a_{122} = a_{133},$$

oder aber:

$$(B) \qquad a_{112} = -a_{233},\; a_{113} = -a_{233},\; a_{122} = -a_{133},\; a_{123} = 0.$$

Im Falle (B) wird die invariante C_3 von der Netzform:

$$(B') \qquad \lambda_1 x_1(x_2^2 - x_3^2) + \lambda_2 x_2(x_3^2 - x_1^2) + \lambda_3 x_3(x_1^2 - x_2^2) = 0,$$

geht also (durch die Ecken von Δ und) durch die Mittelpunkte I, I_1, I_2, I_3 der vier Inkreise und umgekehrt. Ferner geht die C_3 durch den Punkt $P(\lambda)$ sowie seinen Bildpunkt $P'\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, und das gleiche gilt von der andern C_3, die aus (B′) durch Vertauschung der λ_i mit den $\frac{1}{\lambda_i}$ hervorgeht. Legt man den λ_i feste Werte α_i bei, so stellt die Gleichung bei willkürlichem μ:

$$(2) \qquad \sum \left(\alpha_i + \frac{\mu}{\alpha_i}\right) x_i (x_k^2 - x_l^2) = 0$$

einen C_3-Büschel durch $A_1, A_2, A_3, I, I_1, I_2, I_3, P(\alpha), P'\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ dar, also von der besonderen Art, daß er die vier Ecken und die drei Diagonalpunkte eines vollständigen Vierecks enthält.

Sodann wird der Fall (A) behandelt. Die invariante C_3 läßt die Darstellung zu:

$$(3) \qquad \beta_1 x_1(x_2^2 + x_3^2) + \cdots + \beta_4 x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Die C_3 trifft die Seiten von Δ in drei Restpunkten M_i, die auf der Geraden (4) $\sum \frac{x_i}{\beta_i} = 0$ liegen. Deren isogonales Bild, der Kegelschnitt (5) $\sum \frac{x_k x_l}{\beta_i} = 0$, hat mit der C_3 in den Ecken von Δ die gemeinsamen Tangenten $\beta_i x_i + \beta_k x_k = 0$. Umgekehrt läßt sich eine C_3 mit diesen Eigenschaften auf die Form (3) bringen. Im besonderen kann man zwei der Ecken A_1, A_2 von Δ in die beiden Kreispunkte K_1, K_2 auf g_∞ fallen lassen.

Die C_3 wird dann zu einer anallagmatischen, d. h. sie geht durch Inversion mit dem Zentrum A_3 in sich über. Danach läßt sich die Gleichung einer reellen anallagmatischen C_3 sofort hinschreiben.

Ein entsprechender Satz gilt, wenn man die Inversion noch zusammensetzt mit einer Spiegelung am Zentrum A_3. My.

W. P. Milne. A system of nonagons nonuply in perspective. Edinb. M. S. Proc. 31, 90-93.

Der Verf. betrachtet die kubische Kurve C, ihre Hessesche C', ihre Cayleysche Γ und die Hessesche ihrer Cayleyschen Γ'. Dann schneidet $C + \lambda C'$ den Büschel $\Gamma + \mu' \Gamma'$ in zwei Neunecken von neunfacher Perspektivität, deren Mittelpunkte die neun Wendepunkte sind. (Rev. sem. 22_1, 69). Lp.

F. G. Teixeira. Pequenas notas sobre a geometria das curvas especiaes. Ann. sc. Ac. Pol. Porto 8, 121-124.

1. Der orthoptische Ort der semikubischen Parabel ist eine Parabel zweiter Ordnung. 2. Bemerkungen über die Kurve mit der Polargleichung $r^3 = a^3 \cos \varphi$. 3. Bemerkungen über die durch die Gleichung

$$y^m \int_0^x y \, dx \sqrt{1 + y'^2} = c$$

definierten (Ribaucourschen) Kurven. Lp.

M. d'Ocagne. Sur la construction des tangentes à une classe de cubiques unicursales. Ann. sc. Ac. Pol. Porto 8, 65-67.

Es handelt sich um die von Teixeira in derselben Zeitschrift 7, 180-189 konstruierten Kurven (F. d. M. 43, 672, 1912). Für sie wird eine einfache Tangentenkonstruktion entwickelt. Lp.

F. Wlodarski. Przyczynek do teoryi krzywych kołowych jadnobieżnych rzędu trzeciego (Ein Beitrag zur Theorie der zirkularen Unikursalkurven dritter Ordnung). Wektor 3, 164-167.

Eine zirkulare Unikursalkurve dritter Ordnung heißt Fokalkurve, wenn der singuläre Brennpunkt der Kurve, das heißt der Schnittpunkt der Tangenten der beiden imaginären Kreispunkte, auf der Kurve selbst liegt. Eine zirkulare Unikursalkurve dritter Ordnung kann auf folgende Weise entstanden gedacht werden. Es seien A, B, C drei Punkte in der Ebene; dann ist die Kurve der Ort derjenigen Punkte P, die die Eigenschaft haben, daß $\overline{PC}$ mit seiner Senkrechten in bezug auf $\overline{PA}$ und $\overline{PB}$ das konstante Doppelverhältnis g haben. Wird C zum Ursprung der Koordinatenachsen gewählt, und werden die zueinander senkrechten Achsen entsprechend angenommen, dann läßt sich die Gleichung der Kurve in der Form schreiben:

$$(x^2 + y^2)(\alpha x + \beta y) + \gamma x^2 + \delta y^2 = 0.$$

Die Kurve ist eine Fokalkurve, wenn $\gamma = -\delta$ ist. Es ist dann $g = -1$.
A. R.

T. Ono. Sur une courbe du troisième ordre. Tôhoku Math. J. **4**, 33-46.

Es seien O der Ursprung des rechtwinkligen Koordinatensystems, U und V zwei Punkte auf der Abszissenachse ($OU = a > 0$, $OV = b < 0$ und $a > |b|$). Der Ort des Punktes P, für den die Entfernung PO mittlere Proportionale zu den Abständen PU und PV ist, ist die Kurve dritter Ordnung

$$(x^2 + y^2)[2(a + b)x - a^2 - b^2] - 4abx^2 + 2ab(a + b)x - a^2 b^2 = 0$$

Diese zirkulare Kubik wird näher diskutiert. Gd.

L. Braude. Sur quelques propriétés des cubiques et des quartiques unicursales. Batt. G. **51** [(4) **3**], 246-252.

I. Die Tangente im Punkte P_1 einer C_3 schneidet die Kurve noch in P_2; welches ist der Ort des Punktes P_3, der $P_1 P_2$ in konstantem Verhältnis teilt? II. Die Tangente im Punkte P_1 einer C_4 schneidet die Kurve noch in P_2 und P_3. Ort des Punktes P_1 der $P_2 P_3$ in konstantem Verhältnis teilt. Die Aufgaben werden für einzelne besonders interessierende Beispiele gelöst. Sk.

Z. E. Wear. Self-dual rational quartics. Johns Hopkins Univ. Circ. 1913, Nr. 7, 51-55

Eine rationale Kurve n-ter Ordnung R_n mit d Doppelpunkten und c Spitzen ist zu sich selbst dual unter der Bedingung $2d + 3c = n(n-2)$, also für $n = 4$: $2d + 3c = 8$. Dies läßt zwei Lösungen zu: (I) $d = 1$, $c = 2$, (II) $d = 4$, $c = 0$. Der Fall (I) liefert die Pascal sche Schnecke, der Fall (II) zwei Kegelschnitte.

Beide Fälle werden im einzelnen durchgerechnet.

Die Schnecke ist mittels eines Parameters t darstellbar durch:

(I) $x_0 = 2t^2 + \alpha t^2 (1 - t^2)$, $x_1 = 2t^2 + \alpha (1 - t^2)$, $x_2 = (1 + \alpha) t + (1 - \alpha) t^3$;

hier lassen sich die Parameter des Doppelpunktes, der beiden Spitzen, der Berührungspunkte der Doppeltangente und der beiden Wendepunkte leicht ableiten. Die Spitzen und Wendepunkte lassen sich beim Übergange zur selbstdualen Kurve noch auf zwei Arten vertauschen. Dementsprechend gibt es zwei Polaritäten, die irgendeinen Punkt der Schnecke in eine Tangente transformieren. Anderseits geht die Kurve durch Spiegelung an ihrer Achse in sich über. Durch Zusammensetzung ergibt sich eine Gruppe G_4 von projektiven Transformationen, die die Kurve ungeändert lassen.

Im Falle zweier Kegelschnitte k_1, k_2 kann man deren Gleichungen in der kanonischen Gestalt ansetzen: $\sum \alpha_i x_i^2 = 0$, $\sum \beta_i x_i^2 = 0$. Es lassen sich dann die Spiegelungen und Kollineationen angeben, die die vier Schnittpunkte oder die vier gemeinsamen Tangenten in sich überführen, durch deren Zusammensetzung eine G_{24} entsteht. Überdies existieren vier Polaritäten, die beide Kegelschnitte vertauschen.

Hieraus läßt sich ableiten, daß die Figur der beiden Kegelschnitte durch eine G_{16} von Korrelationen und Kollineationen in sich übergeht, die eine G_8 von Kollineationen als Untergruppe enthält. My.

H. Bateman. The double tangents of a binodal quartic. American J. **35**, 57-78.

Der Verf. weist darauf hin, daß bei der Abzählung der Bestimmungsstücke einer Kurve C_n zu überlegen ist, ob die Bedingungen mit den Eigenschaften einer C_n vereinbar sind, ob sie voneinander unabhängig sind, ob eine nicht ausgeartete C_n existiert, die den gegebenen Bedingungen genügt. Durch Untersuchung der Zusammenhänge zwischen den Doppeltangenten und den beiden Doppelpunkten einer Kurve vierter Ordnung, die zwei Doppelpunkte besitzt, kommt er unter anderem zu folgenden Ergebnissen:

Wenn vier Doppeltangenten und ein Doppelpunkt einer C_4 mit 2 Doppelpunkten gegeben sind, so kann der andere Doppelpunkt dann willkürlich gewählt werden, wenn die Doppeltangenten so beschaffen sind, daß ein Kegelschnitt durch die Berührungspunkte von dreien von ihnen geht und nicht durch die Berührungspunkte der vierten (in welchem Falle die drei Doppeltangenten nach Frobenius syzygetisch heißen. J. für Math. **99**, 290, 1885). Vgl. auch M. Long, Lond. M. S. Proc. (2) **9**, 205-230; F. d. M. **42**, 569, 1911). — Wenn die Berührungspunkte der Doppeltangenten auf einem Kegelschnitt liegen, kann der zweite Doppelpunkt nicht beliebig gewählt werden; er muß auf einem von drei Kegelschnitten liegen. Wenn der Doppelpunkt in passender Weise gewählt worden ist, so gibt es ∞^1 Kurven vierter Ordnung mit den gegebenen Doppelpunkten und Doppeltangenten. — Wenn die Doppeltangenten so geartet sind, daß keine drei von ihnen syzygetisch sind („azygetisch" nach Frobenius), so kann der zweite Doppelpunkt nicht beliebig gewählt werden, und wenn die Doppelpunkte passend gewählt worden sind, so gibt es ∞^1 Kurven vierter Ordnung, die den gegebenen Bedingungen genügen. Lp.

A. Myller. Sur les quartiques tacnodales. Bull. de l'Ac. Roumaine **1**, 136-140.

Der Selbstberührungspunkt liege im Unendlichen in der Richtung der x-Achse, die Gerade im Unendlichen sei die Tangente der Kurve in diesem Punkte, so ist die Gleichung der Kurve:

$$(y^2 - 2px)^2 + Ax^2 + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Hieraus ergibt sich der Satz: Die Kurve vierter Ordnung mit einem Selbstberührungspunkte kann auf drei verschiedene Arten als Einhüllende einer Schar von Parabeln mit gleicher Durchmesserrichtung angesehen werden, die zwei zu den Durchmessern feste Geraden so schneiden, daß die Tangenten in den Schnittpunkten durch einen festen, von den Geraden gleich weit abstehenden Punkt gehen, während die Berührungssehne Tangente an einem festen Kegelschnitt bleibt. Andere Eigenschaften werden ebenfalls noch abgeleitet. Lp.

J. Lemaire. Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. Nouv. Ann. (4) **13**, 49-81, 113-136.

Eine Monographie über die dreispitzige Hypozykloide. Auf elementare Weise werden neue Eigenschaften dieser Kurve entwickelt und von bekannten Eigenschaften diejenigen berücksichtigt, deren Beweis neu ist. Gd.

R. Goohmaghtigh. Sur les ellipses tritangentes à l'hypocycloïde à trois rebroussements. Nouv. Ann. (4) **13**, 442-445.

In der voranstehenden Abhandlung waren die eine dreispitzige Hypozykloide dreifach berührenden Ellipsen auf den letzten 10 Seiten betrachtet worden. Verf. dieser Abhandlung fügt andere Eigenschaften dieser Ellipsen hinzu. Gd.

M. T. Naraniengar. The three-cusped hypocycloid and its spherical analogue. Indian Math. Soc. **5**, 82-89.

Herleitung einiger Eigenschaften der dreispitzigen Hypozykloide (in Dreieckskoordinaten), die sich zum Teil auf die Kugel ausdehnen lassen. Gd.

O. Degel und E. N. Barisien. Lösung zu 431 (E. N. Barisien). Arch. der Math. u. Phys. (3) **22**, 84-86.

Der Ort des Mittelpunktes der Kreise, welche durch einen Scheitel einer Ellipse gehen und diese Ellipse berühren, ist eine rationale Kurve vierter Ordnung, die zur dreispitzigen Hypozykloide affin ist. Ihre Fläche ist gleich dem dritten Teil der Fläche der Ellipsenevolute. Gd.

F. G. Teixeira. Sur une propriété de la lemniscate de Bernoulli. Rom. Acc. P. d. N. L. Atti **65**, 61-65.

Ein durch den Doppelpunkt der Kurve gehender Kreis schneide sie in zwei reellen Punkten. Diese beiden Punkte durchlaufen gleiche Bogen, wenn der Mittelpunkt des Kreises einen Kegelschnitt durchläuft, der die Brennpunkte der Lemniskate zu Brennpunkten hat. Diese Kegelschnitte sind die einzigen Kurven mit der erwähnten Eigenschaft. Lp.

W. Stegemann. Lösung zu 442 (J. Neuberg). Arch. der Math. u. Phys. (3) **22**, 91.

Die orthogonalen Trajektorien der Diokles schen Zissoiden, welche einen gemeinschaftlichen Rückkehrpunkt mit derselben Tangente besitzen, sind die Booth schen Lemniskaten

$$(x^2 + y^2)^2 = c^2(2x^2 + y^2).$$ Gd.

C. E. Youngman. Question 17 425. Ed. Times (2) **24**, 43.

Irgendein Kreis, der durch zwei gewisse auf der Achse einer Pascalschen Schnecke gelegenen Punkte geht, schneidet diese Kurve in vier Punkten, deren Normalen durch einen Punkt gehen. — Beweis von P. T. Stephenson. Gd.

B. J. Stofberg. Iets omtrent ovalen van Descartes en de brandlijn van den cirkel (Etwas über die Ovale von Descartes und die Brennlinie des Kreises).

In Anlehnung an eine in Chasles' „Aperçu historique des méthodes en géométrie", wo die Reflexion und Refraktion an einem Kreise behandelt wird, hat der Verf. allgemeine Gleichungen sowohl für die Reflexion, als für die Refraktion aufgestellt. Schn.

T. Ono. Sur une courbe du quatrième ordre. Tokyo Math. Ges. (2) **7**, 199-207.

Der Ort der Spitze P des gleichseitigen Dreiecks, welches über einer Sehne BC eines gegebenen Kreises mit dem Mittelpunkte O und dem Radius r errichtet ist, ist eine Kurve vierter Ordnung, wenn die Sehne sich um einen festen Punkt A dreht. Wird die X-Achse durch die Punkte O und A gelegt und $OA = a$ gesetzt, so ist die Polargleichung des Ortes von P:

$$\varrho = a \cos \theta + \sqrt{3} \sqrt{r^2 - a^2 \cos^2 \theta}.$$

Diese bizirkulare Quartik wird näher diskutiert. Es ergeben sich nun verschiedene Formen der Kurve, je nach der Lage des Punktes A auf der X-Achse. Gd.

E. L. Scott. Question 71 358. Ed. Times (2) **24**, 60-61.

PQ ist eine Sehne eines Kreises, die durch einen festen Punkt O geht. Zwei Kreise mit gleichen Radien berühren sich und den gegebenen Kreis bzw. in P und Q. Der Ort ihres gegenseitigen Berührungspunktes ist eine zirkulare Kurve dritter Ordnung. — Lösungen von C. E. Youngman und F. Phillips. Gd.

É. Turrière. Sulla curva di Gutschoven e varie curve ad essa connesse. Perodico di Mat. **28** [(3) **10**], 224-230.

Es handelt sich um die Kurve, die als Kappakurve bekannt ist, und die die Gleichungen $r = a \operatorname{tg} \varphi$, $x^2(x^2 + y^2) = a^2 y^2$ hat. Durch die Transformation $Y = y, X = -\frac{y^2}{x}$ geht die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = a^2$ in $y^2(y^2 + x^2) = a^2 x^2$ über. Diese Transformation wird geometrisch so definiert. Ein rechter Winkel dreht sich um seinen im Nullpunkt der Koordinaten liegenden Scheitel; der eine Schenkel geht durch einen Kurvenpunkt A, und der andere Schenkel schneidet die durch A gelegte Parallele zu Ox im transformierten Punkte A'.

Für Kurven, die so zusammenhängen, besteht eine einfache Beziehung zwischen den Tangenten. In Anknüpfung an eine von Loria behandelte Erzeugung der Kappakurve werden dann die Kurven herangezogen, die als Berührungspunkte der Tangenten entstehen, die man vom Ursprung der Koordinaten an alle über den Ordinaten einer Kurve als Durchmessern beschriebenen Kreise zieht. In ähnlicher Weise werden noch mehrere Erzeugungsweisen neuer Kurven lose mit der Kappakurve in Verbindung gebracht. Lp.

V. Jeřábek. Über die Kampyle von Eudoxos. Časopis **42**, 28-32. (Böhmisch.)

Die Kampyle von Eudoxos kann man darstellen als einen Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung. Pe.

B. Sporer. Über eine besondere Gruppe von Kurven des vierten Grades. Math. naturw. Mitt. (2) **15**, 2-5.

Der Ort der Mittelpunkte aller Kegelschnitte, die einem Dreieck ABC umgeschrieben sind, und deren Asymptoten einen gegebenen Winkel δ einschließen, ist eine Kurve vierten Grades. Sk.

R. Goormaghtigh. Sur la conchoïde de Külp. Nouv. Ann (4) **13**, 193-198.

Die Entstehungsweise der Külpschen Konchoide (vgl. Loria, Spez. ebene Kurven **1**, 200) ist folgende: Gegeben ein Kreis C mit dem Mittelpunkte O und dem Radius a, ferner die Tangente AT im Endpunkte A des Durchmessers AA' dieses Kreises. Ein variabler Radius trifft C in P und AT in N. Die durch P und N bzw. zu AT und OA gezogenen Parallelen schneiden sich in einem Punkte M der Külpschen Konchoide. Aus ihrer Gleichung $x^2 y^2 = a^2(a^2 - x^2)$ ergibt sich, daß sie die Projektion auf die xy-Ebene der Schnittkurve des Rotationszylinders $x^2 + z^2 = a^2$ und des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids $xy = az$ ist. Es gelten folgende zwei Tangentenkonstruktionen der Kurve: 1. Man projiziere M in α und β auf Ox und Oy, die Kreistangente in P schneidet OA in R. Der Schnittpunkt von $\alpha\beta$ mit der durch R zu Oy gezogenen Parallelen ist ein Punkt der Tangente im Kurvenpunkte M. 2. Das von A' auf OP gefällte Lot trifft Oy in D, und die Gerade MD schneidet OA in E. Der zu E in bezug auf α symmetrische Punkt ist ein Punkt der Tangente in M. Die Kurve läßt sich noch auf andere Weise erzeugen: Man betrachte die Tangente $A'T'$ in einem festen Punkte A' eines Kreises C und eine Sehne PP', die sich parallel zu $A'T'$ verschiebt. Die Külpsche Konchoide ist der Ort der Schnittpunkte der Sehne PP' mit der Geraden, welche die Projektionen von P' auf $A'T'$ und $A'P$ verbindet. Im zweiten Teile der Arbeit wird die verallgemeinerte Külpsche Konchoide $x^2 y^2 = b^2(a^2 - x^2)$ betrachtet, auf welche die obige erste Tangentenkonstruktion anwendbar ist. Diese Kurve läßt sich folgendermaßen konstruieren: Gegeben eine feste Sehne BF eines Kreises C und eine Sehne PP', die

sich parallel zu BF verschiebt. Der Schnittpunkt von PP' mit der Simsonschen Geraden des Punktes P' in bezug auf das Dreieck BFP ist ein Punkt der Kurve. Zu bemerken ist noch, daß diese Simsonsche Gerade eine vierspitzige Hypozykloide einhüllt.

Gd.

E. Ciani. Le quintiche piane autoprojettive. Palermo Rend. **36**, 58-78.

Die Aufgabe, alle autoprojektiven algebraischen ebenen Kurven C_n der Ordnung n aufzustellen, d. h. solche, die gegenüber den Kollineationen der Ebene invariant sind, ist bisher nur für die Kurven bis zur Ordnung 4 einschließlich völlig gelöst worden.

Gewisse Fälle von C_5 sind von Snyder (F. d. M. **39**, 648, 1908) untersucht. Um ein vollständiges System der in Rede stehenden C_5 zu erhalten, bedient sich der Verf. hauptsächlich einer gewissen kubischen Kovariante, indem die Aufgabe auf die bekannte zurückgeführt wird, alle Kollineationen zu finden, die eine C_3 in sich überführen.

Man darf sich auf den Fall beschränken, daß die C_5 irreduzibel ist und die gesuchte autoprojektive Kollineation C eine periodische. Wir heben einige bemerkenswerte Typen heraus. Bei den binomischen C_5 bieten sich zwei Typen dar: $z^5 + x^4 y = 0$, und $z^5 + x^3 y^2 = 0$. Die C muß von der Gestalt $\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^k y z \\ x & y z \end{pmatrix}$ sein, wo k eine ν-te primitive Einheitswurzel ist, unter ν die Periode von C verstanden; bei der ersteren Kurve muß $k = \nu - 4$ sein, bei der letzteren $k = \frac{1}{2}(\nu - 3)$, also ν ungerade. Da im übrigen ν beliebig ist, kann man sagen, daß eine binomische C_5 stets autoprojektiv ist.

Sodann werden die „homologen“ C_5 untersucht, für die die C eine Homologie $\begin{pmatrix} x\, y\, \alpha z \\ x\, y\, z \end{pmatrix}$ ist.

Man erhält 4 Typen, entsprechend den Werten $\nu = 2, 3, 4, 5$.

Sodann kommen die Fälle in Betracht, wo ν eine Potenz von 2 ist: man hat zwei Typen von C_5, entsprechend den Werten $\nu = 4, 8$. Soll ν gleich 3 oder einer Potenz von 3 sein, so ergeben sich zwei Typen, entsprechend $\nu = 3, 9$. Nunmehr werden die Fälle $\nu = 2^m . 3^n$, $\nu = 5^m . 2^n . 3^p$ untersucht, die eine Reihe neuer Typen liefern, und es wird nachgewiesen, daß andere Werte von ν nicht existieren, außer den Primzahlwerten $\nu = 7, 11, 13$. Durch Zusammenfassung ergibt sich, daß die möglichen Werte für die Periode ν die folgenden sind: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 20.

Der nächste Abschnitt bringt die den einzelnen Fällen von ν korrespondierenden Kollineationsgruppen.

Zum Schluß werden die verschiedenen Arten von autoprojektiven C_5 nebst den zugehörigen Kollineationsgruppen in einer übersichtlichen Tabelle vereinigt. Im ganzen sind es 30 verschiedene Arten von C_5, womit die Snydersche Tabelle erweitert und zugleich vervollständigt ist.

My.

K. Rohn. Die Maximalzahl und Anordnung der Ovale bei der ebenen Kurve sechster Ordnung und bei der Fläche vierter Ordnung. Math. Ann. **73**, 177-229.

Die Arbeit behandelt zwei miteinander in engem Zusammenhang stehende gestaltliche Fragen. Eine Fläche vierter Ordnung mit einem Knoten besitzt, wenn sie aus diesem projiziert wird, als scheinbaren Umriß eine Kurve sechster Ordnung mit Berührungskegelschnitt. Auch die Projektion der Schnittkurve achter Ordnung, in der die Fläche von einer ihren Knotenpunkt enthaltenden Quadrik geschnitten wird, liefert eine Kurve sechster Ordnung, und zwar eine mit zwei Doppelpunkten. Auf diesen beiden Tatsachen beruht der erwähnte Zusammenhang. Einzeln sind beide Fragen vom Verf. bereits in zwei Abhandlungen behandelt worden, aber in umgekehrter Reihenfolge wie hier (vgl. F. d. M. **42**, 622 u. 666, 1911). Naturgemäß bildet die Topologie der ebenen Kurve sechster Ordnung die Grundlage zur Beantwortung der zweiten Frage. Die Untersuchung der letzteren gestaltet sich daher hier wesentlich anders und kürzer als in der früheren Arbeit. Die gestaltlichen Verhältnisse der Kurven sechster Ordnung finden eine weiter gehende Behandlung als dort; auch erfährt die dortige Untersuchung an einer Stelle eine wesentliche Ergänzung.

In Ergänzung der von Hilbert und seinen Schülern erlangten Ergebnisse wird im ersten Abschnitt der vorliegenden Arbeit nachgewiesen, daß es weder Kurven sechster Ordnung mit elf sich gegenseitig ausschließenden Ovalen gibt, noch solche, bei denen ein Oval die andern zehn einschließt. Dagegen bleibt die Frage unerörtert, ob nicht ein Oval der Kurven zwei bis acht Ovale einschließen kann, während es die andern ausschließt. Noch weiter gehende Überlegungen haben indes den Verf. überzeugt, daß auch diese relative Lage der Ovale unmöglich ist.

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit der Anzahl und der Anordnung der Ovale bei einer Fläche vierter Ordnung. Eine einfache Überlegung zeigt, daß nicht mehr als elf Ovale vorhanden sein können. Führt man nämlich durch einen stetigen Übergang eines der Ovale in einen isolierten Knoten über und projiziert die Fläche aus diesem, so erhält man als Umriß eine ebene Kurve sechster Ordnung, die ja nicht mehr als zehn sich gegenseitig ausschließende Ovale aufweisen kann. Andrerseits kennt man Flächen vierter Ordnung, die aus zehn getrennten Ovalen bestehen. Bei dem zehnteiligen Modell (Math. Modelle Martin Schilling, Serie 9, Nr. 4) einer Fläche vierter Ordnung mit 12 eigentlichen Knotenpunkten, deren Gleichung die Form $AB\Gamma\Delta - \varrho K^2 = 0$ hat ($A = 0, B = \Gamma = 0, = 0, \Delta = 0$ die Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders, $K = 0$ Gleichung einer Kugel um den Schwerpunkt des Tetraeders als Mittelpunkt, die die Kanten in reellen Punktepaaren schneidet), ersetze man die Null auf der rechten Seite der Gleichung durch eine kleine Konstante, so gewinnt man eine aus 10 getrennten Ovalen bestehende Fläche vierter Ordnung. Der Verf. weist nach, daß eine Fläche vierter Ordnung höchstens zehn Ovale besitzen kann, und daß diese Ovale eine sehr merkwürdige Lage zueinander einnehmen. Dabei werden zwei verschiedene Fälle unterschieden; doch kann der eine durch stetigen Übergang in den andern übergeführt werden.

Der dritte Abschnitt bringt einige Beispiele zu den Kurven sechster Ordnung und den Flächen vierter Ordnung; insbesondere wird eine Fläche vierter Ordnung aufgestellt, die den Übergang bildet zwischen den beiden vorher unterschiedenen Fällen.

I. Die Kurven sechster Ordnung. § 1. Die Schar von Kurven sechster Ordnung mit acht gemeinsamen Doppelpunkten. § 2 Variationsprozeß. Kurven sechster Ordnung mit acht festen und zwei beweglichen Doppelpunkten. § 3. Beweis, daß eine Kurve sechster Ordnung mit elf sich gegenseitig aus-

schließenden Ovalen nicht existiert. § 4. Beweis, daß eine Kurve sechster Ordnung mit elf Ovalen, von denen eins die übrigen einschließt, nicht existiert.

II. Die Flächen vierter Ordnung. § 5. Der Flächenbüschel $\Phi = \lambda F^2 = 0$ und der Schrumpfungsprozeß. § 6. Der Büschel der Umrißkurven sechster Ordnung. § 7. Die Maximalzahl der Ovale.

III. Spezielle Kurven und Flächen. § 8. Kurven sechster Ordnung und daraus abgeleitete Flächen. § 9. Flächen vierter Ordnung vom Tetraedertypus, Symmetroide.

Lp.

C. Hoffmann. Lösung zu 443 (J. Neuberg). Arch. der Math. u. Phys. (3) **22** 91-93.

Die orthogonalen Trajektorien der Strophoiden, welche dieselbe Symmetrieachse und denselben Doppelpunkt haben, sind die Kurven:

$$(x^2 + y^2)^3 = k^3 y(3x^2 + y^2).$$

Gd.

E. N. Barisien. Sur quelques lieux géométriques. Mathesis **33** [(4) **3**], 114-118.

Der Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, der eine gegebene Ellipse berührt und durch einen gegebenen Punkt geht, ist eine einläufige Kurve sechster Ordnung.

Lp.

F. G. Teixeira. Sobre as tangentes á astroide. Ann. sc. Ac. Pol. Porto **8**, 220-225.

Es wird auf das alte Apollonische Problem hingewiesen, durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu legen, auf der zwei fest gegebene Geraden eine Strecke von vorgegebener Länge ausschneiden. Die Aufgabe ist natürlich dieselbe wie die Konstruktion der Tangenten an die allgemeine Astroide; sie verlangt die Konstruktion der Wurzeln einer biquadratischen Gleichung. Der Verf. behandelt Fälle, in denen die Lösung dieser Gleichung auf die zweier quadratischen Gleichungen zurückkommt.

Lp.

F. G. Teixeira. Sur les développoïdes de l'ellipse. Nouv. Ann. (4) **13**, 111-113.

Die Geraden, die eine Ellipse unter konstantem Winkel schneiden, sind affin zur allgemeinen Astroide.

Sk.

G. Fontené. Sur la courbe $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Nouv. Ann. (4) **13**, 300-301.

Wenn eine ebene Kurve K sich in ihrer Ebene bewegt, so ist die Enveloppe der Bahnkurven ihrer Punkte mit der Enveloppe von K identisch. Anwendung auf die Ellipsen mit denselben Achsenrichtungen, die dieselbe Summe der Achsen haben.

Sk.

I. Voitech. Ebene Kurven sechster Ordnung, welche bei periodischen Kollineationen invariant sind. Prag. Ber. 1913, Nr. 13, 22 S. (Böhmisch.)

I. VOITECH. Endliche Gruppen der Kollineationen und zugeordnete Kurven sechster Ordnung. Rozpravy **22**, Nr. 42, 29 S. (Böhmisch.)

Der Verf. untersucht alle möglichen endlichen Gruppen von Kollineationen, bei welchen eine ebene Kurve sechster Ordnung invariant sein kann, und berechnet zugleich die Gleichung der zur Gruppe zugehörigen Kurve. Pe.

O. DEGEL. Lösung zu 432 (E. N. Barisien). Arch. der Math. u. Phys. (3) **22**, 86-87.

Der Flächeninhalt der Kurve

$$2(b^2 x^2 + a^2 y^2)^4 = a^5 b^5 x^2 y^2(x^2 + y^2)$$

ist $\frac{1}{32}(a^2 + b^2)\pi$; er bleibt unverändert, wenn $a^2 + b^2$ konstant ist. Gd.

F. GOMES TEIXEIRA. Sur les roulettes circulaires. Nouv. Ann. (4) **13**, 438-441.

Diejenigen Kurven C_2 zu bestimmen, auf denen eine gegebene Kurve C_1 abrollen muß, damit ein Punkt der Ebene von C_1 einen Kreis beschreibt. Anwendungen. Sk.

F. G. TEIXEIRA. Sobra la teoría de las ruletas. Rev. Soc. Mat. Esp. **2**, 245-249

Herleitung einiger Formeln und Lösung einiger Aufgaben aus dem Artikel von Hâton de la Goupillière (J. de l'Éc. Pol. (2) **15**; F. d. M. **42**, 625, 1911) auf anderem Wege. Sk.

L. BRAUDE. Lösung zu 397 (W. Gaedecke). Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 289.

Die orthogonalen Trajektorien der durch Variation von a gebildeten Kurvenschar $r = a \cos^n m\varphi$ sind Kurven der gleichen Familie $r^{m^2 n} = C \sin m\varphi$. Gd.

R. BERR. Sur une famille de courbes. Revue de Math. spéc. **23**, 161-165.

Rollt eine Kurve C auf einer Geraden, und ist der Krümmungsradius der Kurve, die bei der Bewegung von einem mit C fest verbundenen Punkte beschrieben wird, das n-fache des Radiusvektors nach dem Drehpol, so hat C die Polargleichung $r = k \cos^n \frac{\varphi}{n}$. Zu dieser Klasse gehören bekannte Kurven (Lemniskate, Kardioide). Sk.

J. HAAG. Remarque sur la note de M. Raymond Berr. Revue de Math. spéc. **23**, 185.

Vereinfachung der Rechnungen der vorstehenden Arbeit. Sk.

E. Turrière. Sur les roulettes à base rectiligne. Ens. math. **15**, 319-325.

Der Verf. beschäftigt sich mit der erneuten Lösung der beiden folgenden Aufgaben: Gegeben eine beliebige Kurve, gesucht der Ort eines Punktes auf ihr, wenn die Kurve längs einer geraden Linie rollt, und der umgekehrten Aufgabe: Gegeben die Rollkurve, gesucht die erzeugende Kurve. Ba.

E. Turrière. Application d'une transformation de M. Brocard à la construction de certaines courbes transcendantes. Ens. math. **15**, 234-238.

Der Verf. wird von dem Gedanken geleitet, in die große Zahl transzendenter Kurven Ordnung zu bringen und Beziehungen zwischen ihnen aufzudecken. Es gelingt ihm, ausgehend von bekannten transzendenten Kurven, mittels einer Brocardschen Transformation zu andern auch bereits bekannten Kurven zu kommen. So liefert z. B. die Brocardsche Transformation, auf die logarithmische Spirale angewendet, eine von Köstlin entdeckte und untersuchte Kurve von der Polargleichung $r = a \cos \theta \,.\, e^{m\theta}$, und aus der inversen Kurve der archimedischen Spirale, der hyperbolischen Spirale, gehen zwei Kochleoiden hervor. Ba.

E. Turrière. Sur une généralisation algébrico-interscendante de la tractrice. (Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira.) Ann. sc. Ac. Pol. Porto 8, 193-206.

Wie schon öfter bemerkt (Teixeira, Obras sobre mathematica **5**, 22-23, § 425), ist die Traktrix die orthogonale Trajektorie der Kreise, die zwei parallele Geraden berühren. Der Verf. betrachtet, diese Auffassung erweiternd, die orthogonalen Trajektorien der Kreise, welche die Schenkel eines gegebenen Winkels berühren, oder genauer der Kreise, die einen gemeinschaftlichen Ähnlichkeitspunkt haben.

„Die Familie der gefundenen Trajektorien ist, als abhängig von einem gewissen Parameter betrachtet, eine algebraisch interszendente Familie ebener Kurven. Für rationale Werte dieses Parameters sind die Trajektorien in der Tat algebraische Kurven; den irrationalen Werten dieses selben Parameters entsprechen dagegen interszendente Kurven. Bei zwei rechtwinkligen Geraden sind merkwürdigerweise die orthogonalen Trajektorien der sie berührenden Kreise transzendent, während dieselben Trajektorien für unendlich viele analoge Fälle algebraisch werden, je nach der Wahl des Winkels zwischen den beiden Tangenten. So werden alle Trajektorien algebraisch, wenn jener Winkel gleich 60° ist. Ähnliches gilt über die Radialen, die Evoluten und die Fußpunktkurven derselben Trajektorien.“ Bei der Darstellung der Trajektorien erweist sich, wie ausdrücklich hervorgehoben wird, die Einführung der Hesseschen tangentialen Koordinaten als vorteilhaft; der Verf. meint, dies sei das erste Beispiel einer tangentialen Untersuchung orthogonaler Trajektorien. Lp.

G. N. Bauer and H. L. Slobin. Some transcendental curves and numbers. Palermo Rend. **36**, 327-332.

Die betrachteten Kurven sind transzendent in einem höheren Sinne als dem gewöhnlichen, indem darunter nämlich solche Kurven verstanden werden, für die in jedem Punkte mindestens eine der beiden Koordinaten eine transzendente Zahl ist, mit Ausnahme einer endlichen Zahl von Punkten. Dahin gehören die Exponentialfunktion $y = e^x$, die trigonometrischen Funktionen und ihre inversen, die hyperbolischen Funktionen und alle Funktionen von der Form $\varphi(x, y) = t$, wo t eine transzendente Zahl ist. Ebenso stellen die Funktionen $f_1(x)\, e^{f_2(x)}$, $f_1(x) \log f_2(x)$, $f_1(x) \sin f_2(x), \ldots$ eine transzendente Zahl dar für jeden algebraischen Wert von x, ausgenommen die Nullstellen der Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$, die dabei explizite algebraische Funktionen von x oder algebraische Konstanten sein sollen. Ba.

C. E. White. Parametric equations of curves and equations of tangent in terms of the tangent's slope. Tôhoku Math. J. **3**, 175-178.

In der kleinen Notiz werden mehrere bekannte Kurven und ihre Tangentengleichungen in der aus dem Titel ersichtlichen Parameterform dargestellt. Neues wird damit nicht geboten. Gd.

M. Pétrovitch. Courbes découpant sur une droite fixe les longueurs représentant la suite indéfinie de nombres premiers. Nouv. Ann. (4) **13**, 406-409.

Der Inhalt der kurzen Abhandlung wird durch ihren Titel vollständig gekennzeichnet. Gd.

R. Dontot. Note sur les trajectoires sous un angle constant de droites ou de cercles. Revue de Math. spéc. **23**, 81-85.

Rechnerische Behandlung der Frage, die für eine Geradenschar auf eine lineare, für eine Kreisschar auf eine Riccatische Differentialgleichung führt. Die Ergebnisse sind meist bekannt. Sk.

J. Mourret. Note sur les trajectoires sous un angle constant de droites ou de cercles. Revue de Math. spéc. **23**, 139.

Geometrischer Beweis einiger Sätze von Dontot (s. das vorstehende Referat). Sk.

Carette. Généralisation d'une propriété des coniques. Revue de Math. spéc. **23**, 185-187.

Die Kurven, bei denen das Stück der Tangente zwischen dem Berührungspunkt und einer festen Geraden g von einem festen Pole P aus unter dem konstanten Winkel α gesehen werden, haben die Polargleichung:

$$\frac{1}{\varrho} = k e^{-\theta \operatorname{ctg} \alpha} - \frac{\cos \theta}{a},$$

die für $\alpha =$ konst. in die Gleichung eines Kegelschnitts übergeht, der P zum Brennpunkt und g zur Leitlinie hat. Sk.

A. M. Nesbitt. Question 17 284. Ed. Times (2) **23**, 77-79.

Diskussion der beiden Kurven $y^x = x^y, y = x^{xy}$ vom Aufgabensteller. Die erste Kurve ist schon von Euler betrachtet worden (vgl. Loria, Spez. ebene Kurven **2**, 173). Gd.

L. Braude. Über Parallelkurven von Epi- und Hypozykloiden. Monatsh. f. Math. **24**, 185-196.

Die beim Abrollen eines Kreises auf einen andern von einem Punkte der Peripherie des ersteren beschriebenen Epi- und Hypozykloiden sind ihren Evoluten ähnlich; mithin sind die Evolventen einer solchen zugleich Parallelkurven einer ähnlichen Kurve. Wickelt man den ganzen Faden zwischen zwei Folgespitzen der Evolute ab, so hat die Evolvente in jeder zweiten Spitze der Evolute einen Spitzpunkt, kurz „Spitzpunktevolvente" vom Verf. benannt. Näher betrachtet wurden bisher die der Astroide (Ribaucoursche Kurve vom Index $-{}^1/_3$) und die der Nephroide (zweispitzige Epizykloide), eine als Cayley-Sextik bezeichnete Sinusspirale vom Index ${}^1/_3$. Der Verf. leitet einige Erzeugungen der Parallelkurven von Epi- und Hypozykloiden ab, insbesondere der Spitzpunktevolventen. Als Hauptsätze, die viele Spezialfälle einschließen, werden die folgenden drei hervorgehoben: I. Rollt ein Kreis auf einem andern ab, so hüllt eine beliebige Gerade in der Ebene des ersteren eine Parallelkurve einer Epi- oder Hypozykloide ein. II. Rollt auf der Innen- oder Außenseite einer Epi- oder Hypozykloide vom Modul n eine Kardioide oder eine Zykloide ab, so daß sich stets Scheitel und Spitze der rollenden und der Basiskurve entsprechen, so ergibt sich als Bahn des Poles oder als Einhüllende der Direktrix die Spitzpunktevolvente einer Epi- oder Hypozykloide vom Modul $2n$. III. Rollt eine Zykloide auf einer Epi- oder Hypozykloide vom Modul n in der definierten Weise ab, so hüllt eine Parallele zu ihrer Direktrix die Evolvente einer Epi- oder Hypozykloide vom Modul $2n$ ein. Lp.

Weitere Literatur.

N. Altshiller. On the cubic with a double point. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 506.

E. N. Barisien. Problemi. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 123-124, 234-236; **29**, 43-46.

Fortsetzung (Nr. 28-45, 46-55, 56-69) der Aufgaben aus Bd. **27**, 229-231 (Nr. 1-12), 273-275 (Nr. 13-27). Die Schriftleitung erklärt, daß sie die Lösungen im allgemeinen nicht aufnimmt, wohl aber Bemerkungen über sie. Lp.

E. N. Barisien. Extension du limaçon de Pascal. Assoc. Franç. (Tunis) **42**, 29-34.

H. Bateman. The expression of the equation of the general quartic curve in the form $A/xx' + B/yy' + C/zz' = 0$. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 393-394.

R. Coulon. Étude sur la géométrie des formes usuelles. Rouen: Lainé. 74 S. 8°.

L. Crelier. Sur les points d'inflexion et les tangentes de rebroussement de certaines courbes du 3e degré ou de la 3e classe. Bern. Mitt. Naturf. Ges. 1913, V-VII.

R. Goormaghtigh. Sur la cissoïde et la lemniscate de Booth. Mathesis **33** [(4) **3**], 63-65.

K. Guggisberg. Die Konchoide der kubischen Parabel. Diss. Bern. 39 S. 8° (1912).

R. Heger. Die Realität der Wendepunkte irrationaler Kurven dritter Ordnung. Dresden, Sitzber. Isis. 1913, 27-38.

J. R. Conner. The rational sextic curve and the Cayley symmetroid. Amer. Math. Soc. Bull (2) **19**, 284.

S. Prieto. Sobre una propiedad de las epicicloides. Mexico Soc. „Antonio Alzate" **31**, 375-392 (1912).

Einige Aufgaben über Rollkurven auf Epizykloiden. Lp.

G. Rohbauer. Die Epi- und Hypozykloiden als einhüllende Kurven. Progr. Olmütz. 12 S. 8°.

F. R. Sharpe. Conics through inflections of self-projective quartics. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 75-76.

J. Welsch. Polygones de Steiner inscrits dans une quartique binodale. Assoc. Franç. (Nîmes) **41**, 76-78.

R. M. Winger. Self-projective rational curves of the fourth and fifth orders. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 303.

R. M. Winger. Self-projective rational sextics and septimics. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 77.

Kapitel 3.

Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen.

J. Knoblauch. Grundlagen der Differentialgeometrie. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. X u. 634 S. gr. 8°.

In dem vorliegenden Werke bietet der Verf. die Grundlagen der Differentialgeometrie in dem Sinne, daß alles analytische Werkzeug, das für differentialgeometrische Probleme vorliegt, in möglichst übersichtlicher Ordnung und vielseitigster Gebrauchsfähigkeit konstruiert und in seiner geometrischen Bedeutung charakterisiert wird. Den Ausgangspunkt bildet die Theorie der binären quadratischen Differentialformen, deren Invariantentheorie in gewissem Umfange in der allgemeinen Theorie der Flächen seine naturgemäße geometrische Deutung findet. Umgekehrt muß das, was in der Differentialgeometrie prinzipiell wichtig

ist, sich aus der Invariantentheorie der binären Formen entwickeln lassen. Die Möglichkeit, die Struktur der Formelsysteme dauernd zu übersehen, liegt in der Anwendung der geometrischen Differentiationen, wobei jedes neu eintretende infinitesimale Element gleich durch ein zugehöriges Linienelement dividiert wird. Diese schon von Ricci in ihrer Bedeutung erkannten kovarianten Differentiationen, oder θ-Operationen nach Knoblauchs Bezeichnung, gestatten, alle Betrachtungen mit beliebiger Parameterdarstellung bis zu dem Punkte zu führen, wo man erkennt, welche Spezialisierung eine sachgemäße Vereinfachung ergibt. Die Methode des Verf. ist aus den zahlreichen Abhandlungen bekannt, in denen er seit längeren Jahren ihre grundsätzliche Bedeutung teils an den allgemeinen Grundlagen der Theorie, teils an einzelnen besonders wichtigen Anwendungen aufgezeigt hat. Die so gewonnenen Bausteine sind an passender Stelle in den systematischen Aufbau aufgenommen. Da es sich nur darum handelte, Grundlagen der Theorie darzustellen, sind von den zahlreichen Spezialforschungen der Differentialgeometrie, z. B. zur Theorie der geodätischen Linien, der Abwicklung spezieller Flächenklassen, nur ganz wenige mit aufgenommen, um an ihnen die Anwendbarkeit der allgemeinen Formeln zu illustrieren.

Der Inhalt teilt sich in einzelne Abschnitte, deren Überschriften folgen: I. Einführung in die Theorie der Raumkurven. II. Grundbegriffe und Grundformeln der Flächentheorie. III. Die Normalkrümmung und das Krümmungsmaß. IV. Grundformeln der Theorie der Tangentialkrümmung. V. Grundlagen der Theorie der binären Differentialformen. VI. Die drei Fundamentalgleichungen. VII. Besondere Kurven und Koordinatensysteme auf einer Fläche. VIII. Die Einheitskugel. Einführung in die Theorie der Strahlensysteme. Geradlinige Flächen. IX. Spezielle Flächen, die mit einer gegebenen zusammenhängen. X. Aufgaben der Biegungstheorie. XI. Allgemeine Theorie der Kurven und Kurvennetze auf einer Fläche. XII. Invarianten und Kovarianten von gegebener Ordnung. XIII. Die Weingartenschen Gleichungen in der Theorie der Strahlensysteme. XIV. Spezielle Sätze und Aufgaben der Flächentheorie.

Sk.

R. v. Lilienthal. Vorlesungen über Differentialgeometrie. 2. Band: Flächentheorie. 1. Teil. Leipzig: B. G. Teubner. VII + 270 S. 8°. (Teubners Samml. v. Lehrbüchern usw. Bd. 28.)

Die hier vorliegenden Vorlesungen sollen nicht eine lückenlose Darstellung der Differentialgeometrie der Flächen geben, sondern ergänzende Beiträge zu den größeren Werken. Es wird deswegen die allgemeine Theorie nur in den Hauptsätzen aufgebaut; dagegen werden einige sonst oft vernachlässigte Einzelheiten ausführlicher besprochen, als es meist der Fall ist. Namentlich aber werden auch einige neuere flächentheoretische Untersuchungen im Zusammenhange mit klassischen Fragen dem Leser vorgeführt.

Das Buch zerfällt in vier Abschnitte, deren Überschriften nebst kurzen Bemerkungen über den Inhalt hier angeführt seien. I. Allgemeine Betrachtungen: Flächendarstellung, singuläre Punkte (Spitzen usw.), recht ausführliche Theorie der Berührung und der Einhüllenden, Striktionslinie einer Raumkurvenschar. II. Wichtige Flächenarten: Geradlinige, zyklische, Umdrehungs-, Schrauben-, Schiebungsflächen, Zykliden. III. Die Normalkrümmung der Flächenkurven: Kreispunkte, Flächen mit Kreispunktslinien, Krümmungstheorie,

Licht- und Schattenlinien, kinematische Betrachtungen. IV. Die geodätische Krümmung der Flächenkurven: Ableitung nach Bogenlängen, kinematische Eigenschaften der geodätischen Krümmung, ausführliche Theorie der Kurvennetze ohne Umwege mit Beispielen. An manchen Stellen reichliche Literaturangaben. Re.

G. Scheffers. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Zweiter Band: Einführung in die Theorie der Flächen. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig: Veit & Comp. XII u. 582 S. gr. 8°. Mit 110 Fig. im Text.

Die erste Auflage dieses vortrefflichen Buches vom Jahre 1902 ist im Jahrbuche nur mit dem Titel angeführt, weil kein Rezensionsexemplar der Schriftleitung geliefert war. Es seien daher aus dem Vorworte zur ersten Auflage folgende Sätze wiederholt: „Dem Hauptziel des Werkes entsprechend, habe ich auch in diesem Bande grundsätzlich die analytische Methode benutzt und rein geometrische Betrachtungen nur zum Erleichtern des Verstehens bei der Andeutung weiterer Ausblicke, ferner da, wo sie besonders interessant sind, und endlich noch hin und wieder da, wo ihre rechnerische Wiedergabe auf der Hand liegt, eingefügt. Aber die Tendenz des Ganzen ist doch eine geometrische, indem ich solche Probleme aus der Flächentheorie ausgewählt habe, die in erster Linie von geometrischem Interesse sind. Man wird daher manche Anwendung der Analysis auf die Geometrie vermissen, möge aber bedenken, daß das Gebiet der Flächentheorie so groß ist, daß eine Auswahl daraus gestattet ist. Manches, was andere Lehrbücher bringen, fehlt hier; andererseits bringe ich manches, was andere nicht haben. Ich erwähne z. B. die Anwendung auf die Herstellung geographischer Karten, das Kongruenzproblem für Flächen und die geodätische Abbildung.“

Inhalt: I. Das Bogenelement der Fläche. II. Die Krümmung der Fläche. III. Die Fundamentalgleichungen der Fläche. IV. Kurven auf der Fläche. — Anhang. Zusammenstellung der Formeln.

Im ersten Abschnitt ist der § 4 über die Einhüllende einer zweifach unendlichen Ebenenschar neu. Der zweite Abschnitt ist um folgende Paragraphen bereichert worden: § 5 über die Schnittkurve von Fläche und Tangentialebene, § 7 über oskulierende Flächen zweiter Ordnung, § 12 über dreifach orthogonale Flächensysteme, § 17 über Flächen von Minimalgeraden.

Schließlich fügen wir aus der Rezension des Buches von W. Blaschke im Archiv der Math. (3) **24**, 65-66, den Schlußsatz hinzu: Besonders hervorzuheben ist an diesem Werke die klare Anordnung des Stoffes, die Einheitlichkeit der Bezeichnungen, die wundervoll gezeichneten, zahlreichen Figuren, die das Verständnis des Textes sehr erleichtern, und schließlich auch noch die zweckmäßige Formelsammlung. Lp.

G. Demartres. Cours de géométrie infinitésimale. Avec une préface de P. Appell. Paris: Gauthier-Villars. X + 455 S. 8°.

Das ziemlich elementar abgefaßte Buch, zu dem Paul Appell eine Vorrede geschrieben hat, soll eine Einführung und in gewissen Punkten Ergänzung zu Darboux' Leçons darstellen. Es ist in vier Teile eingeteilt: I. Géométrie infinitésimale, II. Théorie analytique des courbes planes ou gauches.

III. Théorie des courbes tracées sur une surface, IV. Coordonnées curvilignes sur une surface. Der erste Teil ist sozusagen eine Einleitung des Ganzen und behandelt die hauptsächlichsten Gegenstände aus der Theorie der Kurven und Flächen, einschließlich der zugehörigen kinematischen Fragen, nach der sogenannten Methode des Unendlichkleinen. Die Klippen dieser Methode sind bekannt. Die Begründung, die der Verf. in der dem ersten Kapitel vorangeschickten Einführung für die Methode gegeben hat, wird nicht jedermann völlig befriedigen. Die andern Teile enthalten die Hauptsätze der Infinitesimalgeometrie mit zahlreichen Anwendungen. Angefügt ist eine Sammlung von 136 Aufgaben (ohne Lösungen). [Rezension von E. Salkowski, Deutsche Literaturzeitung 1913, S. 2170-2172.] Re.

R. Rothe. Anwendungen der Vektoranalysis auf Differentialgeometrie. Verhdl. Naturf. Ges. 1912 (Münster) $\mathbf{2}_1$, 10-12.

Dieses Referat soll zeigen, daß „tatsächlich die Vektoranalysis in der allgemeinen Differentialgeometrie eine größere Rolle zu spielen hat und mehr zu leisten imstande ist, als eine bloße Abkürzung der Beweisführung und der Formeln zu geben". Lp.

R. A. Fisher. Applications of vector analysis to geometry. Messenger (2) **42**, 161-178.

„In der vorliegenden Abhandlung habe ich versucht, eine Methode anzugeben, um bekannte Resultate in der Geometrie des Raumes durch den Gebrauch der Vektorrechnung herzuleiten. Ich finde, daß das Buch III von Hamiltons Elementen der Quaternionen viele von den Resultaten enthält, die ich hergeleitet habe. Eine gewisse Rechtfertigung für die gegenwärtige Arbeit liegt jedoch in der Tatsache, daß die benutzte Bezeichnung, nämlich die von Willard Gibbs, einfacher als die von Hamilton ist und direkter als die gewöhnliche kartesische Bezeichnung; der Begriff einer Quaternion ist dagegen ganz unnötig zum Verständnis."

Die Anwendungen betreffen: Raumkurven, krumme Oberflächen (Krümmung usw.), Krümmung ebener Schnitte, orthogonale Oberflächen, abwickelbare Oberflächen, geradlinige Oberflächen. Lp.

N. Hatzidakis. On pairs of Frenetian trihedra. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 138-143.

Nach einer kurzen historischen Übersicht über Arbeiten, die sich mit der Verallgemeinerung der Frenetschen Formeln beschäftigt haben, geht der Verf. zunächst auf die verallgemeinerten Frenetschen Formeln ein (vgl. seine Note in Deutsch. Math.-Ver. **19**, 267-269), erörtert dann die Beziehungen zwischen den Krümmungen zweier Frenetschen Trieder und schließlich die Beziehungen zwischen der normalen und der geodätischen Krümmung (vgl. auch die Noten des Verf. F. d. M. **37**, 627-628, 1906). Wie bei so vielen Abhandlungen aus der Differentialgeometrie der krummen Oberflächen ist in einem kurzen Referat ein näheres Eingehen auf die vielen Formeln auch hier nicht möglich. Lp.

G. Darmois. Sur les courbes algébriques à torsion constante. C. R. **157**, 1379-1382.

Einige Kriterien, die sich auf das Tangentenbild einer algebraischen Kurve konstanter Torsion beziehen. Sk.

B. Hostinsky. Sur les courbes fermées à torsion constante. C. R. **157**, 1384-1385.

Folgerungen aus der Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten, angewandt auf das Problem der Kurven konstanter Torsion. Sk.

B. Hostinsky. Sur une propriété des courbes gauches. Ann. sc. Ac. Pol. Porto **8**, 217-219.

Der Verf. betrachtet die Eingehüllte einer Ebene (E), die mit dem Dreikant aus Tangente, Hauptnormale und Binormale unveränderlich verbunden ist. „Die charakteristische Gerade der Ebene (E) [d. h. der Schnitt von (E) mit der unendlich nahen folgenden Lage] schneidet die Schmiegungsebene in einem Punkte A, der mit der Projektion des Krümmungsmittelpunktes der Raumkurve C für den Punkt M in der Ebene P zusammenfällt." Lp.

R. Occhipinti. Sulla torsione di alcune curve di una superficie. Periodico di Mat. **29** [(3) **11**], 1-32.

„In der gegenwärtigen Abhandlung beabsichtige ich, für die Torsion der durch einen Punkt einer Oberfläche gehenden Kurven eine Untersuchung anzustellen, die, soviel mir möglich ist, derjenigen bezüglich der Krümmung entsprechend verläuft. Für die geodätische Torsion ist in dieser Hinsicht eine Arbeit vorhanden (P. Burgatti, Sulla torsione geodetica delle linee tracciate sopra una superficie. Palermo Rend. **10**, 229-240; F. d. M. **27**, 506, 1896). Ich glaube jedoch, daß in diesem Falle die Analogie noch weiter getrieben werden kann, und dies werde ich bei Gelegenheit dieser Torsion erreichen." In diesen Sätzen der Einleitung ist das Ziel der Arbeit gekennzeichnet. Die Untersuchung bewegt sich dann in folgender Richtung. Zu der Gleichung der Oberfläche $z = z(x, y)$ wird in dem betrachteten Punkte eine zylindrische Fläche $y = y(x)$ hinzugenommen, deren Schnitt mit $z = z(x, y)$ die untersuchte Kurve gibt. Es zeigt sich, daß die Torsion dieser Kurve von den drei Ableitungen y', y'', y''' von y nach x abhängt. Nun werden über diese drei Ableitungen besondere Voraussetzungen gemacht, und dadurch erhält man eine Reihe geometrischer Sätze, die eine gewisse Verwandtschaft mit denen über die Krümmung besitzen. Ein näheres Eingehen auf die einzelnen Ergebnisse würde zu viel Raum beanspruchen. Lp.

R. Occhipinti. Sulla curvatura delle linee di una superficie passanti per un punto. Batt. G. **51** [(4) **3**], 192-196.

Beziehungen zwischen den Krümmungen gewisser ∞^1 Kurven, die durch einen Punkt der Fläche hindurchgehen. Sk.

A. Demoulin. Une propriété générale des lignes tracées sur une surface. C. R. **156**, 40-41.

Ist C eine Kurve auf einer Fläche, so kennt man den Mittelpunkt ihrer geodätischen Krümmung in einem beliebigen ihrer Punkte P, wenn man für ihn die Schmiegungsebene und den Krümmungsmittelpunkt M des Normalschnitts kennt. Verf. zeigt nun, daß man damit auch die Tangente an die Kurve hat, die vom Punkte M beschrieben wird, wenn P die Kurve C durchläuft. Hieraus ergibt sich eine Formel für eine allgemeine Flächenkurve, die als Verallgemeinerung einer von Beltrami für Asymptotenlinien angegebenen Eigenschaft anzusehen ist. Sk.

J. Lipka. Geometric characterisation of isogonal trajectories on a surface. Annals of Math. (2) **15**, 71-77; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 295.

In einer früheren Arbeit (Amer. Math. Soc. Trans. **13**, 77-95; F. d. M. **43**, 465, 1912) gab der Verf. eine geometrische Eigenschaft der von Kasner untersuchten natürlichen Kurvenfamilien (Amer. M. S. Trans. **10**; F. d. M. **40**, 784, 1909). Hier beschäftigt er sich speziell mit den Beziehungen, die die ∞^2 Isogonaltrajektorien von ∞^1 Kurven auf einer Fläche mit natürlichen Kurvenfamilien verknüpfen. Beide Kurvensysteme sind von einer Differentialgleichung desselben Typus abhängig und können durch eine einfache analytische Transformation ineinander übergeführt werden. Aus dieser Eigenschaft ergibt sich auch ein in kurzen Worten nicht wiederzugebendes geometrisches Merkmal für eine Schar von Isogonaltrajektorien. Sk.

K. A. Erady. Curvature and torsion of curves on surfaces. Indian Math. Soc. **5**, 131.

Rechnerische Herleitung. Sk.

Ch. Platrier. Sur les métacentres et les paramètres de distribution des courbes d'une surface. Nouv. Ann. (4) **13**, 451-458.

Unter der Normalie N einer Kurve C einer Fläche S versteht man bekanntlich die von den Normalen der Fläche längs C gebildete geradlinige Oberfläche. Metazentrum der Kurve C in einem ihrer Punkte M heißt der Zentralpunkt γ der Erzeugenden G von N. Der Abstand $\mu = M\gamma$ und sein reziproker Wert $1/\mu$ sind bzw. der Radius der metazentrischen Krümmung und die metazentrische Krümmung von C in M. Diese Größen hängen nur von den Elementen der ersten Ordnung der Oberfläche ab und sind die nämlichen für zwei Kurven C von S, die in M dieselbe Tangente Mt haben. Der Verteilungsparameter K der Erzeugenden G von N besitzt gleichfalls diese Eigenschaften. Die Größen μ, $1/\mu$, K beziehen sich also auf die Richtung Mt. — Der Verf. vervollständigt manche schon bekannten Ergebnisse betreffs der Metazentren und der Verteilungsparameter. Besonders hebt er die Beziehungen hervor, die

zwischen der Normalkrümmung und der metazentrischen Krümmung sowie zwischen der geodätischen Torsion und dem Verteilungsparameter bestehen. Lp.

E. Turrière. Sur une congruence de droites associée au réseau conjugué d'une surface, orthogonal en projection sur un plan. Nouv. Ann. (4) **13**, 163-176.

Verf. beschäftigt sich mit der folgenden, von Ribaucour (Nouv. Ann. 1871) herrührenden Fragestellung: Man projiziere die Punkte einer Fläche senkrecht auf eine Ebene und konstruiere in den Bildpunkten die Parallelen zu den Normalen der Fläche. Für welche Flächen wird die erhaltene Kongruenz ein Normalensystem? In jedem Falle hängt die Bestimmung der abwickelbaren Flächen der Kongruenz von derselben Differentialgleichung ab, die auf der gegebenen Fläche ein System von konjugierten Kurven bestimmt, das sich als Orthogonalsystem projiziert. Damit ist die natürliche Verbindung dieser Problemstellung mit einer ebenfalls von Ribaucour herrührenden Frage dargetan, welche Verf. schon früher (S. M. F. Bull. **40**, 228 u. Nouv. Ann. (4) **12**, 364; F. d. M. **43**, 689, 1912) genauer untersucht hatte. Aus diesem Zusammenhang ergeben sich zahlreiche interessante Einzelresultate. Sk.

V. Jamet. Sur les systèmes conjugués. Nouv. Ann. (4) **13**, 385-387.

Ist $x = f(\alpha, \beta)$, $y = \varphi(\alpha, \beta)$ die Darstellung eines ebenen Kurvennetzes (N), so kann man z als eine beliebige Lösung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmen, von der x und y Partikularlösungen sind. Ist z eine dritte Lösung dieser Gleichung, so sind (x, y, z) die Koordinaten des Punktes einer Fläche, für die ein System konjugierter Kurven sich in das gegebene senkrecht projiziert. In besonderen Fällen vereinfacht sich die Fragestellung, und der Verf. gibt in endlicher Form die Gleichungen aller Flächen an, für die das Netz (N) aus zwei Büscheln von sich senkrecht schneidenden Kreisen besteht. Die Fragestellung knüpft an die Untersuchungen von E. Turrière an (s. das vorstehende Referat). Sk.

E. Kasner. Equitangential congruences of curves in space. Palermo Rend. **35**, 283-285.

Es sei eine Kongruenz von Raumkurven (C) vorgelegt, so daß durch jeden Punkt des Raumes eine Kurve hindurchgeht. Verschiebt sich nun jedes Linienelement in seiner Richtung um die konstante Strecke a, so schließen sich die ∞^3 Linienelemente zu den Kurven einer neuen Kongruenz zusammen, und wenn a variiert, erhält man ∞^3 Kurven. Sie heißen Äquitangentialkurven. Der Ort für die Krümmungsmittelpunkte aller Äquitangentialkurven, die dieselbe Tangente haben, ist eine Raumkurve dritter Ordnung, und die Krümmungskreise erfüllen eine Fläche achter Ordnung. Die Sätze stellen eine Verallgemeinerung der Scheffersschen Sätze für Äquitangentialkurven in der Ebene dar. Sk.

G. Gräbner. Systeme von Geraden, welche bei der Fortbewegung des die Raumkurve begleitenden Dreikants besondere Regelflächen erzeugen. Pr. Kreisoberrealschule Würzburg. 40 S. 8°.

Bei einer Bewegung von einem Freiheitsgrad erzeugen die Punkte, Geraden und Ebenen des beweglichen Systems Gebilde, die mit den Bestimmungsgrößen der Bewegung in wohl charakterisierter Weise zusammenhängen. Von geometrischem Standpunkt aus haben bisher diejenigen Bewegungen besondere Aufmerksamkeit beansprucht, bei denen ein bestimmtes rechtwinkliges Achsensystem des beweglichen Raumes die aufeinander folgenden Stellungen des Hauptdreikants einer Raumkurve (C) des festen Systems annimmt. Wenn man den Erzeugnissen der Bewegung bestimmte Forderungen auferlegt, so ergeben sich für die Kurve (C) gewisse Beschränkungen, die sich analytisch durch Gleichungen zwischen Krümmung $\varkappa$, Torsion τ und deren Ableitungen nach der Bogenlänge ausdrücken lassen. In diese Gedankenreihe gehören die Untersuchungen des Verf. Es sei g eine Gerade, die mit dem Hauptdreikant von (C) fest verbunden ist, P auf ihr ein fester Punkt. Dann durchläuft, von gewissen trivialen Ausnahmefällen abgesehen, P auf der von g beschriebenen Fläche nur dann eine Isogonaltrajektorie, wenn (C) einer Gleichung

$$(1) \qquad A\varkappa^2 + B\tau^2 + C\varkappa\tau + D\varkappa + E\tau + F = 0$$

genügt. Damit die Striktionslinie von einem festen Punkt beschrieben wird, muß eine ähnliche Gleichung, in der $E = F = 0$ ist, bestehen. Die Bertrandschen und die Cesàroschen Kurven spielen hier wie in vielen ähnlichen Fragen eine ausgezeichnete Rolle. Wegen der Einzelergebnisse der interessanten und zu weiteren Untersuchungen anregenden Fragestellung muß auf die Arbeit verwiesen werden.
Sk.

G. Tzitzéica. Sur les réseaux dérivés. C. R. **156**, 374-376.

G. Tzitzéica. Sur les réseaux conjugués à suite de Laplace périodique. C. R. **157**, 908-910.

Geometrische Deutung einiger in der Theorie der konjugierten Kurvenscharen angewandten Transformationen.
Sk.

G. Tzitzéica. Sur les réseaux à invariants égaux et à suite de Laplace périodique. C. R. **157**, 1382-1383.

Das Transformationsverfahren, das der Verf. in einer früheren Arbeit (C. R. **157**, 908; Referat vorstehend) entwickelt hat, ist nicht anwendbar, wenn die das Ausgangssystem definierende Differentialgleichung gleiche Invarianten hat. Hier wird das Verfahren für diesen wichtigen Spezialfall entwickelt.
Sk.

E. Bompiani. Sur les configurations de Laplace. C. R. **156**, 603-605.

Im Anschluß an seine Untersuchungen „Sulle equazioni di Laplace" (Palermo Rend. **34**; F. d. M. **43**, 687, 1912) gibt der Verf. auf anderem Wege

wie Tzitzéica (Sur les réseaux dérivés, vgl. die vorstehenden Referate) eine geometrische Herleitung für einige Darbouxsche Sätze über die Gleichung $s + ap + bq + cz = 0$. Sk.

G. Tzitzéica. Sur les surfaces isothermiques. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 88-92.

Folgendes Prinzip wird ausgesprochen: Es sei eine Klasse von Figuren der Ebene oder des Raumes gegeben (Kurven, Oberflächen, Kongruenzen). Um ihre infinitesimalen Eigenschaften zu ermitteln, die unveränderlich bleiben, wenn man auf diese Figuren alle Transformationen einer Gruppe anwendet, muß man zuerst ein zur Bestimmung eines beliebigen Elementes dieser Figuren geeignetes Koordinatensystem auffinden, danach eine Differentialgleichung oder ein System solcher Gleichungen bilden, das durch die Koordinaten eines veränderlichen Elementes einer Figur und aller transformierten Figuren befriedigt wird.

Von diesem Prinzip wird eine Anwendung auf die isothermen Oberflächen gemacht; insbesondere wird gezeigt, daß man auf diesem Wege in ordnungsmäßiger Weise die von Rothe und Calapso gefundene partielle Differentialgleichung vierter Ordnung erhält. Lp.

A. Demoulin. Sur les surfaces isothermiques et sur les tétraèdres de Möbius. Belg. Bull. 1913, 1181-1199.

Beweis verschiedener alter und neuer Eigenschaften der isothermischen Oberflächen; die alten werden auf einem Wege hergeleitet, der ihren wahren Ursprung zeigt und es ermöglicht, neue aus ihnen zu folgern, so über die Möbiusschen Tetraeder und die Raumkurven vierter Ordnung erster Art.

Mn. (Lp.)

R. Occhipinti. Linee isocline rispetto alle bisettrici delle linee di curvatura. Palermo Rend. **36**, 29-34.

Wird ein Netz von solchen Kurven als Koordinatennetz auf einer Fläche gewählt, so besteht als notwendig und hinreichend zwischen den sechs Fundamentalgrößen die Relation

$$FGL - 2EGM + EFN = 0,$$

oder auch, wenn e, f, g die Koeffizienten des Linienelements der Gaußschen Kugel sind,

$$FGe - 2EGf + EFg = 0.$$

x, y, z und $\varrho = x^2 + y^2 + z^2$ genügen derselben partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung; ebenso $X, Y\ Z$ und $W = xX + yY + zZ$.

Sonst kommen weder analytisch, noch geometrisch wertvolle Ergebnisse heraus. Daß ein solches Kurvennetz bei der Inversion in eines derselben Eigenschaft übergeht, ist selbstverständlich. Re.

V. Jamet. Sur les réseaux conjugués. Nouv. Ann. (4) **13**, 388-394.

Bemerkungen hauptsächlich über die Flächen, auf denen alle Kurven desselben konjugierten Netzes in Tangentialebenen desselben Zylinders zweiter Ordnung gelegen sind.

Re.

H. Hilton. On surfaces traced out by the motion of an invariable curve. Math. Gazette **7**, 36-38.

Eine elementare Methode zur Beantwortung der Frage, ob es möglich ist, daß die sich bewegende Kurve stets eine Krümmungslinie, eine Geodätische, eine Asymptotenlinie usw. auf der erzeugten Fläche sein kann. Lp.

P. Funk. Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien. Math. Ann. **74**, 278-300.

In der von D. Hilbert angeregten Arbeit werden im ersten Kapitel die Ergebnisse von Darboux (Leçons sur la théorie générale des surfaces 3, 4) und von Zoll (Diss. 1901; F. d. M. **32**, 614) auf eine neue Art hergeleitet und vervollständigt. Gegenstand des zweiten Kapitels ist eine gewisse Funktionalgleichung für Funktionen des Ortes auf der Kugel; sie kommt dann im dritten und vierten Kapitel zur Anwendung. Integriert man eine Funktion des Ortes auf der Kugel längs eines größten Kreises, so ist im allgemeinen der Wert des Integrals eine Funktion der Parameter, die den Kreis charakterisieren. Der Verf. bezeichnet sie als Kreisintegralfunktion und löst auf zweifache Art die Aufgabe: Wie bestimmt sich eine Funktion des Ortes auf der Kugel, wenn ihre Kreisintegralfunktion bekannt ist? Die erste Lösung benutzt Kugelfunktionen; die zweite besteht in der Zurückführung der vorgelegten Aufgabe auf die Auflösung der Abelschen Integralgleichung. Im dritten Kapitel wird der Stäckelsche Ansatz (J. für Math. **130**; F. d. M. **36**, 671, 1905) zur Behandlung der Liouvilleschen Flächen durch einen einfacheren ersetzt und die bei ihm offen gebliebene Frage beantwortet. Das vierte Kapitel enthält einen Ansatz zur allgemeinen Lösung der Aufgabe: Wie muß man die Kugel variieren, damit aus ihr wieder eine Fläche mit lauter geschlossenen geodätischen Linien entsteht? Dieser letztere Gedanke rührt von Hilbert her und hat die Anregung zu den im zweiten Kapitel entwickelten und im dritten und vierten Kapitel angewandten Betrachtungen über die Kreisintegralfunktion gegeben. — Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen werden in dem Verschwinden gewisser bestimmter Integrale gefunden. Um daraus sämtliche regulären Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien ohne Doppelpunkt aufzustellen, wäre allerdings noch eine Konvergenzbedingung zu erfüllen und eine Bedingung anzugeben, der die konforme Abbildung der Fläche auf die Kugel zu genügen hat.

Die ersten drei Kapitel dieser Arbeit stimmen, abgesehen von unwesentlichen Änderungen im zweiten Kapitel, mit denen der unter demselben Titel erschienenen Dissertation des Verf. (Göttingen, 1911) überein, die im Jahrbuch **42** nur mit dem Titel erwähnt ist, weil der Verf. kein Exemplar der Schriftleitung übersandt hatte.

Lp.

E. V. HUNTINGTON. A simple formula for the angle between two planes. American Math. Monthly 20, 182-185.

Es sei P irgendein Punkt auf einer Fläche $z = f(x, y)$, und die Tangentialebene in P schneide die durch P parallel zu den Ebenen XZ und YZ gelegten Ebenen in den Geraden PA und PB. Die Winkel φ_x und φ_y, welche PA und PB mit der Horizontalebene bildet, sind bestimmt durch $\tan \varphi_x = \frac{\partial z}{\partial x} = p$ und $\tan \varphi_y = \frac{\partial z}{\partial y} = q$. Dann ist der in Rede stehende Winkel γ, den die Tangentialebene in P mit der XY-Ebene bildet, durch die leicht zu merkende Formel gegeben:

$$\tan^2 \gamma = \tan^2 \varphi_x + \tan^2 \varphi_y.$$

Für diese Formel, aus der der bekannte Wert für $\cos \gamma$ sofort folgt, werden zwei einfache elementare Beweise gegeben. Gd.

R. ACKERMANN. Böschungsstrahlen und Böschungsflächen. Diss. Halle-Wittenberg 1913. 71 S.

Böschungsstrahlen einer Fläche (ergänze: in bezug auf eine feste xy-Ebene) sind die Schnittgeraden zweier benachbarten Tangentialebenen, die gegen die feste Ebene gleiche Neigung haben. Sie bilden ein System von ∞^2 Strahlen. Alle Strahlen, die dieselbe Neigung haben, erzeugen eine Böschungsfläche. In der Arbeit werden die allgemeinen Formeln der Strahlensysteme für diesen Fall spezialisiert. Von den dadurch gefundenen Sätzen seien folgende angemerkt.

Auf jeder der beiden Brennflächen sind die Isophoten (Kurven konstanter Neigung) und die Fallinien der Fläche zueinander konjugiert. Für ein Normalensystem fallen die Isophoten mit den Schichtlinien zusammen; die zugehörigen Flächen sind die Gesimsflächen. Zum Schluß der Arbeit werden die Böschungsflächen der Flächen zweiten Grades untersucht. Re.

L. S. DA RIOS. Sul profilo verticale del thalweg per alvei curvilinei a fondo mobile. Ven. Ist. Atti 72 [(8) 15], 949-955.

Wenn ein Wasserlauf mit Stromlinien, die einer festen krummen Achse parallel laufen, in einem beweglichen Boden fließt, hängen Krümmung und Wasserhöhe als Funktionen der Bogenlänge der Achse durch eine von Fargue aufgestellte Differentialrelation mit numerischen Koeffizienten zusammen. In der vorliegenden Arbeit wird diese Relation unter einigen speziellen Annahmen über die Krümmung der Achse integriert und also die Höhe als Funktion der Bogenlänge der Achse explizit berechnet. Re.

W. FR. MEYER. Über einen verallgemeinerten Krümmungsbegriff und einen neuen Aufbau der Krümmungstheorie. Deutsche Math.-Ver. 22, 71-96.

Durch einige Zusätze ergänzter Bericht über die Theorie, die der Verf. in der Schrift „Über die Theorie benachbarter Geraden und einen verallgemeinerten Krümmungsbegriff“, Leipzig, B. G. Teubner, 1911 (F. d. M. **42**, 627) veröffentlicht hat.
Re.

E. Bompiani. Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero. Torino Atti **48**, 393-410.

Es handelt sich um eine geeignete Erweiterung der genannten Sätze der elementaren Flächentheorie auf höhere Mannigfaltigkeiten. Es muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden, in der sich auch Literaturangaben über frühere Veröffentlichungen aus demselben Gebiete finden.
Re.

G. Koenigs. Construction des centres de courbure et des plans principaux de l'enveloppe d'une surface solidaire d'un cylindre qui roule sans glisser sur un autre. C. R. **156**, 54-56.

Die allgemeinen Ergebnisse des Verf. zur Theorie des Rollens von Flächen (C. R. **153**, 998; F. d. M. **42**, 581, 1911) können für den Fall der Zylinderflächen ganz wesentlich einfacher gewonnen werden; dies zu zeigen, ist der Zweck der Note.
Sk.

Bioche. Sur certains ombilics. S. M. F. C. R. 1913, 53.

„Es kann vorkommen, daß die Tangentialebene in einem einfachen Punkte m einer Oberfläche diese in einer Kurve schneidet, die in M einen dreifachen Punkt hat. Dieser Punkt ist dann eine Art Nabelpunkt, durch den drei Krümmungslinien und drei Asymptotenlinien gehen.“
Lp.

E. Keraval. Sur une famille de systèmes triplement orthogonaux. C. R. **157**, 905-908.

Wenn eine Flächenschar gegeben ist, für die die Asymptotenlinien des ersten Systems eine Schar von Orthogonalflächen zulassen, ebenso die Asymptotenlinien des zweiten Systems, so gehört die gegebene Flächenschar einem dreifachen Orthogonalsystem an. Die Bestimmung der Flächen dieser Eigenschaft hängt von der Integration zweier simultanen partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung ab, die in den Ableitungen dieser Ordnung linear sind.
Re.

A. Demoulin. Sur une propriété caractéristique des familles de Lamé. C. R. **157**, 1050-1053.

Der von Keraval (vgl. das vorhergehende Referat) gefundene Satz gilt allgemeiner auch dann, wenn statt der Asymptotenlinien irgendein Kurvennetz genommen wird, das zu den Krümmungslinien harmonisch konjugiert ist.
Re.

M. Pieri. Sui sistemi di ∞^1 superficie. Torino Atti **48**, 132-149.

Diese Abhandlung bildet die letzte Arbeit des betrauerten Verfassers. In den letzten Monaten seines zu kurzen Lebens hat er sich mit der Vektorenrechnung nach den Gedankengängen von Burali-Forti und Marcolongo beschäftigt, und dieser Aufsatz beweist, daß er mit der entsprechenden charakteristischen Symbolik vollkommen vertraut war. Den Hauptzweck, welchen er in ihm verfolgte und erreichte, ist die Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit ein einfach unendliches Flächensystem eine Lamésche Familie sei.

La.

J. Haag. Sur certains réseaux sphériques et les systèmes triples orthogonaux qui en dérivent. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **30**, 413-462.

Im Anschluß an seine Dissertation (Ann. de l'Éc. Norm. (3) **27**, 257-337; F. d. M. **41**, 696, 1910) betrachtet der Verf. sphärische Netze, die als gemeinsame sphärische Abbildung aller Flächen derselben Laméschen Familie dienen können; er bestimmt einzelne solcher Netze und untersucht die zugehörigen dreifach orthogonalen Systeme. Darunter befinden sich speziell solche, die als Flächen eine willkürliche Schar von Kugeln enthalten, deren Mittelpunkte alle auf einer Geraden gelegen sind. Durch geometrische Addition eines solchen Systems und eines zyklischen Systems erhält man das allgemeinste der hier betrachteten Systeme. Auch isotherme Netze befinden sich darunter. Als Einzelheit sei noch erwähnt, daß die Fläche

$$e^{ax}(\cos by - \cos cz) = 1$$

mit der Nebenbedingung

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

bei einer Translation parallel zur x-Achse eine Lamésche Familie erzeugt.

Re.

H. D. Thompson. The identical relations between the elements of any oblique triple system of surfaces. American J. **35**, 427-430.

Zwischen den Koeffizienten des Quadrates des Linienelements eines Raumes, der durch ein dreifaches Orthogonalsystem von Flächen zerlegt wird, bestehen bekanntlich die von Lamé zuerst aufgestellten Differentialgleichungen. In dem allgemeineren Falle des dreifachen schiefwinkligen Systems bestehen ebenfalls sechs Gleichungen, die der Verf. explizit berechnet; sie enthalten die partiellen Ableitungen jener Koeffizienten nach den drei Parametern der Flächen bis zur zweiten Ordnung, sind jedoch zu kompliziert, als daß sie hier wiedergegeben werden könnten.

Re.

L. Berwald. Über die Flächen mit einer einzigen Schar zueinander windschiefer Minimalgeraden. Münch. Ber. 1913, 143-211.

Die vorliegende monographische Studie über die von Monge entdeckten nichtzylindrischen (imaginären) Flächen, auf denen beide Scharen von Krüm-

mungslinien in eine einzige zusammenfallen, besteht aus vier Abschnitten. Vorausgeschickt ist eine Einleitung, die unter anderem die Literaturnachweise von 25 Veröffentlichungen über den Gegenstand der Zeit nach geordnet enthält. Der erste Abschnitt, betitelt: Geometrische Ableitung der Eigenschaften der Mongeschen Flächen, enthält eine kritische Zusammenstellung der wichtigsten Sätze über Minimalgebilde (isotrope Kurven und Flächen), aus denen die Haupteigenschaften der Mongeschen Flächen abgeleitet werden. Im zweiten Abschnitt: Von den Parameterdarstellungen der Mongeschen Flächen, wird für die analytische Darstellung folgender Satz zugrunde gelegt:

Wählt man in allen Tangentialebenen einer unebenen isotropen Fläche nach einem analytischen Gesetz je eine Minimalgerade aus, so ist der Ort dieser Minimalgeraden im allgemeinen, d. h. von einem Ausnahmefall abgesehen, der auf die Kugel führt, eine Mongesche Fläche. Je nachdem die isotrope Ausgangsfläche ein Minimalkegel oder die Tangentenfläche einer krummen Minimalkurve ist, werden die Mongeschen Flächen in solche erster und zweiter Art unterschieden. Die Flächen erster Art lassen sich so darstellen:

$$\begin{cases} x = \xi_0 + R(u)\left(u + i\frac{1-u^2}{2}v\right), \\ y = \eta_0 + R(u)\left(-iu - \frac{1+u^2}{2}v\right), \\ z = \zeta_0 + R(u)(-1 + iuv), \end{cases}$$

und die Kurvenschar $u = \text{const.}$ ist die eine Schar von Minimalgeraden, $R(u)$ der Hauptkrümmungsradius. Die Gleichung der Flächen erster Art ist also

$$\sqrt{(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2 + (z-\zeta_0)^2}$$
$$= R\left(\frac{\sqrt{(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2 + (z-\zeta_0)^2} + z - \zeta_0}{x - \xi_0 + i(y-\eta_0)}\right).$$

Man erhält alle algebraischen Mongeschen Flächen erster Art, wenn man für $R(u)$ irgendeine algebraische Funktion des Arguments u setzt.

Für die Mongeschen Flächen zweiter Art gilt die Darstellung

$$\begin{aligned} x &= \xi(p) + R(p)\,(q\,\xi'(p) + i\,\xi''(p)), \\ y &= \eta(p) + R(p)\,(q\,\eta'(p) + i\,\eta''(p)), \\ z &= \zeta(p) + R(p)\,(q\,\zeta'(p) + i\,\zeta''(p)); \end{aligned}$$

$p = \text{const.}$ liefert die Schar der Minimalgeraden, $R(p)$ den Hauptkrümmungsradius. Eine andere Darstellung ist folgende:

$$x = i\frac{1-u^2}{2}f''(u) + iu\,f'(u) - i\,f(u)$$
$$+ R(u)\left\{ i\,\frac{1-u^2}{2}\left(vf'''(u) + i\frac{f''''(u)}{f'''(u)}\right) + u\right\},$$

$$y = -\frac{1+u^2}{2}f''(u) + uf'(u) - f(u)$$
$$+ R(u)\left\{-\frac{1+u^2}{2}\left(vf'''(u) + i\frac{f''''(u)}{f'''(u)}\right) - iu\right\},$$

$$z = iu f''(u) - if'(u) + R(u)\left\{iu\left(vf'''(u) + i\frac{f''''(u)}{f'''(u)}\right) - 1\right\}.$$

Man erhält alle algebraischen Mongeschen Flächen zweiter Art, indem man in diesen Formeln für $f(u)$ und $R(u)$ algebraische Funktionen von u setzt.

Es gilt weiter der Satz: Jede algebraische Mongesche Fläche hat als Krümmungsmittelpunktskurve eine algebraisch rektifizierbare (nicht isotrope) krumme Linie oder eine algebraische (krumme) Minimallinie. Umgekehrt ist jede Mongesche Fläche, deren Krümmungsmittelpunktskurve eine der angegebenen Eigenschaften hat, algebraisch. Alle Mongeschen Flächen, die eine gegebene nicht isotrope krumme Linie zur Krümmungsmittelpunktskurve haben, lassen sich zu Paaren von Flächen gleichen Krümmungsmaßes anordnen, ausgenommen, wenn die krumme Linie in einer Minimalebene liegt. Als eine der Folgerungen aus diesen Sätzen sei bemerkt, daß alle Serretschen Flächen (Mongeschen Flächen konstanten Krümmungsmaßes) von zweiter Art sind.

Der dritte Abschnitt handelt von den einfachsten algebraischen Mongeschen Flächen, besonders denjenigen dritter Ordnung. Unter ihnen findet sich keine Serretsche Fläche. Die einfachsten algebraischen Serretschen Flächen sind erst von vierter Ordnung; ihre Krümmungsmittelpunktskurve ist eine Minimalkurve dritter Ordnung.

Der vierte Abschnitt handelt von der isometrischen Abbildung der Mongeschen Flächen erster Art aufeinander und auf die Flächen zweiter Art. Hier wird unter anderem eine besondere Klasse von Mongeschen Flächen bestimmt, die dadurch ausgezeichnet sind, daß jede von ihnen durch eine bestimmte Gruppe von Drehungen um die Spitze des zugehörigen Minimalkegels auf sich selbst abgewickelt wird. Re.

H. Beck. Zur Lehre von den Mongeschen Flächen. Deutsche Math.-Ver. **22**, 226-239.

Unter Mongeschen Flächen werden hier die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden verstanden. An der Hand liniengeometrischer Methoden gelingt es dem Verf., die kartesischen Koordinaten dieser Flächen in folgender, sehr einfacher Gestalt darzustellen:

$$\begin{cases} x = \sin u\,(p'(u) + f(u)) + v\cos u, \\ y = -\cos u\,(p'(u) + f(u)) + v\sin u, \\ z = i\,p(u) + iv; \end{cases}$$

$p(u)$ und $f(u)$ bedeuten willkürliche analytische Funktionen ihres Arguments. Wenn $f \not\equiv 0$, so ist

die mittlere Krümmung gleich $2 : f$,
das Krümmungsmaß gleich $1 : f^2$;

daher ergeben sich die Serretschen Biegungsflächen der Kugel für $f =$ const. Re.

W. Blaschke. Über isometrische Flächenpaare. Deutsche Math.-Ver. **22**, 154-183.

„Zu jedem Paar euklidischer isometrischer Flächen kann man im elliptischen Raume einen Punktort konstruieren, der für die Isometrie in gewissem Sinne charakteristisch ist und als „Drehriß“ der Isometrie bezeichnet werden soll.“ Für kongruent oder symmetrisch bezogene euklidische Flächen reduziert sich der Drehriß auf einen Punkt oder ein Ebenenstück. Auch auf eine Kurve kann sich der Drehriß, der im allgemeinen eine krumme Fläche ist, reduzieren (Regelflächen, die aufeinander abrollen und sich dabei längs einer Erzeugenden berühren). Unterwirft man die isometrischen Flächen zwei voneinander unabhängigen Bewegungen, so führt der Drehriß eine elliptische Bewegung aus. Rücken die beiden isometrischen Flächen einander unendlich nahe, und läßt man gleichzeitig den elliptischen Raum des Drehrisses in einen euklidischen Raum übergehen, so verwandelt sich der Drehriß in die Bianchische assoziierte Fläche der unendlich kleinen Verbiegung.

Zusammenhang des Drehrisses mit den Eulerschen Parametern einer Drehung, die aus zugeordneten Elementen der isometrischen Flächen abgeleitet wird (Name Drehriß). Daher weitgehende Anwendung der Quaternionenrechnung.

Konfiguration von vier Flächen des elliptischen Raumes, die man erhält, wenn man einen „Drehriß“ für isometrische Flächen des elliptischen Raumes zu konstruieren versucht. Man erhält dann nicht eine Fläche, sondern zwei, die wieder isometrisch aufeinander bezogen sind und mit den ersten beiden Flächen in wechselseitiger Beziehung stehen. B.

P. Franck. Die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden als kugelgeometrisches Analogon der abwickelbaren Flächen. Hamb. Mitt. **5**, 49-70.

Durch die Liesche Transformation gehen die abwickelbaren Flächen in die Mongeschen Regelflächen über. Diese Transformation wird im einzelnen durchgeführt und aus ihren Schlußformeln eine Reihe von bekannten Eigenschaften der Mongeschen Flächen aufs neue hergeleitet. Sk.

R. Occhipinti. Su una terza curvatura delle linee di una superficie. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 230-234.

Wie der Verf. in einer vorjährigen Notiz als dritte Krümmung einer Raumkurve den Ausdruck $[(1/T)^2 + (1/R)^2]^{\frac{1}{2}} = 1/S$ definiert hat, so will er jetzt als „dritte geodätische Krümmung“ einer Kurve auf einer krummen Oberfläche die dritte Krümmung der Geodätischen angesehen wissen, welche die Kurve in dem betrachteten Punkte berührt, und leitet die Formel

$$\frac{1}{S} = \frac{\sqrt{\varphi^2 (EG - F^2) + I^2}}{f\sqrt{EG - F^2}}$$

in den Bezeichnungen von Bianchi hierfür ab. Von den weiteren Sätzen werde einer wiedergegeben: Die Summe der dritten geodätischen Krümmungen zweier isogonen Linien durch ein und denselben Punkt der Oberfläche ist konstant, und zwar gleich dem Doppelten der Casoratischen Krümmung in diesem Punkte. Lp.

R. Occhipinti. Un' osservazione sopra una trasformazione. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 266-267.

„Damit zwei zufolge der Gleichheit von Bogen ineinander transformierte Kurven darauf zurückgeführt werden können, daß sie die Hauptnormalen in den entsprechenden Punkten parallel haben, ist notwendig und hinreichend, daß daselbst die dritten Krümmungen gleich sind.“ Lp.

W. W. Denton. Projective differential geometry of developable surfaces. American M. S. Trans. **14**, 175-208.

Analytische Zusammenhänge zwischen den abwickelbaren Flächen und den simultanen Lösungen eines Systems zweier linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wenn gewisse Nebenbedingungen erfüllt sind. Die Arbeit ist von E. Wilczynski angeregt und im Sinne seiner Untersuchungen durchgeführt; vgl. Am. M. S. Trans. **10**, 176; F. d. M. **40**, 663, 1909. Die Ergebnisse sind weder analytisch, noch geometrisch in einfacher Weise darstellbar. Re.

E. Salkowski. Zum Biegungsproblem der Regelflächen. Deutsche Math.-Ver. **22**, 60-71.

Die Biegungstheorie der geradlinigen Flächen bietet Anlaß zu einer Reihe von Bemerkungen zur Theorie der Raumkurven. Es werden besonders betrachtet: die Binormalenflächen, speziell die mit einer zur Striktionslinie äquidistanten Asymptotenlinie, die Regelflächen mit geodätischer Striktionslinie. Zum Schluß wird die Frage beantwortet, wie man eine gegebene Binormalenfläche zu biegen hat, damit eine vorgegebene, auf ihr gelegene Kurve in eine Asymptotenlinie übergehe. Re.

E. Guillemain. Sur la déformation infiniment petite des surfaces réglées à plan directeur. Nouv. Ann. (4) **13**, 262-274.

Die Darstellung, die Haag (Nouv. Ann. (4) **12**; F. d. M. **43**, 699, 1912) für die unendlich kleine Biegung einer allgemeinen geradlinigen Fläche gegeben hat, schloß die Linienflächen mit Richtebene aus; dieser Fall wird hier im einzelnen durchgeführt. Die Erzeugenden solcher Flächen projizieren sich in der Richtebene als Tangenten einer ebenen Kurve; von dieser ausgehend, kommt man unmittelbar zu den Formeln des Verf. und gewinnt gleichzeitig die geometrische Bedeutung der eingeführten Parameter, aus der sich ein Teil der gewonnenen einfachen Ergebnisse sofort ablesen läßt. Sk.

L. de Jong. De transformatie van Bianchi voor de oppervlakken afwikkelbaar op regelvlakken van den tweeden graad. (Die Transformation von Bianchi für die Flächen, welche verbiegbar sind auf Regelflächen zweiten Grades.) Diss. Leiden. 132 S.

Die Arbeit gibt einen neuen und einfachen Beweis für die Hauptsätze, welche zur Transformation von Bianchi für Flächen, die so verbiegbar sind,

daß sie auf Regelflächen zweiten Grades führen (Bianchi, Lezioni di Geom. Diff. Tl. III). Der Beweis beruht im Gegensatze zum Bianchischen, der fast ganz rechnerisch verläuft, auf einer Betrachtung der Kinematik einer Regelfläche zweiten Grades, die auf einer Regelfläche rollt, und mit der eine konfokale Fläche zweiten Grades starr verbunden ist. Als neues Resultat bringt der Verf. den Satz, daß die beiden Klassen, in welchen die Transformation von Bianchi für die Biegungsflächen der Regelflächen zweiten Grades auseinandergeht, durch eine kontinuierliche Veränderung der Transformationskonstante ineinander übergeführt werden können. Schn.

P. Tortorici. Sulle deformazioni infinitesime delle superficie e sul teorema di permutabilità. Palermo Rend. **35**, 289-315.

Ist S eine Fläche, die zwei infinitesimale Deformationen Ω_1, Ω_2 gestattet, durch die ein Punkt P die Verrückungen εa_1, εb_1, εc_1 und εa_2, εb_2, εc_2 erhält, so gibt es auch eine Deformation, die die Verrückung $\varepsilon(ma_1 + na_2)$, $\varepsilon(mb_1 + nb_2)$, $\varepsilon(mc_1 + nc_2)$ herbeiführt, bei beliebigen konstanten m, n. Diese Verrückungen werden ein „Bündel" (Ω) genannt. Bei allen Verrückungen in einem Bündel (Ω) bewegt sich P in einer festen Ebene. Kennt man die Verrückungen für die eine Brennfläche eines W-Strahlensystems, so kennt man sie auch für die zweite Brennfläche.

Bezüglich S seien nun S_1 und S_2 die zweiten Brennflächen der beiden W-Strahlensysteme, die den Deformationen Ω_1, Ω_2 entsprechen, $\bar{S}$ die der Deformation Ω entsprechende. Dann gilt folgender Satz:

Die Tangentialebenen an die ∞^1 Flächen $\bar{S}$ in den entsprechenden Punkten P bilden ein Bündel, dessen Achse r' durch P geht, und ihre Berührungspunkte liegen auf einer Geraden r, die in der Tangentialebene von P an S gelegen ist. Auf jeder Geraden r' kann man auf ∞^1 Weisen einen Punkt P' der Art auswählen, daß die Tangentialebenen der Fläche S', des geometrischen Orts der Punkte P', die Gerade r enthält. Die Flächen S' bilden ein Bündel (S). Zwischen den Bündeln (S) und $(\bar{S})$ besteht der folgende Vertauschungssatz: Jede Fläche von (S) ist eine Moutardsche Transformierte einer beliebigen Fläche von $(\bar{S})$ und umgekehrt; jede Fläche von (S) und jede von $(\bar{S})$ sind Brennflächen eines W-Strahlensystems.

Eine Reihe von Anwendungen dieser Theoreme auf infinitesimale Verschiebungen und Drehungen, auf die Transformation der pseudosphärischen Flächen und dergleichen bilden den Beschluß der Arbeit. Re.

M. Picone. Coppie di superficie conjugate in deformazione. Rom. Acc. L. Rend. $\mathbf{22}_1$, 589-594.

Nach Bianchi (Lezioni di geometria differenziale, III, § 68) heißen zwei Flächen konjugiert in der Deformation, wenn sie punktweise so aufeinander bezogen werden können, daß jedem System der wirklichen oder virtuellen Asymptotenlinien auf der einen Fläche ein ebensolches System auf der andern entspricht. Sie lassen sich dann bekanntlich geodätisch aufeinander abbilden. Die Aufgabe, alle Linienelementquadrate zu bestimmen, die zu solchen Flächen

gehören, ist von Bianchi und von Servant gelöst worden. Die Fläche muß dann entweder auf die eine Evolutenschale einer Fläche konstanten positiven Krümmungsmaßes oder auf eine Fläche zweiten Grades abwickelbar sein. In der vorliegenden kurzen Note wird die Aufgabe nochmals aufgegriffen und durch unmittelbare Integration der Differentialgleichung gelöst, auf die Bianchi das Problem zurückgeführt hatte. Re.

F. Kurth. Herleitung neuer windschiefer Kegelschnitte durch die Bianchische Transformation B_k. Diss. Halle-Wittenberg. 81 S.

Windschiefe Kegelschnitte sind solche gewundenen Kurven, die aus einem gewöhnlichen Kegelschnitt entstehen, wenn dieser, als biegsam, aber unausdehnbar betrachtet, so verbogen wird, daß die Krümmung invariant bleibt. Auf diese Kurven als Grenzfälle bei der Verbiegung der Flächen zweiten Grades ist bekanntlich zuerst Bianchi gekommen. Die Bianchische Transformation in der Biegungstheorie der Flächen zweiten Grades gilt, in gleicher Weise abgeändert, auch für windschiefe Kegelschnitte. In der vorliegenden Dissertation werden die endlichen Gleichungen der transformierten Kegelschnitte mittels elliptischer Funktionen aufgestellt, wobei ein von dem Bianchischen abweichender, direkterer Weg eingeschlagen wird. Re.

L. Bianchi. Formole generali per le superficie riferiti alle loro linee asintotiche con alcune applicazioni. Rom. Acc. L. Rend. 22_1, 403-411.

Es wird folgender allgemeiner Satz bewiesen: Eine beliebige Fläche negativen Krümmungsmaßes ist eindeutig bestimmt, wenn zwei beliebige Asymptotenlinien, je eine aus jeder der beiden Scharen, und das Krümmungsmaß als Funktion der asymptotischen Parameter gegeben sind. Die Anwendungen beziehen sich im wesentlichen auf den Fall, wo das Krümmungsmaß K die Form hat:

$$K = -\frac{1}{(\varphi(u) + \psi(v))^2}.$$

Re.

L. Bianchi. Superficie con un sistema di asintotiche a torsione costante e loro trasformazioni. Rom. Acc. L. Rend 22_1, 475-486.

Über die im vorhergehenden Referat zuletzt erwähnte Klasse (A) von Flächen gilt folgender Satz: Wenn irgend zwei Kurven C und Γ gegeben sind, die durch denselben Punkt gehen, dort eine gemeinsame Schmiegungsebene und entgegengesetzt gleiche Windung haben, so gibt es genau eine Fläche der Klasse (A), die die Kurven C und Γ als Asymptotenlinien enthält. Die Bestimmung dieser Fläche hängt von einer Differentialgleichung vierter Ordnung ab.

Eine Fläche ist ferner bestimmt, wenn willkürlich eine Asymptotenlinie konstanter Windung fixiert und eine Asymptotenlinie des andern Systems willkürlich angenommen wird. Die Bestimmung dieser Fläche hängt von einer Differentialgleichung dritter Ordnung ab. Auf der Asymptotenlinie konstanter

Windung schneiden die Asymptotenlinien des andern Systems proportionale Bogenstücke ab; der Proportionalitätsfaktor ist gleich der Quadratwurzel der Windung.

Aus jeder Fläche mit einem System von Asymptotenlinien konstanter Windung kann mittels einer Bäcklundschen (asymptotischen) Transformation eine einfach unendliche Schar von Flächen derselben Beschaffenheit abgeleitet werden. Diese Transformation enthält noch einen Parameter k. Bei konstantem k kann man stetig mittels einer infinitesimalen Transformation von einer Fläche der Schar zu einer andern übergehen. Hierbei liegen entsprechende Punkte der Flächen auf Bertrandschen Kurven. Eine solche Schar ist bestimmt, wenn man willkürlich eine der Schar angehörige Ausgangsfläche gibt und die Bertrandsche Kurve, die von irgendeinem Punkte der Fläche beschrieben werden soll.

Re.

L. Bianchi. Sui sistemi coniugati permanenti nelle deformate delle quadriche. Rom. Acc. L. Rend. 22_2, 3-10.

Es ist bekannt, daß das bei der Biegung gemeinsame konjugierte System einer Fläche zweiten Grades und ihrer Deformierten auf dieser ein isotherm-konjugiertes System ist. Bezeichnet man es mit u, v, so gilt folgender Satz: Die Tangenten an die Linien $u =$ const. oder an die Linien $v =$ const. bilden ein W-Strahlensystem. Für die Biegungen der reellen oder imaginären Kugel folgt daraus speziell: Auf jeder Fläche konstanten Krümmungsmaßes bilden die Tangenten an den Krümmungslinien des einen oder des andern Systems ein W-Strahlensystem. Der Beweis dieser Sätze und einiger Folgerungen ist der Inhalt der vorliegenden Arbeit.

Re.

L. Rouyer. Sur la déformation des quadriques et les surfaces conjuguées par rapport à un complexe du second ordre. Toulouse Ann. (3) 3, 377-434; Thèse. Toulouse: Privat. 124 S. 4°.

Die umfangreiche Arbeit zerfällt in zwei Teile, einen allgemeineren, in dem eine Methode der Bestimmung der Flächen entwickelt wird, die auf eine gegebene abwickelbar sind, und einen besonderen, auf die Flächen zweiten Grades und ihre Biegungen bezüglichen. In der Arbeit werden eine Menge Einzeluntersuchungen und Anwendungen auf zum Teil bekannte Fälle aneinandergereiht, ohne daß eine eigentliche Fragestellung oder die gewonnenen Ergebnisse irgendwie bezeichnet werden. Dadurch wird nicht nur das Studium der Veröffentlichung ungemein erschwert, sondern es ist dem Referenten auch unmöglich, den Inhalt in einem kürzeren Referat befriedigend anzugeben. Es sei nur erwähnt, daß das (wie es scheint) hauptsächliche Ergebnis die Aufstellung einer Differentialgleichung ist, die eine Reihe von Schlüssen über solche konjugierten Netze gestattet, die sich auf zwei aufeinander abwickelbaren Flächen entsprechen. Die Untersuchungen schließen sich an Guichards bekannte Arbeiten über zyklische Systeme und orthogonale Systeme (Ann. de l'Éc. Norm. 1897, 1898, 1903) an.

Re.

P. Calapso. Intorno alle superficie applicabili sulle quadriche ed alle loro trasformazioni. Palermo Rend. **36**, 141-162.

Die vorliegende Arbeit schließt sich inhaltlich an die unter demselben Titel erschienene Veröffentlichung der Palermo Rend. 32 an (F. d. M. **42**, 641, 1911). Die Ergebnisse lassen sich nicht ohne einen unverhältnismäßig großen Formelaufwand wiedergeben. Es sei also auf das Original verwiesen. Re.

L. P. Eisenhart. Certain continuous deformations of surfaces applicable to the quadrics. American M. S. Trans. **14**, 365-402; Amer. M. S. Bull. (2), **19**, 297.

Diese Arbeit fußt auf den Untersuchungen, die Bianchi im dritten Bande seiner Lezioni di Geometria differenziale gesammelt hat. Es gibt bekanntlich Strahlensysteme, auf deren beiden Brennflächen die Asymptotenlinien einander entsprechen (W-Strahlensysteme), und deren beide Brennflächen außerdem auf dieselbe Fläche zweiten Grades abwickelbar sind. Jede Brennfläche eines W-Strahlensystems läßt aber, wie Guichard gezeigt hat, eine infinitesimale Deformation zu, bei der für den einen Mantel die Richtung der Verschiebung parallel der Normale im zugeordneten Punkte des andern Mantels ist. In der vorliegenden Abhandlung wird nun gezeigt, wie sich mittels dieser bekannten Sätze eine Familie von Flächen angeben läßt, deren jede eine stetige Verbiegung der andern ist und auf eine Fläche zweiten Grades abgewickelt werden kann. Der erste Teil der Arbeit bezieht sich auf die Biegung des reellen hyperbolischen Paraboloids, der zweite auf die des reellen einschaligen Hyperboloids.

Wenn die Beziehung der beiden Schalen vermittelst des W-Strahlensystems bekannt ist (Transformation B_k), so ist eine unendlich kleine Deformation einer Schale durch Quadraturen bestimmbar. Die analytische Untersuchung dieser Deformation führt dazu, ein dreifaches Flächensystem zu bestimmen von der Art, daß die eine Familie von Flächen stetig ineinander und in das hyperbolische Paraboloid (einschalige Hyperboloid) verbiegbar ist.

Bezüglich der Formeln und der noch auftretenden Sonderfälle muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Re.

L. P. Eisenhart. Certain continuous deformations of surfaces applicable to the quadrics. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 18-21.

Bianchi hat eine wichtige Transformation von Oberflächen aufgestellt, die auf Quadriken so abwickelbar sind, daß, wenn S eine dieser Oberflächen ist und $\overline{S}$ eine Transformierte, die zwei entsprechende Punkte M und $\overline{M}$ auf S und $\overline{S}$ verbindenden Geraden eine Kongruenz bilden, für welche S und $\overline{S}$ die Brennflächen sind und die Asymptotenlinien auf diesen Flächen sich entsprechen. Eine die letztere Eigenschaft besitzende Kongruenz heißt eine W-Kongruenz. Ein die W-Kongruenzen betreffender Satz sagt, daß jede Brennfläche eine solche infinitesimale Deformation zuläßt, bei der die Richtung der Deformation in jedem Punkte parallel zu der Normale der andern Brennfläche in dem entsprechenden Punkte ist. Deshalb bringen die Bianchischen Transforma-

tionen der auf Quadriken abwickelbaren Flächen gewisse infinitesimale Deformationen dieser Fläche mit sich. Zweck des Aufsatzes ist der Nachweis, daß man mit Hülfe dieser Transformationen aus einer auf eine Quadrik Q abwickelbaren Oberfläche S eine Folge stetiger Deformierten von S herleiten kann. Solch eine Folge heißt ein „System" Q. Obgleich es einen wesentlichen Unterschied in der Form der Gleichungen macht, je nachdem Q ein Paraboloid ist oder eine Mittelpunktsquadrik, so sind die Ergebnisse in allen Fällen analog.

Lp.

H. Jonas. Sur une transformation qui dépend d'une équation aux dérivées partielles du troisième ordre. C. R. **156**, 1816-1820.

Untersuchung der Transformation, durch die man von einer geeigneten Fläche zu einer solchen andern übergehen kann, daß die entsprechenden Normalen zueinander senkrecht stehen, und überdies die Asymptotenlinien und die konjugierten Netze einander zugeordnet sind. Die Transformation hängt ab von einer Differentialgleichung dritter Ordnung von der Form:

$$\alpha \cdot L + \beta \cdot M + \gamma \cdot N = 0,$$

die also in den Fundamentalgrößen zweiter Ordnung der Ausgangsfläche linear und homogen ist.

Re.

H. Jonas. Über eine Eigenschaft der W-Strahlensysteme. Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 189-191.

Kennt man drei Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\, \partial v} = M\vartheta$$

bei gegebenem M, so liefern in bekannter Weise daraus die Lelieuvreschen Formeln die kartesischen Koordinaten x, y, z einer Fläche durch Quadraturen; kennt man eine vierte Lösung R, so erhält man mittels der Moutardschen Transformation eine zweite Fläche (x_1, y_1, z_1), auf der die Asymptotenlinien denen der ersten entsprechen. Die geometrische Bedeutung der Lösung R geht aus dem folgenden vom Verf. aufgestellten Satz hervor: Die ∞^1 Flächen mit den Koordinaten

$$\bar{x} = \frac{ax + Rx_1}{a + R}, \quad \bar{y} = \frac{ay + Ry_1}{a + R}, \quad \bar{z} = \frac{az + Rz_1}{a + R}$$

schneiden die beiden Scharen von Regelflächen, die die erwähnten Flächen (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) längs der Asymptotenlinien berühren, in ihren Asymptotenlinien zweiter Art.

Re.

M. Picone. Sulle superficie flessibili ed inestendibili deformabili in rigate. Annali di Mat. (3) **22**, 1-61.

Verf. gibt zunächst ein Kriterium dafür an, daß eine gegebene Fläche auf eine geradlinige Fläche abwickelbar ist. Eine solche Fläche ist dadurch gekennzeichnet, daß auf ihr ein System virtueller Asymptotenlinien existiert, von dem

die eine Schar aus geodätischen Linien besteht. Besteht das System der Parameterlinien (u, v) einer Fläche von der Krümmung $-1 : \varrho^2$ aus virtuellen Asymptotenlinien, und ist $EG - F^2 = T^2, \varrho^{\frac{3}{2}}$: $T = r, -\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} = p, -\begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = q$ gesetzt, so besteht die gesuchte Bedingung in der Existenz einer Funktion λ, die den Gleichungen

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \log r}{\partial u} - p = 0,$$
$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \lambda \frac{\partial \log r}{\partial v} + q\,\lambda^2 = v$$

genügt. Eine entsprechende, nur etwas kompliziertere Bedingung ergibt sich, wenn die Koordinatenlinien nicht spezialisiert sind. Die Fläche ist eine Fläche zweiter Ordnung, wenn es zwei unabhängige Funktionen gibt, die den vorigen Gleichungen genügen. Auf diesen Fall und ähnliche Sonderfälle werden die allgemeinen Ergebnisse angewandt. Zur Problemstellung vgl. die Lösung, für die Knoblauch in seinen Grundlagen zur Differentialgeometrie die Hülfsmittel bereitgelegt hat. Sk.

A. V. Bäcklund. Über mehrdeutige Flächentransformationen. Stockholm Vetensk. Ak. Handl. **50**, Nr. 4, 87 S.

Die Abhandlung beschäftigt sich mit der Variation der Konstanten, aufgefaßt als eine geometrische Transformationsmethode. Sie ist nahe verwandt mit früheren Abhandlungen des Verf. („Die in der Mechanik angewandte Variation der Integrationskonstanten, als Liesche Berührungstransformation betrachtet“, in denselben Verhandlungen **46**, Nr. 1, 82 S., 1910; ferner Math. Ann. **11** u. **13**, 1877 u. 1878). I. Über Abbildung partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. § 1. Einiges vom Gebrauch überzähliger Variabeln. § 2. Weiteres über die Abbildung partieller Differentialgleichungen erster Ordnung der Räume von vier Dimensionen auf den dreidimensionalen Raum. § 3. Erweiterung des Vorhergehenden mit nachfolgender Spezialisierung. § 4. Einiges über die Transformation der Nr. 15. Eine Transformation von Jean Clairin. II. Über Kugelkomplexe. § 5. Partielle Differentialgleichungen der Kugelkomplexe. § 6. Eine spezielle Folgerung des Vorstehenden. § 7. Ein Satz über Orthogonalsysteme. § 8. Die vorstehenden Formeln in Kleinschen Koordinaten (Rev. sem. $\mathbf{22}_2$, 114). Lp.

E. J. Wilczynski. On a certain class of self-projective surfaces. American M. S. Trans. **14**, 421-443.

Bei passender Wahl des Achsenkreuzes sei die Gleichung einer analytischen Fläche, nach Potenzen von x, y geordnet, in der Form

$$z = xy + \frac{1}{6}(x^3 + y^3) + \frac{1}{24}(Ix^4 + Jy^4) + \cdots$$

gegeben. Die Größen I, J und ebenso alle folgenden Koeffizienten der Entwick-

lung sind absolute Differentialinvarianten der Fläche. Der Verf. untersucht die Flächen, für die die Invarianten I und J identisch verschwinden.

Es sind verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem eine bestimmte Determinante von Null verschieden ist oder verschwindet. Die Gleichungen der Flächen sind durch projektive Transformation auf eine der folgenden Formen zu bringen:

$$1) \qquad x = y^{\alpha} z^{\beta},$$

wo α, β beliebig anzunehmen sind, ausgenommen $\alpha = 0, \alpha = 1, \beta = 0, \beta = 1, \alpha + \beta = 0, \alpha + \beta = 1, \alpha\beta[(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-2)(\alpha-1)(\beta-1) - 4\alpha\beta]^2 - (\alpha+\beta-1)[(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha-1)(\beta-1)]^2 = 0$.

$$2) \qquad z = \log \frac{y^k}{x^{1/k}},$$

$$3) \qquad z = e^{4(y-2x^2)}.$$

Einige analytische und projektive Eigenschaften der Flächen werden untersucht und Spezialfälle betrachtet. Re.

Z. DE GEÖCZE. Quadrature des surfaces courbes. Ung. Ber. **26**, 1-88.

Die Definition des Inhalts einer krummen Fläche ist bisher gegeben worden 1. als Grenzwert der Oberfläche eines eingeschriebenen Dreieckspolyeders, 2. als obere Grenze der Summe der Projektionen ihrer beliebig gedrehten beliebig kleinen Teile, 3. als $\lim \frac{v}{2r}$, wo v das Volumen des Raumteils, der von den Kugeln vom Radius r um alle Flächenpunkte erfüllt wird, bedeutet, 4. durch Zuordnung ebener Figuren zu den Teilen der Fläche.

Um zu einer möglichst allgemein brauchbaren Definition zu gelangen, wird das erste Verfahren angewendet und dabei dem Dreieckspolyeder eine geeignete Beschränkung auferlegt. Hierbei wird zunächst die parametrische Darstellung zugrunde gelegt; dann aber die Form $z = f(x, y)$ im besonderen studiert. Schr.

Z. DE GEÖCZE. Recherches générales sur la quadrature des surfaces courbes. Ung. Ber. **27**, 1-21, 131-163.

Fortsetzung der vorstehend angezeigten Untersuchungen bei Zugrundelegung der parametrischen Darstellung. Es wird die Bedingung dafür aufgesucht, daß die Oberfläche endlich ist. Schr.

Weitere Literatur.

L. BIANCHI. Sulla teoria delle trasformazioni delle curve di Bertrand e delle superficie pseudosferiche. Mem. Soc. Ital. delle Scienze **18**, 3-98.

M. BOTTASSO. Le curvature negli inviluppi di rette e di piani con applicazione alle polari reciproche di una linea data. Ven. Ist. Atti **72** [(8) **15**], 281-307. Referat S. 639 dieses Bandes.

L. L. DINES. Singular points of space curves defined as the intersections of surfaces. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 166.

L. P. Eisenhart. Transformations of surfaces of Guichard. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 509-510.

W. C. Graustein. Eine reelle Abbildung analytischer komplexer Raumkurven. Diss. Bonn. 107 S. 8°.

G. M. Green. Projective differential geometry of triple systems of surfaces. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 390.

B. Hostinský. Über das absolute Minimum in der Theorie der geodätischen Linien. Časopis **42**, 529-534. (Böhmisch.)

B. Hostinský. Bemerkungen über geodätische Linien auf Rotationsflächen. Časopis **42**, 165-169. (Böhmisch.)

S. Lefschetz. Geometry on ruled surfaces. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 223.

J. Nielsen. Kurvennetze auf Flächen. Diss. Kiel. 58 S. 8°.

A. Pellet. Sur les lignes asymptotiques. Assoc. Franç. (Nimes) **41**, 25-27.

A. Torroja y Miret. Estudio geometrico de la curvatura de las superficies alabeadas en general. Revista R. Ac. de Madrid **11**, 147-160, 242-256, 345-356, 441-460.

E. Turrière. Sur la courbure des lignes et des surfaces. Palermo Rend. **36**, 369-378.

Referat auf S. 637 dieses Bandes.

M. Vegas. Curvatura de líneas y superficies en un punto del infinito. Rev. Soc. Mat. Esp. **2**, 190-193, 220-223, 250-255, 277-283.

Referat auf S. 639 dieses Bandes.

F. Vélísek. Flächen, deren charakteristische Linien zugleich geodätische Linien sind. Časopis **42**, 385-398. (Böhmisch.)

Fr. Velísek. Flächen von konstanter mittlerer Krümmung, bei welchen charakteristische Linien gleiche Torsion haben. Prag. Ber. 1913, Nr. 6, 11 S. (Böhmisch.)

A. Wenzl. Die infinitesimale Deformation der abwickelbaren und Regelflächen. Diss. München. 67 S. 8°.

B. Theorie der algebraischen Raumkurven und Flächen.

H. F. Baker. On some recent advances in the theory of algebraic surfaces. (Presidential address.) Lond. M. S. Proc. **12**, 1-40.

In dieser anziehend geschriebenen Darstellung der geschichtlichen Entwicklung der neueren Theorie der algebraischen Oberflächen erzählt der Verf. zuerst, wie er durch Untersuchungen aus der Theorie der algebraischen Funktionen dazu gekommen ist, sich mit dieser Theorie, die zum Teil der Funktionentheorie, zum Teil der Geometrie angehört, näher zu beschäftigen. In dem dann folgenden, nach theoretischen Gesichtspunkten geordneten Abschnitt begegnen

wir zuerst den Namen Abel und Riemann, danach Clebsch, Brill und Noether. Nun folgen Picard, Cayley, Zeuthen, Berry, Severi, Segre, Humbert, Castelnuovo, Enriques usw. Die Zusammenstellung dieser Forscher zeigt, nach welcher Richtung die Ausführungen gehen. Der Verf. sagt auch S. 27: „Wir haben jetzt versucht, in grobem Umriß einen Bericht über die Hauptleistungen der neuen Theorie zu geben. Zuerst von der Methode, Invarianten einer birationalen Transformation mit Hülfe von Systemen von Kurven zu geben, die auf der Oberfläche liegen; sie stammt im großen und ganzen von italienischen Mathematikern. Sodann von den algebraischen Integralen, einer von Picard herrührenden Methode, und von dem Einfluß, die jede von ihnen auf die andere ausgeübt hat. Eines der praktischen Ergebnisse der vereinigten Theorie ist ein System von Theoremen, das sicherlich noch immer weit davon entfernt ist, vollkommen zu sein; aber es ermöglicht uns, die Oberflächen nach dem Werte ihrer Invarianten zu klassifizieren. Einige dieser Resultate sollen nun noch angeführt werden.“ Wir müssen es uns erlassen, auf die Einzelheiten weiter einzugehen. Lp.

L. S. Dederick. On the character of a transformation in the neighborhood of a point where its Jacobian vanishes. Amer. Math. Soc. Trans. **14**, 143-148; Amer. M. S. Bull. (2) **19**, 169-170.

Es liege die Transformation $T: y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ zugrunde, wo in einem gewissen Bereiche der x die Funktionen eindeutig seien, und überdies entweder (A) analytische Funktionen komplexer Variabeln oder (B) reelle Funktionen reeller Variabeln, mit stetigen partiellen ersten Ableitungen. Ferner sei $I(x)$ die Jacobiana $\frac{D(\varphi)}{D(x)}$. In der Nachbarschaft eines „inneren“ Punktes (a), wo $I(a) \neq 0$, ist der Charakter von T bekannt; es besitzt dann T eine eindeutige Umkehrung T', die mit T die Eigenschaft (A) oder (B) gemein hat.

Sind die x durch funktionale Relationen verknüpft, so werden die gegenseitigen Ableitungen der x vermöge T linear transformiert in entsprechende Ableitungen der y.

Hierbei ist im Falle (B) vorauszusetzen, daß die φ_i stetige Ableitungen von genügend hoher Ordnung besitzen. Im besonderen ist also in der Nachbarschaft des Punktes (a) die Transformation T als eine angenähert projektive anzusehen. Solche Punkte heißen regulär, dagegen singulär, wenn $I(a) = 0$.

Für singuläre Punkte gilt zunächst der Satz: „Wenn in der Nachbarschaft von (a) die φ eindeutig und analytisch sind, $I(a) = 0$, aber $I_1(x) = \frac{D(I, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0$, dann läßt sich die Nachbarschaft von (a) so wählen, daß T in drei einfachere Transformationen zerlegbar ist, von denen die erste und dritte regulär und analytisch sind, und die zweite T_1 besteht aus $y_1' = x_1'^2, y_i' = x_i (i = 2, \ldots, n)$.“

Dieser Satz gilt im wesentlichen auch, wenn die φ reell sind. Man hat dann nur vorauszusetzen, daß sie eindeutig sind und stetige partielle Ableitungen der vierten Ordnung besitzen in der Nachbarschaft von (a).

Eine Modifikation tritt ein, wenn die φ stetige partielle Ableitungen der zweiten Ordnung besitzen. Es ist dann T wiederum zerlegbar in drei Transformationen, von denen die erste regulär ist, die zweite T_1, und die dritte ein

nicht verschwindendes I besitzt, aber im allgemeinen zweiwertig ist. Am Schlusse bemerkt der Verf., daß es ihm nicht möglich gewesen ist, für die Reduktion von T auf T_1 eindeutige Transformationen aufzustellen, wenn die Stetigkeit der vierten Ableitungen in T aufgegeben wird.

Man vergleiche das Referat über die verwandten, noch weitergehenden Untersuchungen von Clements (S. 471 dieses Bandes). My.

R. Weitzenböck. Zur Differentialgeometrie algebraischer Flächen. Monatsh. f. Math. u. Phys. **24**, 243-267.

Es handelt sich um die Untersuchung von regulären Punkten auf algebraischen Flächen n-ter Ordnung F_n. Bedeuten x_1, x_2, x_3, x_4 homogene rechtwinklige Punktkoordinaten, so empfiehlt es sich, um die Methoden der Symbolik quaternärer Formen zur Anwendung zu bringen, die Fläche durch eine irreduzible Gleichung $F(x_1, \ldots, x_4) \equiv (ax)^n = 0$ als gegeben anzunehmen, wo Veränderliche und Koeffizienten gewöhnliche komplexe Größen sind.

Das wesentlichste Hülfsmittel besteht in einem Übertragungsprinzip (§ 8), das einen Zusammenhang zwischen quaternären und denjenigen binären Differentialformen herstellt, durch die die verschiedenen Fortschreitungsrichtungen im Tangentenbüschel eines Flächenpunktes gegeben werden.

Einige Bezeichnungen sind vorerst zu erklären. Der Index i laufe von 1 bis 4. Ein Faktor erster Art $(ab) \equiv (ba)$ ist die Summe $\sum a_i b_i$.

Ein Faktor zweiter Art oder Klammerfaktor $(abcd)$ ist die Determinante (a_i, b_i, c_i, d_i). Zwischen den Faktoren erster und zweiter Art bestehen drei grundlegende Identitäten (a), (b), (c). Ferner sei $(ab)_{ik} = a_i b_k - a_k b_i (i \neq k)$. Die Summe $\sum (ab)_{ik} (cd)_{ik}$ wird abgekürzt in $((ab)(cd))$; dieser Ausdruck ist gleich $(d)(ac)(bd) - (ad)(bc)$; statt der Summe $\sum (ab)_{ik} (cd)_{mn}$ darf $(abcd)$ gesetzt werden. Die vier Determinanten der Matrix (b_i, c_i, d_i) werden mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ bezeichnet. Bedeuten die u das Entsprechende für die Matrix (y_i, z_i, t_i), so schreibt man $\sum (bcd)_i (yzt)_i = ((bcd)(yzt))$, ein Ausdruck, der sich (f) als dreireihige Determinante der $(by) \ldots$ darstellen läßt. Verschwindet endlich ein Ausdruck $F \equiv F(x_i, y_i, \ldots, u_i, v_i, \ldots)$ für alle x_i, so dient dafür das Zeichen $F \equiv 0 \; \{x\}$. Zunächst wird ein eigentlicher, regulärer Flächenpunkt $(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ untersucht, wo $x_4 = 1$, oder in symbolischer Form

$$(lx) \equiv 0 \,.\, x_1 + 0 \,.\, x_2 + 0 \,.\, x_3 + 1 \,.\, x_4$$

festgesetzt wird.

Dagegen heißt ein Punkt (y) mit $y_4 = 0$ ein uneigentlicher Punkt; die uneigentliche Ebene l ist gegeben durch $(lx) \equiv x_4 = 0$. Der Kugelkreis I ist der Schnitt von $(l_x) = 0$ mit der Fläche $\Phi_{xx} \equiv (xx) = \sum x_i^2 = 0$; in Ebenenkoordinaten u ist seine Gleichung $\Phi_{uu} \equiv u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \equiv (u/u) = 0$, und in Linienkoordinaten π: $\pi_{14}^2 + \pi_{24}^2 + \pi_{34}^2 = 0$.

Wie gewöhnlich dient als Ausgangspunkt die „Schnittpunktegleichung“ für die Schnittpunkte einer irreduziblen Fläche $F \equiv (ax)^n = 0$ mit einer Geraden $(y + \lambda z)$, woraus sich sofort die Gleichung einer Tangentialebene von F ergibt.

Durch einen Flächenpunkt (y) gehen zwei dreipunktig berührende Tangenten, die Haupttangenten oder Asymptoten; die Differentialgleichungen der Haupttangentenkurven stellen sich symbolisch einfach dar. Sodann werden

die Minimalrichtungen und Hauptkrümmungsrichtungen aufgestellt und die sphärische Abbildung entwickelt.

Darauf wird der Zusammenhang der hier entwickelten symbolischen Darstellungsweise der Fortschrittsrichtungen auf F von einem Punkte (y) aus mit der sonst in der Flächentheorie gebräuchlichen Formelsprache erörtert. Bei der letzteren hat man es mit binären (quadratischen) Differentialformen zu tun, hier dagegen zuvörderst mit quaternären Differentialformen in den dy_i, die erst vermöge zweier in den dy_i linearen und homogenen Beziehungen auf das binäre Gebiet reduziert werden. So z. B. tritt die Form $(ady)^2(ay)^{n-2}$ an Stelle der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung L, M, N.

Sei weiter $M \equiv (mdy)^k$ eine quaternäre Differentialform vom Grade k in den dy. Vom Punkte (y) gehen vermöge $M = 0$ k Fortschreitungsrichtungen aus, deren uneigentliche Punkte, d. h. Treffpunkte mit der uneigentlichen Geraden γ der Tangentialebene v durch die Gleichung bestimmt werden:

$$M' \equiv (muvl)^k = 0.$$

Daraus entspringt ein fruchtbares Übertragungsprinzip zwischen binären und quaternären Differentialformen. Es seien $M \equiv (m\,dy)^k$, $N \equiv (n\,dy)^r, \ldots$, quaternäre Formen, $M' \equiv (t\mu)^k$, $N' \equiv (t\nu)^r, \ldots$ die zugehörigen binären Formen im Tangentenbüschel durch (y). Ist dann φ eine Kovariante (Invariante) der $M', N', \ldots$, so erhält man die zugehörigen quaternären Bildungen, wenn man die symbolischen Faktoren $(\mu\nu)$ und $(t\mu)$ durch $(mn\,vl)$ und $(m\,dy)$ ersetzt. Damit lassen sich die In- und Kovarianten der vier fundamentalen binären quadratischen Formen, die den Haupttangentenrichtungen, Minimalrichtungen, Hauptkrümmungsrichtungen, endlich den Richtungen, deren sphärische Bilder Minimalrichtungen sind, entsprechen, durch die korrespondierenden quaternären Bildungen ausdrücken.

Aus den so gewonnenen Formeln wird eine Reihe bemerkenswerter geometrischer Folgerungen gezogen, so die Existenz von wenigstens einer algebraischen Krümmungslinie auf F, das Kriterium für eine Minimalfläche F, die Krümmungsradien der Normalschnitte u. a. m.

Am Schlusse wird noch ein Beispiel für eine höhere (kubische) quaternäre Differentialform gegeben. Es gibt durch den Punkt (y) drei Tangenten an „D-Linien" auf F, deren Schmiegungsebenen durch die Flächennormale von (y) gehen. Die Differentialgleichung dieser „D-Linien" der Normalschnitte" wird aufgestellt.

Durch vorliegende Abhandlung eröffnet sich eine neue fruchtbare Anwendung der Invariantensymbolik auf die Differentialgeometrie. My.

H. P. Hudson. On binodes and nodal curves. Proc. 5. Intern. Math. Congr. 2, 118-121.

„Der erste Teil dieser Note zeigt, daß ein Binod mit Hülfe zweier nicht singulären Oberflächen erforscht werden kann, die sich den getrennten Schalen der gegebenen Oberfläche nähern. Die Biplanen sind die einfachsten solcher Oberflächen, und wenn der Binod ein B_i ist, d. h. die Klasse der Oberfläche um i Einheiten verringert, dann kann die Approximation bis zur Ordnung $i-2$ gebracht werden. Dies führt zu einer recht geeigneten algebraischen Definition

eines B_i. Der zweite Teil untersucht die Verringerung der Klasse durch eine allgemeine Knotenkurve. Gelegentlich wird die Anzahl der Klemmpunkte (pinch-points) bestimmt.“ Lp.

H. P. Hudson. On pinch points. Quart. J. **44**, 161-166.

Zu den über diese Punkte in Bassets Arbeiten gegebenen Untersuchungen, die ebenfalls im Quart. J. veröffentlicht sind, werden einige Ergänzungen und Berichtigungen gegeben (vgl. F. d. M. **46** u. **47**, 1906 u. 1907, und spätere Jahrgänge). Lp.

L. Godeaux. Sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques ayant mêmes genres arithmétique et linéaire. Torino Atti **48**, 77-87.

Beweis des folgenden Satzes: F^* und F seien zwei algebraische Flächen, welche dasselbe arithmetische Geschlecht p_a und dasselbe lineare Geschlecht $p^{(1)}$ haben; ihre geometrischen Geschlechter seien p_g^* und p_g. Man setze ferner voraus, daß $p_a > 0$, $p_g^* > 1$, $p_g > 1$ ist, und endlich, daß zwischen den beiden Flächen eine algebraische Korrespondenz $(1, n)$ besteht, wo n eine Primzahl ist. Unter diesen Voraussetzungen ist $p^{(1)} = 1$, $p_g^* = p_g$, und die auf F bestehende Involution von der Ordnung n ist eine „zyklische“. La.

L. Godeaux. Sur les involutions de genres $p_a = P_4 = 1$ existant sur une surface algébrique de genres $p_a = p_g = p^{(1)} = 1$, $P_2 > 1$. Math. Ann. **74**, 313-318.

L. Godeaux. Sur les involutions cycliques d'ordre 2^a et de genres un **sur une surface de genres un.** Gött. Nachr. 1913, 433-440.

L. Godeaux. Sur les involutions appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$. S. M. F. Bull. **41**, 178-194.

Man vgl. eine voraufgehende Arbeit des Verf. (Referat vorstehend). Es mögen zwei algebraische Flächen vorliegen mit gleichem arithmetischen Geschlecht $p_a > 0$, mit gleichem linearen $p^{(1)}$, sowie zwei geometrischen Geschlechtern $p_g > 1$. Besteht dann zwischen den Flächen eine rationale Korrespondenz $(1, n)$, so ist $p^{(1)} = 1$, und die auf der einen Fläche durch die Korrespondenz bestimmte Involution I_n der Ordnung n ist eine zyklische, und für beide Flächen hat dann auch p_g denselben Wert.

Es handelt sich um die Ausdehnung dieses Satzes auf den Fall $p_g = 1$. Die Korrespondenz $(1, n)$ bestehe zwischen einer Fläche F_1 mit $p_a = P_4 = 1$ (d. h. mit einer kanonischen Kurve der Ordnung Null) und einer Fläche F mit $p_a = p_g = p^{(1)} = 1$, $P_2 > 1$ (d. i. die eine einzige kanonische, elliptische Kurve besitzt). Damit befindet sich auf F eine I_n, gebildet aus den Gruppen von n Punkten, die den Punkten von F_1 entsprechen. Dann gilt, daß eine Involution mit $p_a = P_4 = 1$ auf einer Fläche F mit $p_a = p_g = p^{(1)} = 1$, $P_2 > 1$ eine zyklische ist. Man betrachte die elliptischen Kurven C einer linearen Schar $|C|$

auf F. Indem man zwischen F und einer F_1 die obige Korrespondenz herstellt, hat man drei Fälle zu unterscheiden.

(a) Die Gruppen von I_n haben einen Punkt auf einer C, während die übrigen $n-1$ Punkte eine irreduzible Kurve K beschreiben;

(b) wie bei (a), nur daß K reduzibel ist;

(c) die Gruppen von I_n haben alle ihre Punkte auf C.

Es läßt sich aber zeigen, daß die Annahme eines der beiden ersteren Fälle auf Widersprüche führt. Somit ist jede Kurve C von $|C|$ der Ort von ∞^1 Gruppen von I_n. Jeder Kurve C korrespondiert auf F_1 eine elliptische Kurve C_1, die einen Büschel $|C_1|$ erzeugt.

Indem der Verf. den in der zitierten Arbeit verfolgten Gedankengang dem vorliegenden Falle anpaßt, kann er zeigen, daß, wenn bei gegebener Fläche F_1 die Fläche F existiert, die Involution I_n eine zyklische sein muß. Man kann nämlich ein Polynom H finden, das rational in $h = x/y$ ist. Die Fläche F ist dann darstellbar durch $x f(xyz) + y\varphi(xyz) = 0, u^n = H$.

Die periodische Kollineation $x' = x, y' = y, z' = z, u' = \varepsilon u$ (ε primitive n-te Einheitswurzel, n Primzahl) läßt die Fläche F ungeändert und erzeugt auf ihr die Involution I_n.

Wir gehen zur zweiten Abhandlung über.

Andrerseits hat Enriques gezeigt (Acc. Bologna 1910, das Ref. in den F. d. M. fehlt), daß eine Involution mit den beiden Geschlechtern Eins auf einer Fläche mit den beiden Geschlechtern Eins zyklisch oder mit einer zyklischen Involution zusammengesetzt ist. Der Verf. gab (F. d. M. **43**, 712, 1912) die wesentliche Ergänzung, daß die Ordnung einer solchen Involution nur die Zahlen 2 und 3 als Primfaktoren besitzen kann; liegt also eine rationale Korrespondenz $(1, n)$ zwischen zwei Flächen F, F_1 (jeweils mit $p_a = p_g = 1$) vor, so ist $n = 2^\alpha 3^\beta$ $(\alpha, \beta \geqq 0)$.

Der Verf. beweist nun weiter, daß im besonderen Falle einer zyklischen Involution von der Ordnung 2^α der Exponent α höchstens gleich drei sein kann. Die Unterfälle $\alpha = 2, 3$ werden eingehend untersucht.

Für $\alpha = 2$ läßt sich eine birationale Transformation konstruieren zwischen den Involutionsgruppen und den Punkten einer „Fläche" der Ordnung $2\varrho - 2$ in einem R_ϱ, mit überebenen Schnitten vom Geschlecht ϱ, die ferner vier biplanare Knotenpunkte zweiter Art nebst zwei konischen besitzt.

Für $\alpha = 3$ läßt sich eine analoge Transformation T aufstellen, und die bezügliche Bildfläche besitzt dann zwei biplanare Knotenpunkte sechster Art, einen solchen zweiter Art und einen konischen Knotenpunkt.

Ein Analogon zu dem obigen Satze, daß die Involutionsordnung $n = 2^\alpha 3^\beta$ sein muß, existiert, wie in der dritten Arbeit gezeigt wird, auch für die Involutionen mit $p_a = p_g = 0, P_6 = 1$ auf einer Fläche mit denselben Charakteren. Eine solche Involution erweist sich zunächst wiederum als zyklisch oder mit einer zyklischen Involution zusammengesetzt, und ihre Ordnung n ist wiederum gleich $2^\alpha 3^\beta$.

Die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ werden eingehend untersucht. My.

L. Godeaux. Sur les involutions de genres un existant sur une surface de genres un. Belg. Bull. Sc. 1913, 310-328.

Wenn eine Involution des Geschlechtes 1 von Primzahlordnung n auf einer Oberfläche vom Geschlecht 1 vorhanden ist, so kann die Ordnung dieser Oberfläche keine andere sein als 2 oder 3. Ist n keine Primzahl, so kann n nur die Primfaktoren 2 und 3 enthalten (vgl. C. R. **155**; F. d. M. **43**, 712, 1912).

Mn. (Lp.)

L. Godeaux. Classification des involutions de genres un appartenant à une surface de genres un. C. R. **156**, 1737-1739.

Die kurze Note enthält ohne Beweis die gesuchte Klassifikation. Sk.

L. Godeaux. Sur les involutions appartenant à une surface de genres zéro et de bigenre un. C. R. **156**, 1306-1307.

Beweis des Satzes: Eine Involution I_n n-ter Ordnung und von den Geschlechtern $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, die einer Oberfläche F von den Geschlechtern $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ angehört, ist 1. zyklisch oder mit einer zyklischen Involution zusammengesetzt, 2. ihre Ordnung läßt als Primfaktoren nur 2 und 3 zu.

Lp.

L. Godeaux. Sur les surfaces algébriques possédant un faisceau elliptique de courbes de genre deux. Math. Ann. **74**, 309-311.

Nachtrag der vorjährigen Note (F. d. M. **43**, 712, 1912). „Wenn eine algebraische Oberfläche, die einen elliptischen Kurvenbüschel vom Geschlecht 2 enthält, die kanonischen Kurven irreduzibel und das geometrische und das lineare Geschlecht größer als 1 hat, so ist sie von dem Geschlecht $p_g = \varepsilon + 1$ oder ε, $p_a = \varepsilon - 1$, $p^{(1)} = 2\varepsilon + 1$, wo ε eine positive Zahl ist. Lp.

L. Godeaux. Sur les surfaces possédant un faisceau irrationnel de courbes hyperelliptiques de genre trois. Prag. Ber. 1913, Nr. 10, 6 S.

Beweis des Theorems: Wenn eine algebraische Fläche, deren lineares Geschlecht größer als 1 ist, einen Büschel vom Geschlechte $p > 0$ der hyperelliptischen Kurven vom Geschlechte 3 enthält, so gelten für diese Fläche folgende Relationen:

$$p_a = p_g - p - \varepsilon,\ p^{(1)} = 2p_g + 2p + 2\pi - 3 - 2\varepsilon,\ p_g \leqq 3\pi - 6p + 9.$$

Dabei sind $p_a, p_g, p^{(1)}$ das arithmetische, das geometrische, das lineare Geschlecht, π eine Zahl größer als $2p - 1$, und ε eine ganze Zahl im Intervalle $(0, 3)$.

Pe.

L. Godeaux. Sur des involutions appartenant à certaines surfaces régulières de genre $p^{(1)} = 1$. Belg. Bull. Sc. 1913, 1094-1108.

Geschichtliches und Bezeichnungen. Drei Sätze über Involutionen von Primzahlordnung, von denen der Verf. zeigt, daß sie zyklisch sind.

Mn. (Lp.)

L. Godeaux. Démonstration nouvelle et extension d'un théorème de M. G. Koenigs. Ens. math. **15**, 310-318.

I. Wenn eine algebraische Oberfläche aus S_r zwei Büschel rationaler Kurven enthält, so ist sie rational und kann auf der Ebene so abgebildet werden, daß den Kurven des einen Büschels die Strahlen eines Strahlenbüschels entsprechen und den Kurven des andern rationale Kurven von einer gewissen kleinstmöglichen Ordnung μ, die $(\mu - \nu)$-mal durch den Mittelpunkt des Strahlenbüschels gehen (ν ist die Anzahl der den Büschelkurven gemeinsamen Punkte), und deren Vielfachheiten in zwei Basispunkten, die von dem Mittelpunkt des Strahlenbüschels verschieden sind, nie eine ν überschreitende Summe haben. Ferner sind keine ν-fachen Basispunkte vorhanden, und es kann nur ein einziger Basispunkt mit einer $\frac{1}{2}\nu$ übersteigenden Vielfachheit vorkommen (außerhalb des Strahlenbüschels). Die Kurven, welche die überebenen (hyperplanes) Schnitte der Oberfläche abbilden, gehen nie durch zwei Basispunkte des Kurvenbüschels von der Ordnung μ, deren Summe der Vielfachheiten ν ist, mit Vielfachheiten, deren Summe die Ordnung einer rationalen Kurve des dem Strahlenbüschel entsprechenden Büschels übertrifft.

II. Wenn eine algebraische Oberfläche zwei Büschel von Kegelschnitten enthält, so ist sie rational, und zwar entweder die Veronesesche Fläche aus S_4 oder die Fläche achter Ordnung mit überebenen elliptischen Schnitten, die das System der ebenen Quartiken mit zwei Doppelpunkten abbildet, oder die eine der Projektionen dieser Flächen.

III. Wenn eine algebraische Oberfläche einen Büschel von Kegelschnitten und einen Büschel rationaler kubischer Kurven enthält, so ist sie rational, und zwar eine Oberfläche zwölfter Ordnung aus S_{11} mit überebenen Schnitten vom Geschlecht 2, oder eine Oberfläche elfter Ordnung aus S_{10} mit Schnitten vom Geschlecht 2, oder eine Fläche achter Ordnung aus S_8 mit elliptischen Schnitten (die das System der ebenen Kurven dritter Ordnung mit einem Basispunkte abbildet), oder eine kubische Regelfläche aus S_4, oder eine Projektion dieser Oberflächen.

Lp.

L. Godeaux. Sur les surfaces algébriques contenant un faisceau irrationnel de courbes hyperelliptiques de genre supérieur à deux. Revista R. Ac. de Madrid **12**, 133-191.

A. Rosenblatt. Sur les surfaces algébriques qui possèdent un faisceau irrationnel de courbes de genre 2. C. R. **156**, 290-292.

Die Flächen mit der Bedingung $p_g < 2p_a + 4$ besitzen (wenn sie existieren) einen Büschel vom Geschlecht $p_g - p_a$ von Kurven des Geschlechtes 2. Dagegen im Falle $p_g = 2p_a + 4$ besitzt die Fläche zwei Kurvenbüschel vom Geschlechte $p_g - p_a - 2$ oder 2. Mit Hülfe des kanonischen Systems lassen sich indessen noch genauere Sätze ableiten für irreguläre Flächen mit beliebigen Geschlechtern, die einen irrationalen Büschel von Kurven des Geschlechtes 2 besitzen.

Ist nämlich das Geschlecht $\pi' < p_g - p_a$, so ist es entweder gleich $p_g - p_a - 1$, und die Fläche besitzt dann ein ∞^1 algebraisches System von isolierten Kurven; oder aber es ist $\pi' = p_g - p_a - 2$, dann setzt sich das algebraische System aus ∞^2 isolierten Kurven zusammen. Im ersteren Falle ist das System elliptisch.

Die Fläche besitzt dann noch einen zweiten elliptischen Kurvenbüschel.

Im zweiten Falle ist die das System $\{C\}$ repräsentierende Fläche eine hyperelliptische Picardsche Fläche. Die Fläche F besitzt somit entweder einen hyperelliptischen Büschel vom Geschlecht 2 oder aber zwei elliptische Büschel.

Im allgemeinen ist daher für eine Fläche mit einem Büschel von Kurven des Geschlechts 2 das Geschlecht $\pi' = p_g - p_a$, wobei die Moduln dieser Kurven auch konstant sein können.

Es wird dann noch die Koinzidenzkurve D der auf F existierenden Involution I_2 untersucht, wobei sich verschiedene bemerkenswerte Relationen zwischen den invarianten Charakteren von D und von F ergeben. My.

A. Rosenblatt. Sur les surfaces irrégulières dont les genres satisfont à l'inégalité $p_g \geqq 2(p_a + 2)$. C. R. **156**, 42-43.

Die Oberflächen, deren Geschlechter der Ungleichheit $\pi' \gtreqqless \frac{1}{2}(p_g - 2p_a)$ genügen, besitzen einen Büschel vom Geschlecht $p_g - p_a$, dessen Kurven vom Geschlecht 2 sind. Es sei nun $p_g = 2p_a + 4$; dann zeigt sich, daß, wenn das Geschlecht des Büschels kleiner als $p_g - p_a$ ist, und wenn die Kurven des Büschels hyperelliptisch vom Geschlecht 2 sind, die Oberfläche noch einen andern Büschel vom Geschlecht 2 besitzt, und zwar von unisekanten Kurven in bezug auf die Kurven des ersten Büschels. Lp.

A. Rosenblatt. Sur les surfaces irrégulières dont les genres satisfont à l'inégalité $p_g \geqq 2(p_a + 2)$. Palermo Rend. **35**, 237-244.

Fortsetzung der Betrachtungen, die der Verf. im Vorjahre angestellt hat (F. d. M. **43**, 709-712, 1912). Als Schlußergebnis wird ausgesprochen: Die Oberflächen mit $p_g > 2p_a + 4$ existieren nicht. — Die charakteristischen Zahlen für solche Flächen, bei denen $p_g = 2p_a + 4$ ist, sind in einem besonderen Paragraphen abgeleitet. Lp.

V. Snyder. Algebraic surfaces invariant under an infinite discontinuous group of birational transformations. (Second Paper.) Amer. Math. Soc. Trans. **14**, 105-108; Amer. M. S. Bull. (2) **19**, 302.

Man vgl. die „erste" Abhandlung (F. d. M. **41**, 739, 1910). Rosenblatt (F. d. M. **43**, 711, 1912) gibt zwei Beispiele algebraischer Flächen, die gegenüber einer unendlichen diskontinuierlichen Gruppe G birationaler Transformationen invariant sind, ohne Enveloppen von F_2 zu sein. Die vom Verf. früher untersuchten, zu solchen G gehörenden Flächen waren jene, die eine gewöhnliche elliptische Korrespondenz (2, 2) bestimmen.

Die Rosenblattschen Flächen besitzen einen Büschel elliptischer Kurven; die Koordinaten eines Flächenpunktes sind rational darstellbar durch zwei Parameter u, v elliptischer Funktionen, und die Transformationen sind linear in den u, v.

Der Verf. betrachtet eine Fläche, deren Gleichung von der Gestalt ist:

$$\sum_{k=0}^{n} F^{n-k}\, x^k\, \varphi_{2k}(z, t) = 0,$$

wo $F \equiv x^3 - ty(y-x)$, und φ_{2k} eine binäre Form der Ordnung $2k$ ist.

Die Fläche besitzt drei n-fach zählende Geraden, deren gemeinsamer Punkt $(0, 0, 0, 1)$ ein uniplanarer Punkt der Ordnung n ist. Der Ebenenbüschel $t = mz$ durch die Gerade $z = 0, t = 0$ schneidet die Fläche in n kubischen Kurven eines Büschels B, dessen Basispunkte auf der Geraden $x = 0, t = mz$ liegen. In den Punkten $S(0, 0, 1, m)$ und $T(0, 1, 1, m)$ schneiden sich die Kurven des Büschels B einfach, in $U(0, 1, 0, 0)$ hat jede Kurve einen Wendepunkt mit gemeinsamer Wendetangente. Jeder Punkt $P(x_1, y_1, z_1, t_1)$ der Fläche bestimmt eine Ebene des Büschels $t = mz$, in der eine einzige, durch P gehende, auf der Fläche befindliche kubische Kurve liegt. Es bedeute S die birationale Operation, die P auf diese Kurve von S aus projiziert, so daß $S^2 = 1$. Die Projektion jeder Büschelkurve von T oder U aus auf sie selbst sei T, resp. U, sodaß $T^2 = 1$, $U^2 = 1$. Aus dem Paare S, T, oder dem Tripel S, T, U läßt sich eine unendliche Gruppe erzeugen, wo die erstere eine Untergruppe der letzteren ist. Bedeutet dann F' das Produkt von F mit irgendeiner binären Form der Ordnung p in z, t, so bestimmt die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} F'^{n-k} x^k \varphi_{2k+p}(z, t) = 0$$

eine Fläche, die gegenüber den beiden Gruppen invariant ist.

Es werden die erzeugenden Operationen der beiden Gruppen explizit aufgestellt.

My.

H. Mohrmann. Über die Haupttangentenkurven auf den Netzflächen. Math. Ann. **73**, 571-595.

Es sei K ein allgemeiner linearer Komplex und L eine windschiefe Linienfläche. Sind die Erzeugenden von L in K enthalten, so ist nach Lie und Klein (F. d. M. **4**, 408, 411, 1872) die Linienfläche H der K angehörigen Haupttangenten developpabel, und ihre Rückkehrkurve ist eine Haupttangentenkurve von L. Ist die Fläche L algebraisch, so besitzt sie daher (mindestens) eine algebraische Haupttangentenkurve. Die Haupttangentenkurven einer algebraischen „Netzfläche", deren Erzeugende einem Büschel von K angehören, sind sämtlich algebraisch, vgl. Voß (F. d. M. **6**, 524, 1874). Die Ergebnisse von Voß beschränken sich auf irreduzible Flächen, die vollständige Schnitte von drei Komplexen sind. Der Verf. untersucht die Netzflächen mittels der Abbildung der Geometrie in einer linearen Kongruenz auf die Punktgeometrie einer gewöhnlichen Fläche zweiten Grades F_2. Hierdurch werden auch unvollständige Schnitte von drei Komplexen berücksichtigt, sowie höhere Singularitäten, und es läßt sich die Reduzibilität der Haupttangentenkurven auf irreduzibeln algebraischen Netzflächen untersuchen, die Flächen mögen rational oder nichtrational sein. Die Untersuchung dieser Reduzibilität wird wesentlich unterstützt durch das Studium des Verlaufs der Haupttangentenkurven auf den Flächen. Als instruktives Beispiel dient das Zylindroid.

Was die Methode der Untersuchung anlangt, so erscheint vermöge der Plückerschen Koordinaten die Liniengeometrie als die Punktgeometrie auf einer allgemeinen vierdimensionalen Mannigfaltigkeit zweiten Grades M_2 im R_5. Den geraden Linien der M_2 entsprechen im R_3 die Strahlenbüschel. Die Geometrie der linearen Kongruenz erscheint als die Geometrie auf einer gewöhnlichen F_2, die entweder eine eigentliche, geradlinige oder nicht geradlinige ist,

oder aber, bei der parabolischen Kongruenz, ein irreduzibler Kegel zweiter Ordnung.

Die Netzflächen sind die Bilder der Kurven auf den (irreduziblen) F_2, und umgekehrt. Führt man die stereographische Projektion der F_2 ein, so wird das stereographische Bild einer Kurve auf der F_2 reell projektiv äquivalent dem Schnitte der Netzfläche mit einer Ebene, die das Bild des Projektionszentrums enthält. Es stimmen also Grad (= Ordnung = Klasse), Rang und Geschlecht einer algebraischen Netzfläche überein mit den entsprechenden Anzahlen ihres Plückerschen Bildes.

Die Netzflächen besitzen den Charakter des „Hyperbolischen", indem der Satz gilt: Irgend vier verschiedene diskrete oder konsekutive windschiefe Erzeugende einer Netzfläche, die gleichzeitig von einer geraden Linie allgemeiner Lage geschnitten werden, sind Erzeugende einer Regelschar zweiter Ordnung.

Die Haupttangentenkurven der Netzflächen lassen sich liniengeometrisch auf zwei Arten erzeugen. Einmal besteht die Kongruenz, die ein allgemeiner linearer Komplex mit dem Tangentenkomplex einer ihm angehörenden Linienfläche gemein hat, aus den Schmiegungsstrahlen einer Haupttangentenkurve der Fläche; andrerseits ist diese Kurve der Ort der Berührungspunkte der dem linearen Komplex angehörenden Doppeltangenten. Unter einer Dorsallinie einer windschiefen Fläche versteht man eine Erzeugende, die von einer konsekutiven Erzeugenden geschnitten wird; der Schnittpunkt der Erzeugenden heißt Kuspidalpunkt, ihre Ebene parabolische Ebene. Die Dorsallinien einer Netzfläche entsprechen den Berührungspunkten ihres Plückerschen Bildes mit den Erzeugenden der F_2.

Insbesondere werden die Dorsallinien der algebraischen Netzflächen (n_1, n_2) mit diskreten (n_1- und n_2-fachen) Leitgeraden untersucht, sowie der Verlauf der Haupttangentenkurven auf den Flächen (n_1, n_2).

Die letzteren Kurven können sowohl mit den Leitgeraden der Fläche, wie mit deren Dorsallinien ausschließlich die Kuspidalpunkte gemein haben, und die (von selbst algebraischen) Haupttangentenkurven einer algebraischen Netzfläche haben einen k-fachen Kuspidalpunkt der Fläche zum k-fachen Punkte.

Insbesondere wird festgestellt, welches die reellen Züge einer Haupttangentenkurve sind.

Als Beispiel dient die als „Cayleysches Zylindroid" (oder „Plückersches Konoid") bekannte Linienfläche dritten Grades, der Ort der Lote, die von den Punkten einer auf einem Rotationszylinder liegenden Ellipse auf eine Erzeugende — die Achse der Fläche — gefällt werden. Ihre Gleichung ist: $z(x^2 + y^2) - 2cxy = 0$.

Die Haupttangentenkurven sind im Endlichen verlaufende rationale Kurven vierter Ordnung, die durch Spiegelung an der Achse in sich übergehen.

Weiter wird für die Haupttangentenkurven auf den algebraischen Flächen (n_1, n_2) vom Geschlecht p eine Reihe charakteristischer Zahlen ermittelt und untersucht, wann diese Kurven auf irreduziblen Flächen reduzibel sind. Für das Zerfallen der Kurven ist notwendig, daß die Fläche keine oder nur Dorsallinien gerader Ordnung besitzt; für die rationalen Flächen $(p = 0)$, und nur für diese, ist die Bedingung auch hinreichend.

Das einfachste Beispiel einer Fläche mit zerfallenden Haupttangentenkurven ist die Netzfläche vierten Grades zweiter Art mit zwei Dorsallinien zweiter Ordnung, der Ort der Schmiegungsstrahlen einer kubischen Raumkurve, die eine Sehne treffen.

Am Schluß werden die algebraischen parabolischen Netzflächen $[\alpha, \beta]$ untersucht. Diese Flächen, vom Grade n, können aufgefaßt werden als spezielle Fälle derjenigen allgemeinen Netzfläche (n_1, n_2) vom Grade n, für die $n_1 = n_2$ oder, bei ungeradem n, $n_1 - n_2 = \pm 1$ ist. Die Fläche hat in jedem Punkte ihrer Leitgeraden eine α-fache Tangente, und die Leitgerade ist β-fache Dorsallinie, wo $n = 2\alpha + \beta$ ist.

Die Haupttangentenkurven dieser Flächen haben wesentlich andere Eigenschaften als die der allgemeinen Flächen. Eine gewöhnliche Rückkehrerzeugende der Fläche ist gewöhnliche Tangente usf. My.

H. W. E. Jung. Abhängigkeit des numerischen Geschlechtes einer algebraischen Fläche von den Verzweigungskurven. Hamb. Mitt. 5, 82-102.

Es sei K ein algebraischer Körper einer Veränderlichen. Einer Stelle S von K wird ein „Primteiler $\mathfrak{p}$" zugeordnet, indem man sagt, eine Funktion von K ist „durch $\mathfrak{p}^a$ teilbar", wenn ihre Entwicklung nach steigenden Potenzen einer Hülfsgröße u mit u^a beginnt.

Es sei x irgendeine Funktion von K, so läßt sich x in Primteiler zerlegen, wobei die Zahl n der Primteiler des Zählers gleich der des Nenners ist; n heißt der „Grad" von K in bezug auf x. Der zur Stelle S gehörige Primteiler $\mathfrak{p}$ heißt, für $\alpha > 1$, ein „Verzweigungsprimteiler" der „Verzweigungsordnung" $\alpha - 1$. Solcher Teiler $\mathfrak{p}_i$ gibt es nun eine endliche Anzahl ν; die Ordnung von $\mathfrak{p}_i$ sei $\alpha_i - 1$. Der Divisor $z = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1 - 1}\mathfrak{p}_2^{\alpha_2 - 1} \dots \mathfrak{p}_\nu^{\alpha_\nu - 1}$ heißt „Verzweigungsdivisor" von K in bezug auf x; seine „Ordnung" $w = \sum(\alpha_{i-1})$ heißt die „Verzweigungszahl" von K in bezug auf x. Während nun die Zahlen n und w wesentlich von der Größe x abhängen, ist die Größe (1) $p = \frac{w}{2} - n + 1$, das „Geschlecht" von K, unabhängig von der Wahl von x.

Es ist die Aufgabe, eine zu (1) entsprechende Formel aufzustellen für das numerische Geschlecht p einer algebraischen Fläche (mit beliebigen Singularitäten) oder eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen x, y.

In der Umgebung einer Stelle $S(x_0, y_0)$ von K lassen sich $x - x_0$ und $y - y_0$ als gewöhnliche Potenzreihen zweier Hülfsgrößen u, v darstellen. Sind $g(u, v)$, $h(u, v)$ zwei solche Reihen, und ist R eine Funktion in K, sodaß $R = \frac{g}{h}$, so darf man nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatze setzen:

$$(2) \qquad \begin{cases} g = E_1\, k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} \dots k_\nu^{\alpha_\nu}, \\ h = E_2\, h_1^{\beta_1} h_2^{\beta_2} \dots h_\nu^{\beta_\nu}, \end{cases}$$

wo E_1, E_2 Einheiten für die Stelle $u = v = 0$ sind, die k_i, h_i in gewisser Art unzerlegbare ganze rationale Funktionen von v, und überdies die h_i von den k_i verschieden angenommen werden dürfen.

Setzt man etwa $k_1 = 0$, so entsteht dadurch aus K ein Körper von nur einer Variable, ein „Primteiler $\mathfrak{P}$ (erster Stufe)". Diesem Übergange entspricht die Redeweise, daß $\mathfrak{P} = 0$ gesetzt wird. Das Produkt aller zu demselben $\mathfrak{P}$ gehörigen k_i heißt die (für die Stelle S) „zugeordnete Funktion $p(u, v)$ von $\mathfrak{P}$."

Die in v rationale Gleichung $p(u, v) = 0$ hat (für $u = 0$ verschwindende) Wur-

zeln $v_1, v_2, \ldots$, die sich nach gebrochenen Potenzen von u entwickeln lassen, so daß z. B.:

$$(3) \qquad v_1 = a_1\, u^{\alpha_1/\varepsilon_1} + a_2\, u^{\alpha_2/\varepsilon_1} + \cdots,$$

wo die $\alpha_i (> 0)$ ganzzahlig sind.

Mittels (3) nimmt R die Form an: $R = u^{\lambda/\varepsilon_1} < e\,(u)$, wo e eine Einheit für $u = 0$ ist. Man sagt dann, daß R durch $\mathfrak{p}_1^{\lambda}$ teilbar ist.

Hat $\mathfrak{P}$ so an der Stelle S die Primteiler $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_l$, so wird die Zahl derselben mit $\nu_S\,(\mathfrak{P})$ bezeichnet und die Zahl der „durch S gehenden Zweige von $\mathfrak{P}$" genannt. Die Funktion $\partial p/\partial v$ ist mindestens teilbar durch $\mathfrak{p}_i^{\varepsilon_i - 1}$. Ist also $\partial p/\partial v$ teilbar durch $\mathfrak{p}_i^{p_i + \varepsilon_i - 1}$ und $p_i > 0$, so wird $\mathfrak{p}_i^{p_i}$ in einem Divisor $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}$ aufgenommen, dem „Divisor der mehrfachen Punkte von $\mathfrak{P}$". Die Zahl der in $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}$ enthaltenen $\mathfrak{p}$ wird mit $2\sigma_{\mathfrak{P}}$ bezeichnet. Man verfahre analog mit einem zweiten Primteiler $\mathfrak{Q}$, mit der zugeordneten Funktion q. Ist q teilbar durch $\mathfrak{p}_1^{\lambda_1} \ldots \mathfrak{p}_l^{\lambda_l}$, so haben $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ an der Stelle S $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l$ „Schnittpunkte gemein". Diese Zahl ist die der Schnittpunkte der Kurven $p = 0, q = 0$ an der Stelle $u = v = 0$. Die Gesamtzahl der Schnittpunkte, die $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ an allen Stellen haben, durch die sie beide hindurchgehen, wird mit $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ bezeichnet. Seien weiter $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ die Zähler der in Primteiler zerlegten Funktionen $x - x_0$, $y - y_0$. Dann ist $(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{M}) = 0$, während die durch $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ bestimmte Zahl n der „Grad von K in bezug auf x, y" wird. Jeder Primteiler, dessen zugeordnete Funktion für irgend eine Stelle S Faktor der Funktionaldeterminante $D = \dfrac{D(x - x_0, y - y_0)}{D(u, v)}$ ist, heißt „Verzweigungsprimteiler in bezug auf x, y", während eine „Verzweigungsordnung" angibt, wie oft seine zugeordnete Funktion in D aufgeht.

Das Produkt der stets endlichen Anzahl von Verzweigungsprimteilern ist der „Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}$".

Sind $\mathfrak{L}_\infty, \mathfrak{M}_\infty$ die Nenner der in Primteiler zerlegten Größen x, y, so wird $\mathfrak{K} = \mathfrak{Z}\,\mathfrak{L}_\infty^{-2} - \mathfrak{M}_\infty^{-2}$ als der „kanonische Divisor" eingeführt. Mit Hülfe der bisher eingeführten Begriffe wird dann noch eine gewisse Zahl $\mathfrak{w}$ als die „Verzweigungszahl der Stellen von K in bezug auf x, y" definiert. Sind dann π_1, π_2 die Geschlechter der Klassen $(\mathfrak{L})$ und $(\mathfrak{M})$, so läßt sich die Zahl $12(p + \pi_1 + \pi_2 + n - 1)$ durch Divisoreninvarianten ausdrücken. Das ist die in Aussicht gestellte Formel. Ihr Beweis beruht auf der Beziehung $12p = I + (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) - 8$ zwischen der Zeuthen-Segreschen Invariante I und dem numerischen Geschlecht p. Hierbei läßt sich I für Flächen mit beliebigen Singularitäten definieren. Mit Hülfe der gewonnenen Formel wird als Beispiel das numerische Geschlecht p der Fläche

$$z^2 = (y - b_1\,x)(y - b_2\,x) \ldots (y - b_{2q}\,x)$$

bestimmt, wo die b ungleiche Konstanten $(\neq 0)$ sind. Es ergibt sich nach Berechnung aller Zwischengrößen der Wert $p = -(q - 1)$. My.

F. SEVERI. Les correspondances algébriques existant sur les courbes d'un système linéaire tracées sur une surface. C. R. **156**, 287-289.

Unter F sei eine reguläre algebraische Fläche verstanden, so daß das geometrische Geschlecht p_g mit dem arithmetischen p_a übereinstimmt, und unter $|C|$ ein lineares irreduzibles $\infty^v (v \geqq 1)$ System von Kurven auf F, vom Geschlecht p und einem Grade > 0. Es handelt sich um die Charakterisierung der algebraischen Korrespondenzen zwischen den Punkten einer allgemeinen Kurve C des Systems. Es gilt dann der Satz, daß jede solche Korrespondenz (α, β) eine Wertigkeit γ besitzt, wo $\gamma (\gtreqless 0)$ eine ganze Zahl ist.

Im besondern folgt, daß jede ebene veränderliche Kurve eines linearen Systems nur Wertigkeitskorrespondenzen besitzt. Eine Folge davon ist, daß die von Hurwitz (F. d. M. **18**, 626, 1886) zwischen den $\frac{1}{2}p(p+1)$ Perioden der Normalintegrale erster Gattung einer Kurve vom Geschlecht p, die singuläre Korrespondenzen besitzt, unabhängig sind von den $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ unbekannten Relationen, die zwischen $\frac{1}{2}p(p+1)$ Größen bestehen müssen, damit sie zu obigen Perioden werden.

Besitzt die Fläche F die Irregularität $q = p_g - p_a > 0$, so gelangt man nach geeigneter Aufstellung der erforderlichen Integrale zu dem Schlusse: Die stetigen Systeme singulärer Korrespondenzen auf der allgemeinen Flächenkurve eines linearen Systems $|C|$ von positivem Grade werden eindeutig bestimmt durch die entsprechenden Systeme auf der mit F verknüpften Picardschen Fläche. Die Anzahl der unabhängigen Korrespondenzen auf C ist $\leqq 2q^2$, und es lassen sich Flächen konstruieren, wo die obere Grenze $2q^2$ erreicht wird.

My.

F. Severi. Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare sopra una superficie. Math. Ann. **74**, 515-544.

Um die Korrespondenzen zwischen den Punkten einer Kurve, welche einem linearen System auf einer algebraischen Fläche angehören, zu erforschen, benutzt der Verf. einige der Kunstgriffe, welche Hurwitz in zwei berühmten Abhandlungen (Math. Ann. **28** und **31**) vorgeschlagen hat. Das Hauptresultat ist in dem folgenden Satz enthalten: „Jede Korrespondenz zwischen den Punkten einer beliebigen Kurve eines linearen Systems von einer Dimension $\geqq 2$, welches einer regulären Fläche angehört, besitzt eine Wertigkeit“. Insbesondere: „Jede ebene Kurve, welche einem linearen System von einer Dimension $\geqq 2$ angehört, besitzt nur Wertigkeitskorrespondenzen“. Daraus folgt, daß „für jeden Wert von p eine Kurve vom Geschlecht p mit allgemeinen Moduln keine singuläre Korrespondenz besitzt“.

In dem letzten Paragraphen behandelt der Verf. dieselben Fragen mittels einer geometrischen Methode; dadurch gelangt er zu einigen neuen Sätzen und Begriffen, wobei wir nicht verweilen können.

La.

R. Torelli. Sopra una proprietà caratteristica delle superficie regolari. Rom. Acc. L. Rend. 22_2, 478-480.

Im Anschluß an einen Aufsatz von Severi (Referat vorstehend) und durch Anwendung einiger Resultate der obigen Arbeiten beweist der Verf. den folgenden Satz: Eine Fläche, die einen linearen Kurvenbüschel enthält, der 1. kein zerfallendes Element besitzt, 2. zwei nicht zusammenfallende Grund-

punkte hat, die einfache Punkte jeder seiner Kurven sind, und dessen Elemente 3. im allgemeinen keine symmetrische singuläre Korrespondenz besitzt, ist eine „reguläre Fläche“. La.

M. Pannelli. Sul numero delle superficie di un fascio dotate di un punto doppio. Palermo Rend. **36**, 345-367.

Die Zahl D der Flächen eines Büschels von beliebiger Ordnung, die einen Doppelpunkt besitzen, wurde in verschiedenen Fällen durch Cremona, Pieri, Guccia und Segre bestimmt. Der Verf. hat sich dieselbe Aufgabe gestellt in den Fällen, wo 1. die Basis des Büschels aus gewöhnlichen vielfachen Punkten und Kurven besteht, und 2. der Büschel zerfallende Flächen enthält. Der vom Verf. verfolgte Weg ist derselbe, welchen Pieri vorgeschlagen hat. Im Fall 1. gelangt er zu dem gewünschten Resultat und gibt der entstehenden Formel zwei verschiedene Gestalten, von denen wir die zweite als die einfachere und bemerkenswertere anführen wollen:

$$D = 2(I + p + \sum p_i - \sigma - \tau + 1);$$

in ihr bedeutet I die Zeuthen-Segresche Invariante einer Fläche des Büschels, $p + \sum p_i$ die Summe der Geschlechter der $\tau + 1$ Kurven, aus welchen die Basis des Büschels besteht, und endlich σ die Zahl der vielfachen Grundpunkte derselben Basis.

Der Fall 2 wird in dem letzten Paragraphen behandelt; die gesuchten Resultate sollen nämlich zum Beweis einer Beziehung zwischen den Fundamentalelementen einer birationalen Raumtransformation dienen, die der Verf. seit einigen Jahren ausgesprochen hat (F. d. M. **42**, 705, 1911). Außerdem bestimmt er die Erniedrigung der fraglichen Zahl, wenn im Büschel eine in zwei Teile zerfallende Fläche enthalten ist. La.

M. de Franchis. Alcune osservazioni sulle superficie irregolari. Palermo Rend. **36**, 223-225, 276.

Durch Anwendung von Begriffen und Sätzen aus der Theorie der algebraischen Flächen werden einige Sätze bewiesen, von denen wir die folgenden als Beispiele anführen wollen:

Wenn eine irreguläre Fläche eine algebraische Kurve enthält, welche Niveaulinie für einige Picardsche Integrale erster Art ist, so ist sie eine Spezialkurve, oder sie gehört einem irrationalen Kurvenbüschel an, welcher auch aus Niveaulinien derselben Integrale besteht.

Eine algebraische Kurve einer irregulären Fläche kann einem kontinuierlichen System nicht angehören, welches kein irrationaler Büschel ist, wenn sie Niveaukurve von Picardschen Integralen erster Art ist.

Der virtuelle Grad einer Kurve, welche Niveaulinie für Picardsche Integrale erster Art ist, ist nie positiv. La.

A. Del Re. Sulle reti di curve algebriche ad intersezioni variabili allineate e sui sistemi lineari ∞^3 di superficie algebriche ad intersezioni variabili complanari. Modena Mem. (3) **10**, 393-406.

Mit Hülfe eines Punkt-Punkt-Konnexes und eines Geraden-Geraden-Konnexes bildet der Verf. in der Ebene ein Netz von ∞^2 Kurven $(1+pn)$-ter Ordnung derart, daß alle Kurven des Netzes $1+pn+p^2n^2$ Punkte gemein haben, während die übrigen pn Schnittpunkte je zweier Kurven des Netzes (die veränderlichen Schnittpunkte) in gerader Linie liegen. Diese ganze Untersuchung steht in engem Zusammenhange mit der Theorie der birationalen Transformationen. Ebenso konstruiert er im Raume ein Netz von ∞^3 Flächen, bei dem die veränderlichen Schnittpunkte je dreier Flächen des Netzes in einer Ebene liegen. Die Arbeit stammt, wie der Verf. angibt, aus dem Jahre 1900. Von seinen noch älteren Arbeiten über denselben Gegenstand unterscheidet sie sich dadurch, daß sie nicht von einer Fundamentalkurve oder Fundamentalfläche ausgeht.

El.

W. A. Versluys. Over een klasse van oppervlakken met algebraische asymptotische lijnen. Amst. Ak. Versl. **21**, 1328-1347.

Die Raumkurve $C(p, q, s)$ mit den Gleichungen

$$(1) \qquad x = at^p, \quad y = bt^q, \quad z = ct^s,$$

wo t den veränderlichen Parameter, a, b, c Konstanten, p, q, s $(p < q < s)$ ganze positive Zahlen ohne gemeinsamen Teiler bezeichnen, hat die Schmiegungsebene

$$(2) \qquad P\frac{x}{x_1} + Q\frac{y}{y_1} + S\frac{z}{z_1} + PQS = 0,$$

wenn x_1, y_1, z_1 ein Punkt der Kurve ist, und

$$P = \frac{s-q}{p}, \quad Q = \frac{p-s}{q}, \quad S = \frac{q-p}{s}$$

gesetzt worden ist. Alle Raumkurven, deren Schmiegungsebene die Gleichung (2) hat, sind entweder durch die Formeln (1) oder durch die Gleichungen

$$(3) \qquad x = \alpha t^{p_1}, \quad y = \beta t^{q_1}, \quad z = \gamma t^{s_1}$$

bestimmt, wo α, β, γ beliebige Konstanten sind, dagegen

$$p_1 = p(-p+q+s), \quad q_1 = q(-q+s+p), \quad s_1 = s(-s+p+q)$$

zu setzen ist. Nunmehr betrachtet der Verf. die Fläche mit den Gleichungen

$$x = a\, u^p v^{p_1}, \quad y = b\, u^q v^{q_1}, \quad z = c\, u^s v^{s_1};$$

sie hat als Asymptotenlinien die Scharen $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, also Kurven der Form $C(p, q, s)$, $C(p_1, q_1, s_1)$. Auf der Fläche liegen ferner die Kurven $C(p+\lambda p_1, q+\lambda q_1, s+\lambda s_1)$ für jeden rationalen Wert von λ. Das Doppelverhältnis der vier Tangenten in einem Punkte der Fläche an den durch diesen Punkt gehenden Kurven:

$$C(p, q, s), \quad C(p_1, q_1, s_1), \quad C(p + \lambda_1 p_1, q + \lambda_1 q_1, s + \lambda_1 s_1),$$
$$C(p + \lambda_2 p_1, q + \lambda_2 q_1, s + \lambda_2 s_1)$$

ist längs der ganzen Fläche konstant gleich $\lambda_1 : \lambda_2$.

Weitere Sätze beziehen sich auf die oskulierenden Regelflächen der Fläche (1), auf Berührungskegel und Polfläche. Jede Fläche des Systems

$$p x^2 + q y^2 + s z^2 + \lambda (p_1 x^2 + q_1 y^2 + s_1 z^2) = \mu$$

schneidet jede der Flächen (1) senkrecht. Spezielle Fälle werden betrachtet.

Re.

S. Wigert. Sur la détermination des asymptotes d'une courbe algébrique gauche. Ark. f. Math., Astr. och Fys. **9**, Nr. 10, 4 S.

Die vom Verf. für ebene Kurven gegebene Methode (Referat S. 649 dieses Bandes) wird auf die Schnittkurve der beiden algebraischen Oberflächen $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$ erweitert.

Lp.

Weitere Literatur.

J. R. Conner. Multiple correspondences determined by the rational space septimic. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 284-285.

C. Coppede. Classificazione topologica delle superficie di Lamé algebriche. Firenze: Calasanziana. 46 S. 8⁰ (1912).

C. F. Craig. Ruled surfaces associated with certain rational space curves. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 506-507.

C. de Jans. Over middelvlakken en middelkrommen. Handel. **17**. Vlaamsch. Nat. en Geneesk. Congr. Gent 1913, 54 S.
Referat auf S. 659 dieses Bandes.

S. Lefschetz. On the existence of loci with given singularities. Amer. Math. Soc. Trans. **14**, 23-41.
Referat auf S. 649 dieses Bandes.

W. Raetz. Projektive Gruppen des Raumes, ihre Invarianten und geometrische Charakterisierung. Nebst dem Anhang: Charakterisierung einiger Scharen von Transformationen, die keine Gruppen bilden, durch Invarianten. Diss. Königsberg i. Pr. 107 S. 8⁰.

C. T. Sullivan. Properties of surfaces whose asymptotic curves belong to linear complexes. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 512-513.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

A. C. L. Wilkinson. Questions 404 and 436. Indian Math. Soc. **5**, 115-117.

Um ein Tetraeder, in dem die Produkte der drei Paare gegenüberliegender Kanten gleich sind, sei eine Kugel beschrieben und in einer der Tetraederecken

an diese Kugel die Tangentialebene gelegt. Jede Parallelebene zu dieser Tangentialebene schneidet aus der zugehörigen Tetraederebene ein gleichseitiges Dreieck aus. — 436. Durch einen Punkt im Innern eines Tetraeders seien Ebenen parallel zu den vier Tetraederflächen gelegt. Die 12 Schnittpunkte dieser Ebenen mit den Tetraederkanten liegen auf einer Kugel, wenn die Produkte der drei Paare Gegenkanten des Tetraeders gleich sind (Analogon zum Lemoineschen Kreis). — Solche Tetraeder sind von Neuberg als „gleichproduktisch" bezeichnet worden. Z.

N. Durairajan. A special tetrahedron. Indian Math. Soc. **5**, 216-219.

Rein geometrische Beweise der im vorstehenden Referat genannten Sätze. Z.

C. Crone. Lösning af en geometrisk Opgave. (Auflösung einer geometrischen Aufgabe.) Nyt Tidsskr. for Mat. (B) **24**, 1-7.

Analytische Lösung der Aufgabe, im Raume einen Kreis zu finden, der zwei gegebene Kreise je zweimal schneidet, und zwar unter gegebenem Winkel. P. H.

J. Neuberg. Question 17 233. Ed. Times (2) **23**, 20-21, 47.

Gegeben eine in einer Ebene P gelegene Gerade d und auf einem Lote zu dieser Ebene, das d nicht schneidet, zwei feste Punkte A und B. Der Ort des Höhenschnittpunktes eines Dreiecks ABC, dessen Ecke C die Gerade d durchläuft, ist ein in der Ebene P gelegener Kreis. — Lösungen von R. F. Davis, C. M. Roß, M. B. Nesbitt. Gd.

T. Kubota. On non-euclidean properties of quadrics. Tôhoku Sc. Rep. **1**, 119-130.

Es handelt sich nur um hyperbolische Geometrie, ferner nur um singularitätenfreie Flächen zweiter Ordnung, von diesen nur um zentrische, die außerdem völlig im zugänglichen Gebiet liegen müssen. Sie dürfen weiter keine kontinuierliche Bewegungsgruppe zulassen. Schließlich handelt es sich in der Hauptsache um einige metrische Relationen über konjugierte Durchmesser.

Die analytische Behandlung wird der Besonderheit der hyperbolischen Geometrie nicht gerecht, wie schon die drei ganz überflüssigerweise in der Gleichung der absoluten Fläche auftretenden Koeffizienten zeigen. So sind die Voraussetzungen teils zu eng, teils zu weit gefaßt. Das ideale Gebiet wird ignoriert (erhält doch die Fläche vier Zentren). Ebenso werden Realitätsfragen nicht beachtet; darin zeigt sich ferner eine Verkennung des Wesens der hyperbolischen Funktionen, deren einziger Zweck ist, Reelles auch reell darzustellen. B.

C. Koehler. Zur Theorie des F^2-Gebüsches mit reellem Poltetraeder und des Kegelschnittgebüsches mit reellem Polarvierseit. Heidelb. Ak. Sitzber. (A) 1913, Abh. 5, 15 S.

Alle Flächen zweiter Ordnung, die ein gegebenes Tetraeder T als Polartetraeder besitzen, bilden ein spezielles F^2-Gebüsch; alle Flächen zweiter Klasse, die T zum Poltetraeder haben, bilden eine lineare Mannigfaltigkeit von Flächen, ein „spezielles Φ^2-Gebinde". Beide einander dualistisch gegenüberstehenden Gebilde enthalten dieselben nicht entarteten Flächen; eine solche ist im allgemeinen eindeutig bestimmt, sobald für sie ein Paar von Polarelementen π, P gegeben ist. In einer früheren Arbeit (F. d. M. **34**, 680, 1903) hat der Verf. gezeigt, wie man die projektive Beschaffenheit einer durch ein reelles T, π und P bestimmten, nicht entarteten Fläche zweiter Ordnung und ihrer Schnittkurve mit der Ebene π allein aus der Lage von P in bezug auf die vier Seitenebenen von T und die Ebene π erkennen kann. Jetzt erweitert er die damals erhaltenen Kriterien, so daß sie nicht nur die projektive, sondern auch die parallelmetrische, also die affine Gesamteinteilung liefern für alle Flächen des F^2-Gebüsches und des Φ^2-Gebindes mit reellem Poltetraeder, sowie für alle Kurven des speziellen Kegelschnittgebüsches mit gemeinsamem Polarvierseit, das als Schnitt des F^2-Gebüsches mit einer Ebene entsteht. Lp.

Emma Cairo. Su tre sistemi ∞^1 di superficie P del second'ordine e sopra una corrispondenza di indici $(1, 2)$ fra due S_3. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 155-164.

Man betrachte die Gleichungen:

$$x_i = a_i u^2 + b_i u + r_i + a_i v^2 + b_i v + s_i + a_i w^2 + b_i w + t_i$$

für $i = 1, 2, 3, 4$. Setzt man einen der drei Parameter u, v, w konstant, so erhält man eine Oberfläche P, die, wenn man die Konstante sich ändern läßt, P in eine einfach unendliche Schar von Flächen P verwandelt. Wiederholt man dasselbe Verfahren mit den beiden andern Parametern, so erhält man drei Systeme von je ∞^1 Oberflächen P, bezeichnet durch $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$ Die nähere Untersuchung dieser Systeme von Flächen, die sich als nicht geradlinige Flächen zweiter Ordnung erweisen, bildet den Gegenstand der Arbeit. Die im Titel erwähnte Verwandtschaft wird durch die Substitution $u = u'/t'$, $v = v'/t'$, $w = w'/t'$ erzeugt. Aus diesen Festsetzungen entspringen zahlreiche Beziehungen. Lp.

W. Boomstra. De orthogonale en gelijkzijdige kwadratische oppervlakken in verband met het deelingsprobleem der elliptische functies. (Die orthogonalen und gleichseitigen quadratischen Flächen und ihre Beziehung zu den elliptischen Funktionen.) Diss. Amsterdam: M. M. Olivier. III u. 238 S. 8°.

Die Schrift verknüpft zwei bisher ganz verschieden formulierte Probleme, die Orthogonalität und Gleichseitigkeit einer quadratischen Fläche und das Schließungsproblem von Poncelet. Im ersten Kapitel wird gezeigt, daß eine quadratische Fläche orthogonal ist, wenn der uneigentliche Kegelschnitt und der Kugelkreis der Ponceletschen Schließungsbedingung für $n = 4$ genügen, der Kegelschnitt also eingeschriebene Vierecke besitzt, die dem Kugelkreis umgeschrieben sind. Im zweiten Kapitel wird gezeigt, daß der un-

eigentliche Kegelschnitt einer gleichseitigen quadratischen Fläche und der Kugelkreis der harmonischen Schließungsbedingung für $n = 3$ genügen. Es ergeben sich aus diesen Betrachtungen allgemeinere Kategorien quadratischer Flächen, bei denen die Poncelet sche oder harmonische Schließungsbedingung für andere Werten von n erfüllt ist. Im dritten Kapitel werden die Begriffe orthogonal und gleichseitig im Sinne des Verf. erweitert für die nichteuklidische Geometrie. Der weitere Teil des Buches ist rein analytisch. Im vierten Kapitel wird die Frage erörtert, welchen Bedingungen die Koeffizienten der Gleichung einer orthogonalen oder gleichseitigen Fläche genügen müssen, und es wird eine Übersicht gegeben über die Resultate, die andere Autoren bei den korrespondierenden Schließungsproblemen erhalten haben. Diese Resultate sind meist auf transzendentem Wege, insbesondere mit Hülfe elliptischer Funktionen, abgeleitet worden. In Kap. V gibt der Verf. nun eine rein algebraische Ableitungsmethode, während Kap. VI eine Ableitung bringt unter Hinzuziehung elliptischer Funktionen, die der algebraischen Behandlung angepaßt ist. Es zeigt sich, daß die algebraisch abgeleiteten Resultate wichtige Theoreme darstellen, wie das Additions- und Multiplikationstheorem der elliptischen Funktionen. Im siebenten Kapitel wird die Frage erörtert, wieviel n-seitige orthogonale quadratische Flächen in einem gegebenen System von ∞^1 Flächen vorkommen. Diese Frage kann auch mit Hülfe einer Abzählungsmethode beantwortet werden, die zugleich den Anschluß an eine Arbeit von Halphen liefert.

Schn.

Ch. Bioche. Sur les rayons de courbure principaux en un point d'une quadrique. A propos d'une note de M. Turrière. Ens. math. **15**, 240-242.

Die vorliegende Notiz bringt ein Analogon zu einer von Turrière (Ens. math. **13**, 109-113; vgl. F. d. M. **42**, 658, 1911) angegebenen Konstruktion. Der dort benutzte „orthoptische" Kreis eines Kegelschnittes wird hier räumlich (d. h. für eine Fläche zweiter Ordnung) auf zweierlei Arten verallgemeinert: 1. als die Monge sche Kugel der Fläche zweiter Ordnung, 2. als Ort der Punkte, von denen aus man an die Fläche zweiter Ordnung drei paarweise zueinander senkrechte Tangenten legen kann.

Z.

E. Salkowski. Biegungsregelflächen von Flächen zweiter Ordnung. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **12**, 83-89.

„Es ist bekannt, daß man alle geradlinigen Flächen, die auf eine gegebene Regelfläche abwickelbar sind, durch Quadraturen bestimmen kann. Da man indessen in der Literatur selbst für den einfachsten Fall, für die geradlinigen Biegungsflächen der Flächen zweiter Ordnung, kaum ein Beispiel findet, das an sich geometrisches Interesse bietet, seien hier zwei solcher Typen zusammengestellt, bei denen sich die Quadraturen ohne größere analytische Schwierigkeiten erledigen lassen, so daß sich an die Schlußformeln leicht eine eingehendere Untersuchung der Gestalt und Eigenschaften knüpfen läßt."

1. Biegungsflächen des einschaligen Hyperboloids. 2. Das hyperbolische Paraboloid. 3. Asymptotenlinien auf den Biegungsflächen der Flächen zweiter Ordnung und auf Binormalenflächen.

Als ein merkwürdiges Ergebnis sei das folgende angeführt: Verbiegt man die Ebene einer Kettenlinie so, daß die Tangenten geradlinig bleiben und die Kurve in eine Schraubenlinie von der Steigung $\frac{1}{4}\pi$ übergeht, so ist die Binormalenfläche dieser Schraubenlinie auf ein gleichseitiges Paraboloid abwickelbar. Lp.

St. Garlicki. Kilka twierdzeń o przekrojach płaskich powierzchni drugiego stopnia i niektóre ich zastosowania. (Einige Sätze über ebene Querschnitte einer Fläche zweiter Ordnung und einige Anwendungen derselben.) Wektor **1**, 147-159 (1912).

Elementare Sätze über Kegel, auf denen zwei Schnitte einer Fläche zweiter Ordnung liegen, und reziproke über die Schnitte zweier der Fläche umschriebenen Kegel. Einfache Anwendung in der stereographischen Projektion. A. R.

H. Schröder. Die Zentraflächen der Paraboloide und Mittelpunktsflächen zweiten Grades. Diss. Halle-Wittenberg 1913, 72 S.; Leipzig: M. Schilling.

Dem Verf. liegt daran, dem Leser seiner Arbeit von den Zentraflächen aller Flächen zweiten Grades eine Anschauung zu verschaffen. Daher hat er sich im allgemeinen auf die Betrachtung reeller Flächenpunkte beschränkt und meist die Cayleysche Behandlungsweise angewandt. — Inhaltsverzeichnis: I. Abschnitt (S. 7—60). Die Zentraflächen der Paraboloide. A. Die Zentrafläche des elliptischen Paraboloids (Gleichungen, Schnitte der Fläche mit den Symmetrieebenen. Singularitäten der Fläche I: Die Rückkehrkanten. Singularitäten des Parameternetzes. Gestalt der Parameterkurven und der einzelnen Mäntel. Singularitäten der Fläche II: Die Doppelkurve. Verhalten der Fläche im Unendlichfernen). B. Die Zentrafläche des hyperbolischen Paraboloids (Gleichungen, Gestalt der Mäntel. Die Doppelkurve. Verhalten der Fläche im Unendlichfernen). C. Vergleichende Betrachtung der Zentraflächen eines Systems von konfokalen Paraboloiden. II. Abschnitt (S. 61-72). Die Zentraflächen zu den Mittelpunktsflächen zweiten Grades. (Gestaltliche Diskussion der einzelnen Mäntel. Die Doppelkurve.) — Zu der Abhandlung gehört eine Reihe schöner Modelle, „die die Mäntel der Zentrafläche des elliptischen Paraboloids einzeln und zusammen, die Zentrafläche des hyperbolischen Paraboloids und die des Ellipsoids darstellen". Wem die Modelle nicht zugänglich sind. der kann auch aus den auf 9 Tafeln sauber entworfenen Figuren eine lebhafte Vorstellung der behandelten Gestaltverhältnisse gewinnen. Z.

C. Juel. Note om en Ellipsoides Centraflade. (Über die Zentrafläche eines Ellipsoids.) Nyt Tidsskr. for Matem. (B) **24**, 8-9.

Rein geometrischer Beweis dafür, daß die Schnittkurve zwischen einer der Symmetrieebenen eines Ellipsoids und seiner Zentrafläche aus der Evolute des Schnittes zwischen dem Ellipsoid und der Symmetrieebene einerseits und einem Kegelschnitt andrerseits besteht. P. H.

A. Pleskot. Die Entfernung der Schnittpunkte einer Oberflächengeraden auf einem einschaligen Hyperboloide und einer orthogonalen Trajektorie der Oberflächengeraden. Časopis **42**, 151-154. (Böhmisch.)

Es handelt sich um eine einfache Berechnung jener Entfernung durch vollständige elliptische Integrale.

Pe.

Ch. H. van Os. Over een stelsel krommen, dat in Einstein's gravitatietheorie optreedt. Amst. Ak. Versl. **22**, 61-64.

In dem Artikel Ehrenfests über die Einsteinsche Gravitationstheorie (Amst. Ak. Versl. **21**, 1234-1239; Referat in Abschnitt X, Kap. 1) tritt ein System von ∞^2 Kurven auf, die durch die Forderung bestimmt werden, daß man durch je zwei von ihnen ein Hyperboloid mit der Gleichung

$$H = A(x^2 + y^2 - z^2) + Bx + Cy + Dz + E = 0$$

legen kann. Aus diesem Anlaß erörtert der Verf. die möglichen Durchschnittskurven solcher Hyperboloide, die ja, außer dem Kegelschnitt $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $w = 0$ im Unendlichen, noch ein ebenes Gebilde zweiten Grades gemeinschaftlich haben.

Lp.

E. Turrière. Sopra una proprietà delle reti di sfere. Periodico di Mat. **28**, [(3) **10**], 276-277.

Die von Loria behandelte Eigenschaft (F. d. M. **42**, 657, 1911) folgt aus dem bekannten Satze: Sind A, B, C, D vier harmonische Punkte, so schneidet jeder Kreis, der durch das Punktepaar AC geht, den Kreis mit BD als Durchmesser senkrecht.

Lp.

V. Ramaswami Aiyar. Question 12 373. Ed. Times (2) **24**, 48.

Von einem variablen Punkte auf einer gegebenen Normale eines Paraboloids lassen sich vier Normalen an diese Fläche ziehen. Der Ort des Mittelpunktes derjenigen Kugel, die durch die Fußpunkte dieser vier Normalen geht, ist eine gerade Linie, und die Einhüllende der Kugel ist eine Fläche zweiter Ordnung. — Lösung von P. T. Stephenson. Die Aufgabe ist bekannt; eine andere Lösung findet sich in Nouv. Ann. (3) **7**, 344-347, 1888. Gd.

E. Vogel. Der Ellipsenschnitt des Drehparaboloids. (Für den Unterricht in der VII. Realschulklasse.) Zs. f. d. Realschulwesen **38**, 201-203.

Der Normalriß eines Ellipsenschnittes des Drehparaboloids auf eine zur Drehachse normale Ebene ist ein Kreis.

Schr.

O. Staude. Analytische Geometrie der kubischen Kegelschnitte. (Teubners Samml. von Lehrbüchern. Bd. 38.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. VIII u. 242 S. gr. 8°.

Das Werk behandelt die jetzt zumeist ausschließlich mit Hülfsmitteln der synthetischen Geometrie studierten Raumkurven dritter Ordnung mit den Mitteln der elementaren analytischen Geometrie, so daß jeder junge Studierende, der den Kursus über analytische Geometrie des Raumes gehört hat, sich selbständig mit diesem so überaus reizvollen Raumgebilde bekannt machen kann. Die Kurve wird als Restschnitt eines Kegels und Zylinders zweiter Ordnung definiert, die eine Mantellinie gemeinsam haben. Nachdem die Parameterdarstellung gewonnen ist, werden die vier Klassen kubischer Raumkurven geschieden und jede für sich untersucht, wobei auch, wohl zuerst in dieser Vollständigkeit, die Teilung in Unterarten analytisch charakterisiert wird. Erst nachdem so eine genauere Bekanntschaft mit dem Gegenstande vermittelt ist, werden jetzt statt des bisher benutzten Parallelkoordinatensystems (das je nach der Fragestellung orthogonal oder schiefwinklig gewählt war) die Tetraederkoordinaten eingeführt. Dies ermöglicht ein tieferes Eindringen in den Gegenstand, insbesondere in die mit ihm verknüpften Probleme der projektiven Geometrie. Dabei werden auch konstruktiv zu lösende Aufgaben eingehend berücksichtigt; so wird ein guter Grund gelegt für denjenigen, der nun mit Hülfe der synthetischen Methoden den entgegengesetzten Gedankengang vom Allgemeinen zum Besonderen durchlaufen will. Man kann sich dem Wunsche des Verf. nur anschließen, daß das Buch dazu beitragen möge, den kubischen Kegelschnitten in den akademischen Vorlesungen und Übungen neben den ebenen Kegelschnitten einen gleichberechtigten Platz zu sichern. Sk.

O. Staude. Die Rotationsflächen der kubischen Kegelschnitte. Rostock: H. Warkentien. 26 S. gr. 8⁰. (Auch: Sitzungber. u. Abh. d. naturforsch. Ges. Rostock. N. F. 5.)

Es werden die Rotationsflächen zweiter Ordnung bestimmt, die eine gegebene Raumkurve dritter Ordnung enthalten. Der Inhalt der Arbeit ist in die „Analytische Geometrie der kubischen Kegelschnitte" des Verf., Kap. III, übergegangen. (Referat vorstehend.) Sk.

P. W. Wood. The twisted cubic etc. with some account of the metrical properties of the cubical hyperbola. (Cambr. Tracts in math. no. 14.) Cambridge: University Press. 8⁰.

Zweck dieses Büchleins ist, eine folgerechte analytische Behandlung der Eigenschaften der kubischen Raumkurve zu geben. Keine vorgängige Bekanntschaft mit der Kurve wird vorausgesetzt; analytische Methoden sind durchweg den synthetischen vorgezogen. Projektive Eigenschaften werden mittels der Parameterausdrücke

$$(\theta^3, \theta^2, \theta, \tfrac{1}{3}) \text{ und } \left(\frac{1}{\theta - a}, \frac{1}{\theta - b}, \frac{1}{\theta - c}, \frac{1}{\theta - d}\right)$$

erforscht. Die letztere Form ist besonders brauchbar, wenn es sich um vier oder fünf feste Punkte auf der Kurve handelt. Die Wahl von $\frac{1}{3}$ als vierte Koordinate gestaltet einige der Ausdrücke symmetrischer. Eine gewisse Bekanntschaft mit der Schraubentheorie von Ball wird vorausgesetzt. (Vgl. Math. Gaz. 7, 249-250, 1914.) J. (Lp.)

A. B. Grieve. Some points in the geometry of cubic surfaces. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 315-339.

Reye hat gezeigt (Math. Ann. **55**, 257-264; F. d. M. **32**, 638, 1901), daß eine kubische Fläche mittels eines Netzsystems kubischer Raumkurven erzeugt werden kann, wenn zwei solche kubischen Raumkurven, die sich nur in einem Punkte schneiden, gegeben werden; daß zwei konjugierte Netzsysteme solcher Kurven auf der Oberfläche vorhanden sind, bei denen je zwei desselben Netzsystems sich nur in einem Punkte schneiden, während zwei aus verschiedenen Netzsystemen sich in fünf Punkten schneiden und so beschaffen sind, daß eine sie enthaltende Quadrik konstruiert werden kann. Es gibt eine gewisse Oberfläche zweiter Ordnung H^2 („Hauptfläche"), die mit diesen Kurven zusammenhängt. In bezug auf sie sind die Quadriken, die zwei Kurven verschiedener Netzsysteme verbinden, apolar; die fünf Schnittpunkte zweier Kurven verschiedener Netzsysteme haben die Eigenschaft, daß der Pol irgend dreier von ihnen bezüglich H^2 in der die beiden andern verbindenden Geraden liegt und tatsächlich der Punkt ist, wo diese Gerade die kubische Oberfläche nochmals trifft.

H. F. Baker hat bewiesen (Lond. M. S. Proc. (2) **11**, 285-301; F. d. M. **43**, 723, 1912), daß die Geraden auf der kubischen Oberfläche als ausgeartete Fälle der Kurven entstehen, die auf der Oberfläche liegen. Der Verf. der vorliegenden Arbeit zeigt zuerst, welche Gruppen von Geraden ausgeartete kubische Kurven auf der Oberfläche bilden, und benutzt diese ausgearteten kubischen Raumkurven, um in dem Lichte der Reyeschen Abhandlung einige Sätze über die Geraden und die kubischen Raumkurven auf der Oberfläche herzuleiten. In einer mehr oder weniger befriedigenden Gestalt werden auch die Gleichungen der 36 Schurschen Quadriken gegeben (vgl. das angeführte Referat über Reye). Diese Gleichungen sind im allgemeinen verwickelt; drei von ihnen sind aber ganz einfach und werden dazu benutzt, einige Eigenschaften der Schurschen Quadriken herzuleiten Lp.

J. de Vries. Rationale regelvlakken. Handel. XIII. Nederl. Nat.- en Geneesk. Congr. 1911, 145-147.

Untersuchung der geradlinigen kubischen Oberflächen mittels der sechs Kleinschen Koordinaten, die ganze Funktionen dritten Grades eines Parameters sind (Rev. sem. 22_1, 99). Lp.

E. Beutel. Die Zentrafläche der asymptotischen Fläche dritten Grades. Math.-naturw. Mitt. (2) **15**, 33-64.

Die Arbeit bringt eine durch 7 anschauliche Figuren geschmückte Monographie der im Titel genannten Fläche. Inhaltsverzeichnis: 1. Erzeugung und wichtigste Eigenschaften der asymptotischen Fläche dritten Grades ($xyz = a^3, a > 0$). 2. Gleichung der Zentrafläche. 3. Lageverhältnisse der Zentrafläche zur Urfläche. 4. Schnittkurve der Zentrafläche mit der Urfläche. 5. Ord-

nung der Zentrafläche. 6. Schnittkurve der Medianebene $\eta = \zeta$ mit der Zentrafläche. 7. Die Doppelkurve der Fläche als Schnitt der beiden Mäntel. 8. Schnittkurven mit der Ebene $\zeta = \lambda a$.
Z.

W. H. SALMON. On a family of cubic surfaces of the tetrahedron analogous to the Tucker circles of a triangle. Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 309-317.

Es gibt für das Tetraeder eine Familie von Flächen 3. Ordnung, welche den Tuckerschen Kreisen des Dreiecks entsprechen; die Analogien zwischen beiden sind in vieler Hinsicht sehr bemerkenswert. Die zu einem (gewöhnlichen) Tetraeder gehörigen Tuckerschen Flächen 3. Ordnung sind auch Verallgemeinerungen der von Neuberg zuerst behandelten „Tuckerschen Kugeln" eines speziellen („gleichproduktischen") Tetraeders. (Vgl. F. d. M. **41**, 711, 1910 und **42**, 657, 1911.)
Z.

A. BARUCH, O. DEGEL. Lösung zu 418 (J. Neuberg). Arch. der Math. u. Phys. (3) **22**, 73-75.

Die gestellte Aufgabe lautet: Man eliminiere die Unbekannten x, y, z aus den vier Gleichungen $x(y^2 + z^2) = a$, $y(z^2 + x^2) = b$, $z(x^2 + y^2) = c$, $xyz = d$. Die erste Lösung ist rechnerisch sehr kurz: einmal werden die ersten drei Gleichungen miteinander multipliziert und durch die letzte dividiert, das zweite Mal werden die drei ersten Gleichungen quadriert und addiert. Das führt dann mittels einer bekannten Identität auf das Eliminationsergebnis $abc = (a^2 + b^2 + c^2 - 4d^2)d$. Die zweite Lösung lehrt, daß es sich bei der gestellten Aufgabe darum handelt, die Reziproke der Steinerschen Römerfläche in Punktkoordinaten darzustellen. Vgl. hierzu das Referat über eine Arbeit von Timerding (Arch. d. Math. u. Phys. **20**, 98-111; F. d. M. **43**, 724, 1912).
Z.

Weitere Literatur.

J. L. COOLIDGE. A study of the circle cross. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 286.

E. V. HUNTINGTON. A simple formula for the angle between two planes. Amer. Math. Monthly **20**, 182-184.

J. IVERSEN. Lineäre Identiteter mellem Potenzer til Cirkler og Kugler. Nyt. Tidsskr. for Mat. (A) **24**, 73-81.
Referat auf S. 661 dieses Bandes.

J. KLIMA. Geometrischer Ort der Brennpunkte und Scheitelpunkte von Paraboloiden, welche eine gegebene Ellipse enthalten. Časopis **42**, 226-229. (Böhmisch.)

R. RÖTHLEIN. Enveloppe der Ebene eines drei Ebenen berührenden Kreises. Diss. Würzburg. 99 S. 8°.

K. SPYCHER. Die Schnittkurve eines gleichseitig-hyperbolischen und eines kubisch-parabolischen Zylinders. Diss. Bern. 59 S. 8°.

F. Voss. Die Klassifikation der Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse bei Plücker. Diss. Rostock. 111 S. 8° (1912).

P. W. Wood. The twisted cubic, with some account of the metrical properties of the cubical hyperbola. Cambridge: University Press. 99 S. 8°.

D. Andere spezielle Raumgebilde.

F. R. Sharpe and F. M. Morgan. Quartic surfaces invariant under periodic transformations. Annals of Math. (2) **15**, 84-92.

„Steiner hat 1845 den Satz ausgesprochen: Es seien P und Q zwei feste Punkte auf einer ebenen kubischen Kurve (oder Doppelpunkte auf einer ebenen biquadratischen Kurve) und A ein veränderlicher Punkt auf der Kurve. PA treffe die Kurve in A_1, QA_1 in A_2, PA_2 in $A_3, \ldots$, QA_{2n-1} in A_{2n}. Wenn A_{2n} mit A für eine Lage von A zusammenfällt, so geschieht dies für jede Lage von A. Snyder hat 1910 (F. d. M. **42**, 652, 1911) für eine Oberfläche vierter Ordnung mit zwei Kegelpunkten P und Q die Bedingung dafür aufgestellt, daß die beiden Transformationen A in A_1, A_1 in A_2 für den Schnitt der Oberfläche durch eine beliebige Ebene durch die Gerade PQ kommutativ sind. Die doppelte Transformation A in A_2 ist dann von der Periode 2. Wenn also S die erste Transformation ist und T die zweite, so ist $(ST)^2 = 1$. Dies erweckte bei dem verstorbenen J. E. Wright den Gedanken, das Problem zu behandeln, solche Oberflächen vierter Ordnung zu finden, daß $(ST)^3 = 1$. Sein vorzeitiger Tod verhinderte ihn an der Lösung des Problems. Snyder schlug uns jüngst diese Aufgabe vor, und die Lösung wird in der Abhandlung gegeben. Sie kann als die Bedingung dafür gedeutet werden, daß die beiden involutorischen Transformationen S und T der allgemeinen (2,2)-deutigen Verwandtschaft die Bedingung $(ST)^3 = 1$ befriedigen."

Lp.

L. Godeaux. Sur la surface du quatrième ordre contenant une sextique gauche de genre trois. Krakau Anz. (A) 1913, 529-547.

Severi hat bewiesen (Math. Ann. **62**, 194-225; F. d. M. **37**, 647, 1906): Wenn eine regelmäßige Oberfläche F eine unendliche unstetige Gruppe birationaler Transformationen in sich selbst besitzt, so ist diese Gruppe isomorph mit einer Gruppe von Substitutionen mit ganzzahligen Koeffizienten von den Moduln ± 1 der fundamentalen quadratischen Form von F in sich selbst. Diesen Satz hat Severi benutzt, um auf vollständige Weise die Gruppe der birationalen Transformationen einer Oberfläche vierter Ordnung in sich selbst unter der einzigen Bedingung zu bestimmen, daß die Fläche eine Raumsextik des Geschlechtes 2 enthalte. Um von den vielen möglichen Beispielen dieser Art ein neues, vollständig durchgeführtes Muster zu geben, betrachtet der Verf. eine Oberfläche vierter Ordnung, die der einzigen Bedingung unterworfen wird, eine Sextik vom Geschlecht 3 zu enthalten. Eine solche Oberfläche gestattet unendlich viele involutorische birationale Transformationen in sich selbst, von denen jede eine Involution der Geschlechter $p_a = P_4 = 1$ erzeugt, die mithin

mit acht Koinzidenzpunkten ausgestattet ist. Das Produkt zweier dieser Transformationen ist eine nicht periodische Transformation. Der Verf. glaubt, dies sei das erste bekannt gewordene Beispiel einer Oberfläche von den Geschlechtern $p_a = P_4 = 1$, das Involutionen von den Geschlechtern $p_a = P_4 = 1$ gestattet. Aus diesem Grunde hat er es veröffentlicht. Lp.

J. Sommer. Bestimmung der Regelflächen mit sphärischen Fußpunktkurven. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **20**, 311-320.

Die analytischen Regelflächen mit reellen Mantellinien sind der Rotationszylinder, der allgemeine Kegel, ein Konoid, dessen Gleichung $(x^2 + y^2)z^2 = A x^2 + B y^2$ lautet. Sk.

M. Lerch. Über zwei Flächen vierter Ordnung. Rozpravy **22**, Nr. 36, 140 S. (Böhmisch.)

Zuerst befaßt sich der Verf. mit der sogenannten isogonalen Fläche eines Punktes und einer Geraden; mit dieser Fläche hat sich früher L. Heffter beschäftigt (J. für Math. **115**, 1-22; F. d. M. **26**, 744, 1895). Die andere Fläche, welche der Verf. betrachtet, ist eine windschiefe Fläche von der Gleichung

$$(x^2 + y^2 - ax - by)^2 = (x^2 + y^2)z^2 \cot^2 \alpha.$$

Es werden für beide Flächen zahlreiche neue und interessante Sätze und Beziehungen zu andern bekannten Gebilden, insbesondere Kurven, abgeleitet. Pe.

A. Fischer. Über eine zyklische Fläche vierter Ordnung. Bern. Mitt. Naturf. Ges. 1913, 1-52.

Die Einhüllungsfläche der durch den Mittelpunkt einer Ellipse gehenden Kugeln, deren Mittelpunkte die Peripherie der Ellipse durchlaufen. Die Gleichung der Fläche, Schnitte mit Ebenen, Kubatur und Komplanation, Krümmungslinien, Parameterdarstellung, die Kurve der parabolischen Punkte, die Zentrafläche, konforme Abbildung (Rev. sem. $\mathbf{23}_2$, 73). Lp.

O. Degel, J. Rey, J. Neuberg. Lösung zu 420 (J. Neuberg). Arch. d. Math. u. Phys. (3) **22**, 75-79.

Die gestellte Aufgabe lautet: Man gibt im Raume vier Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 und einen Ebenenbüschel φ. Eine veränderliche Ebene des Büschels φ schneidet g_1, g_2, g_3, g_4 in den Punkten M_1, M_2, M_3, M_4. Welche Fläche erzeugt eine Gerade d, welche die Strecken $M_1 M_3, M_2 M_4$ nach gegebenen Verhältnissen $m_3 : m_1, m_4 : m_2$ teilt?

Die gesuchte Fläche ist eine Regelfläche vierter Ordnung, welche die Achse des Ebenenbüschels als dreifache Gerade enthält. — Diskussion von Sonderfällen. Z.

S. Clariana y Ricart. Secciones torales con aplicación à la lemniscata de Bernoulli. Rev. Soc. Mat. Esp. **2**, 223-231, 255-261.

In dem ersten Artikel untersucht der Verf., welche ebenen Schnitte des Torus Cassinische Ovale ergeben. In dem zweiten zeigt er, wie die Bogenlänge der Bernoullischen Lemniskate durch die Gammafunktion, die elliptischen Integrale und die Sigmafunktionen ausgedrückt werden kann. Lp.

A. Luna. Aplicación de la teoría de curvatura al toro. Rev. Soc. Mat. Esp. **2**, 231-236.

Ein Übungsbeispiel für die Anwendung der bekannten Formeln auf die Gleichung des Torus:

$$(x^2+y^2+z^2-5)^2=16(1-z^2).$$

Lp.

M. Pelíšek. Über Flächen, welche von sphärischen Rollkurven erzeugt werden. I. Teil. Rozpravy **22**, Nr. 24, 25 S. (Böhmisch.) Bulletin International **18**, 215-242. II. Teil. Rozpravy **22**, Nr. 47, 35 S. (Böhmisch.) Bulletin international **18**, 348-384.

Der Verf. betrachtet zuerst die Kurve, welche von einem in der Ebene des rollenden Kreises sich befindenden Punkte beschrieben wird; der Kreis rollt dabei auf einem kongruenten Kreise, wobei die Ebenen der beiden Kreise einen konstanten Winkel ψ einschließen. Die so entstehende Kurve nennt der Verf. klinogale sphärische Kardioide. Der geometrische Ort aller klinogalen sphärischen Kardioiden (bei allen möglichen Werten ψ) ist eine Fläche vierter Ordnung, welche ein Spezialfall der von Darboux als Zykliden behandelten Flächen ist. Wenn man statt zweier kongruenten Kreise zwei kongruente Kegelschnitte betrachtet (wobei die beiden Kegelschnitte bei Rollung sich stets in den Punkten, welche einander durch Kongruenz zugeordnet sind, berühren), so entstehen noch allgemeinere Flächen. Der Verf. beschäftigt sich mit derjenigen Fläche, welche von den Brennpunkten (oder von den Mittelpunkten) der rollenden Kegelschnitte beschrieben werden; diese Flächen sind wieder Zykliden.

Pe.

A. L. Hjelmman. Sur les courbes gauches rationnelles du cinquième ordre. Ann. Ac. Sc. Fennicae (A) **3**, Nr. 11, 30 S.

Die Kurve wird als die Projektion einer Kurve fünfter Ordnung im fünfdimensionalen Raume betrachtet. I. Normale Quintik. II. Prinzipale Kubik. Fundamentale Involution. III. Geraden im Raume, bezogen auf die rationale Kubik. Mit der Kurve zusammenhängende geradlinige Kongruenz. Steinersche Flächen. IV. Quadratische Involutionen auf der Kurve. (Rev. sem. 22_2, 111.)

(Lp.)

V. Simandt. Über ein bestimmtes Konoid fünfter Ordnung. Časopis **42**, 155-164. (Böhmisch.)

Der Verf. beschäftigt sich mit dem geometrischen Orte der Scheitelpunkte von hyperbolischen Paraboloiden, welche durch zwei Geraden hindurchgehen.

Pe.

H. Bateman. The degenerate cases of Hierholzer's octavic surface. Johns Hopkins Univ. Circ. 1913, Nr. 7, 42-46.

Die zuerst von Hierholzer untersuchte besondere Fläche achter Ordnung ist bekanntlich der Ort der Spitzen von Kegeln zweiter Ordnung, die 6 Geraden des Raumes berühren. Schneiden sich 2 dieser 6 Geraden, so bildet die Ebene dieser beiden Geraden einen Teil des Ortes. Das führt den Verf. zur Untersuchung folgender Sonderfälle: 1. Die 6 Geraden bilden ein windschiefes Sechseck. 2. Fünf Geraden bilden ein windschiefes Fünfeck, die sechste ist beliebig. 3. Vier Geraden bilden ein windschiefes Viereck, die beiden übrigen sind beliebig. 4. Drei Geraden bilden ein Dreieck, die drei andern sind beliebig. — Zusammenhang mit der Weddleschen Fläche. Z.

A. R. Forsyth. The range of minimal surfaces providing a minimal area. Annali di Mat. (3) **21**, 121-141.

„Auch in dem Falle der Minimalflächen werden Kriterien seitens der Variationsrechnung gefordert. Eines von ihnen ist die Lagrangesche Gleichung oder ihr Äquivalent in irgendeiner Gestalt. Ihm wird vollständig genügt durch die Weierstraßschen Gleichungen für die allgemeine Oberfläche und durch die spezielle Gleichung (oder Gleichungen) für jede besondere Oberfläche. Das Kriterium durch die Exzeßfunktion wird für alle Minimalflächen befriedigt. Die übrigen Kriterien betreffen die zweite Variation des den Flächeninhalt darstellenden Integrals. Alle, mit Ausnahme eines von ihnen, werden für alle reellen Minimalflächen befriedigt. Jenes letzte verlangt eine mögliche Grenze für die Lage einer schließlichen Schranke (boundary), bis zu der eine durch eine vorgegebene anfängliche Schranke gehende Minimalfläche reichen kann, wenn sie einen wirklichen Minimalinhalt im Raume zwischen den beiden Schranken liefern soll. Soweit es mir bekannt ist, hat dieser Umstand der Frage wenig Beachtung gefunden. Der Zweck der vorliegenden Abhandlung ist der, eine Grenze für den Bereich (range) der Fläche (falls irgendeine solche Grenze besteht) zu finden, die zu einem beliebigen vorgegebenen Perimeter auf einer Minimalfläche konjugiert ist. Ferner kann ein vorgegebener „Perimeter" eine geschlossene Kurve auf der Fläche sein, und dann ist der Begriff eines konjugierten einfach. Wenn aber ein vorgegebener Perimeter nicht eine geschlossene Kurve ist (was eintritt, wenn wir eine ebene Krümmungslinie auf einer algebraischen Oberfläche ungerader Ordnung haben), so ist der Begriff eines konjugierten weniger einfach. Es ist nämlich denkbar, daß nur ein Stück eines solchen anfänglichen Perimeters als eine Schranke für einen wirklichen Minimalinhalt zulässig wäre. Diese letzte Frage wird jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht erörtert."

Als Hauptergebnis ist der Satz abgeleitet: „Durch die vorgegebene Anfangsschranke C_0 der Minimalfläche werde eine folgende Minimalfläche gelegt;

diese schneide die ursprüngliche Minimalfläche (wenn überhaupt) in einer andern Kurve C_1, wo dies der früheste Schnitt nach C_0 ist. Die in C_0 beginnende Minimalfläche kann sich nicht so weit wie C_1 ausdehnen, wenn ein Minimuminhalt im Raum zwischen den beiden Kurven durch die Minimalfläche geliefert wird.“ Der Satz wird erläutert und an einigen Beispielen geprüft. Lp.

G. Darboux. Sur les surfaces minima engendrées par un cercle variable. C. R. **156**, 928-933, 971-977.

Riemann hat mittels elliptischer Funktionen die allgemeinste Minimalfläche bestimmt, die eine Schar von Kreisen enthält, deren Ebenen sämtlich parallel sind. Man kann nun die Frage aufwerfen, ob es nicht Minimalflächen gebe, die durch einen veränderlichen Kreis erzeugt werden, dessen Ebene nicht mehr einer festen Stellung parallel bleibt. Diese Frage wird in der vorliegenden Arbeit im negativen Sinne entschieden, so daß also die Riemannsche Minimalfläche die einzige ist, die durch eine einfach unendliche Schar von Kreisen erzeugt wird. Die gestellte Aufgabe ist nicht einfach zu beantworten. Die Schwarzschen Formeln führen auf recht komplizierte elliptische Integrale. Der Verf. hat daher eine andere Methode ersonnen, aber auch sie führt erst über recht verwickelte Rechnungen zum Ziel. — Der Verf. hat anscheinend übersehen, daß diese Frage bereits vor Jahren auch von H. A. Schwarz beantwortet worden ist; vgl. dessen Gesammelte Mathematische Abhandlungen **1**, 330. Re.

G. Tzitzéica. Sur une généralisation des surfaces minima non-euclidiennes. C. R. **156**, 1136-1138.

Verallgemeinerung und geometrische Deutung der Guichardschen Untersuchungen (Sur une classe particulière d'équations de Moutard. C. R. **156**, 748). Sk.

M. Lerch. Asymptotische Linien auf einem geraden Konoid; Beiträge zu den Eigenschaften der Schraubenlinien. Casopis **42**, 1-13. (Böhmisch.)

Wenn beide Funktionen $\varphi(v)$, $\psi(v)$ in der Gleichung eines Konoids

$$x = u\varphi(v), \quad y = u\psi(v), \quad z = cv$$

Integrale der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2\eta}{dv^2} = f(v)\eta$$

sind, so sind die Linien $u =$ Konst. Asymptotenlinien. Verschiedene Anwendungen dieses Satzes. Pe.

E. Keraval. Surfaces engendrées par le déplacement d'une courbe plane avec cône circonscrit le long de la courbe. Nouv. Ann. (4) **13**, 1-24.

Die homogenen Koordinaten der Punkte der im Titel genannten Flächen genügen einer partiellen Differentialgleichung, für die die Invariante k ver-

schwindet; ebenso verschwindet für die aus dieser durch zweimalige Anwendung der Laplaceschen Transformation entstehende Gleichung die Invariante h. Die Gleichung läßt sich daher lösen. Die Flächen zerfallen in drei Klassen: I. Die Ebenen der erzeugenden Kurven (C) bilden einen Büschel; dann sind die Kurven (C) homographisch. II. Die Ebenen umhüllen einen Kegel; die Kurven werden durch eine Riccatische Gleichung bestimmt. III. Im allgemeinen Falle handelt es sich um eine spezielle Klasse der durch die Gleichungen $x_i = A_i(u, v) + B_i(v)$ definierten Flächen, die noch ganz kurz geometrisch untersucht werden. Sk.

E. Barré. Sur une série de surfaces dont une famille de lignes de courbure est constituée par des hélices indéformables. C. R. **156**, 999-1003.

Die einzigen Flächen, deren eine Schar von Krümmungslinien aus kongruenten Schraubenlinien mit parallelen Achsen besteht, sind Helikoide, deren Gleichungen sich explizit aufstellen lassen. Sk.

E. Barré. Théorie générale des surfaces engendrées par une hélice circulaire. S. M. F. Bull. **41**, 242-339.

Verf. gibt eine eingehende Untersuchung der von ihm schon früher in kurzen Noten wiederholt behandelten Flächen, die durch die Bewegung einer sich stetig verändernden Schraubenlinie entstehen. Im ersten Kapitel werden die Formeln der allgemeinen Theorie für die in Rede stehenden Flächen aufgestellt, im zweiten Kapitel Striktionskurven und Verteilungsparameter, im dritten und vierten Krümmungseigenschaften der Flächen untersucht. Der Schlußabschnitt gibt eine Klassifikation der behandelten Flächen, für deren interessanteste Typen der Verf. noch weitere tiefer gehende Untersuchungen in Aussicht stellt. Sk.

E. Barré. Sur les hélicoïdes de seconde espèce. C. R. **157**, 31-34.

Es handelt sich um die Flächen

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = f(\varrho) + k(\varrho)\,\varphi;$$

d. h. die allgemeinsten Flächen, die von koaxialen Schraubenlinien gebildet werden können. Die Untersuchungen, die eine Fortsetzung der Arbeiten des Verf. aus C. R. **144**, 625 (F. d. M. **38**, 632, 1907) darstellen, beziehen sich auf Eigenschaften der Tangentialebene, der Striktionslinie, Orthogonaltrajektorien, Krümmung und ergeben vielfach bemerkenswerte Analogien zur Theorie der geradlinigen Flächen. Sk.

H. Treu. Rotations- und Schraubenflächen konstanter positiver Totalkrümmung sowie solche konstanter mittlerer Krümmung. Progr. (Nr. 349) Gymn. Nordhausen. 19 S.

Verf. behandelt das bekannte Problem auf verschiedenen Wegen. 1. Man bestimme die Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u + \sinh u \cosh u = 0$, die lineare Funktionen der unabhängig Veränderlichen sind. 2. Man bestimme die

Schraubenflächen, für die $K = $ konst. oder $H = $ konst. ist. 3. Die Schraubenflächen, die durch Verbiegung der Kugel entstehen, zu finden. Zum Schluß werden die Formeln der Bäcklundschen Transformation zusammengestellt und auf ein einfaches spezielles Beispiel angewandt. Sk.

E. Torroja. Otras propiedades de las superficies helicoidales. Rev. Soc. Mat. Esp. **2**, 181-183.

Schluß der Artikelserie aus dem vorigen Jahrgang (F. d. M. **43**, 609, 1912). Sk.

K. Wöhrle. Nachtrag zu dem Aufsatz: Über eine neue Erzeugung der Schraubenröhrenfläche. Math. naturw. Mitt. (2) **15**, 19-20.

Literarische Notizen. Sk.

Weitere Literatur.

A. Fischer. Über eine zyklische Fläche vierter Ordnung. Diss. Bern. 52 S. 8°.

H. Pelzner. Über involutorische Raumverwandtschaften und solche Transformationen, bei denen den Ebenen des einen Raumes Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt entsprechen. Diss. München. 61 S. 8°.

K. Rohn. Die Maximalzahl und Anordnung der Ovale bei der ebenen Kurve sechster Ordnung und bei der Fläche vierter Ordnung. Math. Ann. **73**, 177-229.

Referat auf S. 676 dieses Bandes.

F. R. Sharpe and F. M. Morgan. Quartic surfaces invariant under periodic transformations. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 283.

J. Treu. Rotations- und Schraubenflächen konstanter positiver Totalkrümmung sowie solche von konstanter mittlerer Krümmung. Diss. Halle. 32 S. 8°.

P. Zeeman Gzn. Eene klasse van bikwadratische oppervlakken, waarop 52 rechte lijnen gelegen zijn. Handel. XIV. Nederl. Nat.- en Geneesk. Congr. 207.

J. B. Diller. Über die den Enneperschen Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes entsprechenden Voßschen Flächen. Progr. Würzburg. 79 S. 8°.

E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

E. Bompiani. Recenti progressi nella geometria proiettiva differenziale degli iperspazi. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 22-27.

Zusammenfassender Bericht über die von Segre und seinen Schülern und Nachfolgern in den Jahren 1906 bis 1910 auf diesem Gebiete veröffentlichten Untersuchungen. Lp.

G. Aprile. Sul sistema di rette dell' S_4 generato da due S_3 omografici fra loro. Atti Acc. Gioenia (5) **6**, Nr. XIV, 14 S.

Über die Strahlenkomplexe (∞^3), bei denen jeder Strahl durch zwei zugeordnete Punkte zweier homographischen Überebenen des vierdimensionalen Raumes geht. I. Allgemeiner Fall. II. Besondere Fälle (Rev. sem. **23**$_1$, 64). Lp.

G. Marletta. Ricerche sui complessi di rette d'ordine due e della 2^a specie dell' S_4. Atti Acc. Gioenia (5) **6**, Nr. I, 26 S.

In dieser Abhandlung beschäftigt sich der Verf. mit den Strahlenkomplexen (∞^3) zweiter Ordnung und zweiter Art im vierdimensionalen Raume nach den Methoden, die er schon auf die Komplexe zweiter Ordnung und erster Art in Batt. G. **50**, 17-59 (F. d. M. **43**, 737, 1912) angewandt hatte. Die Strahlen eines solchen Komplexes berühren die Brennüberfläche ψ und stützen sich auf eine singuläre Kurve, oder aber stützen sich zweimal auf eine singuläre Fläche. I. Das System der Tangenten von ψ ist irreduzibel. II. Die entgegengesetzte Annahme (Rev. sem. **23**$_1$, 64). Lp.

A. Comessatti. Sui gruppi di r punti comuni ad r serie lineari di dimensione $r-1$. Ven. Ist. Atti **72** [(8) **15**], 1133-1141.

Eine frühere Abhandlung desselben Verf. und über denselben Gegenstand (F. d. M. **41**, 633, 1910) bildet den Ausgangspunkt einiger Untersuchungen, deren Resultate in der Inaugural-Dissertation von O. Göhner (Referat S. 653 dieses Bandes) enthalten sind. In einer Wechselwirkung, von der die Wissenschaft so oft Beispiele darbietet, hat diese Arbeit Comessatti veranlaßt, zu seinen älteren Untersuchungen zurückzukehren und so neue Sätze zu erhalten. Um unseren Lesern eine Vorstellung von ihnen zu geben, bezeichnen wir mit beiden genannten Forschern durch $[r:n_1, n_2, \ldots, n_r:p]$ die Zahl der Gruppen, welche r linearen Reihen gleichzeitig angehören, vorausgesetzt, daß $n_1, n_2, \ldots, n_r$ die Ordnungen von ihnen bedeuten, und daß ihr gemeinschaftlicher Träger eine algebraische Kurve vom Geschlecht p ist. Mittels einer mehrdimensionalen Betrachtung beweist nun der Verf. zuerst die folgende rekurrente Beziehung:

$$[r:n_1+1, n_2, \ldots, n_r:p] = [r:n_1, n_2, \ldots, n_r:p] + [r-1:n_1, n_2, \ldots, n_r:p].$$

Daraus folgt: Wenn $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ die symmetrischen Elementarfunktionen der Zahlen $N-n_1, \ldots, N-n_r$ sind und N eine hinreichend große Zahl bedeutet, so besteht die folgende Gleichung:

$$[r:n_1, n_2, \ldots, n_r:p] = \sum_{k=0}^{k=r} \tau_k \sum_{i=0}^{i=r-k} i! \binom{r-k}{i} \binom{p}{i} (N-r+1-p)^{r-k-i}.$$

Durch Partikularisierung der Zahl N enthält man mehrere merkwürdige Formeln, welche zum Teil schon von Göhner aufgestellt sind, und welche der Leser in der Originalarbeit findet. La.

A. Terracini. Sulle varietà di spazi con carattere di sviluppabili. Torino Atti **48**, 411-433.

Wenn man von dem gewöhnlichen Raume zu höheren Räumen ansteigt, so entspricht dem Begriff einer abwickelbaren Fläche (als Mannigfaltigkeit aus ∞^1 Geraden) der einer Mannigfaltigkeit von ∞^α k-dimensionalen linearen Räumen R_k. Aber solche Mannigfaltigkeiten können auch andern Bedingungen verschiedener Art unterworfen werden. Man kann z. B. die Systeme Σ betrachten, welche aus ∞^α R_k bestehen und die Eigenschaft besitzen, daß jeder R_k von Σ in einem R_l $(l \geqq 0)$ alle R_k von Σ schneide, welche zu jenem R_k unendlich nahe sind. Die Bestimmung solcher Systeme wurde von C. Segre ausgeführt (vgl. F. d. M. **41**, 724, 1910) in dem Falle, daß die R_k von Σ, welche einem dieser R_k unendlich nahe sind, sich in demselben R_l schneiden, unter den folgenden Voraussetzungen: 1. $\alpha = 1$, k beliebig; 2. α beliebig, $k = 1$; 3. $\alpha = k = 2$. Jetzt behandelt der Verf., ein Schüler von Segre, in dieser Arbeit einige andere Fälle (z. B. $\alpha = 2$ und k beliebig) und charakterisiert die entsprechenden Systeme Σ; zum Schluß behandelt er eingehender den Fall $\alpha \geqq k + 1$. Um eine Vorstellung von den gewonnenen Resultaten zu geben, führen wir als Beispiel den folgenden Satz an:

„Die notwendige und hinreichende Bedingung, damit ein aus ∞^2 R_k bestehendes System Σ die Eigenschaft besitze, daß zwei unendlich nahe R_k von Σ sich in einem R_l schneiden, ist, daß eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt sei:

a) Die R_k von Σ gehören zu einem R_{2k-1} oder gehen alle durch denselben R_l oder endlich schneiden längs einem R_{l+1} einen festen R_{l+2}.

b) Jeder R_k von Σ berührt längs einem R_l eine Mannigfaltigkeit U_{l+1}, die aus ∞^1 R_l besteht, wo $l < k - 1$.

c) Die R_k von Σ können wie folgt konstruiert werden: Man beschreibe eine aus ∞^2 R_m $(l \leq m \leq k; l < k - 1)$ bestehende U_{m+2}, welche die Bedingung erfüllt, daß längs jedem R_m die U_{m+2} einen festen berührenden R_{k+m-1} besitzt; und man führe einen R_k durch jeden R_m der betrachteten Reihe in dem entsprechenden berührenden R_{k+m-1}." La.

J. Eiesland. On a flat spread-sphere geometry in odd-dimensional space. American J. **35**, 201-228.

In einem R_{2n+1} wird ein R_n (flat spread = „Überebene") einer Kugel M^2_{2n} zugeordnet. Für $n = 1$ gibt das Lies Kugelgeometrie. Die Verallgemeinerung ist ziemlich weitgehend durchgeführt. B.

Emma Cairo. Sopra un sistema Σ di superficie P di S_n. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 97-103.

Schluß der Abhandlung des Vorjahres (F. d. M. **43**, 734, 1912). 1. Die V_3, welche drei Systeme von ∞^1 Oberflächen P enthalten. 2. Anwendungen auf die Geradenkomplexe. Lp.

G. Usai. Sulle ipersuperficie inviluppo. Periodico di Mat. **28** [(3) **10**], 208-212, 277.

Ausdehnung der allgemeinen Theorie der Umhüllungsflächen, deren Gleichungen einen variablen Parameter enthalten, auf den n-dimensionalen Raum, also auf Gleichungen von der Form $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha) = 0$, wo α der Parameter ist. Lp.

Weitere Literatur.

A. Del Re. Addizioni alla nota „Sui sistemi lineari tripli di monoidi d'ordine n segantisi etc.". Napoli Rend. (3) **19**, 48-53.
Vgl. F. d. M. **43**, 714, 1912.

G. M. Green. Systems of k-spreads in an n-space. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 514.

A. Ranum. On the projective differential classification of n-dimensional spreads generated by ∞^1 flats. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 296.

O. Veblen and J. W. Alexander. Manifolds of n dimensions. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 391.

Kapitel 4.

Liniengeometrie (Komplexe, Strahlensysteme).

G. Cotty. Sur quelques propriétés arithmétiques de l'espace réglé. Nouv. Ann. (4) **13**, 206-235, 241-251.

„Abgesehen von dem Interesse, das jede Beschäftigung mit der Geometrie im Hinblick auf die Eigenschaften des Raumes bietet, die uns dabei enthüllt werden, kann eine solche Beschäftigung einzig darum sich als gebieterisch erweisen, weil sie eine faßliche, einfache und bequeme Darstellung einer Theorie der Analysis, der Mechanik oder selbst der transzendenten Zahlenlehre zu geben vermag. . . . Die Liniengeometrie ist oft zu solchen Darstellungen benutzt worden. Bei der Forschung über Abelsche Funktionen wird man dazu geführt, eine etwas besondere Liniengeometrie zu betrachten, bei der man die gewisse arithmetische Eigenschaften besitzenden Raumelemente auszeichnet. Manche ganz einfachen Sätze dieser arithmetischen Liniengeometrie kann man in Zusammenhang bringen mit einer Menge von Sätzen, die sich auf die Abelschen Funktionen und ihre Transformationen beziehen sowie auf die Theorie der algebraischen Zahlen und der quadratischen Formen; dies allein genügte schon, diese Forschung zu rechtfertigen. Wie man übrigens aus der Abhandlung

ersehen wird, in der wir uns darauf beschränken, einen einzigen Satz dieser Geometrie auszusprechen und einige seiner unmittelbaren Folgerungen zu bezeichnen, wird man dabei zu an sich interessanten Ergebnissen geführt. Einige von ihnen sind wahrscheinlich neu, und wenn das Interesse an ihnen besonders zutage tritt, wofern man sie unter dem Gesichtspunkte der Abelschen Funktionen und Formen betrachtet, so sind sie immerhin ganz merkwürdig und wenigstens unerwartet." Mit diesen allgemeinen Wendungen der Einleitung müssen wir uns hier begnügen, weil ein Eingehen auf die formentheoretischen Ableitungen nicht angängig ist. Wir führen einen Satz an. Man setze $m_i n_j - m_j n_i = (mn)_{ij}$. Es seien $x_0, y_0, z_0, t_0, x_1, y_1, z_1, t_1$ acht Unbekannte; das Gleichungssystem

$$(xy)_{01} = A, \quad (xz)_{01} = B, \quad (xt)_{01} = C,$$
$$(zt)_{01} = \alpha, \quad (ty)_{01} = \beta, \quad (yz)_{01} = \gamma$$

ist in ganzen Zahlen lösbar, wenn die ganzen Zahlen $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ der Beziehung genügen:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0.$$

Lp.

J. Eiesland. On the algebraic curves of a tetrahedral complex and the surfaces conjugate to it. Palermo Rend. **36**, 233-275; Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 287.

Alle Kurven eines tetraedralen Komplexes werden nach Lie durch die Gleichungen gegeben:

$$(1) \qquad \log x = \int \frac{U\,du}{a+u}, \quad \log y = \int \frac{U\,du}{b+u}, \quad \log z = \int \frac{U\,du}{c+u}.$$

Die Gleichungen einer zu einem tetraedralen Komplexe konjugierten Oberfläche sind:

$$(2) \qquad \begin{cases} \log x = \int \frac{U(u)\,du}{a+u} + \int \frac{V(v)\,dv}{a+v}, \\ \log y = \int \frac{U(u)\,du}{b+u} + \int \frac{V(v)\,dv}{b+v}, \\ \log z = \int \frac{U(u)\,du}{c+u} + \int \frac{V(v)\,dv}{c+v}, \end{cases}$$

wo U und V willkürliche Funktionen bzw. von u und v sind, dagegen a, b, c willkürliche Konstanten. Die konjugierten Linien (u) und (v) sind Kurven des Komplexes, die eine spezielle Asymptotenlinie $u = v$ einhüllen. Die Asymptotenkurven können nach Lie durch Quadraturen gefunden werden.

„Der Zweck der vorliegenden Untersuchungen ist das Bestimmen der in (2) enthaltenen algebraischen Oberflächen. Dieses Problem schließt, wie sich herausstellt, funktionentheoretische Betrachtungen ein und im besonderen die Theorie von ausgearteten Abelschen Integralen. Um alle algebraischen Oberflächen zu finden, erweist es sich als notwendig und hinreichend, alle algebraischen Kurven des Komplexes zu finden, d. h. U, a, b, c so zu bestimmen,

daß die Kurve (1) algebraisch ist. Es ist klar, daß, wenn dies der Fall ist, wir haben müssen

$$\log x = \log \Phi_1(u), \quad \log y = \log \Phi_2(u), \quad \log z = \log \Phi_3(u),$$

wo $\Phi_1(u)$, $\Phi_2(u)$, $\Phi_3(u)$ algebraische Funktionen von u sind. Wir werden drei Fälle betrachten: 1. Die Funktion U ist eine rationale Funktion von der Form $U = f(u)/\varphi(u)$, wo f und φ Polynome sind. 2. U ist von der Form $R(u, v)/S(u, v)$, wo R und S zwei Polynome in u und v sind, während u und v die Koordinaten eines Punktes auf einer rationalen Kurve $F(u, v) = 0$ in der (u, v)-Ebene sind. 3. U hat dieselbe Form wie in 2., aber $F = 0$ ist vom Geschlecht $p < 0$."

Die Erörterung dieser drei Fälle bildet somit den Gegenstand der Arbeit. Der erste Fall ist am genauesten durchgearbeitet (S. 234-254). „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Kurve der ersten Kategorie algebraisch ist, besteht darin, daß die Größen a, b, c rational sind und U der Quotient zweier Polynome f und φ desselben Grades; f muß rationale Koeffizienten haben, und die Gleichung $\varphi = 0$ muß rationale und einfache Wurzeln haben, die mit keiner der Größen a, b, c zusammenfallen. Der Zähler f kann das Produkt $(a+u)(b+u)(c+u)$ als Faktor haben, oder auch nicht. Nach Feststellung dieses Kriteriums werden besondere Fälle vorgeführt, die Asymptotenlinien behandelt, Transformationen erörtert; endlich wird der Fall algebraischer Kurven der ersten Kategorie allgemein untersucht, um zuletzt zur Forschung über konjugierte Oberflächen zu gelangen.

Die allgemeine Diskussion der Kurven der zweiten Kategorie, die schon tiefergehende Untersuchungen erfordert, wird auf S. 254-270 gegeben. Setzt man U gleich dem Quotienten zweier Polynome $R(u, v)$ und $S(u, v)$, also $U = R/S$, so gilt der Satz: Eine Kurve der zweiten Kategorie ist algebraisch, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: 1. R/S ist eine rationale Funktion von u und v mit rationalen Koeffizienten; der Grad von R ist höchstens gleich dem von S. 2. Die Funktionen $U/(a+u)$, $U/(b+u)$, $U/(c+u)$ haben einfache und rationale Pole und rationale Residuen, und falls R vom größtmöglichen Grade ist, sind die Residuen bei $u = \infty$ rational. Nach Aufstellung dieser Bedingungen wird die Erörterung im einzelnen nach ähnlichen Gesichtspunkten wie im Falle 1 durchgeführt.

Für die Kurven der dritten Kategorie werden schließlich in dem letzten Teile (S. 270-275) die allgemeinen Gesichtspunkte gewonnen. „Es existiert keine algebraische Kurve eines tetraedralen Komplexes, die zur dritten Kategorie gehört. Einen vollständigen und in jeder Weise befriedigenden Beweis habe ich nicht finden können." Lp.

M. Stuyvaert. Un complexe cubique de droites. Torino Mem. (2) **63**, 1-18.

Es seien $A, B, C, A', B', C', A'', B'', C''$ lineare Formen der Linienkoordinaten $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$, die für die Strahlen eines kubischen Komplexes C_3 verschwinden, wo

$$C_3 = \begin{vmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix}.$$

Dieser Komplex wird demnach auf zwei verschiedene Arten durch die Strahlen erzeugt, die den entsprechenden Elementen dreier projektiven Netze linearer Komplexe gemeinsam sind, z. B.

$$\begin{cases}\lambda A + \lambda' A' + \lambda'' A'' = 0,\\ \lambda B + \lambda' B' + \lambda'' B'' = 0,\\ \lambda C + \lambda' C' + \lambda'' C'' = 0.\end{cases}$$

Aus dieser analytischen Darstellung folgert der Verf. eine Reihe geometrischer Eigenschaften. So folgt aus dem gleichzeitigen Verschwinden aller ersten Minoren von C_3 sofort die schon bekannte Existenz von 12 Doppelstrahlen g_i des Komplexes C_3.

Von weiteren Ergebnissen führen wir die folgenden an: Auf jedem Doppelstrahle g_i sind 12 Punkte vorhanden, in denen der Kegel des Komplexes in eine Ebene und einen Kegel zweiter Ordnung zerfällt. Jede Doppelgerade g_i ist eine Rückkehrkante von vier Kegeln des Komplexes. Der Komplex C_3 enthält zwei doppelt unendliche Systeme Γ_3 und Δ_3 von Kongruenzen dritter Ordnung und dritter Klasse und des Geschlechtes 2; jede Kongruenz dieses Systems enthält die 12 Doppelstrahlen g_i. Ein gewöhnlicher Strahl von C_3 gehört unendlich vielen Kongruenzen Δ_3 (oder Γ_3) an; ein Doppelstrahl g_i gehört allen diesen Kongruenzen an und ist singulär für eine Kongruenz jedes Systems Δ_3 (oder Γ_3).

Die Fläche des Komplexes bezüglich einer beliebigen Geraden ist eine Oberfläche zwölfter Ordnung, welche die gegebene Gerade als sechsfache Gerade und eine Rückkehrkante von der Ordnung 21 hat, welche die gegebene Gerade zwölfmal schneidet. Diese Kurve ist der Ort der Rückkehrpunkte der Kurven des Komplexes, die in den durch die Gerade gehenden Ebenen liegen, und der Ort der Spitzen der Kegel, bei denen eine stationäre Berührungsebene durch die Gerade geht. Durch eine willkürliche Gerade gehen 12 Ebenen, wo die Kurve des Komplexes auf der Geraden einen Rückkehrpunkt hat.

Der Ort der Spitzen der äquianharmonischen Kegel des Komplexes C_3 ist eine Oberfläche achter Ordnung, die jede der Doppelgeraden g_i in vier Punkten berührt. Der Ort der Spitzen der harmonischen Kegel ist eine Oberfläche zwölfter Ordnung, die mit jedem Strahle g_i vier dreipunktige Berührungen besitzt. Der Ort der Spitzen der Komplexkegel von einem gegebenen anharmonischen Verhältnis ist eine Oberfläche der Ordnung 24, die mit jedem Strahle g_i vier sechspunktige Berührungen hat und eine jeden Strahl g_i viermal berührende Rückkehrkante c besitzt. Die Singularitätenfläche ist von der Ordnung 24, enthält alle Doppelstrahlen g_i und besitzt die Rückkehrkante c. Lp.

L. Seifert. Eine Bemerkung über Raumkollineation. Časopis **42**, 170-174. (Böhmisch)

Die Geraden in einem dreidimensionalen Raume, welche zu den durch eine Kollineation zugeordneten Geraden desselben Raumes senkrecht sind, bilden einen quadratischen Komplex; mit diesem Komplexe beschäftigt sich der Verfasser.

Pe.

D. Sintzov. On the theory of connexes. Proc. 5. Intern. Congr. **2**, 134-137.

Zusammenfassender Bericht über die bezüglichen Arbeiten des Verf., die er selbst im Jahrbuch angezeigt hat (F. d. M. **32**, 661, 1901; **40**, 725, 1909; **41**, 735, 1910; **42**, 698, 1911). Lp.

Fr. Schur. Über die berührenden Strahlennetze einer Strahlenkongruenz. Annali di Mat. (3) **21**, 219-224.

Eine Kongruenz $\mathfrak{x} = x + wp$, $\mathfrak{y} = y + wq$, $\mathfrak{z} = z + wr$ besitzt ∞^2 Strahlennetze, die sie längs des Strahls $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0)$ berühren. Diese werden durch die Gleichungen

$$\mathfrak{x} = x_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0 (u - u_0) + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0 (v - v_0) + \frac{w}{N}(p_0 + p_1'(u - u_0) + p_2'(v - v_0))$$

. . . .

dargestellt, in denen

$$p_1' = \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_0 - p_0 \frac{\sum P\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_0}{\sum P p_0}, \quad p_2' = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_0 - p_0 \frac{\sum P\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_0}{\sum P p_0},$$

$$N^2 = \sum [p_0 + p_1'(u - u_0) + p_2'(v - v_0)]^2$$

bedeuten und P, Q, R die Richtungskosinus der Normalen der Stützfläche (x, y, z) sind. Sind die Brennpunkte des Berührungsstrahls reell, so sind die Leitlinien eines berührenden Netzes zwei Tangenten an der Brennfläche in den Brennpunkten. Sk.

L. Schaller. Über die Grenzfläche der Strahlensysteme, die durch die Bewegung eines Strahlenbüschels entstehen. Monatsh. f. Math. u. Phys. **24**, 311-327.

Bewegt sich ein ebener Strahlenbüschel beliebig im Raume, so bildet die Gesamtheit seiner Lagen eine Strahlenkongruenz. Auf einem Strahle s einer Kongruenz erfüllen die Grenzlagen der Fußpunkte der kürzesten Abstände zwischen s und den Nachbarstrahlen in der Regel eine endliche Strecke. Ihre Endpunkte werden Grenzpunkte genannt. Die Grenzpunkte aller Strahlen bilden die Grenzfläche der Kongruenz. Entsteht diese durch die Bewegung eines ebenen Büschels, so setzt sich die Grenzfläche aus jenen ∞^1 ebenen Kurven („Grenzkurven") zusammen, die den Ort der Grenzpunkte für die Strahlen des Büschels in allen seinen Lagen bilden.

In der vorliegenden Arbeit wird die Bestimmung der Grenzkurve für einen Moment der Bewegung durchgeführt. Ihre Gestalt hängt nur von der Momentanbewegung des Büschels ab. Die Bestimmung der Umgebung eines Kongruenzstrahles auf analytischem Wege leistet die Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen. Die Rechnungen beziehen sich auf deren Darstellung in dem zweiten Bande der „Liniengeometrie mit Anwendungen" von K. Zindler (F. d. M. **37**, 673, 1906). Lp.

H. B. Owens. Conjugate line congruences of the third order defined by a family of quadrics. American J. 35, 323-356.

Die gegenwärtige Abhandlung soll für die Strahlensysteme dritter Ordnung das anstreben, was Kummer für die Strahlensysteme zweiter Ordnung erreicht hat.

„Kongruenzen gewisser Typen können auf einem System von Quadriken angeordnet werden. Eine solche Kongruenz entsteht, wenn die beiden sie bestimmenden Bedingungen von der Form sind:

$$\sum a_i x - \sigma \sum b_i x = 0, \quad \sum \bar{a}_i x - \sigma \sum \bar{b}_i x = 0,$$

wo $a_i, b_i, \bar{a}_i, \bar{b}_i$ Funktionen eines Parameters λ sind und das Zeichen $\sum$ bedeutet, daß diese Summen mit den homogenen Punktkoordinaten x, y, z, w zu nehmen sind. Löst man jede dieser Gleichungen für σ, so folgt

$$(1) \qquad \frac{\sum a_i x}{\sum b_i x} = \frac{\sum \bar{a}_i x}{\sum \bar{b}_i x} = \sigma,$$

und aus dieser Form erhellt, daß die Geraden für alle Werte von σ die Erzeugenden eines Systems der Quadrikenfamilie

$$(2) \qquad H(\lambda) = (\sum a_i x)(\sum \bar{b}_i x) - (\sum \bar{a}_i x)(\sum b_i x) = 0$$

definieren. Vertauscht man $\sum \bar{a}_i x$ und $\sum b_i x$ in den Gleichungen, so entsteht eine neue Kongruenz:

$$(3) \qquad \frac{\sum a_i x}{\sum \bar{a}_i x} = \frac{\sum b_i x}{\sum \bar{b}_i x} = \tau,$$

deren Strahlen die Erzeugenden der zweiten Schar in derselben Quadrikenfamilie (2) $H(\lambda) = 0$ definieren. Zwei solche Kongruenzen werden als σ- und τ-Kongruenzen eingeführt und konjugierte Kongruenzen genannt. Die von dem System der Quadriken eingehüllte Fläche ist die Brennfläche der konjugierten Kongruenzen σ und τ.

In der vorliegenden Arbeit werden solche Kongruenzen behandelt, die durch die Gleichungen definiert werden:

$$\left.\begin{aligned} &(4) \qquad \frac{a + b\lambda + c\lambda^2}{x + y\lambda} = \frac{a' + b'\lambda + c'\lambda^2}{z + w\lambda} = \sigma, \\ &(5) \qquad \frac{a + b\lambda + c\lambda^2}{a' + b'\lambda + c'\lambda^2} = \frac{x + y\lambda}{z + w\lambda} = \tau; \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned} &(6) \qquad \frac{a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3}{x + y\lambda + z\lambda^2} = \frac{a' + b'\lambda}{w} = \sigma, \\ &(7) \qquad \frac{a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3}{a' + b'\lambda} = \frac{x + y\lambda + z\lambda^2}{w} = \tau. \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

In ihnen sind a, b, c, d, a', b', c' lineare Funktionen der Veränderlichen x, y, z, w und λ, σ, τ sind veränderliche Parameter. Die Kongruenzen werden erörtert, sowohl wenn die linearen Funktionen allgemein sind, als auch wenn sie gewisse gegebene Bedingungen erfüllen. Es ist zu bemerken, daß beide Para-

meter λ, σ (τ) rational in die Gleichung eingehen und der eine, nämlich σ (τ) linear. Die konjugierten Kongruenzen (4) und (5) können auf der Quadrikenfamilie

$$(8)\quad H(\lambda) = (a + b\lambda + c\lambda^2)(z + w\lambda) - (a' + b'\lambda + c'\lambda^2)(x + y\lambda) = 0$$

angeordnet werden. Jede Kongruenz wird aus den Erzeugenden der einen Schar auf der Quadrikenfamilie gebildet. In ähnlicher Weise werden die Kongruenzen (6) und (7) von den beiden Scharen der Erzeugenden der Familie

$$(9)\quad H(\lambda) = w(a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3) - (a' + b'\lambda)(x + y\lambda + z\lambda^2) = 0$$

gebildet. Die beiden Scharen von Erzeugenden jeder Quadrikenfamilie sind rational trennbar.“

Von dieser analytischen Darstellung ausgehend, zeigt die Verfasserin sofort, daß die behandelten Strahlensysteme von der dritten Ordnung und im allgemeinen von der neunten Klasse sind. Die allgemeinen Kongruenzen σ und τ sind auf einer Familie von Quadriken angeordnet, die sechs Kegel enthält. Die Erzeugenden dieser Kegel gehören gleichzeitig den σ- und den τ-Kongruenzen an. Die Klasse der Kongruenzen σ (τ) wird jedesmal um eine Einheit verringert, wenn einer dieser Kegel in zwei Ebenen ausartet. Wenn eine Quadrik von $H(\lambda)$ in zwei Ebenen zerfällt, so werden die Strahlen jedes Systems von Erzeugenden Strahlenbüschel, so daß ein Büschel in jeder Ebene um je einen von zwei Mittelpunkten liegt, die im allgemeinen verschieden sind und auf der Schnittlinie der beiden Ebenen sich befinden. Der σ-Mittelpunkt in der einen ist der τ-Mittelpunkt in der andern, und umgekehrt. Die Summe der Ordnungen der singulären Kegel aller σ- und τ-Strahlen durch einen Basispunkt einer kubischen Kongruenz ist immer gleich der Klasse jeder Kongruenz. Die Brennfläche der allgemeinen σ- (τ-)Kongruenz enthält ∞^1 Raumkurven vierter Ordnung erster Art und sechs Kurven vierter Ordnung mit je einem Doppelpunkt. Die Doppelpunkte dieser sechs Kurven sind die einzigen Doppelpunkte auf der Oberfläche; diese enthält außer diesen Kurven eine Rückkehrkante von der Ordnung 12.

Die weitere Untersuchung erstreckt sich nun auf die nähere Erforschung aller solcher Kongruenzen je nach der Existenz von singulären Punkten und singulären Ebenen. Zuerst werden die Kongruenzen vom Typus (I) behandelt, danach die vom Typus (II), zuletzt solche, die auf Netzen von Quadriken liegen. Wegen der Menge der erhaltenen Ergebnisse müssen wir auf die Arbeit selbst verweisen. Lp.

C. Servais. Sur les congruences rectilignes. Mathesis **33** [(4) **3**], 5-12.

Mittels der projektiven Geometrie ermittelt der Verf. die erste Differentialinvariante W der geradlinigen Kongruenzen, prüft die Fälle, wo $W = 1$, $W = -1$; ebenso findet er die Werte der Produkte oder der Quotienten der Krümmungen der beiden Schalen der Brennfläche einer geradlinigen Kongruenz. Mn. (Lp.)

G. Sannia. Equazione differenziale delle congruenze W. Torino Atti **48**, 155-170.

„Sind X, Y, Z die Richtungskosinusse einer Geraden r von bestimmtem posi-

tivem Richtungssinn und x, y, z die Koordinaten eines ihrer Punkte, so sind die sechs Größen

$$(1) \qquad X, Y, Z, \; l = yZ - zY, \quad m = zX - xZ, \quad n = xY - yX,$$

die durch die Beziehungen zusammenhängen:

$$(2) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \qquad (3) \quad Xl + Ym + Zn = 0,$$

die Strahlenkoordinaten von r. Wenn sie Funktionen zweier Parameter u, v sind, so erzeugt die Gerade r eine Kongruenz. Damit die Kongruenz eine W sei (d. h. eine solche, bei der auf den beiden Schalen ihrer Brennfläche die Asymptotenlinien sich entsprechen), ist es bekanntlich nötig und hinreichend, daß die Größen in (1) ein und derselben partiellen Differentialgleichung von dem Typus

$$(4) \qquad \alpha_{11}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \alpha_{12}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + \alpha_{22}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \alpha_2\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \alpha\varphi = 0$$

genügen. Dieser Darbouxsche Satz ermöglicht es, festzustellen, ob eine gegebene Kongruenz eine W ist oder nicht, eignet sich aber nicht zur Untersuchung der W-Kongruenzen. In der vorliegenden Note wandle ich den Satz passend um und erhalte dadurch die Differentialgleichung der W-Kongruenzen und die Differentialgleichung der in einem Komplex enthaltenen W-Kongruenzen. Endlich beweise ich, daß eine bekannte Eigenschaft der linearen Komplexe für sie charakteristisch ist."

Lp.

F. W. Beal. Normal congruences determined by centers of geodesic curvature. Amer. Journ. **35**, 10-36.

In C. R. **115**, 589-592 (F. d. M. **24**, 732, 1892) hat Caronnet den Satz aufgestellt: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Geraden, welche die Mittelpunkte geodätischer Krümmung der Kurven eines orthogonalen Systems auf einer Oberfläche verbinden, eine Normalenkongruenz bilden, ist die, daß die Kurven in der einen Familie oder in beiden eine konstante geodätische Krümmung haben. Die gegenwärtige Arbeit beschäftigt sich mit der Bestimmung von Normalenkongruenzen dieser Art und mit der Untersuchung ihrer Eigenschaften. Der Kürze wegen werden sie als „zugesellte" (associated) Normalenkongruenzen bezeichnet.

In § 1 wird der Caronnetsche Satz bewiesen und auf den Fall ausgedehnt, wo eine Familie des orthogonalen Systems aus Geodätischen besteht, d. h. wo einer der Radien geodätischer Krümmung beständig unendlich ist. Bei dem Nachweise der Existenz zugesellter Normalenkongruenzen sind drei Fälle zu erforschen: 1. Die geodätische Krümmung ist dieselbe Konstante für die Kurven jeder der beiden Familien, die das orthogonale System bilden. 2. Sie ist konstant und dieselbe nur für die Kurven der einen Familie. 3. Die Radien der geodätischen Krümmung sind Funktionen voneinander. Der Fall, bei welchem beide Radien der geodätischen Krümmung gegebene Konstanten sind, wird in §§ 2-4 erörtert. Dort wird gezeigt, daß die Oberfläche, auf der ein solches Kurvensystem vorhanden ist, pseudosphärisch sein muß, und eine Gesamtkrümmung hat gleich der negativen Summe der Quadrate der konstanten geodätischen Krümmungen. Die zugesellte Normalenkongruenz ergibt sich als

eine Kongruenz von Normalen einer Bianchischen Transformierten der gegebenen Oberfläche. Außerdem wird bewiesen, daß jede dieser Kongruenzen durch ∞^1 orthogonale Systeme bestimmt wird oder durch $2\,\infty^1$ Systeme, deren Kurven sich unter einem konstanten Winkel schneiden und konstante geodätische Krümmung haben.

Die allgemeine Erörterung geschieht in §§ 4-8. In § 5 wird gezeigt, daß zugesellte Normalenkongruenzen für jede Oberfläche vorhanden sind, wenn die Radien der geodätischen Krümmung gegebene analytische Funktionen voneinander sind, oder wenn der eine Radius der geodätischen Krümmung eine Konstante ist. Charakteristische Eigenschaften dieser Kongruenzen werden in § 6 und § 7 aufgedeckt. Die Bedingung, daß eine allgemeine Normalenkongruenz, deren Linien in den Berührungsebenen der gegebenen Oberfläche liegen, eine zugesellte Normalenkongruenz ist, wird hier ermittelt. Jedes System, dessen Kurven sich unter konstantem Winkel schneiden, und für welches die zugehörigen Radien der geodätischen Krümmung Funktionen voneinander sind, oder für welches der eine Radius eine Konstante ist, bestimmt eine zugesellte Normalenkongruenz. Ferner wird gefunden, daß die Aufgabe, diese neuen Systeme zu bestimmen, dieselbe ist wie die der Bestimmung des orthogonalen Systems. Die Beschränkung in dem Caronnetschen Satze, daß die Kurven orthogonal sind, kann also durch die Bedingung ersetzt werden, daß sie sich unter einem konstanten Winkel schneiden; aber der so erhaltene allgemeinere Satz gibt nicht irgendwelche neuen Kongruenzen. In § 8 wird die Bedingung aufgestellt, daß die Abwickelbaren der zugesellten Normalenkongruenzen den Krümmungslinien auf der gegebenen Oberfläche entsprechen. Der Rest der Abhandlung handelt von Aufgaben, die für zugesellte Normalenkongruenzen eigentümlich sind, bestimmt durch orthogonale Systeme, bei denen die Kurven der einen Familie eine konstante geodätische Krümmung haben. Die Erörterung führt auf die Betrachtung von Oberflächen, auf denen eine Familie der Krümmungslinien eine konstante geodätische Krümmung hat. Mit Ausnahme von § 8 und des größten Teils von § 9 drücken die erlangten Ergebnisse Deformationseigenschaften aus. Lp.

V. Jamet. Sur le complexe des moments vectoriels. C. R. **156**, 1828-1829.

„Wenn es sich um den Komplex handelt, von dem jede Gerade in einem ihrer Punkte das vektorielle Moment eines gegebenen Vektorensystems trägt, so ist die Gleichung (die das Problem der konjugierten Kurven der Flächen in Ansatz bringt):

$$q\frac{\partial}{\partial x}(px+qy)-p\frac{\partial}{\partial y}(px+qy)+k(r+l)=0.$$

Ich habe bewiesen, daß sie auf die Form

$$(\alpha-\beta)\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}-\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}=0$$

zurückführbar ist, und das allgemeine Integral von ihr ist leicht zu erkennen. Ist die Integration erledigt, so bemerkt man, daß auf den erhaltenen Oberflächen die Untersuchung der Asymptotenlinien auf Quadraturen zurückkommt."

Lp.

A. V. Bäcklund. Einiges über Kugelkomplexe. Annali di Mat. (3) **20**, 65-106.

Aus der Gesamtheit der Kugeln $\Sigma(x_i' - x_i)^2 - R^2 = 0$ wird durch eine Gleichung $F(x_1, x_2, x_3, R) = 0$ zwischen den Mittelpunktskoordinaten und dem Radius ein Kugelkomplex ausgesondert. Diesem Komplex kann man alle Flächen zuordnen, deren Hauptkugeln der einen Schar im Komplex enthalten sind, und die durch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die Liesche Gleichung D_{12} des Komplexes (Math. Ann. 5), bestimmt sind. Die Charakteristiken dieser Gleichung sind die Krümmungslinien der Integralflächen. Einen Hauptteil der Arbeit bildet das Studium zweier Komplexe, deren Liesche Differentialgleichungen in Involution sind. Die Bedingung dafür wird zunächst in einer vom Verf. schon 1873 in Lunds Univ. Årsskr. **9** angegebenen Form aufgeschrieben: ist ein Komplex $F(x_1, x_2, x_3, R) = 0$ gegeben, so ergeben sich die mit ihm durch Involution verknüpften Komplexe $G(x_1', x_2', x_3', R_1) = 0$ durch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung; wesentlich schwieriger gestaltet sich der Fall, daß eine Gleichung von der Form $f(x_1, x_2, x_3, R_1, x_1', x_2', x_3', R) = 0$ zwischen den Mittelpunktskoordinaten und Radien der Kugeln beider Komplexe vorgegeben ist. Die Untersuchung knüpft sich an das Studium der Transformation

$$\begin{aligned}
F_1 &\equiv (z - z')^2 + (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2 = 0,\\
F_2 &\equiv (z - z') - p_1(x_1 - x_1') - p_2(x_2 - x_2') - p_3(x_3 - x_3') = 0,\\
F_3 &\equiv (z - z') - p_1'(x_1 - x_1') - p_2'(x_2 - x_2') - p_3'(x_3 - x_3') = 0,\\
F_4 &= 1 + p_1 p_1' + p_2 p_2' + p_3 p_3' = 0,\\
F_5 &\equiv f(x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3', z, z') = 0,
\end{aligned}$$

deren letzte Gleichung aus der vorgegebenen Bedingungsgleichung entsteht, wenn man $z = iR$, $z' = iR'$ setzt. Als Anwendung der Theorie werden die Weingartenschen Sätze über W-Flächen erhalten und die Darbouxsche Umkehrung des Dupinschen Satzes über die Koordinatenlinien eines krummlinigen rechtwinkligen Koordinatensystems im Raume. Zum Schluß wendet sich die Untersuchung zu den konfokalen Kugelkomplexen zweiten Grades, und es zeigt sich, daß zwei beliebige solcher Komplexe, für die die Punktkugeln des Raumes einen der Fundamentalkomplexe bilden, eine Integralschar gemeinsam haben, die einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört. Sk.

J. L. Coolidge. A study of the circle cross. American M. S. Trans. **14**, 149-174.

Zirkelkreuz oder Kreiskreuz wird in Verallgemeinerung des Studyschen Begriffes des Linienkreuzes die Figur zweier Kreise genannt, wenn jede Kugel durch den einen Kreis orthogonal zum andern ist. 1. Winkel von Kreisen. 2. Mannigfaltigkeiten von Kreisen, die zu einer Kugel orthogonal sind. 3. Zirkelkreuze allgemeiner Lage im Raume. 4. Eine neue Transformation, die Kugeln in Kugeln und Kreise in Kreise verwandelt. Der Begriff des Kreises im Raume ist nicht selbstverständlich. Hätte Verf. daran gedacht, so würde er als Analogon zum Studyschen Linienkreuz vielleicht einen andern Begriff gewählt haben. Er selbst gibt zu, daß der analytische Apparat zu kompliziert ist. Aber es ist, wenn auch üblich, so doch nicht notwendig, einen Kreis

im Raume durch zehn homogene Koordinaten darzustellen, zwischen denen fünf quadratische Relationen bestehen. Wir vermissen ferner das hier höchst notwendige Eingehen auf Realitätsfragen. B.

Weitere Literatur.

O. E. Glenn. Note on a translation principle connecting the invariant theory of line congruences with that of plane n-lines. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 75.

H. Schlusser. Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen. Diss. Straßburg. 49 S. 8° (1912).

L. Schmidt. Über die zu einem gegebenen linearen Komplex gehörigen kubischen Raumkurven (kubische Nullkurven eines Nullraums). Diss. Straßburg.

G. Tarnutzer. Über die kubischen Nullkurven des linearen Komplexes. Diss. Zürich. 49 S. 8°.

E. J. Wilczynski. On the surfaces whose directrix curves are indeterminate. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 73-75.

Kapitel 5.

Verwandtschaft, Transformationen, Abbildungen.

A. Allgemeines.

H. Wiener. Über die geometrische Theorie der algebraischen Formen. Verh. Naturf. Ges. 1912, Münster **2**$_1$, 6-10 (1913).

Der Vortrag führt die Gedanken weiter fort, die in zwei früheren Vorträgen von Naturforscherversammlungen entwickelt wurden: „Geometrische Invariantentheorie der binären Formen“ (Dresden 1907), abgedruckt im Jahresbericht der D. Math.-Ver. **17**, 291-313 (F. d. M. **39**, 168, 1908), und „Zur Geometrie der binären Formen“ (Cöln 1908), nicht veröffentlicht. In jenen Vorträgen wurde für binäre Formen die Konstruktion der Formen sowie die Lösung der Grundaufgabe angedeutet, aus einer gegebenen Form diejenige Polarform zu konstruieren, deren Ordnungspunkte mit denen von $a_0\,xy + a_{01}\,x + a_{10}\,y + a_2$ identisch sind. Die Übertragung von binären (zweistufigen) Gebilden auf Ebene und Räume beliebiger Stufe gelingt unter Aufgabe jener Vorstellung durch dieselbe Methode, die in der Lehre von den Gleichungen auf Galoissche Gruppen führt.

„Zur Ableitung sind keine Determinanten und Matrizen, überhaupt keine Symbole nötig, die nicht ganz bestimmten geometrischen Sinn haben. Die Forderung der Konstruktion zwingt, alles auf einen Grundbegriff zurückzuführen, den der geometrischen Verwandtschaft, und aus ihm entspringt der Zusammenhang meiner alle Dimensionen umfassenden Theorie mit der der Galoisschen Gruppen.“ Lp.

W. Sierpiński. O pewnem odwzorowaniu ciągłym. (Über eine stetige Abbildung.) Wektor **2**, 4-8.

Es ist möglich, zwei Ebenen XY und ΞH derart aufeinander eineindeutig und stetig zu beziehen, daß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:
1. Auf der Ebene XY existieren überall und sind endlich die Ableitungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Ebenso existieren auf der Ebene ΞH überall und sind endlich die Ableitungen

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

2. Auf jeder der beiden Ebenen gibt es ein endliches Segment einer Geraden, dem auf der andern Ebene ein nicht rektifizierbares Kurvenstück, d. h. ein unendlich langes Kurvenstück entspricht. A. R.

H. Tietze. Sur les représentations continues des surfaces sur elles-mêmes. C. R. **157**, 509-512.

Es handelt sich um die Fragen der allgemeinen Abbildungstheorie und der Analysis situs, die sich um den folgenden Satz gruppieren: Eine Abbildung R_0 (eineindeutig und stetig), die einen gegebenen Sinn einer Fläche S (offenes, einfach zusammenhängendes Flächenstück) nicht ändert, ist eine Deformation von S in sich selbst, d. h. es läßt sich vermittelst eineindeutiger und stetiger Abbildungen ein stetiger Übergang von R_0 zur Identität herstellen. Re.

W. Beutner. Transformationsgruppen mit räumlicher Gewichtsfigur. Wien. Ber. **122**, 1607-1628.

„In der vorliegenden Arbeit werden zwei Gruppenbestimmungen durchgeführt, bei denen die Gewichtsmethode (G. Kowalewski) eine ausschlaggebende Rolle spielt. Sie sind deshalb von besonderem Interesse, weil hier drei verschiedene Gewichtsysteme und dementsprechend räumliche Gewichtsfiguren auftreten.“ 1. Problem: Alle endlichen transitiven Transformationsgruppen des R_6 zu bestimmen, die die Linienelemente eines festgehaltenen Punktes allgemeiner Lage durch die projektive Gruppe des Nullsystems transformieren. 2. Problem: Alle transitiven Transformationsgruppen des R_6 zu finden, die die Linienelemente eines festgehaltenen Punktes durch die Vertauschungsgruppe der binärternären Bilinearform transformieren. Bl.

L. Tuschel. Über eine Abbildung der Punkte einer Fläche auf die Geraden der Bildebene und eine sich daraus ergebende Flächengattung. (Mit einem Anhang: „Über eine Geometrie logarithmischer Linien.“) Zs. f. d. Realschulwesen **38**, 78-93.

Jedem Punkt der Fläche wird die Schnittlinie der parallel zu seiner Tangentialebene durch einen festen Punkt gelegten Ebene mit der Bildebene zugeordnet. Es werden nun die Flächen untersucht, bei denen die zugeordnete Gerade stets durch die Normalprojektion des Punktes geht. Nimmt man (0, 0, 1) als festen Punkt und $z = 0$ als Bildebene, so ist $xp + yq + 1 = 0$ die Differentialgleichung der Flächen. Sie können aus logarithmischen Linien in der xy-Ebene durch beliebige Drehung um und Schiebung in der z-Achse erzeugt werden.

Im Anhang wird eine spezielle hyperbolische Geometrie der logarithmischen Linien als Pseudogrundgebilde entwickelt. Sehr.

F. M. Morgan. Involutorial transformations. American J. **35**, 79-104.

Unter der K l a s s e einer Involution im ternären Gebiet wird verstanden die Zahl der Paare konjugierter Punkte, die auf einer geraden Linie liegen; sie ist keine invariante Eigenschaft. Die Klassen 1 und 2 waren von B e r t i n i studiert, die Fälle 3 und 4 von M a r t i n e t t i, die Klasse 5 von B e r z o l a r i. Diese Involutionen werden hier auf die vier B e r t i n i schen Typen (F. d. M. **42**, 703, 1911), deren Gleichungen aufgestellt werden, quadratisch transformiert, und die Struktur der Involutionen beliebiger Klasse wird angegeben. B.

L. Autonne. Sur les substitutions crémoniennes dans l'espace à $N-1$ dimensions. J. de l'Éc. Pol. (2) **17**, 147-206.

Die Arbeit knüpft an frühere Untersuchungen des Verf. an, über die zum Teil F. d. M. **34**, 715, 1903 berichtet wurde. Auf diese Referate sei hiermit verwiesen. — Durch eine C r e m o n a sche Berührungstransformation (Cremonasche Transformation) werden die Flächenelemente eines R_n (ein jedes bestehend aus einem Punkte und einer durch ihn gehenden $(n-1)$-dimensionalen Ebene) auf die eines R'_n eindeutig bezogen, und zwar so, daß jedem Elementenverein wiederum ein solcher entspricht. (Ein Elementenverein V_k wird aus einer k-dimensionalen Punktmannigfaltigkeit M_k erhalten, indem man jeden Punkt von M_k mit jeder seiner Tangentialebenen kombiniert. Dabei kann $k = 0, 1, \ldots, n-1$ sein. V_0 ist das System der Elemente, die zu einem festen Punkt gehören. Jeder Verein besteht aus ∞^{n-1} Elementen). Nennt man zwei Punkte x, x' von R, R' konjugiert, wenn irgend ein zu x gehöriges Element existiert, das irgend einem zu x' gehörigen Elemente entspricht, so stellt sich die Bedingung für das Konjugiertsein zweier Punkte durch eine oder mehrere homogene Gleichungen zwischen ihren homogenen Koordinaten dar. Das so erhaltene Gleichungssystem heißt primordial. Drei weitere primordiale Systeme erhält man, wenn man statt der Punkte Ebenen oder in dem einen Raume Punkte, im andern Ebenen nimmt. Durch jedes der vier Gleichungssysteme ist die Transformation und somit auch jedes der 3 andern bestimmt. Zu einem als primordial vorgeschriebenen Gleichungssystem gehört also sicher nicht mehr als eine C r e m o n a sche Berührungstransformation. In dem vorliegenden Aufsatz wird nun der Fall behandelt, daß die mit einem Punkt oder einer Ebene des einen Raumes konjugierten Punkte oder Ebenen des andern eine lineare Mannigfaltigkeit bilden. Die vier primordialen Gleichungssysteme werden dann

bilinear. Es wird die Frage nach den Bedingungen, denen 4 gegebene bilineare Gleichungssysteme genügen müssen, wenn sie die primordialen Systeme einer Cremonaschen Berührungstransformation sein sollen, aufgeworfen und beantwortet. Diese Bedingungen stellen sich mittels gewisser aus den Koeffizienten der Gleichungen abgeleiteten Matrizen in übersichtlicher Form dar. Verf. geht dann noch auf den früher von ihm nach anderer Methode behandelten Fall des R_3 näher ein.

Stz.

Hilda P. Hudson. On the composition of Cremona space-transformations. Palermo Rend. **35**, 286-288.

Bei dem Versuche, solche Cremonaschen Raumtransformationen zu finden, daß in Analogie zu dem Noetherschen Satze jede andere aus Transformationen des Systems darstellbar ist, hat die Verf. herausgebracht, daß keine derartige endliche Reihe vorhanden ist.

Lp.

H. P. Hudson. On the product of two quadro-quadric space-transformations. Amer. Journ. **35**, 183-188.

Die Zusammensetzung und Zerlegung von Raumtransformationen ist bisher noch wenig behandelt worden. S. Kantor (F. d. M. **27**, 562, 1896; **28**, 599, 1897) hat unter anderem den allgemeinen Fall der (2, 2)-Transformationen vollständig untersucht. Im folgenden wird die aus zwei (2, 2)-Transformationen zusammengesetzte auf einen von neun Typen gebracht. Darunter befinden sich solche von der Gestalt (4, 4), (3, 4), (3, 3), (2, 4), (2, 3), (2, 2), (1, 1).

Bei einer (2, 2)-Transformation T entsprechen den Ebenen des einen Raumes in dem andern Flächen zweiter Ordnung, die einen festen Kegelschnitt c und einen festen Punkt p enthalten. Auf zwei verschiedene Arten läßt sich T spezialisieren: entweder zerfällt c in ein Geradenpaar a, b, oder aber p liegt auf c.

Im allgemeinen Falle nehme man als Ebene von c die durch $W=0$ bestimmte und den Punkt p als die Koordinatenecke (0, 0, 0, 1). Die Transformationsformeln lassen sich dann in einfacher, kanonischer Gestalt (A) aufstellen und entsprechend den beiden Spezialisierungen modifizieren. Man hat

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} x' : y' : z' : w' = xw : yw : zw : f_2(xyz), \\ x : y : z : w = x'w' : y'w' : z'w' : f_2(x'y'z'). \end{cases}$$

Es werden nunmehr die verschiedenen Typen von zwei solchen T zusammengesetzt. Dabei kann noch eine weitere Spezialisierung eintreten, wenn die beiden Fundamentalsysteme in dem vermittelnden Raume eine besondere Lage zueinander einnehmen. Auf diesem Wege und unter Benutzung früherer Ergebnisse (F. d. M. **42**, 702, 1911) gelangt die Verfasserin zu den erwähnten neun Typen.

My.

M. J. van Uven. Die ebenen Kurven, deren Form durch Parallelprojektion nicht geändert wird. Nieuw Archief (2) **10**, 269-272.

Fügt man zur Gruppe der Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen die Paralleltransformationen auf eine andere Ebene hinzu, so erhält man die

allgemeine lineare Gruppe, bei der die Parabeln und die Geraden die einzigen invarianten Kurvenscharen mit weniger als 5 Parametern sind. Hieraus folgt, daß nur die Geraden und die Parabeln bei Paralleltransformation sich ähnlich bleiben. El.

U. Amaldi. I gruppi continui infiniti di trasformazioni puntuali dello spazio a tre dimensioni. Parte II. Modena Mem. (3) **10**, 3-367.

Die Untersuchungen, deren erster Teil F. d. M. **42**, 202, 1911 besprochen ist, werden hier zum Abschluß gebracht. Es handelt sich um die unendlichen Gruppen von Punkttransformationen des Raumes, die eine Schar von ∞^2 Kurven invariant lassen. In Kap. IV werden die intransitiven Gruppen dieser Art bestimmt, d. h. die, bei denen jede der ∞^2 Kurven in Ruhe bleibt. In Kap. V werden die Gruppen, bei denen die Kurven der Schar transitiv transformiert werden, klassifiziert. Es sind vier Klassen zu unterscheiden, je nachdem die zugehörige verkürzte Gruppe, die angibt, wie die Kurven der Schar untereinander vertauscht werden, primitiv und endlich, primitiv und unendlich, imprimitiv und endlich oder imprimitiv und unendlich ist. Diese vier Klassen werden in den Kap. VI bis IX erledigt. Schon der Umfang der ganzen Arbeit zeigt, daß hier eine gewaltige Leistung vorliegt. Bedenkt man die überaus große Zahl der sich ergebenden Gruppen, so erkennt man ohne weiteres, daß hier große Schwierigkeiten zu überwinden waren. Es muß aber von neuem betont werden, daß Geduld allein nicht ausgereicht haben würde, diese Schwierigkeiten zu überwinden. El.

Weitere Literatur.

A. V. Bäcklund. Über mehrdeutige Raumtransformationen. Stockholm. 88 S. 4°.

E. Kasner. Note on contact transformations of space. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 169.

E. H. Moore. On the geometry of linear homogeneous transformations of m variables (preliminary communication). Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 457-458.

T. Wada. On a one-to-one correspondence between two planes. Kyôto Univ. Mem. **5**, 167-174.

H. Wilson. Untersuchung einer linear-quadratischen Berührungstransformation. Diss. Rostock. (Weida i. Thüringen: Thomas & Hubert). 59 S. 8°.

J. W. Young and F. M. Morgan. The geometry associated with a certain group of cubic transformations. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 515-517.

B. Konforme Abbildungen und dergleichen.

E. Study. Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. Zweites Heft. Herausgegeben unter Mitwirkung von W. Blaschke: Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. IV u. 142 S. gr. 8°.

Die einfach zusammenhängenden Bereiche mit endlicher oder unendlich hoher Blätterzahl lassen sich nach einem zuerst von Koebe und Poincaré 1907 bewiesenen „Fundamentalsatze" umkehrbar eindeutig und konform entweder auf eine gewöhnliche Kreisfläche oder auf die einfach punktierte Ebene oder auch die Vollebene abbilden. Die ersten vier Paragraphen der Studyschen Schrift gelten der Entwicklung dieses Satzes im Anschluß an Koebes Abhandlungen in den Göttinger Nachrichten 1907 und Math. Ann. **67**. Das für endlich vielblättrige Bereiche dabei vorauszusetzende alternierende Verfahren wird nur skizziert.

Die Bemühungen Studys gelten sodann der Klärung der Frage der Ränderzuordnung bei der konformen Abbildung schlichter Bereiche allgemeinster Begrenzungsart. Die Haupttatsache, welche Study unter wesentlicher Benutzung eines merkwürdigen Satzes von Fatou herleitet, ist die, daß, bei der gedachten Abbildung auf die Kreisfläche, die stets in zyklischer Anordnung befindlichen erreichbaren Grenzpunkte („Randpunkte") eineindeutig auf die Punkte einer Punktmenge auf der Peripherie des Einheitskreises abgebildet werden, welche Punktmenge ihrerseits auf der ganzen Peripherie überall dicht ist. Die hier vorliegenden Studyschen Originalleistungen berühren sich mit gleichzeitigen Arbeiten von Carathéodory und Osgood, ferner den beträchtliche Vereinfachungen bringenden Arbeiten von Koebe (Gött. Nachr. 1913 und J. für Math. **145**, 1915), Courant, Lindelöf.

Weiter betrachtet Study speziell die Abbildung konvexer schlichter Bereiche. Die Schwarzsche Abbildungsformel für konvexe Polygone wird ausgedehnt auf allgemeinste konvexe Bereiche, unter Einführung der „Stützwinkelfunktion" zur Bildung eines die Abbildung vermittelnden Stieltjesschen Integrals.

Den Schluß bilden Betrachtungen zur Bestimmung des größten, mit dem Konvergenzkreise einer regulären Potenzreihe konzentrischen Kreises, für welche die betreffende Potenzreihe noch eine Abbildung auf ein konvexes Gebiet leistet („Rundungsschranke"), sowie weiter die Behandlung des Koebeschen Verzerrungssatzes nebst Beispielen.

Das Studysche Buch ist anregend geschrieben und verdient um so mehr Beachtung, als wir bisher noch nicht im Besitze befriedigender Lehrbücher der konformen Abbildung sind.

Kb.

E. Study. On the conformal representation of convex domains. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 122-125.

Ausführungen über Grundbegriffe und Hauptsätze aus der vorstehend angezeigten Schrift.

Lp.

C. Carathéodory. Sur la représentation conforme des polygones convexes. Brux. S. sc. **37** (B), 1-11.

Beweis des folgenden Satzes: Wenn die $n+2$ Koeffizienten $a_0, a_1 \neq 0, a_2, \ldots, a_{n+1}$ einer Potenzreihe $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ gegeben sind, so lassen sich die folgenden Koeffizienten $a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots$ so bestimmen, daß die im Innern ihres Konvergenzkreises betrachtete Funktion $f(z)$ die konforme Ab-

bildung eines Polygons auf diesen Kreis gibt. Die Bestimmung ist eindeutig, wenn gefordert wird, daß das Polygon höchstens n Seiten hat. Das Polygon heißt konvex, wenn jede Strecke, die zwei seiner Punkte verbindet, ganz innerhalb liegt. Die ganze Ebene wird als ein Polygon von der Anzahl 0 von Seiten angesehen, die Halbebene als ein Polygon von der Seitenzahl 1; ein Winkel, der kleiner als π ist, oder der Streifen zwischen zwei Parallelen ist ein Polygon von 2 Seiten. Mn. (Lp.)

C. Carathéodory. Über die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis. Math. Ann. **73**, 305-320.

Der Verf. beweist den zuerst von Osgood (Am. Math. Soc. Bull. (2) **9**, 233-235, 1903) aufgestellten, allerdings damals noch nicht ausführlich von Osgood bewiesenen (vgl. die neuere Arbeit Osgood-Taylor; Referat auf S. 758) Satz, daß bei konformer Abbildung eines schlichten, von einer Jordan-Kurve begrenzten, einfach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche eines Kreises die Abbildungsfunktion auch auf der Begrenzung des Bereiches noch stetig ist und eine eineindeutige Abbildung der Begrenzungslinie auf die Peripherie des Einheitskreises liefert. Als Hauptgrundlage der Beweisführung dient ein Satz von Fatou, welcher seinerseits auf einem Satze von Lebesgue beruht.

Satz von Fatou „Ist die eindeutige analytische Funktion $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär und beschränkt, so gibt es auf dem Einheitskreise $|z| = 1$ überall dicht liegende Punkte, für die, bei Annäherung längs eines Radius des Kreises, die Funktion $f(z)$ gegen einen bestimmten Wert konvergiert.“

Man übersieht, wie das Osgood-Carathéodorysche Resultat dazu dienen kann, die Randwertaufgabe der Potentialtheorie für einfach zusammenhängende Bereiche zu lösen, die von einer Jordan-Kurve begrenzt sind. Kb.

C. Carathéodory. Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. Math. Ann. **73**, 323-370.

Die Begrenzung eines einfach zusammenhängenden schlichten Gebietes G, welches selbst nur als aus inneren Punkten bestehend betrachtet wird, läßt sich im allgemeinsten Falle zweckmäßig in Elemente auflösen, die bei Carathéodory als „Primenden“, von Koebe später (J. für Math. **145**) als „Randelemente“ bezeichnet werden. Auf diese gleichzeitig von Carathéodory und Study gefundene Analyse der Begrenzung wird man in durchaus natürlicher Weise geführt durch die Unterscheidung der erreichbaren und nicht erreichbaren Grenzpunkte. Erstere sind offenbar zyklisch angeordnet und können durch Querschnitte zu je zweien miteinander verbunden werden. Es sind nun alle diejenigen Begrenzungspunkte in ein Randelement zu vereinigen, die nicht durch Querschnitte voneinander getrennt werden können, wobei nun ein und derselbe Grenzpunkt unendlich vielen voneinander verschiedenen Randelementen angehören kann.

Wird jetzt die konforme Abbildung des Innern des Gebietes G auf die Fläche des Einheitskreises vorgenommen, so ergibt sich eine eineindeutige Beziehung

der erreichbaren Begrenzungspunkte auf die Punkte einer die Peripherie des Einheitskreises überall dicht bedeckenden Punktmenge und eine durchgängig eineindeutige Beziehung der Randelemente auf die Gesamtheit der Punkte der Peripherie des Einheitskreises.

Die Randelemente werden von Carathéodory wie auch von Study noch spezielleren Unterscheidungen unterworfen, wobei mancherlei Fragen zur Weiterverfolgung auffordern. Kb.

C. Carathéodory. Zur Ränderzuordnung bei konformer Abbildung. Gött. Nachr. 1913, 509-518.

Der Verf. gibt einerseits einen modifizierten Beweis eines als Grundlage für die Behandlung der Ränderzuordnung bei konformer Abbildung in Betracht kommenden, von Koebe (Gött. Nachr. 1913, 286) entwickelten Satzes, andererseits einen elementaren Beweis für den von ihm selbst und Study als Grundlage benutzten Satz von Fatou. Kb.

W. F. Osgood and E. H. Taylor. Conformal transformations on the boundaries of their regions of definition. Amer. Math. Soc. Trans. **14**, 277-298.

Es wird eine Reihe von Sätzen betreffend die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung des Innern einfach zusammenhängender schlichter Bereiche allgemeinster Begrenzungsart entwickelt. Der wesentliche Inhalt der Sätze ist die Tatsache, daß die in zyklischer Anordnung befindlichen erreichbaren Begrenzungspunkte des auf die Fläche des Einheitskreises abgebildeten Bereiches S eineindeutig auf die Punkte einer Punktmenge der Peripherie des Einheitskreises bezogen werden, welche Punktmengen die Peripherie des Einheitskreises überall dicht bedeckt. Zum Zwecke des Beweises wird eine Reihe besonderer Hülfssätze über Potentialfunktionen entwickelt. Im Falle einer Jordankurve als Begrenzung des Bereichs S ergibt sich, daß diese stetig und eineindeutig auf die Peripherie des Einheitskreises abgebildet wird.

Osgood bringt im vorliegenden Aufsatze seine früheren Andeutungen (Amer. Math. Soc. Bull. (2) **9**, 233-235, 1903) zu einer ausführlichen und in den Resultaten auch vollkommeneren Entwicklung. Seine Untersuchungen sind unabhängig von den 1913 veröffentlichten gleichzeitigen Untersuchungen von Carathéodory, Study, Koebe. Kb.

W. F. Osgood. On the uniformization of algebraic functions. Annals of Math. (2) **14**, 143-162.

Der Verf. gibt im Anschluß an Koebes Originalarbeiten (Math. Ann. **69**; Gött. Nachr. 1908, 1909) eine Darstellung eines Koebeschen Beweises für das auf die Uniformisierung durch automorphe Funktionen des Schottkyschen Typus sich beziehende Uniformisierungstheorem der algebraischen Funktionen (Zugrundelegung der Methode der Überlagerungsfläche, Verzerrungssatz, allgemeines Konvergenzprinzip der analytischen Funktionen). Kb.

É. Picard. Sur la représentation conforme des aires multiplement connexes. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **30**, 483-488.

Nach Schottky (Dissertation, J. für Math. **83**) kann man zu einem gegebenen schlichten, mehrfach zusammenhängenden Bereich eindeutige analytische Funktionen in demselben konstruieren, die auf dem Rande nur reelle Werte annehmen. Der Verf. bespricht die analytische Fortsetzung solcher Funktionen auf die Rückseite der Bereiche gemäß dem Symmetrieprinzip und weist auf eine Bestimmungsweise dieser Funktionen mittels der Theorie der Integralgleichungen hin. Kb.

P. Koebe. Lösung der Randwertaufgabe der Potentialtheorie für Kreisring, Ellipse und Rechteck mittels des Poissonschen Integrals. Leipz. Ber. **65**, 210-213.

„Der Lösung der Randwertaufgabe der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ für das Innere des Kreisrings, der Ellipse und des Rechtecks ist stets eine besondere Aufmerksamkeit geschenkt worden. Trotzdem ist es meines Wissens bisher nicht bemerkt worden, daß diese Flächen sehr leicht mit Hülfe des Poissonschen Integrals behandelt werden können ohne Vermittlung der Kenntnis der elliptischen Funktionen oder Heranziehung allgemeiner Existenzbeweisprinzipien, wie des alternierenden Verfahrens usw.

Die genannten drei Probleme werden wir durch geometrisch einfach charakterisierte Operationen zurückführen können auf die Lösung der Randwertaufgabe für die Fläche eines Kreises, wenn auf der Peripherie die Randwerte im allgemeinen stetig gegeben sind, jedoch an zwei Stellen nur der Bedingung der Beschränktheit unterworfen sind.“ Kb.

P. Koebe. Ränderzuordnung bei konformer Abbildung. Gött. Nachr. 1913, 286-288.

„Die Frage der Ränderzuordnung bei konformer Abbildung eines schlichten einfach zusammenhängenden Bereichs B in der f-Ebene auf die Fläche des Einheitskreises E einer z-Ebene ist neuerdings von Carathéodory (Math. Ann. **73**, 305-320, 323-370) und Study („Vorlesungen über Geometrie“ Bd. II, Leipzig, Teubner 1913, insbesondere § 5-8) behandelt worden, indem diese Autoren einerseits für den Fall, daß die Begrenzung eine Jordansche Kurve ist, eine Osgoodsche Vermutung bestätigten, daß nämlich die konforme Abbildung sich auch noch auf den Rand selbst als stetige Abbildung fortsetzt, andererseits im Falle des schlechthin allgemeinsten Bereiches den Satz bewiesen, daß die Menge M der vom Innern des Bereichs B her erreichbaren Randpunkte von B, welche offenbar zyklisch geordnet ist, eineindeutig und dem Anordnungstypus entsprechend auf eine Menge M' von Peripheriepunkten des Einheitskreises bezogen wird, welch letztere Menge auf der Peripherie überall dicht verteilt ist, sodaß kein noch so kleines Peripheriestück von Punkten der Menge M' frei ist. Durch den letzteren Satz wird dann, wie eine von Study und Carathéodory gegebene Analyse des Randes zeigt, das Problem der Ränderzuordnung auch für den allgemeinsten Bereich in gewisser Weise vollkommen beherrscht. (Auch diese weitergehenden Sätze von Study und Carathéodory sind, worauf ich inzwischen aufmerksam geworden bin,

wesentlich bereits 1903 durch Osgood gefunden worden. Vgl. dessen vorläufige Note im Amer. Math. Soc. Bull. (2) **9**, 233-235, 1903: „On the transformation of the boundary in the case of conformal mapping.“ Vgl. ferner Osgood-Taylor: „Conformal transformations on the boundaries of their regions of definition.“)

Carathéodory und Study bedienten sich zu dem Zwecke des Nachweises wesentlich eines von Fatou gefundenen Satzes über Funktionen $\varphi(z)$, welche innerhalb des Einheitskreises $|z| < 1$ regulär sind und dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke bleiben. Dieser Satz, welchen Fatou aus gewissen, von Lebesgue mit seinem eigentümlichen Integralbegriff gewonnenen Ergebnissen folgerte, besagt, auf die Abbildungsfunktion $f(z)$ angewandt, direkt, daß auf der Peripherie des Einheitskreises eine Gesamtheit M'' von überall dicht verteilten Punkten existiert von der Beschaffenheit, daß den nach diesen Punkten vom Zentrum hinführenden Radien in B Linien entsprechen, die je gegen einen bestimmten erreichbaren Randpunkt von B konvergieren.

Carathéodory spricht in seinem erstgenannten Aufsatze nun die Meinung aus, daß es ohne das Lebesguesche Integral vielleicht (M. A. 307) nicht möglich sein würde, die erwähnten Ergebnisse der Abbildungstheorie zu erhalten. Ich werde jedoch jetzt zeigen, daß dies in sehr einfacher Weise möglich ist, sodaß die Heranziehung der Lebesgueschen Theorie tatsächlich als eine bedeutende Verkomplizierung erscheint.

Zu dem Zwecke verallgemeinere ich einen Satz von Schwarz.

Satz von Schwarz: Es sei $\varphi(z)$ eine analytische Funktion von z, regulär oberhalb einer gewissen Strecke a der Achse des Reellen, welche ferner die Eigenschaft hat, daß ihre Werte bei Annäherung an die Strecke a gleichmäßig sich einem konstanten Wert nähern. Alsdann verhält sich die Funktion $\varphi(z)$ auch noch auf der Strecke a selbst regulär, und es ist die Funktion $\varphi(z)$ überhaupt eine Konstante.

Erweiterung des Schwarzschen Satzes: Die Erweiterung besteht in folgender Modifikation der Voraussetzungen: Es wird nur verlangt, daß man in beliebiger Nähe der Strecke a noch eine längs a sich hinziehende Linie σ finden kann, auf welcher die Werte der Funktion $\varphi(z)$ sich von einer festen Konstante beliebig wenig unterscheiden, und daß außerdem die Funktion in dem betrachteten Bezirke beschränkt sei. Unter diesen weiteren Voraussetzungen bleibt die Behauptung bestehen.“

Die ausführliche Entwicklung seiner Methode gibt Koebe im J. für Math. **145** (1915).

Kb.

L. Bieberbach. Über einen Satz des Herrn Carathéodory. Gött. Nachr. 1913, 552-560.

„In Math. Ann. **72** hat Carathéodory einen Satz bewiesen, der sich so aussprechen läßt: „Es sei $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge einfach zusammenhängender, schlichter, gleichmäßig beschränkter Bereiche und $f_n(z)$ diejenige Funktion, die A_n auf das Innere des Einheitskreises $|z| < 1$ konform abbildet, und wo $f_n(0) = 1$ und $f_n'(0)$ reell und positiv ist. Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz der $f_n(z)$ gegen eine Grenzfunktion $f(z)$

die, daß die Gebietsfolge der A_n gegen ihren Kern konvergiert. Die Grenzfunktion bildet den Einheitskreis umkehrbar eindeutig und konform auf diesen Kern ab."

„Die Carathéodoryschen Beweise benutzen einmal" (nach dem Vorgange von Koebe) „den Montel-Vitalischen Satz von der gleichmäßigen Konvergenz passender Teilfolgen einer gleichmäßig beschränkten Funktionenfamilie und außerdem gewisse Folgerungen, die Carathéodory in seiner Arbeit aus dem Schwarzschen Lemma zieht. In der Tat sind aber, wie wir bald erkennen werden, diese Folgerungen aus dem Schwarzschen Lemma für den Beweis nicht erforderlich. Dieses Festhalten an dem Schwarzschen Lemma verhinderte wohl auch Carathéodory, seinen Satz so allgemein auszusprechen, wie er sich in Wirklichkeit formulieren läßt. Er gilt nämlich nicht allein für die Abbildung auf einen Kreis, sondern in genau gleicher Fassung auch für jeden beliebigen andern Bereich, mag dieser nun einfach oder mehrfach zusammenhängend sein." Kb.

G. D. Birkhoff. Proof of Poincaré's geometric theorem. American M. S. Trans. 14, 14-22.

In seiner letzten Abhandlung (Palermo Rend. 33, 375-407) hat Poincaré mit einem Hinweis auf seinen schwankenden Gesundheitszustand ein Problem veröffentlicht, dessen allgemeine Erledigung ihm trotz jahrelanger Bemühungen und trotz der Durchführung vieler Sonderfälle nicht gelungen sei, in der Hoffnung, daß jüngeren Kräften bei der Behandlung dieser für das Dreikörpersystem wichtigen Frage mehr Erfolg beschieden sein würde. Diese Hoffnung hat sich rasch erfüllt: wenige Monate später hat Birkhoff für den von Poincaré vermutungsweise aufgestellten Satz einen überraschend einfachen und eleganten Beweis erbracht.

Es handelt sich um folgendes: Ein Kreisring $a \geqq r \geqq b$ (r und θ seien Polarkoordinaten) werde eineindeutig, stetig und flächentreu derart auf sich selbst abgebildet, daß dabei die Punkte des Kreises $r = a$ im positiven Umlaufsinn verschoben werden und die auf $r = b$ im negativen. Dann (so soll bewiesen werden) gibt es es im Innern des Kreisringes mindestens zwei verschiedene Fixpunkte der Abbildung. Die Schwierigkeit dieses Problems liegt in dem Nachweis der Existenz eines Fixpunktes; denn daß diese Punkte nur paarweise auftreten können, beweist man leicht mittels der Charakteristiken von Kronecker.

Angenommen, unsere flächentreue Abbildung T oder $(r, \theta) \rightarrow (r', \theta')$ habe keinen Fixpunkt. Dann führt Birkhoff eine Hülfsabbildung T_ε ein $(r, \theta) \rightarrow (\bar{r}, \bar{\theta})$ durch die Formeln $\bar{r}^2 = r^2 - \varepsilon$, $\bar{\theta} = \theta$ $\{\varepsilon > 0\}$. T_ε ist ebenfalls flächentreu und zieht den Kreisring zusammen. Es wird nun ein stetiger und sich selbst nicht durchschneidender Kurvenbogen K konstruiert, der in dem Kreisring $a \geqq r \geqq b$ von einem Punkt auf $r = a$ nach einem Punkt auf $r = b$ hinläuft und durch die zusammengesetzte Transformation TT_ε in sich selbst verschoben wird. Es sei $\bar{\omega}$ der Winkel zwischen dem Radiusvektor eines Punktes P und der Richtung von P nach dem in der Abbildung TT_ε entsprechenden Punkte $\bar{P}'$. Dann wird gezeigt, daß $\bar{\omega}$ nahezu um $-\pi$ zunimmt, wenn der Punkt P den Kurvenbogen K durchläuft, vorausgesetzt, daß ε hinreichend

klein ist. Die Änderung des Winkels ω zwischen dem Radiusvektor OP und der Richtung von P nach dem in T entsprechenden Punkte P' auf diesem Wege K wird demnach $= -\pi$, da $|\omega' - \omega| < \frac{1}{2}\pi$ für genügend kleine ε. Genau ebenso könnte man zeigen, daß für die inverse Abbildung T^{-1} der entsprechende Zuwachs $= +\pi$ ausfiele. Indessen ist die Änderung von ω bei T wie bei T^{-1} offenkundig genau dieselbe. Damit ist ein Widerspruch hergeleitet und somit die Existenz eines Fixpunktes erwiesen.

Der Satz ist von Poincaré selbst schon für den Fall verallgemeinert worden, daß T zwar nicht flächentreu ist, aber eine Integralinvariante hat von der Form

$$\iint P(x, y) dx\, dy \; \{P > 0\}.$$

Bl.

Lord Rayleigh. On conformal representation from a mechanical point of view. Phil. Mag. (6) **25**, 698-702.

Der Verf. denkt sich in der Gleichung $x + iy = f(\xi + i\eta)$ die x, y und die ξ, η auf dasselbe Achsensystem in derselben Ebene bezogen und die (x, y)-Punkte in die entsprechenden (ξ, η)-Punkte durch stetige Bewegung übergeführt. Die so definierte „Deformation" des ebenen (x, y)-Systems verlangt wegen der Stetigkeit der Überführung, daß f auch eine Funktion der Zeit t sei, also (1) $x + iy = f(t, \xi + i\eta)$. Die Geschwindigkeitskomponenten u, v werden durch dx/dt und dy/dt gegeben, so daß

$$(2) \qquad u + iv = \frac{d}{dt} f(t, \xi + i\eta)$$

ist. Durch Elimination von $\xi + i\eta$ aus (1) und (2) folgt

$$(3) \qquad u + iv = F(t, x + iy);$$

mithin genügen u und v der Gleichung

$$(4) \qquad (d^2/dx^2 + d^2/dy^2)(u, v) = 0.$$

Die so definierte Bewegung wird vom Verf. mit der einer sehr zähen zweidimensionalen Flüssigkeit verglichen.

Lp.

A. Beranck. Zur sphärischen Abbildung der Flächen zweiter Ordnung und ihrer stereographischen Projektion. Baden bei Wien. 12 S. 8°.

I. Hanuš. Grundlagen für die Lehre über konforme Abbildung zweier Ebenen. Progr. des Realgymn. in Roudnic, 1912/13. 22 S. (Böhmisch.)

Zehnter Abschnitt.

Mechanik

Kapitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher, Prinzipien usw.).

P. Volkmann. Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere das der analytischen Mechanik. Mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis. Vorlesungen. Zweite, mehrfach umgearbeitete Auflage. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. XVI u. 412 S. gr. 8°.

Vgl. die Anzeige der ersten Auflage F. d. M. **31**, 664, 1900, wo die historisch-philosophische Richtung des Buches hervorgehoben ist. Die mehrfache Umarbeitung „bedingte in vielen Fällen eine Art Mosaikarbeit der ersten Auflage", bei der „kein Stein, d. h. kein Gedanke und Gesichtspunkt von Wichtigkeit vergessen oder zu kurz gekommen ist". Äußerlich bekundet sich diese Umarbeitung in dem Anwachsen des Umfanges von 370 auf 412 Seiten, ferner darin, daß die Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis von dem Anfange des Buches an das Ende gesetzt ist und der Anfang jetzt durch einen kurzen Abschnitt „Einleitende Vorbemerkungen" gebildet wird. Dadurch ist die Anzahl der Abschnitte von VII auf VIII gestiegen.

Der Standpunkt des Verf. wird durch die folgenden Sätze des Vorwortes zur zweiten Auflage nochmals scharf gekennzeichnet: „Die neue Bearbeitung meiner Vorlesungen habe ich unter dem Gesichtspunkt vorgenommen, meine Gedanken über eine Einführung in die theoretische Physik noch stärker herauszuarbeiten und damit die bisher leitenden Ideen der geschichtlichen Entwicklung der theoretischen Physik, insbesondere der analytischen Mechanik, nach der Seite einer physikalischen Interessensphäre noch stärker hervorzukehren. . . . Besonders zweckmäßig erschien es mir, mit der Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis nicht zu beginnen, sondern zu schließen. In der Tat hat sich die Theorie der physikalischen Erkenntnis geschichtlich verhältnismäßig spät entwickelt; sie ist erst auf dem Boden der physikalischen Forschung und der Entwicklung der physikalischen Wissenschaft selbst als eine wissenschaftliche Disziplin erwachsen, die noch strenger voraussetzungslos hingestellt werden darf als die physikalische Wissenschaft selbst."

Ferner sind folgende Sätze aus den einleitenden Vorbemerkungen bezeichnend: „Es wird Aufgabe der einzelnen Abschnitte sein, die Auffassungen und Absichten der klassischen Autoren so klar und rein zur Darstellung zu bringen, als es irgend angeht. . . . So stellt sich denn meine einleitende Vorlesung nicht die Aufgabe, die theoretische Physik ohne Rücksicht auf ihre Geschichte und Entwicklung dem augenblicklichen Standpunkt der Wissenschaft entsprechend systematisch aufzubauen. Diese hier nicht gestellte Aufgabe würde überhaupt mehr dem Abschluß als dem Beginn einer Beschäftigung mit der theoretischen Physik angemessen sein.“

Endlich mögen aus dem Schlußabschnitt über die systematische Stellung der Mechanik folgende Sätze Platz finden: „Wir bevorzugen die logische Stellung der Mechanik innerhalb des wissenschaftlichen Systems. Diese logisch gerechtfertigte Stellung mag subjektiv erscheinen; aber diese Subjektivität ist hier kein Fehler. Der Vorzug liegt in ihrer Aufrichtigkeit, während alle hier vermeintliche Objektivität, welche an Systeme mit verborgenen Eigenschaften knüpft, sich über den Grad ihrer Objektivität und Aufrichtigkeit täuschen dürfte.“ Die atomistische Konstruktion der Materie wird für die der Mechanik zufallenden Bewegungserscheinungen der ponderablen Materie als gänzlich unwesentlich bezeichnet. „Indem wir an dieser Stelle den Begriff des Wesentlichen gegenüber dem Begriff des Vollständigen hervorkehren, stellen wir uns damit unter anderem in Gegensatz zu gewissen Teilen der bekannten Kirchhoffschen Definition der Mechanik. . . . Indem wir auf das Vollständige zugunsten des Wesentlichen verzichten, haben wir nichts anderes getan, als eine für den systematischen Aufbau der Physik so wichtige formelle Mechanik hervorgehoben gegenüber einer in keiner Beziehung zum systematischen Aufbau der Physik stehenden materiellen Mechanik. Der Vorzug unserer Auffassung besteht darin daß sie dem realen Betriebe der Wissenschaft entspricht und jedenfalls logisch in sich befriedigt, während die Kirchhoffsche Vollständigkeit von vornherein wegen des großen Abstandes zwischen Ziel und Erreichtem nicht bloß logisch, sondern auch materiell unbefriedigt lassen muß.“

Es möge schließlich darauf hingewiesen werden, daß es sich in dem Buche nur um die sogenannte klassische Mechanik handelt, die aus der konsequenten Weiterbildung der Newtonschen Mechanik bis zu Lagrange und seinen Nachfolgern sich entwickelt hat. Die Einsteinsche Relativitätstheorie und ihre Folgerungen sind nur nebenbei erwähnt.

Die Bemerkung, daß erst seit 1847 die lebendige Kraft nach Helmholtz als $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$ statt Σmv^2 bezeichnet wird, widerstreitet der Angabe von A. E. Haas (Die Grundgleichungen der Mechanik, Leipzig 1914, S. 134), daß der Faktor $\frac{1}{2}$ schon 1829 bei Coriolis vorkommt.

Lp.

É. Delassus. Leçons sur la dynamique des systèmes matériels. Paris: A. Hermann & Fils. XII u. 421 S. 8°.

Das Werk ist ein neues Lehrbuch der Mechanik, aber nicht ein Lehrbuch nach Art der bekannten französischen oder englischen, sondern ein wirklich

neues, man könnte sagen: eine nach den neuen Anschauungen modernisierte Mécanique analytique von Lagrange. In dem Vorworte unterscheidet der Verf. scharf die Mécanique analytique von der Mécanique rationnelle. Die letztere sei die ausschließlich gelehrte Mechanik, sie gehe von drei allgemeinen Theoremen (wohl Gesetzen) aus, leite aus ihnen sieben Gleichungen ab und bringe mittels der allgemeinen Theoreme die Probleme in Gleichungen. Die analytische Mechanik werde den Studenten am Schluß als eine Art Kuriosum mitgeteilt, worüber dann ohne Nachdruck einige Andeutungen gemacht werden. Anders gehe die analytische Mechanik vor, die allein auf dem Dalembertschen Prinzip beruht. Der Verf. hat es versucht, seinen Schülern von vornherein die analytische Mechanik vorzutragen und diesen Weg pädagogisch durchaus für gangbar gefunden, dadurch aber nach seiner Ansicht das Eindringen falscher Vorstellungen abgewehrt.

„Soll man fortfahren, Dinge zu lehren, die als falsch erkannt sind? Die einzige vernünftige Antwort, die man auf diese Frage geben kann, scheint mir die folgende zu sein: Entweder wird die berichtigte Theorie zu hoch, dann muß man sie aus dem Unterricht streichen. Oder sie ist zwar weniger einfach als die falsche Theorie, aber sie ist den Anfängern noch zugänglich, und dann muß man sie lehren, ohne zu zögern und trotz des ganz menschlichen Widerstrebens, mit dem man angelernte Ideen aufgibt, zu denen man ein unbegrenztes Zutrauen zu haben gewöhnt war.

Diese Bemerkung zielt auf zwei Theorien. Die erste liegt ganz tief, weil sie die des Begriffs der Bewegung selbst ist. Das Dalembertsche Prinzip beruht auf einem Postulat bezüglich der Verbindungskräfte, und dieses Postulat setzt ein anderes voraus, das man nicht in Worte faßt; es betrifft nämlich etwas so Offensichtliches, daß man es nicht als nötig erachtet, davon zu reden, nämlich: Wenn man die Fesselung eines materiellen Systems mittels Hülfskörper bewirkt, deren Masse zu vernachlässigen ist, Null an der Grenze, so haben diese Hülfskörper keinen Einfluß auf die entstehende Bewegung. Aus einer Reihe von Arbeiten, die in den C. R. und in den Ann. de l'Éc. norm. 1911 und 1912 veröffentlicht sind, geht hervor, daß dieses so offensichtige und nicht formulierte Postulat falsch ist. Man wird dazu geführt, verschiedene Arten der Realisationen mittels Körper von der Masse Null zu unterscheiden und zwei Arten von Bewegungen zu erforschen.

Die „konkreten Bewegungen“ bieten kein Interesse; sie entsprechen nicht dem wahren Bewegungsbegriff für das zu erforschende System, isoliert betrachtet. Die „vollkommenen Bewegungen“ dagegen sind die wahren Bewegungen, und ihre Erforschung zeigt, daß sie der Dalembertschen Gleichung genügen, die sich also als streng bewiesen ergibt. Aber diese Theorie erstreckt sich viel weiter und gestattet die Verallgemeinerung des Bewegungsbegriffes in seiner vollen möglichen Ausdehnung, d. h. sogar für Verbindungen von höherer Ordnung als der ersten. Die Beweise in dem Falle holonomer und nicht holonomer Systeme sind noch elementarer und treten im Verlaufe des Werkes auf, während die vollständige Verallgemeinerung am Ende des Bandes in einem besonderen Kapitel gegeben wird.

Die zweite Theorie ist die der „einseitigen Verbindungen“. Man läßt als augenscheinlich das tatsächliche und gleichzeitige Aufhören mehrerer Kontakte

zu, deren Reaktionen negativ sind. Dieses Postulat ist falsch; die einzig auf das Vorzeichen der Reaktionen gegründeten Theorien geben entweder richtige Resultate, aber vermöge solcher Beweise, die wegen ihres Ausgangspunktes Einwänden unterliegen, oder sie führen zu ungenauen Ergebnissen, indem sie das Aufhören gewisser Kontakte angeben, die in Wirklichkeit andauern. Ich lege eine Theorie vor, die etwas lang ist, wie man sagen wird, die aber die vollständige Lösung in dem Falle der Kontakte ohne Rollen gibt und gewisse Schwierigkeiten ins Licht setzt, die in dem Falle der Rollkontakte entstehen.

Wer in Betracht zieht, daß die Mechanik beim Aufbau der modernen Theorien der Physik eine viel höhere Rolle spielt als die, benutzbare Formeln zu liefern, und daß unter dem Gesichtspunkte dieser Theorien ihr Nutzen darin besteht, den Anfänger an allgemeine Denkmethoden zu gewöhnen, die er mit geeigneten Wandlungen häufig anzuwenden hat, der wird vielleicht das Urteil abgeben, daß dieses für die jungen Mathematiker bestimmte Buch zuweilen künftigen Physikern nicht ohne Nutzen wird sein können."

Diese Ausführungen genügen wohl, um den eigenartigen theoretischen Standpunkt des Werkes zu kennzeichnen und es als ein originales Erzeugnis gründlichen Nachdenkens erscheinen zu lassen. Lp.

J. Massau. Leçons de mécanique rationnelle. Édition conforme aux leçons professées en 1907-1908. Tome II. Cinématique. Compléments. Gand: F. et R. Buyk Frères. XIII + 343 S. 8°.

Kinematik. I. Absolute Bewegung des Punktes. II. Elementarbewegung eines unveränderlichen Systems. III. Endliche Bewegung eines unveränderlichen Systems. IV. Beschleunigung der Punkte eines unveränderlichen Systems. V. Analytische Kinematik. VI. Relative Bewegung. VII. Kinematik der deformierbaren Systeme. VIII. Verschiedene Anwendungen (Tangenten, Hüllkurven, Krümmung, Komplexe, Kongruenzen, Hyperboloide).

Nachträge. I. Nachträge zur Methode der relativen Grenzen (Tangenten, Krümmung der Linien und der Oberflächen). II. Nachträge zur symbolischen dreidimensionalen Geometrie. III. Methode der Quaternionen. Neue Theorie der Quaternionen. IV. Symbolische n-dimensionale Geometrie. Note: Methode von Hermann Graßmann.

Die vektoriellen Bezeichnungen Massaus haben es ihm ermöglicht, unter knapper Form in seinem Lehrgang eine Menge alter und neuer Ergebnisse auf eine systematische Art darzubieten, die seine besten Schüler sich leicht aneigneten; dies beweist die unterrichtliche Vortrefflichkeit dieser Bezeichnung. Sie verunnützt die Theorie der Quaternionen, von der Massau übrigens eine sehr einfache neue Darstellung gibt, und ermöglicht es, zu zeigen, was an der Graßmannschen Methode zu künstlich ist.

Die Herausgeber des Massauschen Lehrganges haben ihn mit zu geringer Sorgfalt veröffentlicht. So ist in dem Inhaltsverzeichnis die wichtige Note über die Graßmannsche Methode ausgelassen. Wie die meisten erfinderischen Geister kümmerte sich Massau zu wenig um die Geschichte der Wissenschaft. Die Herausgeber hätten in Fußnoten manche geschichtlichen Berichtigungen anbringen können, z. B. über das Datum der Erfindung der Quaternionen, über das der dialytischen Methode, die von Sylvester

stammt (1840) und nicht von Graßmann (1844), ebenso über die Vorgänger der Massauschen Bezeichnungen selbst. Wir glauben auch, daß einige Anwendungen der Methode der relativen Grenzen vom Standpunkt der Strenge hätten überarbeitet werden müssen.

Die Note Massaus über die Graßmannsche Methode enthält eine bedeutsame Bemerkung. Graßmann glaubte, Cauchy sei in seiner „Théorie des clefs algébriques" (1853) durch die Ausdehnungslehre von 1844 angeregt worden, und Massau glaubt auch, es sei bei Cauchy, zweifellos unbewußt, eine Erinnerung an die Ausdehnungslehre vorhanden gewesen. (Der Text der Note von Cauchy beweist im Gegenteil, daß er durch die von ihm angeführten Quaternionen Hamiltons angeregt ist.) Wie Massau bemerkt, ist aber der neue Gedanke, der die Grundlage der Ausdehnungslehre von 1862 bildet, von Cauchy entlehnt. Mn. (Lp.)

L. Hänert. Angewandte Mechanik zum Gebrauch als Leitfaden für den Unterricht in Naturlehre an der kaiserl. Marineschule und als Hülfsbuch für die Praxis. Hierzu als Anhang: Kurze Einführung in die Chemie unter besonderer Berücksichtigung der Explosivstoffe Berlin: Ernst Siegfried Mittler & Sohn. IX, 341 u. 60* S.

Der Hauptteil des Buches zerfällt in die Teile: I. Mechanik der festen Körper. a) Die Bewegungslehre oder Phoronomie (S. 6-30). b) Die Lehre von den Kräften oder Dynamik (S. 30-239). II. Mechanik der flüssigen und luftförmigen Körper (S. 240-323). Dann folgt ein „Überblick" (S. 324-336), endlich der „Index zur Mechanik" (S. 337-341). Die Mechanik soll die physikalischen Grundlagen für die Waffenlehre, den Schiffbau, zum Teil auch für das Kompaßwesen u. a. m. liefern und so ein tieferes Verständnis für den Bau und die Wirkungsweise der zahlreichen technischen Vorrichtungen ermöglichen. Dem Wesen der Marineschule entspricht die elementare Form der Darstellung, bei der die höheren mathematischen Hülfsmittel nicht benutzt werden; durch das Streben auf das Ziel, die technischen Fächer zu unterstützen, wird der Charakter des Buches als einer technischen Mechanik bedingt. Es soll nicht nur ein Leitfaden für den Unterricht in der Naturlehre an der Marineschule sein, sondern auch zugleich dem angehenden Seeoffizier als brauchbares Hülfsbuch für die Praxis dienen. Aus der Ausübung des Unterrichtes hervorgegangen und durch die Unterstützung der Kollegen und der Vorgesetzten des Verf. gefördert, wird das Buch in dem Kreise, für den es verfaßt ist, seinen Zweck erfüllen. Lp.

W. Keck. Vorträge über Mechanik als Grundlage für das Bau- und Maschinenwesen. Erster Teil: Mechanik starrer Körper. Vierte Auflage, bearbeitet von Ludwig Hotopp. Mit 433 Holzschnitten. Hannover: Helwingsche Verlagsbuchhandlung. XI u. 374 S.

Wenig geänderte neue Auflage des für Techniker berechneten Buches, das in seiner ersten Abfassung an das Vorbild der Ritterschen technischen Mechanik erinnert (F. d. M. **27**, 569, 1896). Eine geringe Erweiterung ist durch die allgemeinere Behandlung des Problems der Stützung starrer Körper bewirkt. Bei dem d'Alembertschen Prinzip ist statt der früheren Be-

zeichnung der „Ergänzungskräfte" der übliche Ausdruck „Trägheitswiderstand" eingeführt. Praktisch geschrieben, wird dieses nach den Newtonschen Grundlagen abgefaßte Lehrbuch der Mechanik für Anfänger ein willkommener Führer sein.
Lp.

L. SILBERSTEIN. Vectorial mechanics. London: Macmillan and Co. Ltd. VIII u. 197 S.

In dieser Darlegung der Macht der Vektoranalysis beim Angreifen gewisser physikalischen Probleme befinden sich, wie in einer Anzeige der Nature **92**, 657, 1913 bemerkt wird, manche Unrichtigkeiten in den geschichtlichen Verweisungen, die das Werk durchziehen.
J. (Lp.)

L. LECORNU. Review of applied mechanics. Washington: Smithsonian Report for 1912, 269-284.

Kurzer Bericht, umfassend die Jahre seit 1909, in den Abschnitten: I. Dampfapparat. II. Gas- und Petroleummaschinen. III. Eisenbahnen. IV. Aerodynamik. V. Kongreß zu Düsseldorf. VI. Vermischte Gegenstände. VII. Die wissenschaftliche Organisation der Werkstatt.
Lp.

H. M. DADOURIAN. On a progressive development on the fundamental principles of mechanics. Phys. Rev. (2) **1**, 405-408.

Darlegung der Gesichtspunkte, nach denen der Verf. sein Buch „Analytical Mechanics, for Students of Physics and Engineering" (New York, D. Van Nostrand Co., 1913) abgefaßt hat: (1) Das grundlegende Prinzip der Mechanik wird in der Form eines einzigen Gesetzes ausgesprochen, und zwar so, daß es wenigstens in seinen einfacheren Zügen, innerhalb der Erfahrung und des Begriffsvermögens des Anfängers liegt. (2) Die Bedeutung des Prinzips wird allmählich erweitert, gemäß der Entwicklung des Gegenstandes.
Lp.

M. B. WEINSTEIN. Die Physik der bewegten Materie und die Relativitätstheorie. Leipzig: Johann Ambrosius Barth. XII u. 424 S. gr. 8°.

Ein inhaltreiches Buch! „Ich habe die Physik der bewegten Materie und die Relativitätstheorie, die zu ihr gehört, so sorgfältig, als mir möglich war, behandeln wollen. Mitteilung der Tatsachen und Theorien ist der eine Zweck meines Buches, eingehende Kritik der Versuchsergebnisse und der Grundlehren der andere gleich wichtige Zweck. Auf Klarheit der Kenntnisse und Erkenntnisse geht das Buch aus. Ich bin darum auch der Einseitigkeit und Voreingenommenheit möglichst ausgewichen. Die modernen und modernsten Lehren sind behandelt, aber auch diejenigen Lehren, die mancher Neueste schon als abgetan trachtet, obwohl sie lange das Fundament unserer Wissenschaft gebildet haben und von den größten Physikern und Mathematikern begründet und bearbeitet sind. Noch befinden wir uns in unserer Wissenschaft nicht entfernt so weit, daß wir das Frühere über Bord werfen dürften." Inhalt:

Erster Teil. Optische und elektromagnetische Erscheinungen unter dem Einfluß von Bewegungen. I. Bewegung von Körpern im Äther und Bewegung des Äthers. 1. Die Dopplersche Erscheinung. 2. Aberration. Mitführung des Äthers und Strahlengang. 3. Theorien von Stokes und H. A. Lorentz. 4. Verbreitung von Wellen in bewegtem Äther. 5. Versuch von Michelson.

II. Elektrodynamische Theorien über die Verbreitung elektromagnetischer Störungen und des Lichtes in bewegten Stoffen. 1. Vorbemerkung über Vektorrechnung und Lorentz-Transformation. 2. Grundgleichungen der Theorie. 3. Die elektromagnetischen Gleichungen und die Verbreitung elektromagnetischer Störungen nach Maxwell-Hertz. 4. Helmholtz' Theorie der Bewegung im Äther. 5. Verbreitung elektromagnetischer Störungen nach der Theorie von E. Cohn. 6. Theorie von H. A. Lorentz. 7. Theorie von Hermann Minkowski, erste angenäherte Darstellung. 8. Vergleichungen und Berechnungen von Max Abraham. 9. Elektromagnetische Störungen an und in bewegten Stoffen.

Zweiter Teil. Die weitere Relativitätstheorie. 1. Anwendung des Relativsystems durch H. A. Lorentz. 2. Vorbemerkung über Relativität. 3. Die Grundarbeit von Einstein. 4. Hermann Minkowskis Relativitätsprinzip. 5. Mechanik und Thermodynamik in der Relativitätstheorie. a) Einsteins Mechanik. b) Plancks Mechanik und Thermodynamik stationärer Systeme. c) Minkowskis Galileische Mechanik. 6. Elektrodynamik und Optik in der Relativitätstheorie. a) Einsteins Elektrodynamik und Optik. b) Minkowskis Elektrodynamik. 7. Schlußbemerkung.

„Es ist das große Verdienst Einsteins, die Relativitätslehre entdeckt und in die Wissenschaft eingeführt zu haben. Man hat die Wandlung, die in die Naturbetrachtung durch die Einsteinsche Relativitätslehre gekommen ist, mit der, die sie durch Newtons Gravitationstheorie erfahren hat, verglichen, und diese Vergleichung ist zutreffend nach der Größe des Gedankens und der Neuheit der Gesichtspunkte. Auch die näheren Schlüsse, die Einstein aus seiner Relativitätstheorie gezogen hat, konnte die Folgezeit im wesentlichen bestätigen. Es bedeutet selbstverständlich keinen Vorwurf, wenn nunmehr gesagt werden muß, daß seine Lehre nicht in sich widerspruchsfrei ist, daß die Grundlagen, auf denen sie sich aufgebaut findet, allzu unsicher und schattenhaft sind, und daß die Lehre die allgemeine weltumfassende Bedeutung nicht besitzt, die man ihr zugeschrieben hat und noch zuschreibt, daß sie im Grunde, so wie sie von Einstein gegeben ist, sogar nicht mehr aufrechterhalten bleiben kann, wenn auch ihre Endergebnisse bestehen bleiben. Minkowskis Relativitätslehre ist in ihrem Wesen von der Einsteinschen durchaus verschieden; sie ist auch in sich festgefügt und, so genommen, wie ihr Urheber sie gegeben hat, in sich widerspruchslos und in ihren Ergebnissen kaum angreifbar. Die Schwierigkeiten, die sie der Auffassung bietet, sind hervorgehoben. Sieht man über diese hinweg, so hat man ein auf einem höchst einfachen Grundgedanken aufgebautes grandioses Gebäude vor sich. Daß die Minkowskische Lehre die Einsteinsche einbegreift, möchte man als eine glückliche Fügung betrachten. ... Aber die Deutung, die Einstein seinen Ansätzen verliehen hat, ist aus Minkowskis Theorie nicht zu entnehmen."

Lp.

H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski. Das Relativitätsprinzip. Eine Sammlung von Abhandlungen. Mit Anmerkungen von A. Sommerfeld und Vorwort von O. Blumenthal. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. 89 S. 8°. (Fortschr. d. math. Wiss. in Monogr., herausgegeben von Otto Blumenthal, Heft 2.)

In der mit dem Bildnisse von H. Minkowski geschmückten Schrift sind folgende Artikel abgedruckt:

1. H. A. Lorentz. Der Interferenzversuch Michelsons (Aus: „Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern". F. d. M. **25**, 1632, 1893/94).

2. H. A. Lorentz. Elektromagnetische Erscheinungen in einem System, das sich mit beliebiger, die des Lichtes nicht erreichender Geschwindigkeit bewegt (F. d. M. **35**, 837, 1904).

3. A. Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper (F. d. M. **36**, 920, 1905).

4. A. Einstein. Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig? (Ann. der Phys. (4) **18**, 639-641, 1905.)

5. H. Minkowski. Raum und Zeit (F. d. M. **40**, 745, 1909).

A. Sommerfeld. Anmerkungen zu Minkowski, Raum und Zeit. „Diese Anmerkungen bezwecken nichts anderes, als kleine formal-mathematische Schwierigkeiten aus dem Wege zu räumen, die dem Eindringen in die großen Gedanken Minkowskis im Wege stehen könnten."

6. H. A. Lorentz. Das Relativitätsprinzip und seine Anwendung auf einige besondere physikalische Erscheinungen (Aus: „Alte und neue Fragen der Physik". F. d. M. **41**, 912, 1910).

Lp.

A. Einstein und M. Grossmann. Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation. I. Physikalischer Teil von Albert Einstein. II. Mathematischer Teil von Marcel Großmann. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. 38 S. 8°.

I. „Die im folgenden dargelegte Theorie ist aus der Überzeugung hervorgegangen, daß die Proportionalität zwischen der trägen und der schweren Masse der Körper ein exakt gültiges Naturgesetz sei, das bereits in dem Fundamente der theoretischen Physik einen Ausdruck finden müsse. Schon in einigen früheren Arbeiten suchte ich dieser Überzeugung dadurch Ausdruck zu verleihen, daß ich die schwere auf die träge Masse zurückzuführen suchte, dieses Bestreben führte mich zu der Hypothese, daß ein (unendlich wenig ausgedehntes homogenes) Schwerefeld sich durch einen Beschleunigungszustand des Bezugssystems physikalisch vollkommen ersetzen lasse. Anschaulich läßt sich diese Hypothese so aussprechen: Ein in einem Kasten eingeschlossener Beobachter kann auf keine Weise entscheiden, ob der Kasten sich in einem von Gravitationsfeldern freien Raume in beschleunigter Bewegung befindet, die durch an dem Kasten angreifende Kräfte aufrechterhalten wird (Äquivalenz-Hypothese).

§ 1. Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes im statischen Schwerefeld. § 2. Gleichungen für die Bewegung des materiellen Punktes im beliebigen Schwerefeld. Charakterisierung des Systems. § 3. Bedeutung des

Fundamentaltensors der $g_{\mu\nu}$ für die Messung von Raum und Zeit. § 4. Bewegung kontinuierlich verteilter inkohärenter Massen im beliebigen Schwerefeld. § 5. Die Differentialgleichungen des Gravitationsfeldes. § 6. Einfluß des Gravitationsfeldes auf physikalische Vorgänge, speziell auf die elektromagnetischen Vorgänge. § 7. Kann das Gravitationsfeld auf einen Skalar zurückgeführt werden?"

II. „Die mathematischen Hülfsmittel für die Entwicklung der Vektoranalysis eines Gravitationsfeldes, das durch die Invarianz des Linienelementes

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$$

charakterisiert ist, gehen zurück auf die fundamentale Abhandlung von Christoffel über die Transformation der quadratischen Differentialformen. Ricci und Levi-Civita haben, ausgehend von den Christoffelschen Resultaten, ihre Methoden der absoluten, d. h. vom Koordinatensystem unabhängigen Differentialrechnung entwickelt, die gestatten, den Differentialgleichungen der mathematischen Physik eine invariante Form zu geben. Da aber die Vektoranalysis des auf beliebige krummlinige Koordinaten bezogenen euklidischen Raumes formal identisch ist mit der Vektoranalysis einer beliebigen, durch ihr Linienelement gegebenen Mannigfaltigkeit, so bietet es keine Schwierigkeiten, die vektoranalytischen Begriffsbildungen, wie sie in den letzten Jahren von Minkowski, Sommerfeld, Laue u. a. für die Relativitätstheorie entwickelt worden sind, auszudehnen auf die vorstehende allgemeine Theorie von Einstein."

§ 1. Allgemeine Tensoren. § 2. Differentialoperatoren in Tensoren. § 3. Spezielle Tensoren (Vektoren). § 4. Mathematische Ergänzungen zum physikalischen Teil. I. Beweis der Kovarianz der Impuls-Energiegleichungen. II. Differentialtensoren einer durch ihr Linienelement gegebenen Mannigfaltigkeit. III. Zur Ableitung der Gravitationsgleichungen. Lp.

A. Einstein. Physikalische Grundlagen einer Gravitationstheorie. Zürich. Naturf.-Ges. **58**, 284-290.

M. Grossmann. Mathematische Begriffsbildungen zur Gravitationstheorie. Zürich. Natur.-Ges. **58**, 291-297.

Zwei Vorträge, gehalten am 9. September 1913 auf der Jahresversammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Frauenfeld. Man vergleiche den vorstehenden Bericht.

„Ein Schwerefeld kann hinsichtlich seiner Einwirkung auf mechanische und andere physikalische Vorgänge ersetzt werden durch einen Beschleunigungszustand des Bezugskörpers (Koordinatensystems). Diese Äquivalenzhypothese gestattet, den Einfluß eines Gravitationsfeldes auf physikalische Vorgänge jeder Art vorauszusagen. Dadurch wird man gezwungen, die Theorie von Raum und Zeit, die als Relativitätstheorie bekannt ist, zu verallgemeinern, da diese ja auf der Voraussetzung von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gegründet war."

Diese der Einleitung des Einsteinschen Vortrages entnommenen Sätze zeigen den Ursprung der neuen Gedankenentwicklungen, die in den beiden Vor-

trägen, ausführlicher aber in der vorstehend angezeigten, größeren Schrift dargelegt sind. Lp.

G. Nordström. Träge und schwere Masse in der Relativitätstheorie. Ann. der Phys. (4) **40**, 856-878.

„Man kann, wie Laue und Herglotz gezeigt haben, die ganze Mechanik ausgedehnter Körper aufbauen, ohne den Begriff der trägen Masse überhaupt hineinzuziehen. Der Begriff der Masse ist also nicht für die Mechanik unbedingt notwendig; andrerseits ist dieser Begriff auch nicht hinreichend, um alle Trägheitserscheinungen der Materie darzustellen, wenn man beliebigen elastischen Spannungen unterworfene Körper betrachtet. Die Frage von der Masse der Materie ist aber trotzdem von erheblicher Wichtigkeit für die Relativitätstheorie, insbesondere für die Beurteilung der Art und Weise, in welcher die Theorie der Gravitation in die Relativitätstheorie eingefügt werden soll. Die Trägheit und die Schwere der Materie müssen jedenfalls in engster Beziehung zueinander stehen, und am einfachsten würde man dieser Wesenseinheit durch die den beiden Erscheinungen zugrunde liegende Masse Rechnung tragen. Einen solchen Massenbegriff wird man aufrecht zu halten suchen, obwohl man weiß, daß es nach der Relativitätstheorie auch Trägheitserscheinungen gibt, die sich in keiner Weise auf eine Masse zurückführen lassen. In solchen Fällen wird man mit einer besonderen Bewegungsgröße (Impuls) rechnen müssen, die nicht von der Masse eines Körpers, sondern z. B. von dem elastischen Spannungszustande desselben abhängt. In dem vorliegenden Aufsatze will ich die Relativitätsmechanik deformierbarer Körper in solcher Weise behandeln, daß die Möglichkeit des allgemeinen Aufrechterhaltens eines Massenbegriffs deutlich hervortritt. Hierbei werde ich auch den Einfluß der Wärmeleitung auf die mechanischen Vorgänge untersuchen. Zum Schluß werde ich die Gravitation betrachten, indem ich der trägen Masse auch Schwere zuschreibe.“

§ 1. Die Grundlagen der Relativitätsmechanik deformierbarer Körper. § 2. Nähere Untersuchung der elastischen Zustandsgrößen. § 3. Die Veränderungen der Masse und der Ruhenergie. § 4. Definition der trägen Masse. § 5. Einfluß der Wärmeleitung. § 6. Die Gravitation. § 7. Die Fallbewegung. Lp.

M. Laue. Das Relativitätsprinzip. Zweite vermehrte Auflage. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn. XII u. 272 S. 8°. (Sammlung Die Wissenschaft, Bd. 38.)

Vgl. die Anzeige der ersten Auflage F. d. M. **42**, 718, 1911. „Die vorliegende Ausgabe hat eine Reihe von Abänderungen und Zusätzen erhalten. Erweitert sind z. B. die vierdimensionale Potentialtheorie sowie die Auseinandersetzungen über den Trouton-Nobleschen Versuch. Völlig umgearbeitet ist, unter Beibehaltung der Grundgedanken, die Darstellung der Dynamik im siebenten Abschnitt; und wenn ich mich auch nicht entschließen konnte, die Elastizitätstheorie in ihrem vollen, von Herglotz erschlossenen Umfange aufzunehmen, so konnte doch wenigstens die Hydrodynamik der Relativitätstheorie in engem Anschluß an die Berliner Dissertation von Lamla (F. d. M. **43**, 844, 1912) den Abschluß dieses Abschnittes bilden. Die Anlage des Ganzen ist trotz dieser Zusätze die alte geblieben.“ Lp.

M. LAUE. Die Transformation der ponderomotorischen Kräfte in der Relativitätstheorie. Physik. Zs. **14**, 210.

Der Unterschied in den Transformationsformeln Plancks und des Verf. ist anders zu erklären, als der letztere es in seinem Buche über das Relativitätsprinzip auseinandergesetzt hat. Lp.

E. COHN. Physikalisches über Raum und Zeit. Zweite Auflage. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. 24 S. 8°. (Naturw. Vorträge und Schriften, hrsg. von der Berliner Urania, Heft 6.)

Aus einem im naturwissenschaftlich-medizinischen Verein zu Straßburg am 11. Februar 1910 gehaltenen Vortrag entstanden, wurde dieser Aufsatz, der Ernst Mach, dem Forscher und dem Lehrer, in Verehrung und Dankbarkeit gewidmet ist, zuerst in „Himmel und Erde" **23**, 117-136, 1910 abgedruckt, dann als Sonderdruck 1911 ausgegeben. Die Notwendigkeit einer zweiten Auflage zeigt, daß der Artikel seinen Zweck der Einführung in die ersten Begriffe der Relativitätstheorie auf vorzügliche Weise erreicht. Besonders dient die Demonstration der Grundgedanken an einfachen mechanischen Vorgängen zur leicht faßlichen Veranschaulichung. In einem kurzen Anhange werden auch die ersten mathematischen Formeln zur Theorie entwickelt. Lp.

R. A. WETZEL. The new relativity in physics. Science (N. S.) **38**, 466-474.

Nach dem Vorbilde des vorstehend angezeigten Cohnschen Vortrages abgefaßter Aufsatz; er schließt: „Das Relativitätsprinzip reinigt nicht nur unsere Vorstellungen von den Hirngespinsten der absoluten Zeit und des absoluten Raumes, sondern gibt uns durch seine Erklärung physikalischer Versuche eine tiefere Einsicht in die Mannigfaltigkeit des Raumes, in der die Zeit nicht der von dem unsterblichen Newton vorgebrachte Fluß der Zeitperiode ist, sondern irgendeine der räumlichen Variablen, wie dies so schön von Hermann Minkowski in seinem Vortrag „Raum und Zeit" entwickelt ist, sowie von Wilson und Lewis in Proc. Amer. Acad. 1912" (F. d. M. **43**, 777, 1912). Lp.

P. GRUNER. Elementare Darlegung der Relativitätstheorie. 24 S. u. 1 Taf. (Sonderdruck aus Mitt. d. Naturf. Ges. in Bern 1910. Zweite Aufl. 1913.)

Der Verf. nimmt einen ersten Beobachter auf der Erde, einen zweiten auf dem Mond an und erläutert an ihren Beobachtungen die Grundlagen der Relativitätstheorie, deren Lehren dann allgemein ausgesprochen und durch ein Zahlenbeispiel erläutert werden. Lp.

ANGERSBACH. Das Relativitätsprinzip in elementarer Behandlung. Progr. Königl. Gymn. Weilburg a. d. L. 26 S. u. 2 Taf.

Die einfache Darstellung führt die Lehren der Relativitätstheorie durch die Erläuterung an einer Reihe von Zahlenbeispielen, die auch zum Teil graphisch

veranschaulicht werden, dem Verständnis von nicht genügend mathematisch und physikalisch geschulten Lesern näher, so daß sie „mit Erfolg an die das Relativitätsprinzip eingehender behandelnden Schriften gehen können". Lp.

M. Gandillot. Note sur une illusion de relativité. Paris: Gauthier-Villers. IV + 88 S.

Der Verf. erklärt das Relativitätsprinzip für falsch. „Indem er sich zuerst auf die einfachsten Überlegungen, sodann auf die Deutung der sichersten Experimente stützt, schiebt er die Schuld auf die Täuschung, der sich die Gelehrten über die Relativitätsbewegung der Materie hingeben, sowohl durch die Materie selbst hindurch, als auch durch den Äther. Selbstverständlich führt eine solche Wandlung der bis heute gebilligten Vorstellungen den Verf. dahin, an unseren mechanischen Theorien verschiedene Ergänzungen oder Änderungen vorzunehmen."

„Diese Note ist in vier Teile geteilt. In dem ersten Teile (Thèse) beweise ich kurz die Falschheit eines sehr verbreiteten Vorurteils bezüglich des Widerstandes der Flüssigkeiten. In dem zweiten (Diskussion) stelle ich zusammen und widerlege die Haupteinwürfe, die vom November 1912 bis zum April 1913 von verschiedenen wissenschaftlichen Persönlichkeiten geäußert sind, denen ich die Bitte um ein Urteil über meine Thèse ausgesprochen hatte. In dem dritten (Nachtrag) vereinige ich einige ergänzende Erläuterungen und spreche einen Schlußwunsch aus. Ich lasse dann einen vierten Teil folgen (zweiter Nachtrag), der verschiedene, der Ansicht zahlreicher Theoretiker widersprechende Bemerkungen enthält, die sich jedoch auf die klassischsten Prinzipien stützen."
Lp.

C. Cailler. Les équations du principe de relativité et la géométrie. Arch. sc. phys. et nat. (4) **35**, 109-139.

Wiedergabe des Inhaltes von Vorlesungen über das Relativitätsprinzip für Studenten an der Genfer Universität. „Ich habe mich von praktischen Überlegungen leiten lassen und habe ihnen so viel wie möglich Rechnung getragen, indem ich meine Gedanken in einer Folge anordnete, die mir am besten zusagte. Der elementare Gesichtspunkt, dessen Darlegung ich versucht habe, ist sicherlich nicht neu; aber das gewaltige Interesse, das zur Stunde dem Relativitätsprinzip anhaftet, veranlaßt mich, hier bei seiner Entwicklung den Teil dieser Vorträge zu veröffentlichen, der sich auf die Lorentzschen Gleichungen bezieht, die aus a priori aufgestellten Postulaten wie aus ebenso vielen geometrischen Hypothesen abgeleitet werden." Lp.

R. D. Carmichael. On the theory of relativity: Mass, force and energy. Phys. Rev. (2) **1**, 161-178.

Fortsetzung der Abhandlung des Vorjahres (F. d. M. **43**, 776, 1912), bestimmt zur Ableitung der Begriffe der Relativitätstheorie aus den damals aufgestellten Postulaten. Nachdem in § 1 („Fundamentale Definitionen und Postulate") der Verf. einige Definitionen gegeben hat, stellt er die Gesetze der

Erhaltung der Bewegungsgröße, der Energie, der Elektrizität und das Prinzip der kleinsten Wirkung in der Form auf, in welcher er sie zu gebrauchen gedenkt. Das Gesetz von der Erhaltung der Elektrizität wird in dieser Abhandlung nur bei den die Masse und die Energie betreffenden Anwendungen benutzt.

In § 2 („Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit") wird zuerst die transversale Masse eines sich bewegenden Körpers nach der eleganten Methode von Lewis und Tolman bestimmt. Die Beziehung zwischen der transversalen Masse und der longitudinalen Masse wird nach der Methode von Bumstead ermittelt; hiernach ergibt sich die longitudinale Masse eines Körpers.

In § 3 („Über die Dimensionen der Einheiten") werden die Dimensionsgleichungen zur Ableitung der Beziehungen von Beschleunigung und Kraft in zwei Bezugssystemen verwendet.

In § 4 („Äquivalente Postulate") werden aus Betrachtungen bezüglich der Masse eines sich bewegenden Körpers zwei Postulate bestimmt, die dem Postulat *R* wesentlich äquivalent sind; jedes von ihnen ermöglicht den experimentellen Beweis oder die Widerlegung der Relativitätstheorie. Die Untersuchungen von Bucherer liefern, wie man meint, die erforderliche experimentelle Bestätigung in dem ersten Falle (§ 5: „Der Bucherersche Versuch"). In § 6 („Anderes Mittel zur experimentellen Erhärtung der Relativitätstheorie") werden Winke für ein neues Experimentum crucis gegeben, um die Relativitätstheorie zu bekräftigen.

In § 7 („Masse und Energie") wird die innige Beziehung der Masse zur Gesamtenergie eines Körpers herausgebracht; zwei theoretische Wege werden angegeben, um die Lichtgeschwindigkeit indirekt, d. h. ohne direkte Messung zu bestimmen. Die kurzen §§ 8 und 9 enthalten „Bemerkungen über das Prinzip der kleinsten Wirkung" und „Spekulative Betrachtungen". Lp.

R. D. Carmichael. On the theory of relativity: philosophical aspects. Phys. Rev. (2) **1**, 179-197.

Der Aufsatz bezweckt eine philosophische Darstellung der Relativitätstheorie als Anfang zu einer neuen philosophischen Grundlegung der physikalischen Theorien in einer Form, die möglichst allgemein verständlich ist. Sachlich wird nichts Neues geboten. Lp.

H. Friedmann. Bemerkungen zur Relativitätstheorie. Öfvers. Finsk. Vetensk. Soc. Förh. (A) **55**, Nr. 1, 19 S.

1. Darstellung der Theorie: Allgemeine Lorentz-Transformation, spezielle Lorentz-Transformation, Galilei-Transformation. 2. Beziehung zur Gravitation. 3. Psychologische Zeit. 4. Absolute Zeit. (Rev. sem. 22_2, 112. Vgl. F. d. M. **43**, 776, 1913.) Lp

---

H. Friedmann. Über ein Prinzip, das dem Relativitätsprinzip äquivalent ist. Öfvers. Finsk. Vetensk. Soc. Förh. (A) **55**, Nr. 6, 7 S.

In der Lorentz-FitzGeraldschen Theorie wird eine wirkliche Kontraktion eines bewegten Körpers angenommen, in der Einstein-Min-

kowskischen eine scheinbare, bedingt durch die Einführung eines andern Maßes. Einstein meint, die Lorentz-Verkürzung bestehe nicht wirklich, insofern sie für einen mitbewegten Beobachter nicht existiert; sie besteht aber wirklich, d. h. in einer solchen Weise, daß sie prinzipiell durch physikalische Mittel nachgewiesen werden könnte, für einen mitbewegten Beobachter. — Es sei nun nicht zu verstehen, wie zwei verschiedene Messungsergebnisse zugleich richtig sein können. Diese Denkschwierigkeit will der Verf. durch das „Prinzip" lösen: „Der bewegte Beobachter benutzt bei der Herstellung der Maßgrößen das — dem arithmetischen Mittel des ruhenden Beobachters völlig gleichberechtigte — geometrische Mittel". Dieses Prinzip führt zu einem analytischen Ausdruck, der dem der Relativitätstheorie analog ist. Nach der Relativitätstheorie sind die Beziehungen zwischen den Maßgrößen, die Naturgesetze, invariant, die „Messungen" dagegen veränderlich. Unser Prinzip definiert diesen letzteren Ausdruck genauer und sagt aus, daß nicht die Beobachtungsdaten, sondern die Rechnungsgesetze, mittels deren die Messungen hergestellt werden, veränderlich sind."

Lp.

H. Friedmann. Zur Begründung der Relativitätstheorie vermittels der Theorie der Abbildungsfehler. Öfvers. Finsk. Vetensk. Soc. Förh. (A) **55**, Nr. 7, 10 S.

Der Verf. will die Relativitätstheorie durch eine allgemeine Fehlertheorie begründen, begreiflich gemacht durch das Beispiel: S und S' sind zwei relativ gegeneinander bewegte Systeme, die sich gegenseitig durch mehrere homogene isotrope Medien betrachten. Jedes System erblickt in dem andern eine Lorentz-Kontraktion. Die punktweise ähnliche Abbildung muß aufgegeben werden, um die Invarianz der Naturgesetze zu behalten. (Rev. sem. $\mathbf{22}_2$, 112.)

Lp.

E. Gehrcke. Über die Koordinatensysteme der Mechanik. Verh. Deutsche Phys. Ges. **15**, 260-266.

Der Verf. will ermitteln, ob sich eine allgemeinere als die lineare Transformation der Koordinaten finden läßt, für welche die relativen Bewegungen in einem mechanischen System von n Massenpunkten invariant sind, und findet, daß jedes in geradliniger oder krummliniger, beliebig beschleunigter Translation relativ zu einem beliebigen Massenpunkt begriffene Koordinatensystem mechanisch ein gleichberechtigtes ist; oder: nicht nur absolute Translationsgeschwindigkeiten, sondern auch absolute Translationsbeschleunigungen sind mechanisch unerkennbar. Die Relativität von Bewegungen in der alten Mechanik besteht also für beliebige Translationen. Allgemein kann man sagen, daß jedes Koordinatensystem, welches sich relativ zu allen Massenpunkten eines Systems in jedem Zeitmoment in gleicher Weise bewegt, ein mechanisch mögliches, berechtigtes System darstellt. Die Rotationen unterscheiden sich von einer für alle Massenpunkte identischen, zeitlich und räumlich inkonstanten Bewegung (beliebiger Translation) prinzipiell dadurch, daß sie eben nicht in für alle Massenpunkte identischen Bewegungen bestehen.

Lp.

J. Ishiwara. **Zur Diskussion der Relativitätstheorie.** Tôhoku Imp. Univ. Science Rep. (1) **2**, 149-161.

„Die Einsteinsche Relativitätstheorie ist gegenwärtig so weit entwickelt, daß sie nicht nur die Elektrodynamik, sondern auch die andern Gebiete der Physik, namentlich die reine Mechanik, die Gravitationstheorie usw. in ihren großen Umfang aufnimmt. Es scheint mir allerdings noch bedenklich, ob ihre Grundannahmen unter allen andern möglichen die zutreffendsten sind. Ich möchte im folgenden darum vor allem zeigen, daß von den bisherigen Erfahrungen zwar das Prinzip der Relativität der Naturerscheinungen, aber nicht die bei der jetzigen Relativitätstheorie zugrunde gelegte Auffassung von Raum und Zeit zu folgern ist, daß diese dagegen überhaupt eine hypothetische, doch recht schwer verständliche ist. Es scheint mir übrigens nicht vollständig ausgeschlossen, daß eine andere Relativitätstheorie auch möglicherweise aufgebaut werden kann.“ Lp.

J. Ishiwara. **Über den Zusammenhang der Formeln für die Massen mit den Raumzeitauffassungen.** Physik. Zs. **14**, 26-29.

Im Gegensatze zu Ph. Frank (F. d. M. **43**, 787, 1912) hält der Verf. es für bedenklich, daß ein physikalisches Gesetz, das eigentlich ein Ausdruck der zwischen passend definierten Größen bestehenden Erfahrungstatsache ist, die bei einer Ausführung der physikalischen Erfahrung zuvor zur Verfügung zu stellende Raumzeitauffassung irgendwie beeinflussen kann. Er will vielmehr untersuchen, welche Vorteile jede philosophisch mögliche Raumzeitauffassung für die Beschreibung aller Naturerscheinungen bietet. In diesem Gedankengange leitet er eine Beziehung ab, die in Worten lautet: Der Überschuß des Zeitintegrals der Arbeit, die im ruhenden System von einer Kraft bei einer beliebigen unendlich kleinen virtuellen Verschiebung des Körpers auf denselben geleistet wird, über dasjenige der im mitbewegten System geleisteten Arbeit ist gleich dem Zeitintegral der Arbeit, die im ruhenden System von derselben Kraft bei konstant gehaltener Geschwindigkeit während derselben Zeit geleistet wird. — Die klassische Mechanik ergibt notwendig die Äquivalenz der longitudinalen und transversalen Masse mit der Ruhemasse; dagegen kann eine Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit erst unter Einführung jener Beziehung zu einer von der klassischen abweichenden Raumzeitauffassung hergeleitet werden. Lp.

E. Hahn. **Grundlagen zu einer Theorie der Lorentztransformation.** Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 1-42.

„In der bisher geltenden Kinematik konnte man von einer in den Raum- und Zeitkoordinaten linearen Bewegung ohne weiteres sagen, daß es sich um eine Translation handelte. Hätte man also diese Kinematik axiomatisch aufgebaut, so müßte sich die Translation vom Standpunkte der allgemeinen Bewegungsaxiome aus einzig durch Hinzunahme der Axiome charakterisieren lassen, welche die Linearität der Bewegungsformeln herbeiführen. Dasselbe versuchte ich nun auf Anregung von Wellstein auch im Raume des Relativitätsprinzips: außer den die Linearität bewirkenden Axiomen sollten nur

solche benutzt werden, die voraussichtlich für jede Bewegungsart gefordert werden dürfen, um so der noch ausstehenden Lösung des allgemeinen Bewegungsproblems im Relativraume vorzuarbeiten; die Deduktion sollte ferner so geführt werden, daß die klassische Kinematik als Spezialfall herauskäme. Das hatte in erkenntnistheoretischer Hinsicht die Folge, daß nur solche Anschauungen zu Axiomen erhoben werden durften, die auch bisher anerkannt waren. In diesem Sinne will die Arbeit das Deduktionsproblem der Lorentz-Transformationen lösen. Die Untersuchung führt naturgemäß zur Gruppe aller Translationen, und es ist auch das Problem der Zusammensetzung der Translationen vollständig erledigt. Als formales Hülfsmittel dienen nach dem Vorbilde Minkowskis die quaternären Matrizen, deren Technik zugleich weitergebildet wird, besonders durch Einbeziehung der Quaternionen, die (wie zu erwarten war) bei der Zusammensetzung der Translationen gute Dienste leisten."

I. Linearität der Translationsformeln. § 1. Das Bewegungsproblem. § 2. Affinitätsaxiome. § 3. Vektortechnisches. § 4. Vektorielle Darstellung der Translationsformeln.

II. Gruppeneigenschaft und Orthogonalinvarianz der Bewegungsformeln. § 5. Das Gruppenaxiom. § 6. Die Orthogonalitätsaxiome. § 7. Tragweite des Spiegelungsaxioms und Gruppenaxioms. § 8. Das Isotropieaxiom.

III. Weitere Ausgestaltung der Translationsformeln. § 9. Fertigstellung der Lorentzschen Formeln. § 10. Exponentialdarstellung der Translationsmatrix. § 11. Die Quaternionen in der Minkowskischen Theorie. § 12. Die Lorentz-Transformationen in Quaternionengestalt. Lp.

L. Silberstein. Quaternionic form of relativity. Phil. Mag. (6) **23**, 790-809 (1912).

„Schon 1854 hat Cayley bemerkt (Phil. Mag. **7**), daß die Rotationen in einem vierdimensionalen Raume mittels eines Paares von Quaternionen bewirkt werden können, das eine als Präfaktor, das andere als Postfaktor an der Quaternion q angebracht, deren Komponenten die Koordinaten eines Raumpunktes sind, also (1) $q' = aqb$, wo in dem Falle einer reinen Rotation a und b natürlich entweder Einheitsquaternionen sein müssen oder wenigstens so, daß $T^2a \,.\, T^2b = 1$, wo T den Tensor bezeichnet.

Andererseits ist allgemein bekannt, daß die sogenannte Lorentz-Transformation der Vereinigung des gewöhnlichen Raumes (x, y, z) und der Zeit t, welche die Grundlage der modernen Relativitätstheorie ist, durchaus einer hyperbolischen Rotation der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit (x, y, z, t) oder der Minkowskischen „Welt" entspricht. Hieraus entspringt der naheliegende Gedanke, die Lorentz-Transformation explizit in der quaternionischen Gestalt (1) darzustellen. Dies ist neben einigen damit zusammenhängenden Fragen der Gegenstand der vorliegenden Abhandlung. Zur Lösung dieser einfachen Aufgabe haben wir nur die wohlbekannte relativistische Transformation niederzuschreiben, d. h. die Einsteinschen Formeln, dann das dreifache Produkt in (1) zu entwickeln und beide zu vergleichen" (F. d. M. **43**, 786, 1912).

Lp.

L. Silberstein. Second memoir on quaternionic relativity. Phil. Mag. (6) **25**, 135-144.

In dem vorstehend besprochenen Aufsatze hat der Verf. die relativistischen Grundformeln in der Sprache der Quaternionen entwickelt nebst ihrer Anwendung auf das System von Differentialgleichungen der Elektronentheorie und hat schließlich einige kurze Ausdrücke gegeben für die ponderomotorische Kraft in Verbindung mit ihrer Wirksamkeit, eine Vereinigung, die er „Kräftequaternion" genannt und mit P_e bezeichnet hat. Eine dieser Formen war:

$$(1) \qquad P_e = \tfrac{1}{2}(D\mathbf{F} - \mathbf{G}.\ D\mathbf{F}).$$

Er hoffte damals, imstande zu sein, zu beweisen, daß diese besondere Form sich eignete, um die Eigenschaften der entsprechenden Spannung zu zeigen, sowie der Dichte und des Flusses der elektromagnetischen Energie. Er hat nun in der Tat seitdem gefunden, daß die obige Formel alle diese Dinge in einer nicht erhofften einfachen Weise gibt, wenn man sie einer etwas eigentümlichen, aber geringfügigen Transformation von rein formalem Charakter unterzieht. Die so umgeschriebene Formel (1) erweist sich dann als recht passend für weitere Anwendungen, indem sie zu sehr einfachen Formeln für die relativistische Transformation der Spannung sowie der Dichte und des Flusses der Energie leitet. Dieser Gegenstand nebst einigen verwandten Dingen bildet den Inhalt der Abhandlung. Lp.

R. C. Tolman. Non-Newtonian mechanics. — Some transformation equations. Phil. Mag. (6) **25**, 150-157.

Der Verf. gibt am Schlusse des Artikels folgende Übersicht über den Inhalt: „In diesem Artikel ist gezeigt worden, daß die Einsteinschen Transformationsgleichungen und die andern Prinzipien der nicht-Newtonschen Mechanik auf eine Reihe weiterer Transformationsgleichungen für Beschleunigung, Masse, Schwankungsart von Masse und Kraft führen. Die Transformationsgleichungen sind identisch mit den von Planck gewählten. Zwei Anwendungen der Transformationsgleichungen werden gegeben. Durch ihre Zusammenstellung mit dem Coulombschen Gesetze werden die erwarteten Gleichungen für die Kraft hergeleitet, mit der eine elektrische Ladung in gleichförmiger Bewegung auf eine andere Ladung einwirkt, und indem man sie mit dem Newtonschen Gesetz zusammenstellt, folgt ein neuer Ausdruck für die Gravitationskraft, mit der ein in gleichförmiger Bewegung befindliches Teilchen auf ein anderes Teilchen einwirkt." Lp.

R. C. Tolman. Relativity theory; general dynamical principles. Phys. Rev. (2) **2**, 505-506. (Abstract presented at the New York meeting of the Physical Society, October 18, 1913.)

Bericht über die vom Verf. veröffentlichten bezüglichen Aufsätze insbesondere die letzten, die F. d. M. **43**, 785, 1912 und vorstehend angezeigt sind. Lp.

A. Steichen. On the geometrical interpretation of the Lorentz-transformation. Indian Math. Soc. Journ. **5**, 3-13.

Nach einer übersichtlichen Darstellung der Eigenschaften der Lorentz-Transformation und der beiden geometrischen Deutungen, die Minkowski für sie gegeben hat, zeigt der Verf., wie man die eine dieser Deutungen in die andere überführen kann, daß überhaupt die Gleichungen für die spezielle Lorentz-Transformation und die aus ihnen abgeleiteten Gleichungen durch die Einführung der Hyperbelfunktionen an Eleganz gewinnen. Lp.

A. Del Re. Sulle trasformazioni Voigt-Lorentz in elettrodinamica. Nota critica scientifica con prefazione. Napoli: Tip. della Reale Acc. delle Sc. 16 S.

Infolge eines Streites mit Marcolongo über die Entstehung der Lorentz-Transformation setzt der Verf. die Anrechte der Beteiligten auseinander in den Paragraphen: I. Die Lorentz-Transformationen nach Poincaré. II. Partielle logische Analyse einer Note von Marcolongo. III. Das Theorem von Marcolongo: Ausgabe von 1906. Nicht wahr ist es, nicht falsch ist es. IV. Das Theorem von Marcolongo. Ausgabe von 1912. Ein elektromagnetisches Feld, das gleichzeitig sich nicht ändert und sich ändert, indem es imaginär wird. V. Die Lorentz-Transformationen nach Minkowski.

In der Abhandlung „Über das Dopplersche Prinzip“ (Gött. Nachr. 1887, 41 51; F. d. M. **19**, 1077-1079) bei der Behandlung der Differentialgleichung

$$\nabla \mathbf{a} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} = 0 \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{a} = 0$$

untersucht W. Voigt die Bedingungen der Transformabilität dieser Gleichung in sich selbst und gelangt zu Transformationsgleichungen des eigentlichen sogenannten Lorentz-Typus, wie Lorentz dies in seinem Buche Theory of electrons selbst anerkennt. Daher sei es gerecht, diese Transformationen als Voigt-Lorentz-Transformationen zu bezeichnen.

Diese Darlegung wurde in der Akademie von Neapel vorgetragen, ihr Abdruck in den Sitzungsberichten erhielt aber nicht die Billigung der Mehrheit; daher ist die Schrift selbständig ausgegeben. Lp.

K. Ogura. On the Lorentz transformation with some geometrical interpretations. Tôhoku Univ. Science Rp. **2**, 95-116.

Der Hauptgegenstand dieser Arbeit ist die Behandlung der Kinematik auf dem Grunde des Relativitätsprinzips nebst einigen hierauf bezüglichen geometrischen Deutungen. In dem ersten Abschnitte werden einige Invarianten gegeben, welche Koordinaten, Zeit, Geschwindigkeit und Beschleunigung enthalten, sowie ihre Deutungen durch die imaginäre Rotation von Minkowski und die reelle von Wilson und Lewis. In dem zweiten Abschnitte wird eine von der Sommerfeldschen und Varićakschen etwas verschiedene Methode für den Beweis auseinandergesetzt, daß der kinematische Raum der Relativität der nichteuklidische Raum von Lobatschefskij und Bolyai

ist. Der dritte Abschnitt dient zur eingehenderen Behandlung der Laguerreschen Transformation; diese Transformation in der Lieschen Kugelmannigfaltigkeit ist nämlich der Lorentzschen Transformation in der Raumzeit-Mannigfaltigkeit äquivalent. Im vierten Abschnitt endlich werden einige geometrische Eigenschaften erörtert, die durch synchrone Längenmessungen sich nicht ändern. Lp.

K. Schaposchnikow. Zur Relativdynamik des homogenen Körpers. Ann. der Phys. (4) **42**, 1572-1574.

M. v. Laue. Zur Dynamik der Relativitätstheorie; Entgegnung an Herrn Schaposchnikow. Ann. der Phys. (4) **42**, 1575-1579.

Schaposchnikow findet einen Widerspruch zwischen den Darstellungen der relativistischen Dynamik von Planck und Laue, wenn man sie auf einen unter allseitig gleichem Druck stehenden Körper anwenden will, in den beiden Punkten: 1. Die beiden Darstellungen gemeinsamen Gleichungen (von Laue als Plancksche Gleichungen bezeichnet) seien aus verschiedenen, einander widersprechenden Voraussetzungen abgeleitet. 2. Nach der Planckschen Darstellung gelte das Energieprinzip in der Form $dE = qdG - pdv + TdS$, während Laues Darstellung von vornherein mit dieser Formulierung des Energieprinzips breche. Hiergegen führt Laue aus, daß zwischen beiden Darstellungen der relativistischen Dynamik in keinem Punkte der mindeste Unterschied besteht. Lp.

É. Borel. La théorie de la relativité et la cinématique. C. R. **156**, 215-218.

Unter den vom Verf. entwickelten Begriffen ist der des „kinematischen Raumes“ der bedeutsamste. Es seien verschiedene Systeme in gleichförmigen Translationsbewegungen begriffen; man kann ihre Geschwindigkeiten durch die Endpunkte von Vektoren ausdrücken mit einem Punkte O als Ursprung, der dem System entspricht, das man als ruhend voraussetzt. In der klassischen Kinematik kann man zum Ursprung der Geschwindigkeitsvektoren einen andern beliebigen Punkt A nehmen, der einem als fest betrachteten System (A) angehört; die Geschwindigkeiten der andern Systeme werden durch dieselben Punkte abgebildet. Der Raum der Geschwindigkeitspunkte A erhält den Namen kinematischer Raum; in der klassischen Mechanik ist der euklidische Raum der kinematische. Das Relativitätsprinzip entspricht der Hypothese, daß der kinematische Raum ein Raum von konstanter negativer Krümmung ist, der Lobatschefskijsche und Bolyaische Raum. Der Wert des Krümmungsradius ist die Lichtgeschwindigkeit. Die Aussage, der geometrische Raum sei euklidisch, bedeutet, es gibt keine bevorrechtete Länge, keine absolute Längeneinheit. Da nun die physikalischen Theorien aussagen, die Lichtgeschwindigkeit sei eine absolute Geschwindigkeitseinheit, so muß die Krümmung des kinematischen Raumes mit dieser Einheit in Beziehung stehen.

Aus diesen Begriffsfestsetzungen zieht der Verf. eine Reihe von Folgerungen rein kinematischer Art für die Bewegung. Besonders hebt er hervor: Ein System, von dem die mit ihm verbundenen Beobachter urteilen, es sei beständig in Translation begriffen, kann außerhalb des Systems befindlichen Beobachtern als in Rotation begriffen erscheinen. Lp.

É. Borel. La cinématique dans la théorie de la relativité. C. R. **157**, 703-705.

Varićak hat in mehreren Veröffentlichungen auf die Anwendung der Lobatschefskijschen Geometrie in der Relativtheorie hingewiesen (vgl. F. d. M. **40**, 767 u. 929, 1910; ferner **43**, 778, 1912). Dies hat der Verf. bei der Abfassung seiner Note „La théorie de la relativité et la cinématique" (Referat vorstehend) übersehen. Er erkennt jetzt die Priorität Varićaks an und hebt die Unterschiede in der Auffassung hervor. Insbesondere wird die zentrale Stellung des Begriffes „kinematischer Raum" nachdrücklich betont. Von interessanten Ergebnissen erwähnen wir die folgende Vorschrift für die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten: Wenn ein System A gegeben ist, in bezug auf welches man die Geschwindigkeiten zweier Systeme B und C gemessen hat, so soll mit Hülfe von Messungen innerhalb der Systeme B und C die Geschwindigkeit eines vierten Systemes D in bezug auf A gefunden werden: Es existiert ein Tetraeder $ABCD$ in dem Raum mit konstanter negativer Krümmung (gleich der Lichtgeschwindigkeit) von der Art, daß die Kantenlängen die wahren relativen Geschwindigkeiten sind; die Winkel bei A sind z B die Winkel, welche für den Beobachter in A die Geschwindigkeiten AB, AC, AD miteinander bilden.

Lp.

S. Mohorovičić. Beitrag zur nichteuklidischen Interpretation der Relativtheorie. Physik. Zs. **14**, 988-989.

Wenn in der Relativtheorie zwei Geschwindigkeiten zusammengesetzt werden, die sich beliebig der Lichtgeschwindigkeit nähern, so ist die resultierende Geschwindigkeit nie gleich oder größer als die Lichtgeschwindigkeit. Varićak hat schon gezeigt, daß es auch in der Relativtheorie die vektorielle Addition der Geschwindigkeiten gibt, wenn die Geometrie von Lobatschevskij als Basis genommen wird. Der Verf. des gegenwärtigen Artikels wendet innerhalb dieser Geometrie orthogonale Projektionen an, und es ergibt sich aus seinen Ausführungen, daß dadurch die Einsteinschen Formeln viel anschaulicher werden.

Lp.

W. C. Baker. Mass as a measure of inertia. Nature **92**, 268.

Anfrage nach dem Urheber der Definition: „Die Masse eines Körpers ist das dynamische Maß seiner Trägheit."

Lp.

R. Leitinger. Über Jourdains Prinzip der Mechanik und dessen Zusammenhang mit dem verallgemeinerten Prinzip der kleinsten Aktion. Wien. Ber. **122**, 635-650.

Jourdains „Prinzip" ist veröffentlicht in der „Note on an analogue of Gauss' principle of least constraint" (F. d. M. **40**, 780, 1909). Es nimmt eine Mittelstellung ein zwischen dem Prinzip von d'Alembert und dem Gaußschen Prinzip des kleinsten Zwanges. Beim Jourdainschen Prinzip bleiben Koordinaten und Beschleunigungen unvariiert, und nur die Geschwindig-

keiten unterliegen einer Variation; dagegen werden bei dem d'Alembertschen nur die Koordinaten, bei dem Gaußschen nur die Beschleunigungen variiert. In allen drei Fällen bleibt die Zeit unvariiert.

Der Verf. zeigt zuerst, wie man durch wiederholte Differentiation nach der Zeit aus dem d'Alembertschen Prinzip das Jourdainsche und das Gaußsche gewinnt, und wendet sich dann der Ableitung des verallgemeinerten Prinzips der kleinsten Aktion aus dem Jourdainschen zu, sowohl für holonome, als auch für nicht holonome Koordinaten. Im Falle holonomer Koordinaten kommt er auf die bekannte, zuerst von Hölder und Voß angegebene Form des Prinzips der kleinsten Aktion (F. d. M. **27**, 574, 1896 u. **31**, 695, 1900). Dagegen findet er in dem Falle nicht holonomer Koordinaten einen erweiterten Ausdruck:

$$\int_{t_0}^{t}(\partial L \,.\, dt + 2L \,.\, \partial\, dt + dL \,.\, dt + \partial_1 U \,.\, dt)$$

$$= \int_{t_0}^{t} \Sigma_i \left[\frac{\partial L}{\partial p_i} - \sum_{r=1}^{3} m_\nu \dot{x}_\nu \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial p_i}\right) \delta p_i dt.\right.$$

Für holonome Koordinaten geht diese Form in die von Hölder und Voß über, weil dann die rechte Seite verschwindet. Dagegen ändert das Prinzip von Jourdain für nicht holonome Koordinaten seine Form ebensowenig wie das von d'Alembert oder das von Gauß. Lp.

Ph. E. B. Jourdain. The principle of least action. Chicago: Open Court Co. 83 S. 8°.

E. Schenkl. Über eine dem Gaußschen Prinzip des kleinsten Zwanges entsprechende Integralform. Wien. Ber. **122**, 721-738.

Um die Frage zu beantworten, ob sich ein Zeitintegral zwischen festen Grenzen angeben läßt, das sich zum Gaußschen Prinzip des kleinsten Zwanges formal ebenso verhält wie das Hamiltonsche Prinzip zum d'Alembertschen, muß man auf die den betreffenden Prinzipien angehörigen Variationsmethoden und -bedingungen genau eingehen. Die Schwierigkeit liegt in dem Übergang von der Variation des Bewegungszustandes in einem Zeitpunkte zur Variation der Bewegung im ganzen, welcher eben den Zusammenhang zwischen den betreffenden Prinzipien (z. B. zwischen dem Hamiltonschen und dem d'Alembertschen) bildet. Die Variationen der Beschleunigungen, wie sie bei der Gaußschen Variationsmethode auftreten, sind, wie Boltzmann kurz andeutet, ihrer Natur nach nicht integrierbar, und die Integrierbarkeit dieser Variationen ist die notwendige Bedingung für die Ausführbarkeit des genannten Überganges. Man kann daher im Falle des Gaußschen Prinzipes des kleinsten Zwanges jenen Übergang nicht vollkommen analog zu dem Falle des d'Alembertschen Prinzipes bewerkstelligen. Der Umstand, daß die Boltzmannsche Bemerkung sich nur auf den Fall bezieht, daß die Zeit nicht variiert wird, legt den Versuch nahe, den erwähnten Übergang mit Hülfe der Zeitvariation in Angriff zu nehmen. Es läßt sich zeigen, daß durch

Einführung einer passenden Zeitvariation die Integrierbarkeit der Variationen der Beschleunigungen gewährleistet werden kann; hierbei wird gleichzeitig den übrigen Anforderungen an diese Variationen entsprochen. Auf Grund der so hergestellten Variationsbedingungen gelingt die Darstellung der gesuchten Integralform; sie lautet:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \frac{d^2 L}{dt^2} - \frac{d^2 \delta A}{dt^2} \right) dt = 0,$$

wo L die lebendige Kraft, δA die virtuelle Arbeit, δ das Symbol der Variation bezeichnet. Diese Integralform stellt also eine andere Form des Gauß schen Prinzipes des kleinsten Zwanges dar.

Lp.

H. Brell. Nachweis der Äquivalenz des verallgemeinerten Prinzipes der kleinsten Aktion mit dem des kleinsten Zwanges. Wien. Ber. **122**, 933-944.

Es wird gezeigt, daß das Integral (1) des vorstehenden Referates identisch ist mit

$$-\int_{t_2}^{t_1} dt \sum_{\nu} \left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{p}_{\nu}} - P_{\nu} \right) (\delta p_{\nu} - \dot{p}_{\nu} \delta t),$$

wenn S die Gibbs-Appellsche Funktion vorstellt:

$$\sum_a \tfrac{1}{2} m_a \left(\ddot{x}_a^2 + \ddot{y}_a^2 + \ddot{z}_a^2 \right).$$

Lp.

H. Brell. Über eine neue Fassung des verallgemeinerten Prinzipes der kleinsten Aktion. Wien. Ber. **122**, 1031-1036.

In dem allgemeinsten Fall hat Voß dem Prinzip der kleinsten Aktion die Form gegeben:

$$(1) \qquad \int_{t_0}^{t_1} (\delta L dt + 2 L d\delta t + dL \delta t + \delta' A dt) = 0.$$

Hierin ist L die lebendige Kraft, $\delta' A = \sum Q_{\nu} (\delta q_{\nu} - q'_{\nu} \delta t)$, wenn die elementare Arbeit durch $\sum Q_{\nu}\, \delta q_{\nu}$ dargestellt ist. Ferner sind die Variationen der Koordinaten q so zu bilden, daß auch die Zeit variiert wird; schließlich ist noch vorausgesetzt, daß an festen, aber beliebigen Grenzen sämtliche Variationen verschwinden. Da sich in (1) statt $2 L d\delta t + dL \delta t$ auch $2d(L\delta t) - dL\delta t$ schreiben läßt und nach den getroffenen Voraussetzungen $\int_{t_0}^{t_1} \frac{d(2L\delta t)}{dt} dt = 0$ ist, reduziert sich (1) auf:

$$(2) \qquad \int_{t_0}^{t_1} (\delta L dt - dL \delta t + \delta' A dt) = 0 \text{ oder } \int_{t_0}^{t_1} (\delta' L + \delta' A) dt = 0,$$

wenn mit $\delta' L$ der Ausdruck $\delta L - \frac{dL}{dt}\delta t$ bezeichnet wird. Diese neue Form wird für rechtwinklige und allgemeine Koordinaten auch direkt abgeleitet und erweist sich in Anwendungen von wesentlichem Nutzen. Lp.

H. Brell und E. Schenkl. Über die Prinzipe von Hamilton und Maupertuis. Verh. Deutsche Phys. Ges. **15**, 1082-1089.

In der vorstehend angezeigten Arbeit „Über eine neue Fassung des Prinzips der kleinsten Aktion“ bemerkt Brell, daß aus der allgemeinsten Form des genannten Prinzips, wie Voß sie aufgestellt hat, durch Weglassung eines vollständigen Differentialausdruckes zwei neue Formen entstehen, deren eine mit dem Hamiltonschen Prinzip der stationären Wirkung (nach der Bezeichnung von Boltzmann) identisch ist. In der vorstehenden Mitteilung wird zunächst der Gang der Untersuchung wiederholt, und dann wird das Verhältnis des gewonnenen Resultates zu der grundlegenden Hölderschen Arbeit von 1896 erörtert. Am Schlusse wird die Stellung der verschiedenen Prinzipe zueinander und die Rolle, welche die Zeitvariation spielt, schließlich folgendermaßen charakterisiert:

„Die Einführung der Zeitvariation liefert nicht wesentlich Neues gegenüber dem Hamiltonschen Prinzip; dies rührt eben daher, daß sie in ihm auch schon vorkommt. Deshalb hat das Prinzip der kleinsten Aktion vor dem Hamiltonschen Prinzip physikalisch gar nichts voraus, und es ist nicht zutreffend, daß das Hamiltonsche Prinzip solche variierten Bewegungen, welche im ganzen länger oder kürzer dauern als unvariierte, nicht in den Kreis der Betrachtungen ziehen könne. — Die Höldersche Form ist nicht äquivalent mit dem d'Alembertschen Prinzip, was sich darin zeigt, daß sie für rheonome allgemeine Koordinaten versagt. — Die Voßsche Form, die allgemeinste, welche aufgestellt wurde, gehört zu derjenigen Gruppe von Formen, welche sich vom Hamiltonschen Prinzip nur durch einen vollständigen Differentialausdruck unterscheiden. — Das konsequent durchgeführte Prinzip der kleinsten Aktion ist also vom Hamiltonschen Prinzip nicht wesentlich physikalisch verschieden, sondern nur rein formal durch einen vollständigen Differentialausdruck und geänderte Koeffizienten der Variationsbedingungen an den Integrationsgrenzen.“ Lp.

H. Brell. **Über eine neue Form des Gaußschen Prinzips des kleinsten Zwanges.** Wien. Ber. **122**, 1531-1538.

Werden die rechtwinkligen Koordinaten eines Systems durchnumeriert, und bezeichnet S die Funktion $\sum \frac{1}{2} m \ddot{x}^2$, ferner δA die virtuelle Arbeit $\sum X \delta x$, so wird gezeigt, daß im allgemeinsten Falle nach Einführung allgemeiner Koordinaten bei beliebigen holonomen oder anholonomen Bedingungen:

$$\delta S - \frac{dS}{dt}\delta t - \delta' A = 0$$

sämtliche Appellschen Gleichungen $\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}} - Q = 0$ in sich vereinigt, wenn auch eine Variation der Zeit zugelassen und wenn $\delta q - \dot{q}\delta t = 0$ sowie $\delta\dot{q} - \ddot{q}\delta t = 0$ vorausgesetzt wird, während nur die $\delta\ddot{q} - \dddot{q}\delta t$ willkürlich bleiben; ferner ist $\delta' A = \sum Q(\delta\ddot{q} - \dddot{q}\delta t)$.

Schließlich wird für die rechtwinkligen Koordinaten nachgewiesen, daß

$$\delta' S - \delta' A = \delta S - \frac{dS}{dt}\delta t - \sum X(\delta\ddot{x} - \dddot{x}\delta t) = 0$$

nur eine andere Form des Gaußschen Prinzips darstellt, wenn auch die Zeit variiert und $\delta x - \dot{x}\delta t = 0$ sowie $\delta\dot{x} - \ddot{x}\delta t = 0$ vorausgesetzt wird. Lp.

P. Hertz. Über die statistische Mechanik der Raumgesamtheit und den Begriff der Komplexion. Math. Ann., 74, 153-203; Gött. Nachr. 1913, 177-196.

§ 1. Ist ein individuelles System gegeben, so macht der Inbegriff der von ihm zeitlich nacheinander durchlaufenen Phasen die dem System zugehörige „Zeitgesamtheit“ aus. Wenn dagegen nur Bau und Bewegungsgleichungen oder der Mechanismus für ein System vorgegeben sind, so kann einer solchen Vorschrift noch durch mannigfache konkrete Systeme genügt werden; der Inbegriff aller dieser Systeme heißt „die dem Mechanismus zugehörige virtuelle Gesamtheit“. Endlich kann man auch eine große Anzahl räumlich koexistierender Systeme betrachten, die Teilsysteme eines Ganzen sind. Eine solche Menge heißt „Raumgesamtheit“ und ist besonders auf die Häufigkeit (räumliche Wahrscheinlichkeit des Koexistierenden) zu untersuchen. Die Theorie der Zeitgesamtheit ist als Ausgangspunkt aller statistischen Betrachtungen zu wählen. Die Theorie der Raumgesamtheit ist das Eingangstor, durch das wir in das Reich der besonderen Lehren, vor allem der kinetischen Gastheorie, eintreten. Die Theorie der virtuellen Gesamtheit ist von höchster Bedeutung für die allgemeine Thermodynamik, und bei einer bestimmten Auffassung ihrer Sätze sogar unentbehrlich. Die enge Verbundenheit dieser drei Theorien macht eine elementare Ausbildung einer jeden von ihnen zur Pflicht. Nun gibt es bereits gründliche Betrachtungen über die virtuelle und die Zeitgesamtheit; die Theorie der Raumgesamtheit ist aber bisher nur in der Gestalt behandelt worden, in der sie sich in der kinetischen Gastheorie als Teil einordnet. Daß man diejenige Verteilung als wahrscheinlichste ansieht, welche die meisten Molekülpermutationen zuläßt, ist nur begründet, wenn alle möglichen Verteilungen der Geschwindigkeiten über die Moleküle gleichberechtigt sind, wenn gleich wahrscheinlich ist, was man als „Komplexion“ zu bezeichnen pflegt.

Zum Begriff der Komplexion gelangt die Gastheorie vom Liouvilleschen Satze aus. Man teilt die Geschwindigkeitsräume der Moleküle in gleichgroße Geschwindigkeitszellen ein und faßt als eine Komplexion alle diejenigen Phasen zusammen, für die die Geschwindigkeitspunkte der Moleküle in den-

selben Geschwindigkeitszellen liegen. Der so gefaßte Komplexionsbegriff besitzt nur Sinn für eine virtuelle Gesamtheit. Dagegen bedürfen in der Raumgesamtheit die Definition der Komplexion und der Satz, daß die einzelnen Komplexionen nicht verschieden wahrscheinlich sein können, einer Modifikation. Sie zu finden ist eine Aufgabe der gegenwärtigen Untersuchung. Als Komplexionen darf man zweckmäßig nur solche Phasenzusammenstellungen definieren, die sich ceteris paribus als gleich wahrscheinlich herausstellen. Hiermit ist eine Wahrscheinlichkeitsbestimmung aller Phasenverteilungen über die Systeme verbunden, und damit die Grundlage für eine wirklich wahrscheinlichkeitstheoretische Statistik der Raumgesamtheit. Dies ist die zweite Absicht der Untersuchung, in der Hoffnung, wenigstens Andeutungen zu finden über den Grund für die merkwürdige Beziehung zwischen virtueller und Zeitgesamtheit.

§ 2. Die Theorie der Zeitgesamtheit (vgl. F. d. M. **41**, 984, 1910). § 3. Konstruktion eines Konstellationselementes um eine Anfangskonstellation. § 4. Konstruktion eines Konstellationselementes ohne Ausgangskonstellation. § 5. Die Wahrscheinlichkeit eines Konstellationselementes. § 6. Einteilung des Konstellationsgebietes in Komplexionen. § 7. Die Statistik der Raumgesamtheit. § 8. Beziehungen zwischen der Theorie der Raumgesamtheit und den Theorien der Zeitgesamtheit und virtuellen Gesamtheit. „Die räumliche Wahrscheinlichkeit der Partialsysteme innerhalb eines Totalsystems ist der zeitlichen Wahrscheinlichkeit gleich, oder kürzer: die Raumgesamtheit ist ein Abbild der Zeitgesamtheit.“ Lp.

J. Kroó. **Über die Zeitgesamtheit und die mikrokanonische Gesamtheit in der statistischen Mechanik.** Krak. Anz. (A) 1913, 548-571.

In der statistischen Theorie stationärer Erscheinungen wird die Gesamtheit aller vom mechanischen Systeme zeitlich durchlaufenen Phasen (Zeitgesamtheit) mit der sogenannten mikrokanonischen Gesamtheit identifiziert (vgl. P. Hertz, F. d. M. **41**, 984, 1910). Diese Identifikation wird auf die Annahme gestützt, daß die Zeitgesamtheit alle Phasen gleicher Energie umfaßt (Ergodenhypothese).

Es entspricht ohne Zweifel der physikalischen Bedeutung Gibbsscher Gesamtheiten, vom Begriffe der Zeitgesamtheit auszugehen; aber die Heranziehung und Benutzung der Ergodenhypothese ist von vornherein abzuweisen (Ornstein, F. d. M. **42**, 962, 1911). Zwar könnten Fälle existieren (singuläre), in denen das mechanische System bei gewissen Anfangsbedingungen jeder Phase derselben Energie beliebig nahe kommt; doch die von der Ergodenhypothese geforderte Existenz einer einzigen Phasenkurve auf der Energiefläche (die jeden Punkt dieser Fläche erreicht) wird durch die Theorie der Differentialgleichungen nicht zugelassen.

Sind also Zeit und mikrokanonische Gesamtheit zwei verschiedene Dinge, so können doch Zeit und mikrokanonischer Mittelwert gewisser Phasenfunktionen identisch und jene beiden Gesamtheiten in diesem Sinne äquivalent sein. Der Verf. untersucht, unter welchen Bedingungen diese Äquivalenz stattfindet. Da es in der statistischen Mechanik auf Beziehungen zwischen Mittelwerten ankommt, so ersetzen zwei solche äquivalenten Gesamteinheiten einander vollkommen. Lp.

É. Borel. La mécanique statistique et l'irréversibilité. Journ. de Phys. (5) **3**, 189-196.

Die Betrachtungen des Verf. über die statistische Mechanik (nicht statische, wie im Titel und in den Überschriften der Seiten steht) gehen von folgender Überlegung aus, die er schon in seiner Abhandlung „Sur les principes de la théorie cinétique des gaz" angedeutet hatte (F. d. M. **37**, 944, 1906): Der exakte Zahlenwert einer beliebigen physikalischen Größe ist eine rein mathematische Abstraktion, der keine Wirklichkeit entspricht. Sicherlich sind unsere Messungen genau genug, um uns manche Zahlenverhältnisse mit einer gewissen Annäherung als bekannt zu liefern. Von der absoluten Genauigkeit, mit welcher der Mathematiker das Verhältnis der Diagonale zur Quadratseite definiert, werden wir aber stets entfernt bleiben. Nicht nur zum Messen, sondern auch einfach zum Definieren einer physikalischen Größe wird es notwendig, ergänzende und um so längere Erläuterungen zu geben, je präziser man in der Erreichung des Zieles sein will. Zu einer unbeschränkten Präzision bedürfte man unendlich langer Erläuterungen, d. h. solcher Erläuterungen, die niemals gegeben oder erfaßt werden können. Hieraus folgt, daß tiefe Abgründe liegen zwischen dem abstrakten Problem, das der Mathematiker behandelt, und dem konkreten Problem, das allein den Physiker interessieren kann.

Diese Gedanken werden an mehreren Beispielen erläutert; aus ihrer Verwandtschaft mit den Vorstellungen der kinetischen Gastheorie erhofft der Verf. auch eine klärende Wirkung der Schwierigkeiten, die bei der mechanischen Erklärung der irreversiblen Vorgänge entstanden sind. Lp.

Th. Pöschl. Über die Stellung der Mechanik im System der technischen Wissenschaften. Rede, gehalten am 6. November 1912 bei der Übernahme der Lehrkanzel für Mechanik I an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag. Technische Blätter **45**, 3-8.

Charakter der technischen Mechanik. Ihre Methoden. Zustandsgleichungen. Experimente. Rechnerische Verfolgung der Ergebnisse. Schr.

H. Gabler. Das Schweben von Apparaten im luftleeren Raume. (Dynamische Auftriebserzeugung mittels der Trägheit fester Massen.) Vierteljahrsberichte des Wr. Vereins zur Förd. d. phys. und chem. Unterrichts **18**, 12-17.

„Bei der Übertragung der Arbeit von der Hülfsmasse ... ergibt sich ... ein Verlust von Arbeit, welcher in der gegebenen Situation jedoch einen Gewinn bedeutet." Schr.

Weitere Literatur.

P. Appell et J. Chappuis. Leçons de mécanique élémentaire. 3e édition, entièrement refondue. Paris: Gauthier-Villars. IX + 416 S. 16mo.

C. E. Ashford. Elementary experimental dynamics for schools. Cambr. Univ. Press, VIII u. 246 S. [Nature **92**, 195-196.]

Bomsel. Cours de mécanique générale. Paris: Millet. 267 S. 8°.

C. A. A. Capito. A textbook of mathematics and mechanics. For the use of students qualifying for science and technical examinations. London: Griffin. XV + 398 S. 8°.

H. M. Dadourian. Analytical mechanics for students of physics and engineering. New York: Van Nostrand. XII + 353 S. 8°.

J. Duncan. Applied mechanics for engineers. London: Macmillan. 732 S. 8°.

H. Edenhofer. Lösungen der Diplomvorprüfungs-Aufgaben aus techn. Mechanik (Statik, Festigkeit, Dynamik) ab 1907 inkl. d. Aufg. letzten Semesters. München: Selbstverlag. 66 S. Lex.-8°.

P. Frick. Premiers principes de mécanique rationnelle. Paris: Dunod et Pinat. 8°.

C. Fuller and A. Johnston. Applied mechanics. Volume I: Statics and kinetics. New York: Wiley. XI + 370 S. 8°.

E. Gabriel. Problèmes de mécanique. Paris: Gigord. VII + 509 S. 8°.

J. W. Gibbs. Elementary principles of statistical mechanics. New Haven Conn.: Yale University Press.

G. Goodwill. Elementary mechanics. London: Clarendon Press. 230 S. 8°.

C. Guichard. Traité de mécanique à l'usage des élèves de mathématiques A et B. 7e édition. Paris: Vuibert. VII + 248 S. 8°.

C. Guichard. Problèmes de mécanique et cours de cinématique. Paris: A. Hermann. 156 S. 8°.

C. E. Guillaume. Mechanics, illustrated. London: Constable. 214 S. 8°. (Thresholds of science.)

J. M. Jameson. Exercises in mechanics. New York: Wiley. 52 exercises, loose leaves. (Wiley technical series.)

A. Jamieson. A text-book of applied mechanics and mechanical engineering Volume V. 8th edition, revised and enlarged. London: Griffin. 546 S. 8°

O. Lübeck. Mechanik (Statik). Übersetzung d. 7. deutschen Aufl. v. J. Losinsky. (In russ. Sprache.) Strelitz: Polytechn. Verl. M. Hittenkofer. 162 S. 34 × 21,5 cm.

E. E. Marchand-Bey. Mécanique générale. Erreurs et lacunes à la base de la mécanique classique usuelle. Principes et formules nouveaux complémentaires. Paris: Loubat. VIII + 103 S. 8°. (Mécanique — Électricité.)

L. A. Martin. Textbook of mechanics. Vol. IV. Applied statics. Wiley Chapman and Hall. XII u. 198 S.

P. Menert. Mechanik für techn. u. gewerbliche Lehranstalten sowie z. Selbstunterr. 4 Teile. 1. Teil: Reine Bewegungslehre. 2. Teil: Mechanik starrer Körper. 3. Teil: Festigkeitslehre. 4. Teil: Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper. Wien: F. Deuticke. IV + 34 S., VI + 105 S., IV + 38 S., IV + 28 S. gr. 8°.

H. E. Norris. Experimental mechanics and physics. London: Mills and Boon. VIII u. 176 S. [Nature **91**, 501.]

J. Perry. Mécanique appliquée. Traduit sur la 9e édition anglaise par E. Davaux. Avec des additions et un appendice sur la mécanique des corps déformables par E. et F. Cosserat. Tome I: L'énergie mécanique. Paris: A. Hermann. V + 405 S. 8°.

S. Petrowitsch. Lehrbuch der theoretischen Mechanik. I. Kinematik. II. Dynamik eines Massenpunktes. St. Petersburg. IV + XI + 312 S., V + 263 S. 8°. (Russisch, 1912.)

J. Prescott. Mechanics of particles and rigid bodies. London: Longmans. 544 S. 8°.

H. G. Prévost. Cours de mécanique. Paris: Belin. 281 S. 18mo.

L. Silberstein. Vectorial mechanics. London: Macmillan. 206 S. 8°.

S. E. Slocum. The theory and practice of mechanics. New York: Holt. XIII + 442 S. 8°.

P. Bernays. Über die Bedenklichkeiten der neueren Relativitätstheorie. Göttingen: Vandenhoek u. Ruprecht. (Abhandlungen der Fries schen Schule.) 8°.

R. D. Carmichael. The theory of relativity. New York: Wiley. 74 S. 8°. (Mathematical monograph series.)

R. D. Carmichael. On the theory of relativity: mass, energy, gravitation; philosophical aspects. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 222.

P. Carus. The principle of relativity in the light of the philosophy of science. Chicago: Open Court. 105 S. 8°.

G. Clauzel. Méthode géométrique permettant d'établir simplement plusieurs équations importantes de mécanique. Paris: Dunod et Pinat. 32 S. 4°.

A. Dittrich. Begriff der Geschwindigkeit in der neuen Mechanik. Časopis **42**, 425-431. (Böhmisch.)

E. Gehrcke. Die gegen die Relativitätstheorie erhobenen Einwände. Die Naturwissenschaften **1**, 62-66, 170, 338.

M. Born. Zum Relativitätsprinzip. Entgegnung auf Gehrckes Artikel „Die gegen die Relativitätstheorie erhobenen Einwände". Ebenda 92-94, 191-192.

E. Henschke. Über eine Form des Prinzips der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik des Relativitätsprinzips. Diss. Berlin. 87 S. 8°.

E. Kasner. The interpretation of the Appell transformation. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 514.

H. A. Lorentz. Het relatiwiteitsbeginsel (Das Relativitätsprinzip). Drei von W. H. Keesom ausgearbeitete, in Harlem gehaltene Vorträge. Arch. du Musée Teyler (3) **3**. (1914.)

H. Poincaré. Die neue Mechanik. Zweite Auflage. Leipzig: B. G. Teubner. 22 S. 8°.

K. Tamaki. On the Doppler principle and the principle of relativity. Kyôto Univ. Mem. **5**, 215-234.

G. Viciani. Le principali leggi della meccanica. Milano: Varese. 81 S. 16mo.

C. M. Woodward. Rational and applied mechanics. St. Louis: Nixon-Jones Press. VIII + 517 S. 8°.

Kapitel 2.

Kinematik.

E. Study. Grundlagen und Ziele der analytischen Kinematik. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **12**, 36-60.

Ein außerordentlich inhaltsreiches Programm, welches Stoff für die mathematische Forschung vieler Jahre enthält.

Gegensatz zwischen theoretischer Kinematik, die von der Begrenzung eines starren Körpers vorläufig absieht, und der Maschinenlehre. Grundfigur der Kinematik ist das Soma, welches durch ein mit dem starren Körper starr verbundenes Koordinatentrieder repräsentiert werden kann. Objekte der theoretischen Kinematik sind vor allem Figuren, die aus Somen bestehen, und die diskrete Mengen oder Kontinua, namentlich analytische Kontinua von Somen bilden können. Wiewohl das hierin enthaltene Programm noch der Erweiterung bedarf, so läßt sich doch unter diesen Gesichtspunkt schon so ziemlich alles bringen, was die Vertreter der Kinematik bisher beschäftigt hat. Gelenkwerke und Zahnräder, Rollkurven und aufeinander schrotende Regelflächen, die Theorie der Freiheit eines starren Körpers im Infinitesimalen und ihre Verwirklichung durch Mechanismen, das bewegliche Trieder der Kurven- und Flächentheorie, alles kommt unter diesen Gesichtspunkt, und noch vieles andere kann ihm untergeordnet werden.

Jedes Soma geht durch eine Bewegung oder eine Umlegung aus dem Protosoma hervor. Daher läßt sich ein Soma darstellen durch acht homogene Koordinaten, zwischen denen eine quadratische Gleichung und eine Ungleichheit besteht. Der analytische Apparat wird trotzdem äußerst einfach bei Verwendung Cliffordscher Biquaternionen. Als Objekte der Bewegungen und Umlegungen werden betrachtet: Massenpunkte, Stäbe, d. i. gerade Linien mit Gewichten, und Blätter, d. i. Ebenen mit Gewichten. Hierfür werden die Transformationsformeln angegeben.

Für die Maschinenlehre, die es meist mit zwangläufigen Bewegungsvorgängen zu tun hat, ist am wichtigsten der Fall der eindimensionalen Somenmannigfaltigkeit. Man hat es dann nur mit einem Parameter zu tun, der als Maß der Zeit gedeutet zu werden pflegt. Es gibt aber noch zwei- bis fünfdimensionale Somenmannigfaltigkeiten. Die einfachsten davon werden „Somenketten" genannt. Es werden Ketten beschrieben, die den Punkten, Geraden und Ebenen der gewöhnlichen Geometrie verglichen werden können.

Zu jedem Lehrsatz der projektiven komplexen Geometrie gibt es ein kinematisches Seitenstück. Die Kinematik kann auch aufgefaßt werden als eine Erweiterung der nichteuklidischen Geometrie, die damit auch für den euklidischen Raum eine unmittelbare Bedeutung erhält.

Die Gesamtheit der Somen läßt sich auf eine M_6^2 abbilden, die in einem R_7 verläuft. Das führt zu einer gemischten 28-gliedrigen Transformationsgruppe. Diese rufen im sphärischen wie im euklidischen Raume Transformationen

hervor, welche isometrische Mannigfaltigkeiten in ebensolche verwandeln. — Zu jedem Lehrsatz über die Geometrie auf der M_6 gehören fünf andere (Reziprozitätssatz, dem Dualitätsprinzip vergleichbar).

Das Ribaucoursche Problem: Wie sind die analytischen Somenmannigfaltigkeiten, in denen zwei konsekutive Somen durch Drehung auseinander hervorgehen, kinematisch zu erzeugen? wird völlig gelöst und damit die Ribaucoursche Lösung als unzureichend dargetan.

Kinematik im sphärischen Raum. Besonderheit des dreidimensionalen Raumes.

B.

E. Herrmann. Über die einförmige Bewegung des ebenen kreisverwandt-veränderlichen Systems. Diss. Techn. Hochsch. Dresden. 93 S. gr. 8°.

Die betrachtete Bewegung ist mit geometrischen Hülfsmitteln von L. Burmester (Zs. f. Math. u. Phys. **20**, 381-432; F. d. M. **7**, 535, 1875) untersucht worden; die hier durchgeführte analytische Behandlung ist durch M. Krause angeregt, an dessen kinematische Arbeiten (D. Math. Ver. **19**, 327-339; F. d. M. **41**, 773 1910) sie anknüpft.

Unter einem kreisverwandt-ähnlichen System versteht man ein solches, bei dem die einzelnen Phasen der Bewegung auseniander durch die Transformation der Kreisverwandtschaft hervorgehen. Analytisch ist es naturgemäß, die Ebene als Gaußsche Zahlenebene aufzufassen, dann wird eine Bewegung durch eine gebrochene lineare Transformation mit komplexen Koeffizienten dargestellt. In jeder Phase gibt es zwei verschiedene oder zusammenfallende Systempunkte, die augenblicklich in Ruhe sind (Verwandtschaftspole). Bleiben zwei Systempunkte dauernd in Ruhe, so sind die Bahnkurven der Punkte der beweglichen Systeme entsprechende Kurven in kreisverwandten Systemen, die die Pole als selbstentsprechende Punkte besitzen (einförmige Bewegung). Bewegt sich ein Systempunkt auf einem Kreise, so bewegen sich alle Punkte auf Kreisen (kreislinige Bewegung). Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen im einförmigen System lassen sich ebenfalls leicht untersuchen, doch müssen die Ergebnisse, die namentlich für spezielle Fragestellungen von Interesse sind, im Original nachgelesen werden. Die Betrachtung der Krümmungskreise der Bahnkurven führen auf eine besondere ein-zweideutige Verwandtschaft der Punkte des Systems und der Krümmungsmittelpunkte der Bahnkurven, die sich in ähnlicher Weise diskutieren läßt wie die entsprechende Verwandtschaft bei starren Systemen. Die Arbeit ist, wenn auch manche ihrer Ergebnisse aus der Theorie der linearen Transformationen wohlbekannt sind, ein dankenswerter Beitrag zur kinematischen Geometrie der Ebene, der zeigt, daß auf diesem Gebiete ohne allzu große Schwierigkeiten sich noch manche wertvollen Früchte pflücken lassen.

Sk.

M. Sergelius. Untersuchungen kinetographischer Korrespondenzen [2, 2] in der Ebene und im Raume. Zs. f. Math. u. Phys. **61**, 367-403.

Im Anschluß an die grundlegende Abhandlung von Burmester, „Kinetographische Verwandtschaft ebener und räumlicher Systeme" (F. d. M. **38**, 702, 1907) sind bereits zwei Dissertationen der Technischen Hochschule München erschienen: H. Rieder, „Untersuchungen einer zwei-vierdeutigen kinetographischen Verwandtschaft" (1907), K. Hübsch, „Untersuchung einer

kinetographischen Verwandtschaft bei speziellen Schleifschiebergetrieben", die beide der Schriftleitung des Jahrbuches nicht zugesandt sind.

Die von dem Verf. der vorliegenden Abhandlung behandelte Aufgabe betrifft ein ebenes Problem (Teil I) und sein Analogon im Raum (Teil II).

In dem ersten Abschnitt über das ebene Problem wird die Bewegung des einen Systems in dem andern durch eine Drehung um einen unveränderlichen Punkt festgelegt. Mit dieser Bewegung ist dann eine gleiche Bewegung des letzten Systems in dem ersten verbunden. Das Problem wird ganz allgemein behandelt, indem alle kinetographischen Verwandtschaften untersucht werden, die bei der genannten Bewegung entstehen können, falls die sogenannten Anfangskurven Geraden durch den Drehpunkt sind. Die entsprechenden Punkte in den kinetographisch verwandten Systemen werden mittels eines mechanischen Apparates bestimmt, und für die geometrischen Bilder (unikursale Kurven vierter Ordnung), die sich aus den erzeugten Verwandtschaften ergeben, werden neue und einfache Konstruktionen beigebracht.

In dem zweiten Abschnitt über das räumliche Problem wird die Bewegung der beiden Räume ineinander durch eine Drehung um eine unveränderliche Achse festgelegt. Auch hier werden alle kinetographischen Verwandtschaften untersucht, die bei der genannten Drehung entstehen, falls die sogenannten Ausgangsflächen Ebenen durch die Drehachse sind. Wegen der rein theoretischen Natur des räumlichen Problems wird dieses ganz kurz und zusammenfassend erledigt, und nur die Haupteigenschaften der bei jenen Verwandtschaften entstehenden Flächen vierter Ordnung werden angeführt, ferner welche Flächen neue Typen von Flächen vierter Ordnung sind. Lp.

G. Koenigs. **Sur les mouvements à deux paramètres doublement décomposables et les surfaces engendrées de deux manières par le mouvement d'une courbe invariable.** S. M. F. C. R. 1913, 53-55.

„Es seien A und C zwei Körper, deren relative Bewegung von zwei Parametern abhängt; diese Bewegung heißt zerlegbar, wenn es einen solchen Zwischenkörper B gibt, daß die relative Bewegung von B in bezug auf A und die von C in bezug auf B je von einem Parameter abhängt. Die Bewegung heißt doppelt zerlegbar, wenn es einen andern Körper D gibt, der dieselbe Eigenschaft wie der Körper B hat." In dem Vortrage, dessen Auszug vorliegt, ist dieses an einem Gelenkviereck mit gleichen Gegenseiten erläutert worden, ferner an vier Körpern, die durch hyperboloidische Zahnwerke nach Bélanger verbunden sind. Die Betrachtung ist dann auf allgemeinere Oberflächen ausgedehnt worden. (Vgl. F. d. M. **42**, 742, 1911.) Lp.

G. Koenigs. **Sur les mouvements doublement décomposables et sur les surfaces qui sont le lieu de deux familles de courbes égales.** C. R. **157**, 988-991.

S. Lie hat die Aufgabe gelöst, alle Oberflächen zu finden, die auf zwei (genauer auf vier) Arten durch die Translation einer Kurve von unveränderlicher Form erzeugt werden können. Später ist Poincaré auf diese Frage zurückgekommen, und jüngst erst hat Darboux eine neue direktere und

mehr geometrische Lösung der Frage gegeben. Die Verallgemeinerung dieser Aufgabe besteht darin, die Oberflächen zu finden, auf denen man zwei oder mehrere Familien gleicher Kurven (in einer und derselben Familie) ziehen kann. Diese Aufgabe hängt mit der Untersuchung der zerlegbaren Bewegungen zusammen, die der Verf. bei mehreren Gelegenheiten geführt hat, und vornehmlich mit den doppelt zerlegbaren Bewegungen. Dieser Zusammenhang wird in der Note nachgewiesen und in gewisse fingierte Mechanismen umgesetzt. Lp.

R. Bricard. Sur les mouvements plans à deux paramètres doublement décomposables. S. M. F. C. R. 1913, 27-29.

Von Koenigs aufgefordert, die Frage der Zerlegbarkeit der Bewegungen mit zwei Parametern auf mehrere Arten zu untersuchen, ist der Verf. auf eine verwickelte Funktionalgleichung gelangt, selbst in dem Falle der ebenen Bewegungen. Aus den behandelten Beispielen teilt er einige Lösungen mit. Lp.

R. Bricard. Sur le mouvement à deux paramètres dans le plan. Nouv. Ann. (4) **13**, 302-316.

Bei einer Bewegung einer Ebene, die von zwei Parametern abhängt, kann die bewegliche Ebene von jeder beliebigen Ausgangslage aus bekanntlich ∞^1 infinitesimale Bewegungen ausführen, deren Momentanzentren auf einer Geraden liegen. Für jede beliebige Stellung der Ebenen gegeneinander gibt es eine solche Gerade; den ∞^2 Stellungen entsprechen daher, abgesehen von einem besonders zu betrachtenden Ausnahmefall, die ∞^2 geraden Linien der Ebene. Ordnet man nun die Achse des Momentanzentrums einer bestimmten Stellung in beiden Ebenen einander zu, so ist damit eine Verwandtschaft der festen und der beweglichen Ebene bestimmt, und es entsprechen den Tangenten einer geschlossenen Kurve wieder die Tangenten einer geschlossenen Kurve, die mit der ersten dieselbe Gesamtlänge besitzt. Der Satz gilt auch für Bewegungen einer Kugel in sich. Sk.

É. Delassus. Sur les mouvements des systèmes matériels dépendant d'un nombre fini de paramètres et soumis à des liaisons d'ordre quelconque. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **30**, 489-520.

In mehreren Noten der C. R. und in einer großen Abhandlung der Ann. de l'Éc. Norm. (F. d. M. **42**, 756-757, 1911 u. **43**, 816, 1912) hat der Verf. seine Theorie der Bewegungen von Systemen dargelegt, die linearen oder nichtlinearen Bindungen erster Ordnung unterworfen sind. In der einen Note von 1912 ist auch schon die Verallgemeinerung dieser Begriffe für Bindungen beliebiger Ordnung angegeben worden. In der vorliegenden Arbeit wird die ganze Theorie im Zusammenhange übersichtlich vorgeführt. Wegen der Beweise für die der ersten Ordnung eigentümlichen Eigenschaften wird auf die oben angeführte Abhandlung verwiesen; dagegen werden die in der erwähnten Note nur angedeuteten Beweise jetzt voll durchgeführt. Lp.

H. Vergne. Sur une construction de géométrie cinématique. Darboux Bull. (2) **37**, 121-123.

Bei einer von zwei Parametern abhängigen Bewegung wird die Normale der von einem Punkt beschriebenen Fläche durch lineare Konstruktion gefunden, auch wenn die Schönemann schen Rotationsachsen imaginär sind. Sk.

F. Slate. Angle in vector algebra; and composition of rotations. Phys. Rev. (2) **1**, 56-59.

Es handelt sich hauptsächlich um die Definition des Winkels in der Vektoralgebra. Für das Differential $d\mathbf{a}$ des Winkels wird gesetzt:

$$(1) \qquad d\mathbf{a} = \frac{ds}{r}[\mathbf{r}_1\,\mathbf{t}_1], \qquad (2) \qquad d\mathbf{a} = \frac{1}{r^2}[\mathbf{r}d\mathbf{s}],$$

also

$$(3) \qquad \mathbf{a} = \int_0^{s_1} \frac{1}{r^2}[\mathbf{r}d\mathbf{s}].$$

Entsprechend im Raume

$$(4) \qquad d\mathbf{A} = \frac{dS}{r^2}[\mathbf{r}_1\,\mathbf{T}_1], \qquad (5) \qquad \mathbf{A} = \int_0^{S_1} \frac{1}{r^3}(\mathbf{r}d\mathbf{S}).$$

Hiervon werden Anwendungen auf Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen gemacht. Lp.

L. Föppl und P. Daniell. Zur Kinematik des Born schen starren Körpers. Gött. Nachr. 1913, 519-529.

Man bezeichne mit $x_0, y_0, z_0, l_0 = it_0$ die Koordinaten eines bestimmten Punktes des Körpers als Funktionen seiner Eigenzeit τ_0, mit $x, y, z, l = it$ die Koordinaten irgendeines andern Punktes des starren Körpers gleichfalls als Funktionen der Eigenzeit jenes Weltpunktes. Die Born sche Definition des starren Körpers läßt sich dann in die Form kleiden:

$$(1) \qquad x' : y' : z' : l' = x_0' : y_0' : z_0' : l_0',$$

$$(2) \qquad (x-x_0)x' + (y-y_0)y' + (z-z_0)z' + (l-l_0)l_0' = 0,$$

wo die Striche Differentiationen nach τ_0 bezeichnen. Dabei hat τ_0 als Eigenzeit des Punktes 0 die Bedeutung der Bogenlänge auf der Weltlinie des Punktes 0. Durch diese Einkleidung führen die Verff. die Integration der Gleichungen (1) und (2) auf die Untersuchung von Raumkurven im vierdimensionalen Raum zurück. Indem die Frenet schen Formeln für dreidimensionale Raumkurven auf solche von vier Dimensionen verallgemeinert werden, läßt sich die Aufgabe auf die Differentialgleichungen bringen:

$$(9) \qquad \xi' = -\frac{\eta}{\tau}, \quad \eta' = -\frac{\zeta}{\sigma} + \frac{\xi}{\tau}, \quad \zeta' = \frac{\eta}{\sigma},$$

wo $1/\tau$ und $1/\sigma$ die erste und die zweite Torsion der Raumkurve bezeichnen. Solche Differentialgleichungen hat Darboux auf eine Riccatische zurückgeführt, deren allgemeine Lösung aber nicht gelingt. Die Verff. erledigen jedoch die Integration der Gleichungen (9) für den Fall $1/\sigma = 0$, d. h. wenn die Weltlinie in einem dreidimensionalen Raum lxy verläuft, mit andern Worten für den Fall einer ebenen Bewegung des starren Körpers. Als Beispiel wird zuletzt die Bewegung des Mittelpunktes eines Elektrons mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ auf einem Kreise behandelt. Lp.

Fr. Schicht. Die Zusammensetzung von Kreisbewegungen. Zs. f. d. Realschulw. **38**, 528-531.

Führt ein Punkt gleichzeitig zwei Kreisbewegungen mit den Radien R und r mit den Geschwindigkeiten r und $r + R$ (r und $r - R$) aus, so beschreibt er eine Epi-(Hypo-)zykloide. Schr.

Weitere Literatur.

H. T. Brown. Cinq cent sept mouvements mécaniques. Traduit de l'anglais par H. Stévart. Liége: Desoer. 122 S.

B. Galitzin. Über die Frage der Analyse zusammengesetzter harmonischer Schwingungen. St. Petersb. Ak. Bull. 1913, 449-474. (Russisch.)

W. Hartmann. Das Maschinengetriebe. Erster Band. Die geometrische Bewegungslehre. Stuttgart: Deutsche Verlagsanstalt.

E. Kasner. Equitangential trajectories in space. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 292.

R. Nicodemi. Spostamento di una figura piana nel suo piano. Napoli: Pironti. 59 S. 8°.

W. H. Roever. The design and theory of a mechanism for illustrating certain systems of lines of force and stream lines. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 220.

A. Thue. Gelenkgeradführungen. Christiania Vid.-Selsk. Förh. 1912, Nr. 3, 8 S.

Figuren und Reproduktionen nach Photographien hölzerner Modelle von Gelenksystemen. (Rev. sem. $\mathbf{23}_1$, 7, 8). Lp.

Volkmann. Bewegungslehre. 14.-18. Heft. Charlottenburg: F. Huth. 95 S. gr. 8°.

S. Wiesner. Grundlinien der Kinematik. Berlin: Verlag f. Fachliteratur. 13 S. 8°.

Kapitel 3.

S t a t i k.

A. Statik fester Körper.

O. Henkel. Graphische Statik mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien. II. Teil. Berlin u. Leipzig: G. J. Göschen. 170 S. kl. 8°. (Sammlung Göschen Nr. 695.)

Das Bändchen behandelt in dem engen, ihm gespannten Rahmen zahlreiche Probleme der technischen Praxis. Die theoretische Entwicklung tritt auch in diesem zweiten Teil, mehr noch vielleicht als in dem ersten Bändchen, stark zurück, so daß der Text von dem Unkundigen vielfach kaum richtig verstanden werden dürfte. Als kurze Zusammenfassung von Formeln, Rechen- und Zeichenmethoden dagegen wird das Buch gute Dienste leisten. I n h a l t : I. Der vollwandige G e r b e r - Träger. II. Der G e r b e r sche Fachwerkträger. III. Der vollwandige Dreigelenkbogen. IV. Der Fachwerkbogen mit drei Gelenken. V.-VI. Durchbiegungen vollwandiger und Fachwerkträger. VII.-VIII. Die durchgehenden vollwandigen und Fachwerkträger. IX.-X. Bogenträger. XI., XII. Der Zweigelenkbogen. XIII. Die eingespannten Bogenträger. XIV. Erd- und Wasserdruck.
Sk.

W. Blaschke. Reziproke Kräftepläne zu den Spannungen in einer biegsamen Haut. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 291-294.

Nach einigen älteren Versuchen, die bis auf J o h a n n B e r n o u l l i zurückgehen, ist 1880 und 1882 von L e c o r n u und B e l t r a m i die Statik der biegsamen und undehnbaren Häute entwickelt worden (vgl. die nachträglichen Referate F. d. M. **16**, 784 u. 785, 1884). Der Verf. zeigt jetzt, daß man dieser nicht bloß für den Geometer, sondern vielleicht auch für den Techniker interessanten Theorie eine besonders durchsichtige Fassung geben kann, wenn man bemerkt, daß die in die graphische Statik von J. C. M a x w e l l eingeführten reziproken Kräftepläne sich auch zur Bestimmung der Spannungen in einer biegsamen Haut anwenden lassen. Dabei kommt man auch von einer neuen Seite aus auf die von L. B i a n c h i zum Studium der Flächendeformation benutzten „assoziierten" Flächen.
Lp.

A. Pröll. Zur Dynamik des Kurbelgetriebes. Zs. f. Math. u. Phys. **61**, 416-426.

Da treibende Kraft und Widerstand zusammen mit den vorhandenen Massen den Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand des Getriebes bestimmen, so muß ein Fehler in dessen Ermittlung bei dem bisher dafür üblichen graphischen Verfahren notwendig den Kräfteplan stören. Ist der Fehler nicht zu groß, so ist es leicht, durch nachträgliche Korrektur an den Beschleunigungskräften das Gleichgewicht herzustellen. Es kommt dies also auf eine Richtigstellung oder Nachprüfung der Beschleunigung hinaus. Auf diesem Umstande beruht das vom Verf. dargelegte Verfahren zur direkten Aufstellung des dynamischen Kräfteplanes

eines Kurbelgetriebes ohne vorhergehende besondere Bestimmung des Geschwindigkeitszustandes. Das Verfahren wird an Beispielen erläutert. Es führt erheblich rascher zum Ziele und liefert als Nebenprodukt die Beschleunigung des Kurbelzapfens.
Lp.

E. Kötter. Über den Grenzfall, in welchem ein ebenes Fachwerk von n Knotenpunkten und $2n—3$ Stäben oder ein räumliches Fachwerk von n Knotenpunkten und $3n—6$ Stäben nicht mehr statisch bestimmt ist. Berl. Abh. 1912, 97 S. 4° (1913).

In einer Ebene mögen n Knotenpunkte und $2n—3$ Stäbe vorliegen. Jeder Stab werde durch zwei Knotenpunkte begrenzt und wirke hier vermöge seiner Spannkraft mit zwei entgegengesetzt gleichen Kräften. In jedem Knotenpunkt bringe man eine äußere Kraft an, die den auf ihn wirkenden Stabkräften das Gleichgewicht hält. Fordert man die Ermittlung von $2n—3$ Spannkräften, die zu einem gegebenen System äußerer Kräfte in der beschriebenen Beziehung stehen, so kann diese Aufgabe immer (und zwar auf genau eine Art) lösbar sein, sobald die äußeren Kräfte nur unter sich im Gleichgewicht stehen. Bekanntlich bezeichnet man dann das aus den n Knotenpunkten und $2n—3$ Stäben bestehende Fachwerk als statisch bestimmt.

Die gestellte Aufgabe kann aber auch erst dann lösbar werden, wenn man die äußeren Kräfte noch weiteren Bedingungen unterwirft außer der schon genannten, einander das Gleichgewicht zu halten. Zu jedem zulässigen System äußerer Kräfte gehören alsdann statt eines Systems von Spannkräften deren unzählig viele. Ein solches, statisch nicht mehr bestimmtes Fachwerk von n Knotenpunkten und $2n—3$ Stäben ist daher immer in sich einspannbar. Man kann seinen Stäben solche Spannkräfte erteilen, daß auf jeden Knotenpunkt im Gleichgewicht stehende Stabkräfte wirken.

Ist ein Fachwerk bei allgemeiner Lage seiner Knotenpunkte statisch bestimmt, so kann es bei besonderer Lage derselben diese Eigenschaft verlieren. Hält man an einem im allgemeinen statisch bestimmten Fachwerk alle Knotenpunkte fest bis auf einen, der drei Stäbe entsendet, so entsteht ein solches statisch nicht bestimmtes „Grenzfachwerk" nach einem bekannten Satz von Henneberg, wenn der Knotenpunkt auf einen gewissen Kegelschnitt, den „Grenzkegelschnitt", verlegt wird.

Zu einem Knotenpunkte, der $k+1$ Stäbe entsendet, gehört in derselben Weise als Grenzkurve eine Kurve k-ter Ordnung. In dem ersten Teile der vorliegenden Arbeit werden diese Grenzkurven ausführlich untersucht. In dem ersten Abschnitt stützt sich der Verf. auf die Diskussion von $2n—3$ Determinanten $(2n—4)$-ter Ordnung, die alle von Null verschiedene Werte oder alle den Wert Null besitzen, je nachdem das Fachwerk statisch bestimmt ist oder nicht. In dem zweiten Abschnitt bildet dagegen ein Ersatzstabverfahren den Ausgangspunkt der Entwicklung. In dem dritten Abschnitt wird die Kurve dritter Ordnung als Grenzkurve eines Fachwerks hinsichtlich eines vierstäbigen Knotenpunktes untersucht. Endlich werden in dem vierten Abschnitt gewisse in sich einspannbare Stabwerke konstruiert, die bei n Knotenpunkten viel weniger als $2n—3$ Stäbe besitzen.

In den fünf letzten Abschnitten der Arbeit werden die analogen Fragen für Raumfachwerke behandelt. Hält man an einem statisch bestimmten Raumfachwerk von n Knotenpunkten und $3n - 6$ Stäben alle Knotenpunkte fest bis auf einen, der $k + 2$ Stäbe entsendet, so erhält man an Stelle eines statisch bestimmten ein in sich einspannbares Fachwerk, wenn der $(k + 2)$-stäbige Knotenpunkt auf eine gewisse Grenzfläche, eine Fläche k-ter Ordnung, verlegt wird. Für den Fall $k = 2$ hat Henneberg die Gleichung der Grenzfläche aufgestellt. Der allgemeine Fall wird zunächst im fünften Abschnitt ausführlich mittels eines Systems von $(3n-6)^2$ Determinanten $(3n-7)$-ter Ordnung behandelt; im sechsten Abschnitt führt ein Ersatzstabverfahren zu einer einfacheren Form für die Gleichung der Grenzfläche.

Die Ausdeutung der Oberfläche zwölfter Ordnung als Grenzfläche eines Fachwerks bezüglich eines vierstäbigen Knotenpunktes liefert im siebenten Abschnitt zahlreiche Ergebnisse. Im achten Abschnitt erfahren die Doppelpyramiden eine gesonderte Behandlung. Sehr einfache Regeln dienen zur Konstruktion in sich eingespannter vierseitiger und fünfseitiger Doppelpyramiden.

Bei der Diskussion der Grenzfläche dritter Ordnung eines Fachwerks bezüglich eines fünfstäbigen Knotenpunktes tritt eine Gerade der Fläche in die Erscheinung. Eine gegebene Oberfläche dritter Ordnung kann deshalb unter Bevorzugung einer ihrer 27 Geraden als Grenzfläche eines Fachwerks von 13 Knotenpunkten und 33 Stäben gedeutet werden. Auf der allgemeinen Grenzfläche k-ter Ordnung liegt analog eine Raumkurve $\frac{1}{2}(k - 1)\ (k - 2)$-ter Ordnung, durch welche unzählig viele Oberflächen $(k - 2)$-ter Ordnung hindurchgehen. Lp.

Ungenannt. Eine Vereinfachung bei der Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke. Österr. Wochenschrift f. d. öff. Baudienst **19**, 119-120.

Die Berechnung erfolgt, da der Belastungszustand meist nur aus einer äußeren Kraft 1 und den Auflagerreaktionen besteht, besser aus den äußeren Kräften als aus den Stabspannungen. Schr.

Ungenannt. Die Beziehungen zwischen Kraftrichtung, Stabspannung und Knotenverschiebung im statisch bestimmten Fachwerk. Österr. Wochenschrift f. d. öff. Baudienst **19**, 129-131.

„Greift in irgendeinem Knoten eines statisch bestimmten Fachwerks eine äußere Kraft an, so erzeugt sie in den einzelnen Fachwerkstäben Spannungen, welche Längenänderungen der Stäbe und dementsprechende Verschiebungen der einzelnen Knoten zur Folge haben. Verschiedene Kraftrichtungen bedingen im allgemeinen auch verschiedene Stabspannungen und Knotenverschiebungen. Im folgenden soll eine kurze, übersichtliche Darstellung der Abhängigkeit der beiden letzteren von der Kraftrichtung gegeben werden.“ Schr.

Fr. Hartmann. Genauere Berechnung eines zweigeschossigen Doppelrahmens. Allg. Bauzeitung **78**, 82-93.

Der zweigeschossige Doppelrahmen mit eingespannten Ständerfüßen ist zwölffach statisch unbestimmt. Um die Berechnung zu vereinfachen, wird von den Formänderungen selbst ausgegangen, welche die äußere Belastung und die statisch unbestimmten Größen am statisch bestimmten Grundsystem hervorbringen. Dieses wird durch Schnitte durch die oberen und mittleren Querbalken erhalten.

Schr.

E. Cartan. Remarques sur la composition des forces. S. M. F. C. R. 1913, 58-60.

Von einer Bemerkung ausgehend, die Darboux in der Mécanique von Despeyrous gemacht hat in bezug auf die Zusammensetzung von Vektoren, verallgemeinert der Verf. diese Betrachtung dadurch, daß er die Vektoren durch ganz beliebige Figuren ersetzt. „Zwei Systeme (**S**) und (Σ) sind gleichwertig, wenn zwischen den Figuren der beiden Systeme eine solche eindeutige Beziehung stattfindet, daß der Resultante der beiden Figuren F_1 und F_2 die Resultante der beiden entsprechenden Figuren Φ_1 und Φ_2 entspricht." Mit dieser Übereinkunft in der Sprechweise gelangt man, wie kurz angegeben wird, zu schärferen Ergebnissen.

Lp.

J. Neuberg. Sur les équicentres de deux systèmes de n points. Liége Mém. (3) **9**, 12 S.; Mathesis **33** [(14) **3**], Suppl. 2.

Bei zwei Systemen von n Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ heißt äquizentrisch der gemeinsame Schwerpunkt der nämlichen Massen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, die den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ oder $A_1', A_2', \ldots, A'_n$ beigelegt werden. Besonders werden die Fälle 3, 4, 5 für n betrachtet. Die Konstruktion des Äquizentrums wird gegeben, und der Fall wird hervorgehoben, bei dem unendlich viele Äquizentren in einer Geraden vorhanden sind, wenn $n = 3$. Ist $n = 4$, so gibt es in dem allgemeinen Falle unendlich viele in einer Geraden, und in besonderen Fällen sind alle Punkte der Ebene äquizentrisch, wenn die acht Punkte in derselben Ebene liegen. Wenn in dem Falle $n = 4$ die Punkte nicht in derselben Ebene liegen, so gibt es ein einziges Äquizentrum (allgemeiner Fall), oder eine Gerade von Äquizentren (besonderer Fall). Ist $n = 5$, so gibt es eine Gerade (allgemeiner Fall), eine Ebene (besonderer Fall) oder einen Raum von Äquizentren (Fall von noch größerer Besonderheit).

Mn. (Lp.)

R. de Montessus. Centre de gravité d'un demi-ellipsoïde. Brux. S. sc. (A) **37**, 146-148.

Lösung der Frage durch elliptische Integrale erster und zweiter Gattung.

Mn. (Lp.)

A. Del Re. Sulla astatica negli spazii ad n dimensioni. Napoli Rend. (3) **19**, 217-219.

An die Abhandlung Principii di una teoria che abbraccia la astatica in uno spazio ellittico ad n dimensioni (Napoli Rend. (3) **16**, 302-311; F. d. M. **41**, 780, 1910) anknüpfend, stellt der Verf., nachdem er den Begriff der Astatik für Überräume erweitert hat, den Satz auf: Die im üblichen Sinne verstandene Astatik eines starren Körpers mit einem festen Punkte (oder h-dimensionalen Raume) in einem n-dimensionalen euklidischen Raume fällt mit der in dem erweiterten Sinne verstandenen Astatik eines freien Körpers (oder mit einem $(h-1)$-dimensionalen festen Raume) in einem elliptischen $(n-1)$-dimensionalen Raume zusammen.
Lp.

St. Belsetsky. De la stabilité d'équilibre dans un cas particulier de pièce courbe. C. R. **156**, 1056-1058.

„Die einzige Bedingung für die Stabilität des Gleichgewichts eines Körpers, dessen Abmessungen alle endlich und von derselben Größenordnung sind, besteht darin, daß seine Verrückungen dem Reziprozitätssatze genügen. Hiernach will ich einen besonderen Fall eines gekrümmten Stückes betrachten. Ich erachte, daß die Aufgabe sich darauf zurückführen läßt, nur zwei Dimensionen in Betracht zu ziehen. Also: Ein krummes Stück, dessen Krümmung konstant ist und von nämlicher Starrheit EJ, wird zwei an seinen Enden angreifenden Kräften unterworfen. Man bezeichne mit $2e$ die Dicke des Stückes, mit f den Pfeil, mit $2l$ die Weite; ich betrachte nur solche Verrückungen, die durch biegende Momente M hervorgebracht werden". Die Aufgabe wird durch die Gleichung ausgedrückt:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} + \frac{P}{EJ}(f-y) = a - 2b^2 y.$$

Setzt man $1-\left(\frac{a}{2b}\right)^2 = D$, $1 + b^2 y^2 - a^2 y = u$, so erhält man

$$y = \frac{a}{2b^2} \pm \frac{1}{b}\sqrt{u-D},$$

und da nach Annahme $y' = 0$ ist, so folgt

$$x = \int_0^u \frac{u\,du}{2b\sqrt{(1-u^2)(u-D)}}. -$$

Durch Diskussion dieser Formel und Anwendung des Reziprozitätssatzes folgt die gesuchte Stabilitätsbedingung. Ist das Stück gerade, so wird die Eulersche Formel erhalten

$$P = \frac{EJ\pi^2}{4l^2}.$$

Die weit getriebene Knappheit der Darstellung erschwert das Verständnis ungemein.
Lp.

É. Cotton. Sur l'instabilité de l'équilibre. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **30**, 521-528.

Den Gegenstand der Abhandlung bildet der Satz: Es sei ein holonomen, von der Zeit unabhängigen Bindungen unterworfenes materielles System gegeben, für welches die gegebenen Kräfte eine Kräftefunktion besitzen; wenn für eine Gleichgewichtslage diese Funktion nicht ein Maximum ist, so kann das Gleichgewicht nicht stabil sein. Dieser Satz wird unter der Voraussetzung bewiesen, daß es sich um ein zweiparametriges materielles System handelt; die Kräftefunktion und die Koeffizienten der lebendigen Kraft werden als holomorphe Funktionen der Parameter in der Umgebung der Gleichgewichtslage angenommen, und diese Gleichgewichtslage wird als isoliert vorausgesetzt.

Zunächst werden einige allgemeine Angaben über die Untersuchung gewisser (reeller) Funktionen zweier (reellen) Variablen x, y in der Umgebung des Nullpunktes gemacht. Zuweilen kann man für eine Funktion $F(x, y)$ innerhalb eines krummlinigen Keiles eine infinitesimale Ordnung in bezug auf eine der Variablen, z. B. x, bestimmen.

Wenn zwei im Nullpunkte verschwindende Funktionen dieser Art gegeben sind, und wenn die, deren infinitesimale Ordnung die kleinere ist, ein unbestimmtes Vorzeichen in dem Keile hat, so gibt diese der Summe der beiden Funktionen das Vorzeichen. Zum Beweise der Instabilität des Gleichgewichtes handle es sich zunächst um die Bewegung in einer Ebene. Hierbei werden gewisse Funktionen von konstantem Vorzeichen in Bereichen benutzt, welche der Gleichgewichtslage benachbart sind. Der Untersuchung wird dadurch ein anschaulicherer Charakter verliehen, daß man diesem Zeichen den konstanten Sinn der Bewegung einer von dem bewegten Körper mitgeführten Linie L entsprechen läßt. Bei der Konstruktion dieser Linie spielt die durch die Gleichgewichtslage gehende Niveaukurve eine wesentliche Rolle. Die imaginären Zweige beteiligen sich ebenso wie die reellen Zweige bei der Einteilung des an den Nullpunkt grenzenden Teiles der Ebene in Keile. Jedem Keil entspricht ein Abschnitt der Linie L; meistens ist dieser Abschnitt geradlinig, zuweilen krummlinig. Zwei Abschnitte, die zwei benachbarten Keilen entsprechen, haben auf der sie trennenden Grenze einen Endpunkt gemeinschaftlich.

Jedem Keile läßt man eine Funktion $V(x, y)$ entsprechen; ihr Vorzeichen bleibt innerhalb des Keiles in der Umgebung des Nullpunktes unveränderlich. Dies wird erwiesen, indem man eine Zerlegung der Kräftefunktion $U(x, y)$ in reelle Faktoren benutzt, als Folge eines Satzes von Weierstraß. Diese Zerlegung ermöglicht die gesonderte Untersuchung des Einflusses jedes reellen Halbzweiges oder jedes Paares imaginärer konjugierter Halbzweige der durch die Gleichgewichtslage gehenden Niveaulinie. Aus dem Vorzeichen der Funktionen V folgt unschwer der Sinn der Verrückung der Linie L und die Instabilität der Gleichgewichtslage. Im Schlußparagraphen wird gezeigt, wie der allgemeine Fall einer zweiparametrigen Bewegung auf den Fall der ebenen Bewegung zurückgeführt wird.

Lp.

P. Appell. Sur l'équilibre de fils dont les éléments s'attirent ou se repoussent en fonction de la distance. C. R. **156**, 500-504.

Es seien zwei homogene Fäden gegeben, deren Elemente sich gegenseitig anziehen oder abstoßen nach einer gegebenen Funktion der Entfernung r. Der

Verf. sucht zuerst die Bedingungen auf, die erfüllt sein müssen, damit jeder der beiden Fäden in dem durch den andern erzeugten Kraftfelde im Gleichgewicht sei. Es ergeben sich sechs Integraldifferentialgleichungen, welche die Koordinaten x, y, z der Punkte des einen Fadens und ξ, η, ζ, des andern als Funktionen der Bogenlängen s und σ, gemessen auf jedem der beiden Fäden, definieren. Indem dann beide Fäden als zusammenfallend angenommen werden, folgen die Bedingungen für das Gleichgewicht eines einzigen Fadens unter der Einwirkung seiner Elemente aufeinander. Diese Bedingungen reduzieren sich für den Fall ebener Kurven. Zuletzt werden einige besondere Fälle betrachtet. Lp.

N. Herz. Elementare Berechnung von Trägheitsmomenten. Zs. f. d. österr. Gymnasien **64**, 310-314.

Ausgehend von der Eigenschaft, daß ein Trägheitsmoment einer Linie, einer Fläche, eines Körpers bei Vergrößerung im Verhältnis $1 : n$ mit n^3, n^4, n^5 multipliziert wird, und vom Satz über parallele Achsen, werden Trägheitsmomente berechnet. Dabei werden aber versteckte Integrationen angewendet. Schr.

A. Denizot. Zur zeichnerischen Ermittlung der Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente. Zs. d. Ver. d. Ing. 1913, 1028. Czas. techn. 1913, 63-64.

„Es wird ein neues, praktisches Verfahren zur zeichnerischen Ermittlung der Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente ebener Querschnitte angegeben, indem die bei dem Nehlsschen Verfahren angewandte Konstruktion mit einem Seilpolygon vereinigt wird." Lp.

F. Bouny. Sur les axes principaux d'inertie. Ens. math. **15**, 325-327.

„Wenn eine Gerade Hauptträgheitsachse ist, so bilden die zu der Geraden konjugierten Durchmesserebenen bei den verschiedenen Trägheitsellipsoiden, welche die Punkte dieser Geraden als Mittelpunkte haben, einen Ebenenbüschel. Die Achse dieses Büschels ist die Linie, längs welcher man einen gegen das System gerichteten Stoß anbringen müßte, damit die als unbeweglich angenommene Achse keinen Stoß erlitte." Lp.

L. Anspach. Sur les axes rotatifs. Ens. math. **15**, 477-486.

In der vorstehend angezeigten Note hat Bouny Eigenschaften von Geraden bestimmt, die infolge eines Stoßes augenblickliche Rotationsachsen sein können. Solche Geraden hat der Verf. in einem Artikel „Centres de percussion et axes de rotation" (Revue de Mécanique, avril 1911, Bruxelles) „rotative Achsen" genannt. Über sie leitet er sechs verschiedene Sätze ab, von denen jeder die hinreichende und notwendige Bedingung dafür enthält, daß eine Gerade eine rotative Achse ist, jeder also als die Definition einer solchen Achse gelten kann. Lp.

G. Lazzeri. Momenti statici, momenti d'inerzia, e momenti di ordine superiore. Periodico di Mat. (3) **11**, 241-257; (3) **12**, 24-33.

Der Verf. gibt in dieser noch nicht beendigten analytischen Darstellung eine Übersicht über die Theorie der Momente in der Mechanik. Die bis jetzt veröffentlichten Abschnitte sind: I. Schwerpunkt. II. Trägheitsmomente. Trägheitsflächen zweiter Ordnung. III. Trägheitsradien. IV. Momente höherer Ordnungen. V. Trägheitsmomente in bezug auf eine Achse oder einen Punkt.

A. Leon und R. Zidlicky. Über anomale Widerstandsmomente. Österr. Wochenschrift f. d. öff. Baudienst **19**, 501-503. (Hierzu Tafel 56 und 57.)

A. Leon und R. Zidlicky. Über Rippenverstärkungen rechteckiger Querschnitte. Ebenda 825-828. (Hierzu Tafel 94.)

Widerstandsmomente von solchen Querschnitten, die sich durch Verringerung der Fläche verstärken lassen, heißen anomal. Es werden im ersten Aufsatz die Dimensionen der verstärkenden Rippen von rechteckigem Querschnitt (auf einer und beiden Seiten) berechnet, die ein vorgeschriebenes Widerstandsmoment liefern.

Im zweiten Aufsatz werden Rippen dreieckigen Querschnitts und quadratische Balkenquerschnitte mit Rippen auf jeder Seite betrachtet. Schr.

K. J. Kriemler. Die End- und Maximalmomente der Pfosten im Stockwerkrahmen. Der Betonbau **1**, 137-141.

Die Spannungen für Balken, die quer zur Achse auf Biegung beansprucht werden, sind bekannt. Zweck der Arbeit ist das Studium des gedrückten Stabes mit Endmomenten. Schr.

L. Hauska. Beitrag zur Dimensionsermittlung hölzerner Stauwände. Österr. Wochenschrift f. d. öff. Baudienst **19**, 523-525.

Die günstigste Querschnittsform hat parabolischen Querschnitt. Dieser kann in praxi durch einen Stufenbau approximiert werden. Schr.

J. Wellstein. Zur Theorie der Reibung starrer Körper. Zs. f. Math. u. Phys. **61**, 337-367.

Es sei R die Reibungskraft, N der Normaldruck, so hat R. v. Mises vorgeschlagen, statt des Coulombschen Gesetzes $R/N =$ einer Konstante anzunehmen, daß R/N eine Funktion von N sei, die Null wird, wenn N unendlich groß wird (Zs. f. Math. u. Phys. **58**, 194; F. d. M. **40**, 800, 1909). Hierzu hatte Hamel gleich bemerkt (a. a. O S. 196): „Ich glaube nicht, daß sich die Misessche Hypothese in allen Fällen durchführen läßt, wenn sie auch in allen bekannten Beispielen zum Ziele führt."

Die vorliegende Arbeit untersucht den Misesschen Ansatz auf seine theoretische Durchführbarkeit und zeigt an einem Beispiel, daß er mit experimentellen Beobachtungen übereinstimmt und durch sie bestätigt wird.

Das Ergebnis der umfangreichen Untersuchung wird am Schlusse so ausgesprochen: „Die v. Misessche Annahme stellt eine hinreichende Bedingung dar für die uneingeschränkte theoretische Brauchbarkeit eines stereodynamischen Reibungsgesetzes, wenigstens bei unserem allgemeinen Bewegungsproblem. Sie läßt der näheren, experimentell zu ermittelnden Form des Reibungsgesetzes einen weiten Spielraum. An einem Beispiel ist dann gezeigt, wie man ein Reibungsgesetz, der allgemeinen Forderung entsprechend, so annehmen kann, daß die Theorie auf die Selbstsperrung führt." Lp.

Comte de Sparre. Note au sujet du frottement. Nouv. Ann. (4) **13**, 81-94.

Das klassische Theorem für das Gleichgewicht eines Körpers, der mit Reibung an mehreren Berührungspunkten ruht, wie es z. B. bei Appell, Traité de mécanique, 3e édition, **1**, 300 (1909) ausgesprochen ist, gibt für das Gleichgewicht eine Bedingung, die zwar notwendig, aber nicht immer hinreichend ist. Dies wird an einem Beispiel dargetan, bei dem die Bedingungen des Satzes erfüllt sind, trotzdem aber Bewegung eintritt. Die genauere Untersuchung dieses Falles zeigt den Grund des Mangels in jenem Satze. Lp.

Weitere Literatur.

S. Belsecki. Über einige besondere Fälle des Gleichgewichtes krummer Stäbe. St. Petersb. Ann. d. Polyt. Inst. **19**, 149-158. (Russisch.)

C. Bourlet. Éléments de statique graphique. Paris: Hachette. 156 S. 8°.

G. W. Brewster and C. J. L. Wagstaff. A school statics. London: Heffer. 256 S. 8°.

W. H. Burr. Suspension bridges, arch ribs and cantilevers. New York: Wiley. XI + 417 S. 8°.

E. Flamard. Contribution à l'étude des méthodes nouvelles de la statique des constructions. (Thèse.) Paris: Gauthier-Villars. 97 S. 8°.

J. C. L. Fish. Earthwork haul and overhaul, including economic distribution. New York: Wiley. XIV + 165 S. 8°.

H. H. Goodwin. Precision of measurement and graphical methods. New York: Mc Graw-Hill. 104 S. 8°.

R. S. Heath. A textbook of elementary statics. London: Clarendon Press. 288 S. 8°.

O. Henkel. Graphische Statik. Zweiter Teil. Leipzig u. Berlin: G. J. Göschen. VIII + 306 S. kl. 8°. (Sammlung Göschen Nr. 695.)

H. Lamb. Statics, including hydrostatics and the elements of the theory of elasticity. New York: Putnam. XII + 341 S. 8°.

R. Lauenstein. Die graphische Statik. 12. Aufl. Bearb. v. P. Bastine. Leipzig: A. Kröner. VII + 260 S.

M. Levy. La statique graphique et ses applications aux constructions. 2e partie. Flexion plane, lignes à influence, poutres droites. 3e édition. Paris: Gauthier-Villars. X + 343 S. 8°.

V. Polara. La trattazione in fisica del problema fondamentale della statica. Atti Acc. Gioenia (5) **5**, Nr. 3, 12 S.

A. Sée. En quoi consiste la stabilité. Paris: Gauthier-Villars. 36 S. 18mo.

A. Villa. Nozioni di statica grafica e sue applicazioni. Milano: Sonzogno. 63 S. 16mo. (Biblioteca del popolo no. 550.)

J. T. Wight. Elementary graphic statics. London: Whittaker. 240 S. 8°.

B. Hydrostatik.

P. Appell. Équation fonctionnelle pour l'équilibre relatif d'un liquide homogène en rotation sous l'attraction newtonienne de ses parties. C. R. **156**, 587-589.

In Palermo Rend. **30**, 82-84 (F. d. M. **41**, 784, 1910) hat der Verf. für das nämliche Problem eine Funktionalgleichung gegeben, die von einem dreifachen oder sogar vierfachen Integrale und von einer Funktion dreier Variabeln abhängt. Jetzt gibt er eine andere Funktionalgleichung bekannt, die nur von einem Doppelintegral abhängt und eine Funktion zweier Variabeln enthält. Lp.

A. Müller. Gleichgewicht einer Gruppe schwimmender Vollkörper. Mit Figuren, Beispielen und Versuchen. München: Max Kellerers Verlag. VII u. 98 S. u. 1 Fig.-Tafel.

„Die gegenwärtige Untersuchung beschränkt sich auf die Behandlung einer Gruppe von Körpern, die durch Ebenen begrenzt sind, wodurch es dem Verf. möglich geworden ist, systematisch vorzugehen, und er es vermeiden konnte, zusammenhanglos einzelne Gebilde zu behandeln. Diese Gruppe umschließt alle jene Körper, die aus dem Ponton als Urkörper abgeleitet werden können."

I. Allgemeines. II. Die Lage des Schwimmpunktes. III. Ableitung der Hauptgleichungen. IV. Auflösung der Hauptgleichung. V. Anwendung der Hauptgleichung. VI. Einzelne Körper beim aufrechten Schwimmen. VII. Schiefstabiles Schwimmen eines Prismas. VIII. Ort des Flüssigkeitsschwerpunktes bei schiefer Schwimmlage. IX. Stabilität und Schwingungszeit. X. Anwendungen. XI. Versuche.

Der Verf. hat große Mühe auf die Abfassung des Buches verwendet, manche nützlichen Resultate errechnet und sie auch nachträglich durch Versuche bestätigt. Es dürften sich aber wohl wenige Leser finden, die sich die Zeit nehmen, die langen Rechnungen nachzuprüfen. Was dem Ganzen fehlt, das sind einfache leitende Gedanken. Der Verf. kennt von den hierhergehörigen speziellen Untersuchungen nur die Arbeiten von Schülen (Zs. f. math. u. naturw. Unterr.

31 u. 32, 1900 u. 1901), also nicht einmal die Fortsetzung in Bd. 33 nebst den sich anschließenden Aufsätzen von E. Scheeffer. Bei der Anzeige dieser Schriften (F. d. M. 33, 740, 1902) ist schon auf die Literatur hingewiesen, die bei der Behandlung solcher Fragen hätte berücksichtigt werden müssen.

Inzwischen ist nun aber auch die nachgelassene Schrift von Chr. Huygens in dem XI. Bande der Oeuvres complètes des großen Niederländers erschienen „De iis quae liquido supernatant" (F. d. M. 38, 714, 1907). In ihr sind mittels zweier grundlegenden Theoreme Fragen, wie sie in der vorliegenden Arbeit behandelt sind, der geometrischen Anschauung zugänglich gemacht. Korteweg, der Herausgeber dieses Manuskriptes des 21jährigen Huygens, hat in seinen hinzugefügten Noten das Verständnis des lateinischen Originals erleichtert und außerdem in einer eigenen Abhandlung über die Gleichgewichtslagen schwimmender Quadern den Inhalt der Huygens'schen Schrift nach jetziger Auffassung dargestellt. Endlich hat Brandsen, ein Schüler Kortewegs, in einer größeren Dissertation (91 S. 1909, Amsterdam), von der in Amst. Ak. Versl. **18**, 307-317 (F. d. M. **40**, 768, 1909) ein Auszug erschienen ist, die Untersuchungen über schwimmende Quadern in allen Einzelheiten mit Berücksichtigung der sämtlichen möglichen Lagen durchgeführt.

Es ist bedauerlich, daß der Verf. des vorliegenden Buches diese Arbeiten nicht gekannt hat. Von der Zähigkeit, mit der er seine mühsamen Rechnungen durchgeführt hat, hätte man sich gewiß recht schöne Ergebnisse anschaulicherer Art für die von ihm untersuchten allgemeineren Körper versprechen können.

Lp.

J. H. Goodwin. **On the solution of some theorems in elementary optics, hydrostatics, etc.** Messenger (2) **42**, 121-123.

Der Satz vom Minimum der Ablenkung eines Lichtstrahls beim Durchgang durch ein Prisma wird mit Hülfe des Apollonischen Kreises eines Dreiecks geführt. Der Druckmittelpunkt eines in eine Flüssigkeit eingetauchten Dreiecks und das Trägheitsmoment eines Dreiecks in bezug auf eine beliebige Gerade seiner Ebene werden mittels des Satzes bestimmt, daß der Schwerpunkt eines homogenen Tetraeders und der Schwerpunkt seiner vier gleichbelasteten Ecken zusammenfallen.

Lp.

A. Budau. **Über das Wesen, die Darstellung und Benennung der spezifischen Flüssigkeitsdrucke.** Österr. Flugzeitschrift 387-390, 411-413, 436-439.

R. Löwy. **Die Bernoullische Gleichung.** Ebenda 413-415.

Lineare Zunahme des Druckes mit der Tiefe. Barometrische Höhenformel. Prallhöhe eines Ballons. Das Bernoullische Theorem. Diskussion über die Benennungen mit Äußerungen von Prandtl, Prášil und Escher.

Löwys Arbeit ist aus der Zeitschrift „Die Turbine" Heft XVI, S. 281 abgedruckt.

Schr.

Ungenannt. **Zur Berechnung von Kaimauern.** Österr. Wochenschrift f. d. öff. Baudienst **19**, 274-276. (Nach de ingenieur, Nr. 4, 1913.)

Berücksichtigung zweier bisher übersehenen Einflüsse, des Auftriebs des Wassers und des Drucks des Grundwassers. Durchführung der Rechnung für ein sehr einfaches Profil.
Schr.

P. Fillunger. **Der Auftrieb in Talsperren.** Österr. Wochenschrift f. d. öff. Baudienst **19**, 532-535, 552-555, 567-570, 586-593.

„Die Berechtigung des Trapezgesetzes. — Neuere Forschungen. — Günstigste Fugenanordnung. — Übliche Berechnungen auf Unterdruck. — Einiges zur Theorie inhomogener Materialien. — Raumelemente verschiedener Kleinheitsordnung. — Konvexe und konkave Oberflächen mit Spitzen, Kanten, parabolischen und Nabelpunkten unter gleichmäßigem äußeren Druck. — Die Frostbeständigkeit der Gesteine. — Erweiterung der Prüfungsnormen für Talsperrenmaterial. — Das Archimedische Prinzip bei porösen Körpern. — Größe und Richtung der Kapillarreibung. — Das Potential der Massenkräfte als Funktion von einer und von zwei Variabeln. — Die Berücksichtigung von Wasserfugen und die Wartung von Talsperren.“
Schr.

P. Fillunger. **Über die Anwendung des Trapezgesetzes zur statischen Berechnung von Talsperren.** Österr. Wochenschrift f. d. öff. Baudienst **19**, 767-774.

Die Normalspannungen auf horizontalen Fugen verstehen sich nach einem geradlinigen Gesetz. Dieses „Trapezgesetz“ entspricht, wie Lévy zuerst erkannte, für Talsperren mit dreieckigem Profil auch den Lehren der Elastizitätstheorie. Der Nachweis dafür wird hier in vereinfachter Form gegeben (vgl. auch Zs. f. Math. u. Phys. **60**, 275-285; F. d. M. **43**, 936, 1912).
Schr.

W. Plenkner. **Beanspruchung der Baustoffe in Staumauern nach neueren Forschungen.** Allg. Bauzeitung **78**, 8-35. (Hierzu die Tafeln 8-11.)

I. Baumaterialien. II. Zur Ermittlung der Spannungen einer Staumauer. 1. Allgemeines. 2. Die neueren Methoden der Berechnung der Spannungen sowohl auf horizontale, als vertikale Fugen. 3. Das Verfahren von Professor O. Mohr. 4. Ermittlung der Hauptnormal- und Schubspannungen. III. Standfestigkeitsuntersuchung einer Staumauer. IV. Erläuterungen zu den graphischen Tafeln. V. Weitere Untersuchungen.
Schr.

E. Jacoby. **Wasserdruck auf kreisförmige zylindrische Wände der Staumauern und Wehre.** Österr. Wochenschrift f. d. öff. Baudienst **19**, 25-26.

Anschließend an einen Aufsatz von Plenkner in derselben Zeitschrift **18**, 600-602 (F. d. M. **43**, 867, 1912; kein Referat), werden dessen Formeln noch bequemer und übersichtlicher dargestellt.
Schr.

G. M. Minchin. **A treatise in hydrostatics in 2 volumes. Second edition.** London, Oxford: University Press. Je 204 S. 12mo.

Kapitel 4.

Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

E. Kasner. Differential-geometric aspects of dynamics. The Princeton Colloquium, New York. II u. 117 S.

Die Schrift (zweiter Teil des Kolloquiums, vgl. S. 365 dieses Bandes) ist ein zusammenfassender Bericht über den Gegenstand, vorgetragen im September 1909 vor der Amerikanischen Mathematischen Gesellschaft vom Verfasser, der an dem Ausbau der Differentialgeometrie der Dynamik lange mit Erfolg gearbeitet hat. Wir geben im folgenden solche Stellen der Einleitung wörtlich wieder, die geeignet sind, eine Vorstellung von dem Inhalte des höchst interessanten Artikels zu geben.

Die Beziehungen zwischen der Mathematik und der Physik sind so oft und so angemessen in der letzten Zeit dargestellt worden, daß eine weitere Erörterung als unnötig erscheinen dürfte. Die Mathematik ist jedoch zu oft als Analysis aufgefaßt, die Rolle der Geometrie vernachlässigt worden. Die Geometrie kann entweder als ein Zweig der reinen Mathematik oder als der einfachsten der physikalischen Wissenschaften aufgefaßt werden. Für unsere Erörterung wählen wir den letzteren Gesichtspunkt: die Geometrie ist die Wissenschaft des wirklichen physikalischen oder anschaulichen Raumes. Alle physikalischen Vorgänge finden im Raume statt und liefern deshalb notwendig geometrische Ansichten. Wir beschränken unsere Erörterungen auf die Mechanik und betrachten die Rolle der Geometrie in der Mechanik.

Der spezielle Gegenstand dieser Vorlesungen soll darin bestehen, einige geometrische Ansichten der Kinetik vorzuführen, vornehmlich Eigenschaften der in beliebigen Kraftfeldern beschriebenen Bahnen. Während die mit der Statik und der Kinematik zusammenhängenden Untersuchungen hauptsächlich einen algebraisch-geometrischen Charakter haben, beziehen sich unsere kinetischen Erörterungen auf infinitesimale Eigenschaften: Tangenten, Verteilung der Krümmung, oskulierende Kegelschnitte, usw. Wir werden uns vor allem mit der Differentialgeometrie der Systeme von Bahnkurven beschäftigen. Wesentlich ist es, zu bemerken, daß die betrachteten Eigenschaften sich nicht auf Einzelkurven, sondern auf die unendlichen Systeme von Kurven beziehen.

Um diesen Punkt besonders hervorzuheben, betrachten wir die Bewegung eines Teilchens in einem ebenen Kraftfeld, wenn die Kraft nur von der Lage des Punktes abhängt. Für gegebene Anfangsbedingungen bewegt sich das Teilchen auf einer bestimmten Kurve. Nehmen wir alle möglichen Anfangsbedingungen, so erhalten wir ein dreifach unendliches Kurvensystem. Eine einzelne Kurve hat offensichtlich keine Eigentümlichkeiten; denn ein Teilchen kann dadurch zum Beschreiben irgendeiner gegebenen Kurve genötigt werden, daß man eine passende Kraft nimmt, die von Punkt zu Punkt auf der Kurve sich ändert. Das Kurvensystem jedoch wird innere Eigentümlichkeiten besitzen; denn wie ein dreifach unendliches Kurvensystem beliebig gegeben wird, so ist es gewöhnlich nicht möglich, irgendein Kraftfeld zu finden, so daß jedes Teilchen, das sich in dem Felde bewegt, eine der gegebenen Kurven beschreibt. Es gibt beispielsweise kein Kraftfeld, das alle Kreise der Ebene als seine Bahnlinien erzeugt.

Die einfachste allgemeine Eigenschaft des Bahnliniensystems ist diese: Ein Teilchen werde aus einer gegebenen Lage in einer gegebenen Richtung mit allen möglichen Anfangsgeschwindigkeiten in ein Kraftfeld losgelassen; dann erhält man eine einfach unendliche Schar von Bahnlinien, und zwar eine für jeden Wert der Geschwindigkeit. Man konstruiere für jede dieser Kurven die vierpunktig berührende Parabel; dann liegen die Brennpunkte dieser Parabeln immer auf einem durch den Anfangspunkt gehenden Kreis. Ein gleichwertiger Satz sagt aus, daß die Leitlinien dieser Parabeln immer durch einen und denselben Punkt gehen. Im Raum gebrauchen wir oskulierende Kugeln und finden als Ort für ihre Mittelpunkte eine Gerade.

Ein vollständig charakteristisches System von Eigenschaften sowohl für die Ebene, als auch für den Raum wird im ersten Kapitel gegeben. Damit ist es möglich, zu sagen, wann ein gegebenes Kurvensystem als ein System dynamischer Bahnlinien dienen kann. Es wird auch eine Methode gewonnen, um das Feld aus seinen Bahnlinien zu konstruieren. Wirft man z. B. eine Handvoll Teilchen in ein unbekanntes Feld (wo die in jedem Punkte wirkende Kraft nur von der Lage des Punktes abhängt) und photographiert die Gesamtheit der Wege, dann kann das Feld ohne Registrierung der Geschwindigkeit oder Beobachtung der Zeit konstruiert werden. Insbesondere ist es möglich, aus einfachen geometrischen Merkmalen konservative Felder von nicht konservativen zu unterscheiden.

Das zweite Kapitel handelt von der Geometrie konservativer Kräfte. Hier ermöglicht die Energiegleichung das Gruppieren der Bahnlinien in „natürliche Familien". Eine solche Familie wird ganz faßlich als die Gesamtheit der ∞^4 Strahlen oder Lichtwege in jedem Medium gefunden, wo der Brechungsindex sich von Punkt zu Punkt stetig ändert. Die geometrische Charakterisierung wird zuerst durch zwei einfache, auf die Krümmungskreise bezügliche Eigenschaften gegeben, danach durch eine neue Umkehrung des Theorems von Thomson und Tait. Man erkennt z. B., daß, wenn eine Kerze in die Atmosphäre gestellt wird oder in ein Gas von variabler Dichte, dann die ∞^2 ausgesandten Strahlen, welche Kurven von ganz verwickelter Gestalt sein können, folgende Eigenschaften haben: (A) Die an der gegebenen Quelle konstruierten Krümmungskreise haben alle noch einen zweiten Punkt gemeinsam. (B) Drei von diesen Kreisen haben (statt der dreipunktigen) eine vierpunktige Berührung mit ihren Kurven, und diese drei schneiden sich rechtwinklig. (C) Die ∞^2 Strahlen bilden eine Normalenkongruenz, d. h. besitzen ∞^1 zu ihnen normale Oberflächen. Natürliche Familien sind entweder durch (A) und (B) oder durch (A) und (C) charakterisiert.

Diese Ergebnisse werden auf die Ausbreitung von Wellen in jedem isotropen Medium angewandt. Eine zweite und verwickeltere Umkehrung, die durch das Thomson-Taitsche Theorem nahegelegt wird, findet auch Erörterung. Einige interessante optische Sätze werden in geometrischer Fassung gegeben, die umgekehrten Probleme bleiben aber unerledigt. Der Schlußabschnitt handelt von dem „allgemeinen Problem der Dynamik im Sinne der französischen Autoren".

Das dritte Kapitel geht auf die Transformationstheorien ein. Hier ist es interessant, zu bemerken, wie die wichtigsten Gruppen der Geometrie, die projektive und die konforme, in der Dynamik wesentliche Rollen spielen, die erstere im Zusammenhang mit willkürlichen Feldern, die letztere im Zusammenhang mit konservativen Feldern und natürlichen Familien. Die infinitesimalen Be-

rührungstransformationen der Mechanik und eine neue Gruppe von Raum-Zeit-Transformationen werden ebenfalls erörtert.

Der Hauptgegenstand des vierten Kapitels ist ein einfaches Problem bei der erzwungenen Bewegung, das die Theorien der Bahnlinien, Brachistochronen, Kettenlinien und Geschwindigkeitskurven in einem willkürlichen Kraftfeld umschließt und daher zu vereinheitlichen dient. Vollständige Charakterisierungen werden gegeben. Kurven von konstantem Druck und Tautochronen werden nur kurz behandelt.

Das fünfte Kapitel umfaßt kurze Erörterungen verwickelterer Probleme der Bewegung, z. B. die Wirkung eines widerstehenden Mediums auf den geometrischen Charakter des Systems von Bahnen; die Bewegungen einer beliebigen Zahl aufeinander einwirkender Teilchen (die Ergebnisse sind natürlich auf das Dreikörperproblem anwendbar); endlich Kräfte, die nicht bloß von der Lage, sondern auch von der Zeit abhängen, wobei Bahnlinien und Raum-Zeit-Kurven untersucht werden. Die letzteren werden in dem Sinne von Minkowski in dem vierdimensionalen (x, y, z, t)-Raum konstruiert; aber die gemachte Anwendung bezieht sich auf den gewöhnlichen Raum, nicht auf die Elektrodynamik oder die Relativitätstheorie.

Die Hauptergebnisse der beiden ersten Kapitel (insbesondere die vollständigen Charakterisierungen der allgemeinen Systeme von Bahnlinien und natürlichen Familien) wurden vom Verf. zuerst in einer Reihe von vier Abhandlungen in den Amer. Math. Soc. Trans. (1906-1910) gegeben. Einige der andern Resultate befinden sich in Noten des Bulletin derselben Gesellschaft. Die letzten beiden Kapitel, ebenso auch manche Abschnitte der andern Kapitel enthalten Resultate, die bis jetzt nicht veröffentlicht waren. Lp.

Ét. Delassus. Les diverses formes du principe de Dalembert et les équations générales du mouvement des systèmes soumis à des liaisons d'ordre quelconque. C. R. **156**, 205-209.

„Es sei $\sum(P+Q)\delta q$ die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte und der gegebenen Kräfte, berechnet an dem holonomen System, das man erhält, indem man die q als unabhängig betrachtet, und es seien $F_1(q'')=0, \ldots$ alle Gleichungen zweiter Ordnung der Verbindung L. Diese letzteren Gleichungen sind linear in den q'', und man bezeichne mit $\Phi_1(q''), \ldots$ die Glieder mit den q'' in den F. Wenn L endlich oder linear von der ersten Ordnung ist, indem ihre Gleichungen erster Ordnung $f_1(q')=0, \ldots$ sind, wobei die homogenen Teile ersten Grades der f mit $\varphi_1(q'), \ldots$ bezeichnet werden mögen, so folgt aus dem Umstande, daß die F dann bloß die Derivierten der f sind, daß die Funktionen Φ mit den φ identisch sind. Auf der ersten Stufe tritt das Dalembertsche Prinzip unter der Form auf: $\sum(P+Q)\omega=0$ und ist eine Folge der Gleichungen $\varphi_1(\omega)=0, \ldots$, wenn man die ω als mit den δq gleich deutet. Wenn man zu dem nächsten Falle aufsteigt, geht man von den aus dem analytischen Prinzip abgeleiteten Gleichungen aus und verfällt wieder auf Gleichungen, die es noch immer ausdrücken; die ω werden hier einfache Hülfsvariabeln ohne mechanische Bedeutung. Außerdem bemerkt man, daß in den beiden ersten Fällen die Relationen zwischen den ω auch geschrieben werden können: $\Phi_1(\omega)=0, \ldots$ Bei Fortsetzung der Verallgemeinerung bleibt diese Form mittels der Φ bestehen, und man gelangt so zu der allgemeinen analytischen Form des Dalem-

bertschen Prinzips für alle vollkommenen Bewegungen: Null ist die Summe $\Sigma(P + Q)\omega$ aber für alle Wertsysteme der ω, die den Gleichungen $\Phi_1(\omega) = 0, \ldots$, welche mittels der Gleichungen zweiten Grades der Verbindung erhalten werden, Genüge leisten. Daraus folgt, daß die Lagrangeschen Gleichungen mit Multiplikatoren auf alle Verbindungen erster Klasse Anwendung finden, falls sie den Teil dieser Gleichungen ausmachen, welche sich auf die Multiplikatoren mittels der Gleichungen zweiter Ordnung der Verbindung ausdrücken."

Um die Gedanken des Verf. nicht zu verdunkeln, mußten wir den ersten Teil der Note wörtlich mitteilen; der zweite Teil der Note verbreitet sich über Folgerungen aus diesen Überlegungen. Lp.

ÉT. DELASSUS. Sur l'équilibre et les petits mouvements des systèmes soumis à des liaisons d'ordre quelconque. C. R. **156**, 677-679.

Eine Verbindung erster Klasse ist unabhängig von der Zeit, wenn die folgenden Voraussetzungen verwirklicht sind: 1. Die Lage des Systems hängt einzig von den Werten der Parameter q ab. 2. t kommt in keiner der Verbindungsgleichungen explizit vor. 3. Jede Gleichung erster Ordnung der Verbindung ist homogen in den q'. 4. In jeder Gleichung zweiter Ordnung der Verbindung, welche Gleichung linear in den q'' ist, sind die Koeffizienten homogen in den q' und von demselben Grade der Homogeneität; das von den q'' unabhängige Glied ist homogen in den q', und sein Grad der Homogeneität ist um zwei Einheiten höher als der der Koeffizienten der q''.

Der Verf. gelangt durch seine Betrachtungen zu folgenden Sätzen: Die kleinen Bewegungen eines Systems mit beliebigen, von der Zeit unabhängigen Verbindungen erster Klasse sind immer holonom. Wenn die nach einer gegebenen Vorschrift reduzierte Verbindung wirklich von der zweiten Ordnung ist, so sind die Gleichgewichtslagen instabil. Lp.

G. A. MAGGI. Fondamenti e stabilità della teoria razionale del movimento. Discorso inaugurale per l'anno accademico 1912-1913. Pisa: Stabilimento tipografico toscano. 32 S. 8°.

Maggi polemisiert gegen die skeptischen Ansichten von Poincaré und erhebt einige Bedenken gegen das Einsteinsche Relativitätsprinzip. Vi.

E. ALMANSI. Le equazioni generali della dinamica e la legge di gravitazione. Rom. Acc. L. Mem. (5) 8, 473-502.

Die Ausdehnung der klassischen Formeln:

$$(I) \qquad m\frac{d^2 x}{dt^2} = X, \ldots$$

auf jede Frage der Himmelsmechanik ist, nach des Verf. Meinung, nicht unbedingt erlaubt. Es ist überhaupt unmöglich, die von den unendlichvielen Körpern des Weltalls auf einen Himmelskörper geübte Wirkung auf eine bestimmte

Weise zu definieren; die von H. v. Seeliger behauptete Unmöglichkeit einer solchen Definition wird von Almansi streng bewiesen. Er schlägt vor, die Koordinaten und die Wirkungen durch Koordinaten- und Wirkungsdifferenzen zu ersetzen; die neuen Bewegungsgleichungen wären also:

$$\text{(II)} \qquad m\frac{d^2 x_{12}}{dt^2} = X_{12}, \ldots,$$

wo $x_{12}, X_{12}, \ldots$ diese Differenzen bezeichnen, und die Richtung der Koordinatenachsen durch die Bewegung selbst für jeden Augenblick bestimmt sind. Für ein endliches System und unter der Voraussetzung, daß der Schwerpunkt des Systems als Nullpunkt angenommen werde, reduzieren sich wiederum die Gleichungen (II) auf die Gleichungen (I). Vi.

M. Abraham. Le equazioni di Lagrange nella nuova meccanica. Annali di Mat. (3) **20**, 29-35.

„Während die Newtonsche Mechanik sich auf den Begriff der Fernwirkung gründet, steckt sich die neue Mechanik unter dem Antrieb der Ideen von Faraday und Maxwell das Ziel, alle Kräfte auf unmittelbare Einwirkungen zurückzuführen. In dieser Richtung ist jüngst ein bemerkenswerter Fortschritt zu verzeichnen. Durch Annahme einer Hypothese von Einstein, nach der eine Relation zwischen der Lichtgeschwindigkeit und dem Gravitationspotential besteht, ist eine Theorie der Gravitation entwickelt worden, die sich auf den Begriff der unmittelbaren Einwirkung gründet. In dem Nachfolgenden wollen wir diese neue Theorie entwickeln, soweit sie sich auf die Bewegungsgleichungen eines materiellen Punktes im Gravitationsfelde bezieht.“ Lp.

A. Del Re. Le equazioni generali per la statica e la dinamica dei sistemi materiali ad n dimensioni ed a curvatura costante nel caso di vincoli in termini differenziali non integrabili. Napoli Rend. (3) **18**, 287-296.

Im Anschluß an die in Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{21}_1$, 709-717 veröffentlichte Arbeit (F. d. M. **43**, 811, 1912) untersucht der Verf., wie die dort abgeleiteten Grundgleichungen abzuwandeln sind, wenn die Bedingungsgleichungen nicht in endlichen Gliedern gegeben werden, sondern nicht integrierbare Differentialterme enthalten. Lp.

P. Appell et H. Vergne. Sur une transformation du mouvement d'un système holonome conservatif donné dans le mouvement d'un autre système donné de même liberté. C. R. **156**, 1800-1801.

H. Vergne. Sur une correspondance entre les mouvements de deux systèmes mécaniques holonomes conservatifs. Darb. Bull. (2) **37**, 375-384.

Es sei ein System kanonischer Gleichungen gegeben:

$$\text{(1)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo $F(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ eine gegebene, von t nicht abhängige Funk-

tion bezeichnet; man kann immer Vertauschungen von Veränderlichen definieren, die dieses System in ein anderes kanonisches System umwandeln:

$$(2) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo $\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ ebenfalls eine gegebene, von t nicht abhängige Funktion ist (vgl. H. Poincaré, Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste **3**, 7 u. H. Vergne, Ann. de l'Éc. Norm. (3) **27**, 543-563, 1910 u. C. R. **150**, 1038-1041, 1910; F. d. M. **41**, 633 u. 788, 1910).

Man kann auch, jedoch unter gewissen Beschränkungen, die Umwandlung des Systems (1) in das System (2) bewerkstelligen mittels eines beliebigen Partikularintegrales $V(x_1, x_2, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ der partiellen Differentialgleichung:

$$F\left(x_1, x_2, \ldots x_n; \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = \Phi\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; -\frac{\partial V}{\partial \xi_1}, -\frac{\partial V}{\partial \xi_2}, \ldots, -\frac{\partial V}{\partial \xi_n}\right).$$

Die Formeln für die Vertauschung der Veränderlichen sind dann

$$y_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \qquad \eta_i = -\frac{\partial V}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Diese in der Note der C. R. ausgesprochenen Sätze werden in dem Artikel des Bull. des sc. math. bewiesen; die aus ihnen sich ergebenden Folgerungen werden ebenda weiter entwickelt.

Lp.

ÉD. GUILLAUME. Sur l'extension des équations mécaniques de M. Appell à la physique des milieux continus. Application à la théorie des électrons. C. R. **156**, 875-879.

Appell hat gezeigt, daß die allgemeinen Gleichungen der Dynamik für ein beliebiges System gewonnen werden können, indem man das Minimum der quadratischen Funktion der Beschleunigungen

$$R = S - \sum_1^n Q_i q_i'' \qquad (S = \Sigma \tfrac{1}{2} m j^2)$$

aufsucht, wo S die Beschleunigungsenergie ist, Q_i die verallgemeinerte Kraft, q_i'' die nach der Zeit genommene zweite Ableitung der verallgemeinerten Koordinate q_i. Er hat auch die Anwendung dieses Prinzipes auf die Hydrodynamik und die Elektrodynamik angedeutet (C. R. **154**, 1037-1040; F. d. M. **43**, 813, 1912). In der gegenwärtigen Note wird zuerst gezeigt, wie die obige Gleichung auf kontinuierliche Medien auszudehnen und die Methode auf die Theorie der Elektronen anzuwenden ist.

„Außer dem Dalembertschen Prinzip hat man, besonders Helmholtz folgend, das Hamiltonsche Prinzip auf die ganze Physik auszudehnen gesucht. Diese Prinzipien lassen sich aber schlecht auf die Maxwellsche Theorie und die Elektronentheorie anwenden. Der Gedanke ist berechtigt, daß das so verallgemeinerte Appellsche Prinzip wenigstens in zahlreichen Fällen mit Vorteil an ihre Stelle gesetzt werden kann.“

Lp.

A. Bilimovitch. Sur les équations du mouvement des systèmes conservatifs non holonomes. C. R. **156**, 381-384.

Durch eine längere, in ihrem Gange angedeutete Rechnung kommt der Verf. zu einer Form der Bewegungsgleichungen für nichtholonome Systeme, die sich in dem Falle holonomer Systeme als eine neue Modifikation der von C. G. J. Jacobi in der sechsten Vorlesung über Dynamik gegebenen Gleichungen ergibt. Lp.

A. Bilimovitch. Sur les systèmes conservatifs non holonomes avec des liaisons dépendantes du temps. C. R. **156**, 1216-1218.

Wenn die Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_n$ eines Massensystems $k\,(< n)$ nicht integrablen Differentialbedingungen unterliegen:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ri}\, q_i' + a_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, k),$$

wo die a_{ri} und die a_r Funktionen der Koordinaten und der Zeit sind, so sind die Gleichungen der Bewegung mit den Multiplikatoren λ_r der Verbindungen:

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r\, a_{ri} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo T die lebendige Kraft des Systemes ist und die Q_i die verallgemeinerten Kräfte bezeichnen. Aus der Gleichung (2) erhält man mit Benutzung von (1):

$$dT = \sum_{i=1}^{n} Q_i\, dq_i - \sum_{r=1}^{k} \lambda_r\, a_r\, dt.$$

Hieraus kann man schließen, daß im Falle der Existenz der von der Zeit unabhängigen Kräftefunktion $U (Q_i = dU/dq_i)$, und der Homogeneität $(a_r = 0)$ das Integral der lebendigen Kräfte $T = U + h$, wo h eine willkürliche Konstante ist, vorhanden ist, obwohl die Koeffizienten a_{ri} Funktionen der Zeit sind. Als Beispiel einer solchen Bewegung wird die Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt behandelt, wobei diese Bewegung einer nicht integrablen Differentialbedingung unterworfen ist. Lp.

A. Bilimovitch. Sur les transformations canoniques spéciales. C. R. **157**, 1133-1135.

Wenn das System der Differentialgleichungen in der kanonischen Form

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo $H = f(q_i, p_i, t)$ nach Vertauschung der durch die Beziehungen:

$$(1) \qquad F_r(q_i, p_i, Q_i, P_i, t, T) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2n+1)$$

bestimmten Variabeln wiederum die kanonische Form annimmt:

$$\frac{dP_i}{dT} = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \qquad \frac{dQ_i}{dT} = \frac{\partial K}{\partial P_i},$$

wo $K = F(Q_i, P_i, T)$, so heißt die entsprechende Transformation bekanntlich kanonisch.

Zwei Arten kanonischer Transformationen sind zu unterscheiden. Die ersten, die allgemeine heißen mögen, sind auf ein beliebiges kanonisches System anwendbar; nach S. Lie fallen sie mit den Berührungstransformationen zusammen. Die Transformationen zweiter Art sind solche, die, allgemein zu reden, nur für das gegebene System und für die bestimmte Funktion H kanonisch bleiben. Betrachtungen über diese „speziellen" kanonischen Transformationen bilden den Gegenstand der Note. Lp.

T. Pöschl. Sur les équations canoniques des systèmes non holonomes. C. R. **156**, 1829-1831.

Es seien $q_1, q_2, \ldots, q_n$ die n wahren Koordinaten eines Systems und

$$\omega_i = \alpha_{i1}\dot{q}_1 + \alpha_{i2}\dot{q}_2 + \cdots + \alpha_{in}\dot{q}_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

lineare und nicht integrable Kombinationen ihrer Ableitungen nach der Zeit. Nach den $\dot{q}_i$ aufgelöst, erhalte man hieraus

$$\dot{q}_i = \beta_{1i}\,\omega_1 + \beta_{2i}\,\omega_2 + \cdots + \beta_{ni}\,\omega_n.$$

Man setze

$$g_{\mu\nu i} = \Sigma_{rs}\left(\frac{\partial \alpha_{is}}{\partial q_r} - \frac{\partial \alpha_{ir}}{\partial q_s}\right)\beta_{\mu s}\,\beta_{\nu r}.$$

Dann erhält man, den kanonischen Bewegungsgleichungen entsprechend, die folgende Form:

$$\omega_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\Sigma_{\mu\nu}\, g_{i\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial p_\mu}\frac{\partial H}{\partial \omega_\nu} - \left(\frac{\partial H}{\partial \vartheta_i}\right),$$

wo $\omega_i = \dfrac{d\vartheta_i}{dt}$, $p_i = \dfrac{\partial T}{\partial \omega_i}$. Lp.

P. Stäckel. Äquivalenzprobleme aus der Dynamik gebundener Punktbewegungen. Heidelb. Ak. Sitzber. 1912, A Nr. 17, 20 S.

Zuerst wird der Lehrsatz 1 bewiesen: Wenn sich ein materieller Punkt unter dem Einfluß einer beliebigen Zentralkraft auf einer festen Kurve bewegt, so lassen sich mittels Quadraturen unzählig viele andere Kurven angeben, bei denen unter denselben Anfangsbedingungen der Fahrstrahl vom Zentrum nach dem bewegten Punkt stets dieselbe Funktion der Zeit ist wie bei der ursprünglichen Kurve. Im besonderen ist unter diesen äquivalenten Kurven immer eine ebene Kurve enthalten, in deren Ebene das Kraftzentrum liegt.

Danach wird die Untersuchung der äquivalenten Kurven für den besonderen Fall durchgeführt, daß die feste Kurve, auf der sich der Punkt P bewegt, ein

Kreis ist, das Kraftzentrum P sich irgendwo im Raum befindet und seinen Platz ändert. Dieser Teil der Arbeit nimmt den größten Raum in Anspruch (S. 6-20). Die Ergebnisse der Betrachtung werden in drei langen Lehrsätzen ausgesprochen. Lp.

J. Drach. Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique. C. R. **157**, 1516-1519.

Wenn man sich auf die Untersuchung der Bewegung eines Punktes in dem Falle beschränkt, bei dem die Projektionen der Kraft nur von den Koordinaten abhängen, so bestimmt nach einer Bemerkung von J. Bertrand in einer gleichbetitelten Abhandlung (1852 u. 1856) ein Erstintegral $\alpha = \alpha(x, y, z, x', y', z', t)$ der Bewegungsgleichungen $x'' = X, y'' = Y, z'' = Z$ im allgemeinen X, Y, Z. Eine Ausnahme findet allein für gewisse Kategorien von Integralen statt (z. B. das Flächenintegral), die nur auf zwei Relationen zwischen X, Y, Z führen. Bertrand hat einige der bemerkenswerten von ihnen angegeben. Dem Verf. ist es nach seiner Angabe gelungen, sie alle zu erhalten. Ihre Bestimmung soll in einer größeren, anderswo zu veröffentlichenden Arbeit bekannt gemacht werden; in der vorliegenden Note teilt er die Hauptergebnisse ohne Beweis mit. Lp.

U. Cisotti. Un teorema generale sul moto incipiente dei sistemi vincolati. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{22}_2$, 358-360.

„Wenn bei einem gefesselten, im Gleichgewichte befindlichen System einige Fesseln entfernt werden, setzt sich das System im allgemeinen in Bewegung; bei der beginnenden Bewegung halten sich die Trägheitskräfte das Gleichgewicht, wie beschaffen auch die äußeren Kräfte und welches auch die entfernten Fesseln sein mögen.“ Lp.

U. Crudeli. Criterî di stabilità per moti stazionarî di prima specie. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{22}_2$, 642-645.

Wenn die Theorie der Integralgleichungen von Volterra auf die Systeme linearer Integralgleichungen verallgemeinert wird, so ermöglicht sie es, auf sie die Behandlung der Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung zurückzuführen. Dieser Umstand ist vom Verf. in der Untersuchung hinreichender Stabilitätsbedingungen für stationäre Bewegungen erster Art benutzt worden. Mittels besonderer Kunstgriffe ist er dazu gelangt, einige Kriterien von ungemeiner Einfachheit und unmittelbarer Anwendbarkeit aufzustellen, deren Wiedergabe aber zu viel Raum beanspruchen würde. Lp.

J. E. Beth. The oscillations about a position of equilibrium where a simple linear relation exists between the frequencies of the principal vibrations. Phil. Mag. (6) **26**, 268-324.

Die Dissertation des Verf. hat den Titel: „De schommelingen om een evenvichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tusschen de

reciproke waarden der perioden, met toepassing op de beweging, zonder wrijving, van een zwaar punt op den bodem eener vaas.“ (Kampen: J. H. Kok, 135 S.; F. d. M. **41**, 796-798, 1910.) Aus dieser Dissertation sind Auszüge wiederholt erschienen (F. d. M. **42**, 758, 1911), indem gleichzeitig Zusätze gemacht wurden. Über die Fortführung der Untersuchung berichtet der Verf. in der Einleitung: „Ich habe die Forschung auf einen Mechanismus ausgedehnt, der eine beliebige Anzahl von Freiheitsgraden besitzt. In einer (noch nicht veröffentlichten) Preisschrift, die in Beantwortung einer von der Amsterdamer Mathematischen Gesellschaft gestellten Aufgabe verfaßt wurde, habe ich die Hüllkurve von Systemen Lissajousscher Kurven betrachtet, die in der zur Behandlung stehenden Frage vorkommen; in meiner Dissertation ist diese Hüllkurve nur für den Fall $n_y = 2n_x + \varrho$ gefunden. Da der Gegenstand insoweit zu einem Abschluß gekommen ist, kann es wünschenswert erscheinen, eine neue Übersicht über das Problem zu veröffentlichen.“ Lp.

H. J. E. Beth. Onderhouden trillingen van octaaf-mechanismen. Handel. XIVe Nederl. Nat.- en Geneesk. Congr. 204-207.

Periodische, mit Reibung behaftete Bewegungen eines Mechanismus mit zwei Freiheitsstufen, dessen Hauptfrequenzen ungefähr in dem Verhältnis 1 : 2 stehen. 1. Die Periode der Kraft ist die der Grundschwingung, 2. die der Oktavschwingung. Lp.

C. V. Raman. The maintenance of forced oscillations of a new type. Phil. Mag. (6) **24**, 513-520 (1912).

Ein Auszug aus dieser Arbeit ist in Nature **82**, 428-429 erschienen (F. d. M. **41**, 799, 1910). Am Schlusse des Aufsatzes gibt der Verf. folgende Ausblicke: „Ich habe einige der Hauptergebnisse von experimentellem Interesse gegeben, die mit dieser Klasse von unterhaltenen Schwingungen gewonnen sind. Die weitere Versuchsarbeit über die leitenden Typen und eine eingehende Vergleichung mit den Resultaten der physikalischen Theorie, welche ich oben umrissen habe, sowie mit der mathematischen Analyse fallen außerhalb der Grenzen der gegenwärtigen Veröffentlichung, und ich hoffe, mich damit in nächster Zeit zu befassen. Inzwischen muß ich bemerken, daß die Existenz und die physikalische Bedeutung des kleinen „sekundären“ Gliedes niedrigerer Frequenz in den Ausdruck für die unterhaltene Bewegung direkt nachweisbar ist durch die stroboskopische Beobachtung jedes der oben berührten fünf oder sechs Typen der unterhaltenen Bewegung und durch eine Erforschung ihrer „Vibrationskurven“. Die Ergebnisse dieser Arbeit sind für die Veröffentlichung in Vorbereitung.“ Drei Tafeln mit photographischen Aufnahmen der Erscheinungen sind dem Aufsatze beigegeben. Lp.

G. Gianfranceschi. L'errore di ortogonalità nella scrittura di moti periodici. Rom. Acc. L. Rend. (5) **22**$_1$, 24-30.

Der Verf. beschränkt die Untersuchung auf die durch die beiden Bewegungen

$$y = a \sin \frac{2\pi t}{T}, \; x = vt$$

erzeugte Sinuskurve. Wenn die harmonischen Schwingungen, die durch die erste Gleichung dargestellt sind, nicht genau senkrecht zur x-Achse erfolgen, so wird die durch einen Stift mechanisch aufgezeichnete Linie von der exakten Sinuslinie abweichen. Der Betrag dieser Abweichung wird vom Verf. berechnet und graphisch veranschaulicht. Insbesondere liegen die Maxima und Minima (wie dies anschaulich sofort klar ist) nicht senkrecht über der Mitte zwischen zwei Schnittpunkten der graphisch erhaltenen Kurve mit der x-Achse. — Wenn die Schwingungen keine Sinusschwingungen sind, so kann man sie in bekannter Weise durch Entwicklung von y nach den Gliedern einer Fourierschen Reihe in eine Summe von Sinusschwingungen zerlegen und nun die in dem betrachteten Falle gewonnenen Resultate verwenden. Lp.

D. König et A. Szücs. Mouvement d'un point abandonné à l'intérieur d'un cube. Palermo Rend. **36**, 79-90; Math. es termész. ért. **31**, 545-558. (Ungarisch.)

Als Vorbereitung zur Hauptaufgabe wird im ersten Teil die Frage behandelt: Ein beweglicher Punkt läuft innerhalb eines Quadrates geradlinig fort und wird, sobald er eine Quadratseite erreicht, nach dem Gesetze des elastischen Stoßes zurückgeworfen. Welches ist die Bahn des Punktes von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$?

Danach wird im zweiten Teile die entsprechende Aufgabe für den Würfel behandelt. Es seien α, β, γ die Richtungskosinus der Anfangsgeschwindigkeit in bezug auf die drei Kanten des Würfels. Die Bedingung dafür, daß die Bahn des Punktes geschlossen ist, besteht darin, daß irgend zwei der Zahlen α, β, γ rational sind. Nun werden die Fälle untersucht, daß zwischen α, β, γ eine oder zwei homogene lineare Gleichungen bestehen: $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$, $A'\alpha + B'\beta + C'\gamma = 0$, wo die Koeffizienten A, B, C, A', B', C' ganz und nicht alle Null sind. Existiert keine solche Bedingung, so kommt der Punkt jedem Punkte des Würfelinnern einmal unendlich nahe. Periodisch ist die Bewegung, wenn α, β, γ sich wie drei ganze Zahlen verhalten. Lp.

J. Lissner. Berichtigung der Bewegungsgleichungen für Fernwirkung mit endlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit Rücksicht auf das Relativitätsprinzip. Monatsh. f. Math. **24**, 300-310.

Die vom Verf. in der Abhandlung „Zur Lehre von der Fernwirkung, Induktion und Strahlung" (F. d. M. **43**, 1021, 1912) aufgestellten Bewegungsgleichungen für Fernwirkung mit endlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedürfen mit Rücksicht auf das Relativitätsprinzip einer Berichtigung. Zu diesem Zwecke wird das Problem jetzt auf energetischem Wege in der Weise behandelt, daß zuerst die Bewegungsgleichungen eines Systems von frei beweglichen, aufeinander Fernwirkung äußernden Punkten für ein beliebig gewähltes Koordinatensystem aufgestellt werden; hierauf folgt die erwähnte Berichtigung. Folgende Sätze sind zu erwähnen:

Der Ausdruck für die kinetische Energie irgendeines Punktes des Systems ist im allgemeinen das Produkt der Masse des betrachteten Punktes und der Dif-

ferenz zweier identischen Funktionen, wobei der Minuend die Differentialquotienten der Koordinaten des betrachteten Punktes und der Subtrahend die Differentialquotienten der Koordinaten des Schwerpunktes des ganzen Systems, bezogen auf ein beliebiges Orthogonalkoordinatensystem, zu Argumenten hat; die Parameter sind von der Masse unabhängig. Der Subtrahend verschwindet, wenn der Ursprung des Koordinatensystems in einen gegenüber dem Schwerpunkt des betrachteten Systems festliegenden Punkt verlegt wird. Weniger präzis ausgedrückt: Die einem Punkt des Systems durch die Fernwirkung der übrigen erteilte kinetische Energie ist gleich der kinetischen Energie dieses Punktes weniger der kinetischen Energie eines gleichen, im Schwerpunkt des Systems gelegenen Punktes, bezogen auf ein beliebig gewähltes Orthogonalkoordinatensystem.

Die erwähnte Funktion ist im allgemeinen die Hälfte des nach der Zeit genommenen ersten Differentialquotienten einer Summe von Quadraten linearer Funktionen der Differentialquotienten der entsprechenden Orthogonalkoordinaten. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen des betrachteten Systems weichen von jenen nach der klassischen Mechanik sehr wesentlich ab. Die ersteren gehen in letztere über, wenn die erwähnte Funktion, wie es in der klassischen Mechanik geschieht, gleich dem halben Differentialquotienten des Quadrates der Geschwindigkeit oder Geschwindigkeitskomponenten gesetzt und der Ursprung des Koordinatensystems in einen Punkt verlegt wird, der gegenüber dem Schwerpunkt des Punktsystems festliegt oder sich gegenüber dem Schwerpunkt geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Der Ausdruck für die kinetische Energie bleibt auch bei Annahme endlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Fernwirkung unverändert; in den Ausdruck für die ponderomotorische Arbeit sind die Koordinaten der Punkte, bezogen auf ein Koordinatensystem, einzuführen, dessen Ursprung gegenüber dem Schwerpunkt des Punktsystems im betrachteten Augenblick festliegt, und zwar mit Werten, die sie zu verschiedenen Zeiten aufweisen. Die Koordinaten des Schwerpunkts des Punktsystems sind dagegen bloß mit den Werten einzuführen, die sie im betrachteten Augenblick aufweisen. Lp.

F. J. DE WISNIEWSKI. Zur Minkowskischen Mechanik. Ann. der Phys. (4) **40**, 387-390, 668-676.

In der ersten Abhandlung leitet der Verf. für die Planetenbewegung die Differentialgleichung in der Form ab:

$$\alpha_1 \frac{d(1/r)}{d\theta} = \pm \sqrt{\frac{(m^x)^2 - \alpha_1^2}{r^2} + \frac{2m^x(\alpha_2 - 1)}{r^2} + (\alpha_2 + 1)^2 - 1}.$$

Im ersten Abschnitt der zweiten Arbeit entwickelt er hieraus die Formeln für die Fälle $(m^x)^2 < \alpha_1^2$ (wo $\alpha_2 < 0$ eine Ellipse, $\alpha_2 > 0$ eine Hyperbel, $\alpha_2 = 0$ eine Parabel ergeben) und $(m^x)^2 > \alpha_1^2$ mit Spiralen als Bahnkurven. Im zweiten Abschnitte wird ein allgemeines Prinzip aufgestellt, das jedoch nur in dem Falle gilt, bei welchem der Energiesatz erfüllt ist. Für sehr kleines $\mathfrak{v}$ stimmt es mit dem Hamiltonschen Prinzip der gewöhnlichen Mechanik überein. Im dritten Abschnitt wird gezeigt, daß die ponderomotorischen Kräfte P ähnlich gewissen, vorher definierten Größen J, aber nicht Kräfte im Sinne der Minkowskischen Mechanik sind. Lp.

T. Levi-Civita. Nuovo sistema canonico di elementi ellittici. Annali di Mat. (3) **20**, 153-169.

Die sechs Elemente, von denen in der Astronomie nach hergebrachter Art die Bahn eines Planeten in Abhängigkeit gebracht werden, sind: a (große Halbachse, e (Exzentrizität), i (Neigung), θ (Länge des aufsteigenden Knotens), $\theta + g$ (Länge des Perihels), l (mittlere Anomalie). Sind x, y, z die Koordinaten der Lage und p_x, p_y, p_z die Komponenten der Bewegungsgröße, so ist es in den theoretischen Untersuchungen von Bedeutung, daß die Übergangsformeln von den $\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \\ x & y & z \end{pmatrix}$ zu den neuen Variabeln in den kanonischen Typus auslaufen; deshalb geschieht die zuerst von Jacobi bewirkte Einführung kanonischer Sextupeln. So hat Delaunay die folgenden Größen verwendet:

$$L = \beta\sqrt{a}, \qquad G = \beta\sqrt{a(1-e^2)}, \qquad \Theta = \beta\sqrt{a(1-e^2)}\cos i,$$
$$l, \qquad g, \qquad \theta,$$

wo β von der Anziehung der Massen von P und von O abhängt. Gewöhnlich wird dieses System in der Gestalt gebraucht:

$$(D)\begin{cases} L = \sqrt{km}\sqrt{a}, & G = L\sqrt{1-e^2}, \qquad \Theta = G\cos i, \\ l, & g, \qquad \theta, \end{cases}$$

wo k die Gravitationskonstante ist und l die mittlere Anomalie. Dieses System (D), in welchem k also eine Konstante ist, nennt der Verf. „isodynamisch". Statt seiner schlägt er vor:

$$(E)\begin{cases} U = \sqrt{-2hm}\; a, & G = U\sqrt{1-e^2}, \qquad \Theta = G\cos i, \\ u, & g, \qquad \theta, \end{cases}$$

wo h die Energiekonstante ist und u die exzentrische Anomalie. Dieses System nennt er deshalb „isoenergetisch".

Die Abhandlung ist dazu bestimmt, die Vorteile des isoenergetischen Systems zu zeigen.

§ 1. Rückverweise betreffs der nicht gestörten Bewegung und die bezügliche Gleichung von Jacobi. § 2. Die Ableitung von W in bezug auf den Parameter k. Einführung eines neuen Parameters U. § 3. Lösung der erhaltenen Systeme in bezug auf x, y, z. § 4. Feststellung der kanonischen Eigenschaft. § 5. Gegenüberstellung der neuen Elemente und der Delaunayschen. Ergebnis für den Ausdruck des Momentes der Bewegungsgrößen. Dasselbe Verhalten wie bei den Transformationen von Poincaré. § 6. Einführung der neuen Elemente in das Dreikörperproblem. Lp.

M. Hartog et Ph. E. Belas. La trajectoire d'une particule perméable, se mouvant sans inertie dans un champ de force newtonienne bipolaire. C. R. **157**, 1144-1145.

Eine experimentelle Darstellung der Bahn, die ein zweien elektrischen Polen unterworfener Punkt beschreibt. Lp.

É. Turrière. Sur une loi de force centrale. Ann. sc. Ac. Pol. Porto 8, 134-145.

Die Kurve C und ihre inverse Kurve C' in bezug auf einen gegebenen Pol O sollen die Bahnen eines freien Massenpunktes sein zufolge zweier von O ausgehenden Zentralkräfte, deren Produkt konstant ist. Das Gesetz dieser Zentralkräfte soll aufgefunden werden. Die Rechnung ergibt, daß die eine Kraft der fünften Potenz des Abstandes proportional ist, die andere also der minusfünften. Die weitere Behandlung der Aufgabe erfordert bekanntlich die Anwendung elliptischer Funktionen. Der Verf. weist nebenbei darauf hin, daß nach Maxwell die Gasatome sich mit einer der fünften Potenz des Abstandes proportionalen Kraft abstoßen. Dann geht er aber auf die Erörterung der Natur der Bahnkurven C und C' ein, deren transzendenten Charakter für besondere Wahlen der Konstanten er in Übereinstimmung mit seinen Begriffsbestimmungen aus der Theorie dieser Kurven (vgl. S. 634 dieses Bandes) erörtert.

Lp.

A. Palomby. Sur un problème de dynamique. Ens. math. 15, 328-329.

Lösung der im Interm. des math. 19, 5 (1912) von A. Boutin gestellten Aufgabe: Eine Ellipse wird von einem beweglichen Punkte P in Keplerscher Bewegung durchlaufen. In jedem Punkte P zieht man die Tangente PT, so daß die Länge PT die Geschwindigkeit darstellt. Welches ist der Ort von T?

Lp.

G. Pavanini. Prime conseguenze di una recente teoria della gravitazione. Rom. Acc. L. Rend. 21_2, 648-655 (1912).

G. Pavanini. Prime conseguenze di una recente teoria della gravitazione: le disuguaglianze secolari. Rom. Acc. L. Rend. 22_1, 369-376.

In dem ersten Aufsatze werden Gleichungen abgeleitet, die für das Zweikörperproblem in dem Einstein-Abrahamschen Schwerefelde gelten und die Glieder des Verhältnisses der Geschwindigkeit der Körper zu der des Lichtes bis zur zweiten Ordnung berücksichtigen; sie sind frei von funktionalen Verwicklungen und dazu geeignet, den Unterschied dieses Falles von dem Grenzfall einer augenblicklichen Fortpflanzung zu zeigen.

In der zweiten Veröffentlichung leitet der Verf. die Hauptfolgerungen ab, zu denen man bei der Beschäftigung mit der gestellten Aufgabe gelangt. Von den erwähnten Gleichungen ausgehend, benutzt er die für die relative Bewegung und deutet die hinzukommenden Glieder als die Komponenten einer störenden Kraft, deren Wirkungen gemäß der klassischen Methode der Variation der Konstanten gedeutet werden. Die so erhaltenen säkularen Ungleichheiten hängen nicht nur von der relativen Bewegung der beiden Körper ab, sondern wesentlich auch von ihrer absoluten Bewegung. „Dieser Umstand ist offenbar recht wenig befriedigend für eine Theorie, die, wenigstens ursprünglich, dazu erdacht war, das Relativitätsprinzip auf die Gravitation auszudehnen.“ Lp.

G. Armellini. Il problema dei due corpi nell'ipotesi di masse variabili. Nota II. Rom. Acc. L. Rend. (5) 22_1, 294-302.

Vgl. das Referat über die erste Note F. d. M. **42**, 765, 1911. Dort hat der Verf. die Möglichkeit gezeigt, mit Entwicklungen nach Reihen von Polynomen zu der strengen Lösung dieses Problems der Himmelsmechanik zu gelangen, das sonst mit den Methoden der gewöhnlichen Störungstheorie behandelt worden ist. Diese Methoden gelten im allgemeinen nur für kurze Zeiträume, während man doch bei der Forschung über die vorgelegte Aufgabe, welche die Geschichte des Planetensystems und der Bildung der Sternsysteme nahe berührt, äußerst weit auseinanderliegende Epochen zu berücksichtigen hat. Aus diesen Gründen hat der Verf. den von andern Autoren innegehaltenen Gang verlassen und sich der von Mittag-Leffler entwickelten Funktionentheorie bedient, indem er die bezüglichen Differentialgleichungen der Bewegung von der analytischen Seite her durchgearbeitet, also die Frage auf ein neues Gebiet hin verpflanzt hat. Die Resultate seiner Betrachtungen hat er in neun Theoremen ausgesprochen. Zuletzt wird unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen die Gleichung der relativen Bahn aufgestellt. Lp.

M. Tomassetti et J.-S. Zarlatti. Le problème des deux corps de masses variables. C. R. **157**, 580-583. Berichtigung S. 1184.

Aus der Annahme, daß die Massen beider sich anziehenden Körper Funktionen $M(t)$ und $m(t)$ der Zeit sind, wird die nicht lineare Integraldifferentialgleichung der Bewegung gefolgert; diese wird dann als Grenzfall eines unendlichen Systems von Differentialgleichungen angesehen, die sich nach den klassischen Methoden integrieren lassen. Hieraus wird die Gleichung des oskulierenden Kegelschnittes der Bahn abgeleitet. Wenn für ein wachsendes (abnehmendes) $M(t)+m(t)$ in einem Zeitpunkt der oskulierende Kegelschnitt eine Ellipse oder Parabel (Hyperbel oder Parabel) ist, so ist er in allen folgenden Zeitpunkten immer elliptisch (hyperbolisch). Die Bahn der Erde (des Mondes) ist zufolge des kosmischen Staubes, der auf die Sonne und die Erde selbst fällt (auf die Erde und den Mond), eine elliptische Spirale; die Elemente ihrer oskulierenden Ellipsen sind variabel. Im allgemeinen gestattet das Zweikörperproblem bei variablen Massen keine periodischen Lösungen. Die Bahnkurve ist eine Spirale, die sich um einen Brennpunkt aufrollt, und die oskulierenden Kegelschnitte haben alle diesen selben Brennpunkt. Lp.

W. D. Macmillan. On Poincaré's correction to Bruns' theorem. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 349-355.

In einer Note C. R. **123**, 1224-1228 (F. d. M. **27**, 612, 1896) hat sich Poincaré mit einem Fehlschluß beschäftigt, den Bruns in dem Beweise seines schönen Satzes gemacht hat, daß das Dreikörperproblem kein anderes algebraisches Integral zuläßt als die bekannten Integrale, ein Fehlschluß, der übrigens, wie Poincaré zeigte, die Richtigkeit des Satzes nicht aufhebt. Der Verf. des gegenwärtigen Artikels will die von Poincaré gegebene Verbesserung des Brunsschen Beweises in ihrem Wesen deutlich machen und tut dies, indem er den Gedankengang dieses Beweises kurz vorführt. Der Schluß von Bruns, daß man nur Integrale von einem bestimmten Schlage zu betrachten braucht, war richtig; aber der dafür angegebene Grund nicht. Lp.

É. Picard. Le problème des trois corps. À propos des recherches récentes de M. Sundman. Darb. Bull. (2) **37**, 313-320; Rev. gén. des Sc. **24**, 722-725.

In der Einleitung gibt der berühmte französische Akademiker einen Überblick über die Geschichte des Dreikörperproblems und entwickelt, an eine Bemerkung von Tisserand anknüpfend, den Gedanken einer möglichen Lösung in den Worten: „Denken wir uns, man könne die neun Koordinaten der drei Körper durch Reihen ausdrücken, deren Glieder Funktionen einer Veränderlichen τ sind, und diese Reihen seien konvergent für $-1 < \tau < 1$. Andererseits wollen wir annehmen, die Zeit t sei als Funktion von τ durch eine Reihe ausdrückbar, die ebenfalls zwischen -1 und $+1$ konvergiert, also $t = f(\tau)$, und zwar derart, daß wenn τ von -1 bis $+1$ wächst, die Funktion $f(\tau)$ gleichzeitig von $-\infty$ bis $+\infty$ zunimmt. Man setzt natürlich voraus, daß die verschiedenen Glieder der betrachteten Reihen schrittweise zu erhalten sind, sobald die Anfangsbedingungen gegeben werden. Mit diesen verschiedenen Entwicklungen muß das Problem als streng gelöst angesehen werden; denn einem Werte von t entspricht offenbar ein einziger Wert von τ, und dies ermöglicht die Berechnung der Koordinaten für jeden Wert der Zeit."

In dem zweiten Teile des Aufsatzes wird dann nachgewiesen, daß K. F. Sundman in seinen Untersuchungen aus den Jahren 1906 und 1909 genau dieses Programm durchgeführt hat: Eine zusammenfassende Darstellung dieser Arbeiten ist von ihm in Acta Math. **36**, 105-179, unter dem Titel veröffentlicht „Mémoire sur le problème des trois corps" (F. d. M. **43**, 826, 1912).

Der Schlußteil des Artikels beginnt daher mit den Worten: „Wir haben nach Sundman eine vollständige Lösung des Dreikörperproblems erhalten." Nach Hervorhebung der Bedeutung der gewonnenen Einsicht heißt es dann: „Wir können nun sagen, die Sundmansche Abhandlung ist eine Arbeit, die für die Analytiker und die mathematischen Astronomen Epoche macht. Viele dachten, das Dreikörperproblem würde erst zufolge der vorgängigen Einführung neuer, ganz verwickelter Transzendenten gelöst werden. Mit nicht geringem Erstaunen sieht der Leser, mit welcher Einfachheit der finländische Gelehrte zur Lösung eines für so schwierig erachteten Problems gelangt, indem er sich allein auf Ergebnisse stützt, die heutzutage in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen klassisch sind." Lp.

E. J. Wilczynski. Ricerche geometriche intorno al problema dei tre corpi. Annali di Mat. (3) **21**, 1-31.

„Die in bezug auf dieses Problem sich erhebenden Fragen sind vom geometrischen Gesichtspunkte aus sehr zahlreich, und ihrer sind wenige, die ich habe beantworten können; aber die gewonnenen Ergebnisse haben für uns bei dieser Gelegenheit ein besonderes Interesse, weil sie sich gerade an die bekanntesten Untersuchungen von Lagrange anschließen.

Nehmen wir an, der Schwerpunkt des Systems der drei Körper sei in Ruhe. Für die geometrische Betrachtung bieten sich natürlich drei Arten von Gebilden: die von jedem der drei Körper beschriebenen Kurven; die geradlinigen Flächen, die von den je zwei oder drei Körper verbindenden Geraden beschrieben werden; der von der Ebene der drei Körper eingehüllte Kegel.

Aus der Betrachtung dieser drei Arten geometrischer Gebilde entstehen sofort einige grundlegende Aufgaben. Welches sind die Veränderlichen, von denen die wesentlichsten Eigenschaften dieser Kurven, dieser geradlinigen Flächen und dieses Kegels abhängen? Wenn in einem gegebenen Augenblick die drei Geschwindigkeiten in der Ebene der drei Körper liegen, so sind die Bahnen offensichtlich ebene Kurven, und die Regelflächen der Aufgabe fallen mit der gemeinsamen Ebene der drei Bahnen zusammen. Lassen sich noch andere Fälle finden, bei denen mindestens einer der drei Körper eine ebene Kurve als Bahn beschreibt? Lassen sich andere Fälle finden, bei denen eine der Regelflächen des Problems abwickelbar wird oder auf einen Kegel zurückkommt? Wir werden zeigen, daß dieser Fall nur eintreten kann, wenn zwei Seiten des Dreiecks der drei Körper beständig gleich bleiben. Nehmen wir dagegen an, daß die von einem der drei Körper beschriebene Asymptotenlinie auf einer der Regelflächen des Problems sei. Wir werden finden, daß auch in diesem Falle zwei Seiten des Dreiecks beständig gleich bleiben müssen. Somit stellt sich die Frage nach der Existenz oder der Nichtexistenz von speziellen Lösungen des Dreikörperproblems ein, bei denen das Dreieck der drei Körper immer gleichschenklig bleibt. Will man die bekannten Lagrangeschen Lösungen verallgemeinern, bei denen das Dreieck der drei Körper immer gleichseitig bleibt, so kommt man auf dasselbe Problem. Der große Mathematiker hat also die in dieser Richtung liegenden Möglichkeiten erschöpft; wir werden den folgenden Satz beweisen: Wenn zwei Seiten des von den drei Körpern gebildeten Dreiecks immer gleich sind, und wenn die Massen der beiden an der Basis dieses gleichschenkligen Dreiecks liegenden Körper nicht gleich sind, so muß die dritte Seite des Dreiecks den beiden andern gleich sein, so daß dieser Fall auf den Lagrangeschen zurückkommt. Wenn dagegen die erwähnten Massen gleich sind, so lassen sich zwei neue Fälle gleichschenkliger Lösungen des Problems finden, wie dies schon Fransén 1895 bewiesen hat (Stockholm Öfv. **52**, 783-805; F. d. M. **26**, 1098, 1895). Um diesen Satz zu beweisen, habe ich einen langen und schwierigen Weg verfolgen müssen."

§ 1. Die Differentialgleichungen des Dreikörperproblems. § 2. Die Regelfläche R_{xy}, beschrieben von der Seite $P_x P_y$ des Dreiecks. § 3. Differentialgleichungen der Bahnen. § 4. Beweis der Nichtexistenz gleichschenkliger Lösungen in dem allgemeinen Falle, die von den Lagrangeschen gleichseitigen verschieden sind. (Dieser Beweis ist von W. D. MacMillan beigesteuert.)

Lp.

S. Brodetzky. Integrals in dynamics and the problem of three bodies. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 300-314.

Der Verf. behandelt Eigenschaften der Integrale der Dynamik, die unter speziellen Annahmen stattfinden, indem er hofft, daß daraus für das Dreikörperproblem neue Ergebnisse gefolgert werden können. So wird z. B. angenommen, daß in den bekannten Erstintegralen eines der Momente nur algebraisch vorkommt, um einen Fall zu haben, der den von Bruns und von Painlevé behandelten Fall einschließt. Die formelreiche Arbeit gestattet für die erörterten Fälle keine gedrängte Wiedergabe der Rechnungen und ihrer Resultate.

Lp.

K. Bohlin. Sur le développement des intégrales du problème des trois corps. Première partie. Rayon vecteur par rapport au centre de gravité binaire. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. **8**, Nr. 35, 28 S.

Unter einem neuen Gesichtspunkte werden die Entwicklungen der Integrale des Dreikörperproblems betrachtet in bezug auf den analytischen Ausdruck des von dem Schwerpunkte zweier der Körper nach dem dritten gezogenen Fahrstrahls, und zwar für den von E. v. Haerdtl numerisch integrierten Fall der Bewegung (F. d. M. **24**, 1138, 1892). Der Verf. sucht den Ausdruck für den Fahrstrahl aufzustellen, indem er die Koeffizienten der „autologen" Reihen bestimmt, aus denen dieser Ausdruck sich zusammensetzt. Hierzu betrachtet er einerseits die algebraischen Bedingungen der gesuchten Entwicklung, andererseits die numerischen Kongruenzen in bezug auf fundamentale Konstanten; er wählt gewisse ganze Zahlen zum Ausgangspunkt oder auch gewisse periodische Zahlen oder endlich die Abweichungen der v. Haerdtlschen Bahn von der nun bearbeiteten. Wenn auch die so gefundenen Ausdrücke in erster Linie sich auf den besonderen von E. v. Haerdtl betrachteten Fall beziehen und künftig vielleicht abzuändern sind, so hofft der Verf. doch, daß die Ausdrücke sich den Entwicklungen anpassen lassen, die in dem allgemeinen Falle des betrachteten Problems gelten. Lp.

Fr. Moulton. Periodic oscillating satellites in the problem of three bodies. Math. Ann. **73**, 441-479.

Lagrange hat gezeigt, daß das Dreikörperproblem zwei Typen exakter Lösungen besitzt; in beiden sind die Verhältnisse der gegenseitigen Abstände Konstanten und die beschriebenen Bahnen Kegelschnitte. Bei dem ersten Typus liegen die drei Körper in einer Geraden, bei dem zweiten in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks.

Man nehme an, einer der drei Körper sei infinitesimal, die Massen der beiden anderen seien von Null verschieden. Wenn der infinitesimale Körper wenig aus einem der Lagrangeschen Lösungspunkte verschoben wird, so oszilliert er um ihn oder entfernt sich von ihm je nach den Umständen. Wenn er oszilliert, so erscheint er, von einem der beiden endlichen Körper aus gesehen, ein wenig hin und her zu gehen und wird daher der oszillierende Satellit genannt. In der vorliegenden Abhandlung wird die Existenz gewisser oszillierender Satelliten, bei denen die Bewegung periodisch ist, sowohl in zwei als auch in drei Dimensionen nachgewiesen, und es werden die allgemeinen Eigenschaften der Bahnen erörtert. Nur solche Bahnen werden betrachtet, die in der Nähe der Lagrangeschen kollinearen Lösungen liegen, obgleich dieselben Methoden auch auf solche anwendbar sind, die in der Nähe der Ecken gleichseitiger Dreiecke erfolgen.

Der Fall, bei welchem die Bahnen der endlichen Körper Kreise sind, ist schon vielfach behandelt worden. Dagegen ist der Fall, bei welchem die endlichen Körper Ellipsen beschreiben, bisher noch nicht betrachtet, und seine strenge Behandlung ist viel schwieriger. Wenn die endlichen Körper Kreise beschreiben, so bilden die Bahnen des oszillierenden Satelliten eine stetige Reihe in der Umgebung des Lagrangeschen Punktes; die Perioden variieren stetig mit den linearen Dimensionen der Bahnen, und die Bahnen kehren alle

nach einem einzigen Umlauf wieder. Wenn die endlichen Körper in elliptischen Bahnen kreisen, bilden die Bahnen des oszillierenden Satelliten eine geometrisch unstetige Reihe in der Umgebung der Lagrangeschen Lösungspunkte; die Perioden variieren unstetig mit den linearen Dimensionen der Bahnen, und die Bahnen kehren erst nach vielen Umläufen wieder, weil die Perioden Vielfache der Perioden der endlichen Körper sind. Die Lösungen in dem ersteren Falle werden aus verhältnismäßig einfachen Differentialgleichungen gefunden, die in den Folgestufen der Integration linear mit konstanten Koeffizienten sind, und die Bestimmung der willkürlichen Konstanten zur Befriedigung der Bedingungen für die Periodizität bietet keine Schwierigkeiten. Die Lösungen in dem letzteren Falle hängen auf jeder Stufe der Integration von linearen Gleichungen mit periodischen Koeffizienten ab, und die Bestimmung der willkürlichen Konstanten zur Befriedigung der Periodizitätsbedingungen ist verknüpft mit den Eigenschaften der Lösungen solcher linearen Differentialgleichungen, die auf der rechten Seite Glieder haben, welche Produkte aus Exponentialfunktionen und periodischen Funktionen sind. In dem ersteren Falle existiert nur eine einzige Bahn von gegebener Periode in der Umgebung eines der Lösungspunkte; in dem letzteren gibt es zwei für jede Periode. In dem ersteren Falle ist es möglich, durch numerische Prozesse die Existenz der periodischen Bahnen nachzuweisen, wenigstens wenn der infinitesimale Körper in der Bewegungsebene der endlichen Körper sich bewegt, und auch ihre Eigenschaften zu finden. In dem letzteren ist es überhaupt unmöglich, durch numerische Prozesse die Existenz der periodischen Lösungen zu erweisen.

Wenn die endlichen Körper Kreisbahnen beschreiben, existiert ein Integral. Es wird gezeigt, wie dieses Integral bei der praktischen Bestimmung der Lösungen an Stelle der z-Gleichung benutzt werden kann, wo die xy-Ebene die Bewegungsebene der endlichen Körper ist, oder es kann zur Kontrolle der algebraischen und numerischen Rechnungen dienen. Wenn die endlichen Körper elliptische Bahnen beschreiben, existiert das Integral nicht; aber es wird gezeigt, wie das angedeutete entsprechende Integral zu denselben Zwecken benutzt werden kann. Lp.

Ph. H. Ling. On a certain integral of the problem of three bodies. Phil. Mag. (6) **25**, 157-163.

Der Verf. macht es wahrscheinlich, daß das beschränkte Dreikörperproblem im dreidimensionalen Raume ein bislang noch unbekanntes Integral besitzt, das sich als eine konvergente trigonometrische Reihe ausdrücken lasse. Lp.

G. Armellini. Sul moto di un punto attratto da più centri fissi. Rom. Acc. L. Rend. (5) **22**$_1$, 672-678.

Der Verf. faßt am Schluß der Arbeit die Ergebnisse in den Sätzen zusammen: Durch Hinzunahme einer passend gewählten, unabhängigen Veränderlichen q sind die Koordinaten eines beweglichen Punktes Q, welcher der Newtonschen Anziehung mehrerer festen Zentren P_i unterworfen ist, mit Hülfe von Potenzreihen ausdrückbar, die für $|q| < 1$ konvergieren; diese stellen die Bewegung von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ dar. Die Lösung bleibt gültig, unabhängig von der Anzahl von Malen, wenn der Punkt Q bei seiner Bewegung den

einen oder den andern der festen Punkte trifft, obschon in einem solchen Falle seine Geschwindigkeit unendlich wird. Die jeder Lage entsprechende Zeit wird durch eine Quadratur erhalten. Wir können dieses Resultat einem analogen gegenüberstellen, das Sundman in dem Dreikörperproblem erhalten hat (Acta Math. **36**; F. d. M. **43**, 826, 1912); während aber die Sundmanschen Formeln voraussetzen, daß das Moment der Bewegungsgrößen des Systemes nicht Null ist, sind die unsrigen von jedweder Voraussetzung frei. Lp.

H. Schouten. Le mouvement relatif à la terre. Nieuw Archief (2) **10**, 320-352.

Zuerst wird darauf hingewiesen, daß bei der Relativbewegung eines Körpers zur Erde die verschiedenen Bearbeiter der Frage meist ohne Angabe von Gründen Kräfte nicht berücksichtigt haben, die doch von Einfluß sind, wie z. B. die Anziehung von Sonne und Mond und — mit Ausnahme von Bour — die jährliche Bewegung der Erde. Angesichts dieser Tatsachen meint der Verf., daß seine Studie über den Gegenstand nicht ohne Interesse sein dürfte.

Das erste Kapitel ist der Ableitung der Bewegungsgleichungen eines freien Punktes gewidmet, zunächst in bezug auf drei mit der Erde fest verbundene Achsen, danach in der Lagrangeschen Form. Diese Gleichungen sind der analytische Ausdruck des Satzes: Die Relativkraft ist die Resultante dreier Kräfte, der bewegenden Kraft, der Schwerkraft, der zusammengesetzten Zentrifugalkraft. Die Schwere kann als die Resultante zweier Kräfte angesehen werden, der Anziehungskraft der um ihre Achse sich drehenden Erde und der Anziehungskraft der Himmelskörper, die nichts anderes ist als die Kraft, welche die Gezeiten hervorruft. Die Gegenwart dieser letzteren Komponente der Schwere ist der Grund, weshalb die Bewegungsgleichungen eines Punktes in keiner Weise integriert werden können. Die Kraft, welche die Gezeiten hervorruft, ändert sich in jedem Augenblick nach Größe und Richtung zufolge ihrer Abhängigkeit von der Lage des Gestirns in bezug auf den Horizont des Ursprunges der Koordinatenachsen. Bei der Bestimmung der Bewegung eines Punktes in bezug auf die Erde muß man diese Kraft vernachlässigen.

Da nun der Ausdruck für die zu vernachlässigende Kraft den Faktor ω^2 hat, wo ω die Winkelgeschwindigkeit der täglichen Erddrehung ist, so folgt, daß man sich danach bescheiden muß mit der Näherung, die man durch die Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung von ω^2 erhält. Nun ist die Änderung der Schwere, was die Komponente der Anziehung von der um ihre Achse sich drehenden Erde anlangt, von jener Ordnung; daher muß man die Schwere als konstant nach Größe und Richtung annehmen während der Bewegung des Punktes.

Vernachlässigt man die Kraft, welche die Gezeiten veranlaßt, nimmt man also die Schwere als konstant an, so sind die Gleichungen der Bewegung eines Punktes in bezug auf die Erde linear mit konstanten Koeffizienten und enthalten ω nur in der ersten Potenz. Es wäre also leicht, sie in aller Strenge zu integrieren; selbstverständlich muß man aber alle Glieder mit dem Faktor ω^2 vernachlässigen, welche die Integration in der Lösung schaffen könnte.

In demselben Kapitel wird der Fall der Bewegung eines Körpers oder eines Systems von Körpern behandelt. Die Bewegungsgleichungen können ebenfalls

in keiner Weise integriert werden; man muß sich also mit der Annäherung begenügen, von der bei der Bewegung des Punktes die Rede war.

Auf die Bewegung des Systems der Körper eines Gyroskops angewandt, sind diese Gleichungen jedoch korrekt. Die Kraft, welche die Gezeiten hervorruft, hat keine Wirkung, und die Schwere kann als konstant angenommen werden. Die Gleichungen der Bewegung sind in diesem Falle identisch mit denen, die Gilbert in seiner Abhandlung (F. d. M. **21**, 864, 1889) gegeben hat. Sie sind streng zu integrieren, wenn man die richtige Lösung finden will.

In dem zweiten Kapitel wird der Fall eines Gyroskops behandelt. Die Lösung der Bewegungsgleichungen des Torus wird in dem interessantesten Falle gegeben, wo diese Lösung durch Kreisfunktionen geschieht, nämlich in dem Falle, wo das Trägheitsellipsoid in bezug auf den Mittelpunkt des Torus auf eine Kugel zurückkommt, der Torus also eine Kugel oder eines der regelmäßigen Polyeder ist. Das Ergebnis dieser Überlegung ist, daß die Bewegung des Torus aus drei Schwingungen von gleicher Periode zusammengesetzt ist.

In einem dritten Kapitel wird endlich in Weierstraßschen Funktionen die Lösung der Gleichungen eines Gyroskops in den Fällen gegeben, wo dieser in seiner Bewegung um seinen festen Punkt beschränkt ist. Die Achse des Torus führt auf der Oberfläche, auf die ihre Bewegung beschränkt ist, Oszillationen von vier verschiedenen Typen aus. Lp.

G. Gianfranceschi. Misure di deviazione dei gravi. Rom. Acc. L. Rend. (5) **22**$_2$, 561-568.

Der Verf. hat die Versuche Hagens mit der Atwoodschen Maschine (F. d. M. **43**, 828, 1912) wiederholt, indem er einige Abänderungen anbrachte. Die wichtigste besteht darin, daß er nach dem Vorbilde von Hall durch das fallende Gewicht den Endpunkt der Bahn auf einer Kreisplatte markieren läßt. Eine unter dem Gewicht befestigte Stahlspitze durchbohrt die aus Karton hergestellte Kreisscheibe, die natürlich vorher genau orientiert ist. Auch der Ort der Versuche war ein anderer; die Fallhöhe betrug 30,39 m, die Versuchsdauer jedesmal bei den 175 Versuchen 8^s, 35. Das Gewicht der absteigenden Masse war 49,785 g, das der aufsteigenden 30,160 g, das der Rolle 93 g, das eines Meters vom Faden 0,189 g, die mittlere konstante Fallbeschleunigung $\gamma =$ 0,872 m. Alle Zahlen der einzelnen Versuche sind mitgeteilt; ihre Verarbeitung nach der Methode der Fehlerausgleichung ergibt in Millimetern: östliche Abweichung $1{,}866 \pm 0{,}014$, nördliche $0{,}033 \pm 0{,}010$. Die wahrscheinlichen Fehler sind also etwa halb so groß wie in den Hagenschen Versuchen. Dagegen ist die Differenz des theoretisch berechneten Wertes der östlichen Abweichung 2,081 von dem experimentell gefundenen 1,866 hier 0,215, während sie in den Experimenten von Hagen nur 0,010 beträgt. Der Verf. meint, die nach der Gaußschen Annäherung ausgeführte theoretische Berechnung sei nicht genau genug. Lp.

G. Gianfranceschi. La deviazione dei gravi in caduta. Nuovo Cimento (6) **6**, 255-285.

Dieser Aufsatz gibt eine ausführlichere Darstellung der Arbeiten des Verf. als der vorstehend angezeigte. Am Schlusse werden folgende Sätze als Ergebnisse der Untersuchung ausgesprochen:

„Das Problem der Ablenkung schwerer Körper beim Fall kann nicht mit Sicherheit als gelöst bezeichnet werden. Die vorliegende Untersuchung liefert nur einen experimentellen Beitrag. Die Versuche haben hierbei eine Genauigkeit erreicht, die bisher noch nicht erzielt war. Die Übereinstimmung der Versuchsergebnisse mit den theoretischen ist nicht ganz vorhanden. Die Formeln von Gauß, Laplace und Poisson für die östliche Abweichung bleiben auch nach den jüngsten theoretischen Forschungen in guter Geltung bestehen, scheinen aber durch den Versuch nicht genügend bestätigt. Für die südliche Ablenkung sind die Unterschiede zwischen den verschiedenen Theorien beträchtlich. Was das Experiment anlangt, so ist die Theorie, der man sich am meisten nähert, noch immer die klassische. Hier ist zu bemerken, daß in den klassischen Formeln sowie in allen, die sich auf Koordinatenachsen mit dem Ausgangspunkt des fallenden Körpers als Ursprung beziehen, falls die Vertikale des Punktes als z-Achse gewählt wird, die Formeln nicht die Ablenkungen geben, welche bei dem Versuche gemessen werden. Dieser betrachtet als Ursprung den Fußpunkt der Vertikale, gefällt vom Aufhängepunkt des Körpers, und diese Vertikale wird senkrecht zur Erdoberfläche, nicht mehr im Aufhängepunkt, sondern in einem tieferen Punkte, und bildet einen kleinen Winkel mit der z-Achse. Was endlich die Beziehung betrifft, die das Problem zur Erddrehung hat, so ist zu beachten, daß die Versuche nicht bloß die von der Drehung verursachte Ablenkung ergeben, sondern die ganze Ablenkung vom Fußpunkte der Vertikale, welche Ablenkung sowohl von dem Schwerefelde, als auch von der Erddrehung herrührt; wenn eben die Erde feststände, würde der Körper nicht in den vom Bleilot angegebenen Fußpunkt der Vertikale fallen. Die Gleichungen von Gauß tragen der Wirkung der Drehung nicht Rechnung." Lp.

J. G. Hagen. How Atwood's machine shows the rotation of the Earth even quantitatively. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 286-290.

Auszug aus den bezüglichen größeren Veröffentlichungen des Verf. (F. d. M. **42**, 775, 1911 u. **43**, 828, 1912). Lp.

H. Janne. Les nouvelles expériences relatives à la démonstration mécanique de la rotation de la Terre. Rev. des qu. sc. (3) **24**, 17-66.

Geschichtliches über die alten und die neuen Experimente. Elementare und kritische Darstellung der jüngsten Versuche von Hall, von Föppl, von Tumlirz und von Hagen. Der Verf. bemerkt vorsichtig am Schluß, daß es sich nicht um die absolute Rotation der Erde handelt, sondern um ihre Rotation gegenüber der Sternwelt. Mn. (Lp.)

D. K. Picken. The simple pendulum. Math. Gazette **7**, 173-175.

Zusammenhang mit der einfachen harmonischen Bewegung. Lp.

Sir G. Greenhill. The simple pendulum. Math. Gazette **7**, 189-192.

Der Verf. schließt sich den Einwänden von Picken gegen das in den Lehrbüchern übliche Verfahren zur Ableitung der Formel für die Dauer einer Schwingung an und wiederholt im wesentlichen seine in dem Horological Journal abgedruckte Methode (F. d. M. **41**, 801, 1910). Lp.

J. C. Shedd, J. A. and W. N. Birchby. A study of the reversible pendulum. Part II. Experimental verifications. Phys. Rev. **34**, 110-124 (1912).

Der erste Teil dieser Arbeit ist 1908 erschienen. Der Einfluß, den die Änderungen der einzelnen Konstanten auf die Schwingungen des Reversionspendels haben, werden auf Grund der im ersten Teile berechneten Formeln analytisch diskutiert und graphisch veranschaulicht. Schließlich werden die Tabellen der Zahlenreihen vorgeführt, die zur Bestätigung der Theorie aus einer großen Reihe von Versuchen gewonnen sind. Lp.

J. C. Shedd and J. A. Birchby. A study of the reversible pendulum. Part III. A critique of Captain Kater's Paper of 1818. Phys. Rev. (2) **1**, 457-462.

In der Originalarbeit Katers über das Reversionspendel sind folgende Sätze durch Kursivdruck hervorgehoben: „Welche Änderung auch in der Anordnung der Gewichte gemacht wird, der Effekt auf die Schwingungen (ausgenommen in einem besonderen Falle) wird derselbe sein in beiden Lagen des Pendels, indem immer ihre Anzahl in beiden Fällen vergrößert oder verringert wird, obschon in verschiedenem Grade: die Schwingungen werden am wenigsten durch einen solchen Wechsel betroffen werden, wenn das große Gewicht unten ist, und werden somit der Wahrheit in dieser Lage am nächsten sein." Der Sinn dieser Sätze wird in dem vorliegenden Artikel erläutert, besonders der in Parenthese gesetzte Ausnahmefall. Mit den Daten des Katerschen Pendels werden die nötigen Zahlenrechnungen durchgeführt. Hierbei stellt sich heraus, daß „Kater das Pendel unter den am wenigsten günstigen Bedingungen gebrauchte. . . . Eine geringe Änderung in der Verteilung der Massen würde die Bedingungen des Versuches bedeutend verbessert haben". Lp.

O. Tedone. Sul pendolo a sospensione elastica. Rom. Acc. L. Rend. (5) **22**$_1$, 347-355.

Ein homogener elastischer Faden von der Länge l_0 im ungespannten Zustande trage an dem einen Ende ein Gewicht $P = mg$, das andere Ende diene als Aufhängepunkt, so daß in der Ruhelage die Länge $l = l_0(1 + P/k)$ ist, wenn k^2 der Elastizitätsmodul des elastischen Fadens ist. Die x-Achse sei nach unten gerichtet und falle mit der Ruhelage des Pendels zusammen. Sind u, v, w die Komponenten der Verrückung eines beliebigen Punktes des elastischen Fadens, so genügen sie den Gleichungen:

$$(1)\quad \mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \mu\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = P\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

wo μ die Dichte des elastischen Fadens ist (das Gewicht des Fadens ist hierbei vernachlässigt gegen P). Für den unteren Punkt erhält man

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k^2}{m}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + g\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + g\frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Die Integration dieser Differentialgleichungen für kleine Schwingungen des Pendels um die Ruhelage ist der Gegenstand der Abhandlung, nicht nur für den Fall eines festen Aufhängepunktes, sondern gerade für den allgemeineren, wenn der Aufhängepunkt eine vorgeschriebene Bewegung ausführt, z. B. ein Punkt einer schwingenden Stimmgabel ist. Die abgeleiteten Formeln eignen sich nicht zur Wiedergabe.

Lp.

E. Esclangon. Sur l'entraînement du support dans les observations du pendule. C. R. **156**, 1005-1008.

Der Verf. bezieht sich nur auf die alten Arbeiten von Peirce, Cellérier, Plantamour und Defforges über den Gegenstand, scheint also die neueren eingehenden theoretischen und experimentellen Untersuchungen aus den Jahren 1896-1900 von Lorenzoni, Haid, Schumann, Helmert usw. nicht kennen gelernt zu haben. Er geht von der Korrektionsformel für die Änderung dT der Schwingungsdauer T eines Pendels bei Peirce und Cellérier aus:

$$dT = -\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\cdot\frac{1}{k}\frac{Mgh}{2\lambda^2}$$

(M = Masse des Pendels, λ = Länge des synchronen mathematischen Pendels, h = Abstand des Schwerpunktes von der Aufhängeachse, k = „statischer Biegungskoeffizient", eine sehr große Zahl). In der Note soll gezeigt werden, daß (im Widerspruch zu Plantamour) tatsächlich der statische Koeffizient in diese Formel eingesetzt werden muß, und daß die Korrektion weder von der Masse des Trägers, noch von der inneren Reibung, welche die Schwingungen zu dämpfen strebt, abhängig ist. Hierzu wird die Schwingungsdauer in der Form abgeleitet:

$$T = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\left[1 + \frac{n}{2\lambda} + \frac{1}{k}\frac{Mgh}{2\lambda^2}\right].$$

Die Größe $-\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\cdot\frac{n}{2\lambda}$ bedeutet in ihr Gleitungskorrektion. Die Größe $-\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{Mgh}{2\lambda^2}$ ist die Korrektion zufolge der Mitführung des Trägers; diese hängt von k ab, jene nicht.

Lp.

A. Denizot. Das Foucaultsche Pendel und die Theorie der relativen Bewegung. Mit 19 Figuren im Text. Leipzig u. Berlin.: B. G. Teubner. IV u. 76 S. 8°.

„In diesen Blättern nehme ich ein Studium über die relative Bewegung wieder auf, das ich vor einigen Jahren zuerst in den Berichten der Krakauer

Akademie, dann in einer andern Bearbeitung in den Annalen der Physik veröffentlicht habe" (vgl. F. d. M. **36**, 778, 1905, besonders aber das Selbstreferat Fortschr. d. Phys. **61** [1], 97-99, 1906).

„Diese neuen Untersuchungen verfolgen vor allem zwei Ziele: Erstens sollen sie zeigen, daß die Vernachlässigung gewisser Glieder, welche in den Differentialgleichungen der Bewegung eines Körpers an der Erdoberfläche vorkommen und das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit der Erde enthalten, vollständig unbegründet ist. Zweitens sollen sie die Zwecklosigkeit der bisherigen Rechnungen bezüglich der Theorie des Foucaultschen Pendelversuches darlegen und gleichzeitig dem einfachen Sinusgesetz, das den eigentlichen Hintergrund dieser ganzen Betrachtung bildet, auch eine einfache Interpretation geben."

Der erste Teil der Schrift ist der Entwicklung der allgemeinen Gleichungen für relative Bewegungen gewidmet, der zweite den Anwendungen der allgemeinen Gleichungen auf einige einfache Fälle, der dritte der Bewegung eines Körpers an der Oberfläche der rotierenden Erde. Hier werden der Reihe nach behandelt: 1. Allgemeines. 2. Relative Ruhe eines Körpers. 3. Relative Bewegung eines Körpers. A. Allgemeines. B. Der freie Fall. a) Absolute Bewegung. b) Relative Bewegung. c) Integration der Differentialgleichungen für relative Bewegung. d) Relative Bahn. e) Untersuchung für den Nordpol. f) Anteil der einzelnen fingierten Kräfte. g) Versuche. C. Das Foucaultsche Pendel. a) Elementare Betrachtung. b) Beziehung zu den allgemeinen Gleichungen. c) Beziehung zu dem Prinzip der lebendigen Kraft. d) Kritik des üblichen Beweises. e) Analoge Rechnung für den Nordpol. f) Über einen andern oft begangenen Fehler. Schlußwort. Lp.

A. Pizzarello. Dimostrazione sperimentale per la durata d'oscillazione del pendolo in ragione inversa della radice quadrata della forza che porta la massa del pendolo alla posizione di equilibrio. Nuovo Cimento (6) **5**, 407-411.

Beschreibung eines Laboratoriumsversuches zum Nachweise der Verkürzung der Schwingungsdauer bei Vergrößerung der bewegenden Kraft. Bei der Ausführung des Versuches durch Studenten hat sich eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung ergeben, so daß die Verwendung der Anordnung bei Übungen im Laboratorium sich empfiehlt. Die Einzelheiten müssen im Original nachgesehen werden. Lp.

A. Pensa. Sopra alcune proprietà del moto di un corpo rigido. Palermo Rend. **36**, 91-98.

Herleitung einer Reihe bekannter Sätze mittels der allgemeinen Vektorrechnung nach Burali-Forti und Marcolongo. Lp.

A. Rauber. Über die Lösung der Differentialgleichungen, welche die Bewegung des dreiachsigen Kreisels um einen festen Punkt beschreiben. Inaug.-Diss. München. 53 S. 8°.

Der erste Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Lösung der zugehörigen Differentialgleichungen. Auf Grund eines Satzes von Poincaré wird diese Lösung dargestellt durch dreifach unendliche Reihen nach Potenzen der Schwerpunktskoordinaten; die Koeffizienten dieser Reihen sind Funktionen der Zeit t und sind durch ein rekurrierendes System von linearen Differentialgleichungen eindeutig definiert. Die Lösungsreihen konvergieren für alle endlichen Zeiten und genügen beliebig vorgeschriebenen Anfangsbedingungen. Der Variabilitätsbereich der Schwerpunktskoordinaten ist, nach der bisherigen Kenntnis, abhängig von der Zeitdauer; er kann durch das Prinzip der analytischen Fortsetzung erweitert werden. Diese analytische Fortsetzung kann in beliebiger endlicher Anzahl ausgeführt werden. Dann werden die Elemente zur Darstellung der Koeffizienten entwickelt; diese Funktionen können in einer prinzipiell einfachen Weise durch rekurrierende Formeln aus elliptischen Funktionen aufgebaut werden. Eine Konvergenzbetrachtung dient dazu, den Gültigkeitsbereich der Lösungsreihen abzuschätzen.

Im zweiten Teile (S. 33-53) wird ein lineares Differentialsystem dritter Ordnung, das im ersten Teil eine wichtige Rolle spielt, untersucht; seine Lösung wird systematisch nach der Funktionentheorie entwickelt. — Die elliptischen Funktionen sind nach der Jacobischen Definition behandelt. Lp.

Clelia Silvestri. Sui moti stazionarii nel caso della Kowalevsky. Rom. Acc. L. Rend. (5) **22**$_1$, 18-23.

Fortsetzung der Abhandlung des Vorjahres (F. d. M. **43**, 831, 1913). Die Verfasserin beschäftigt sich jetzt genauer mit dem Falle b) [vgl. das angeführte Referat] und kommt zu dem Ergebnisse: Die stationären Lösungen, die aus dem Kowalevskyschen Integrale hervorgehen, sind stabil in dem Falle b_1) [Pendelschwingungen], instabil in dem Falle b_2) [vollständige Rotationen um die horizontal gerichtete Achse Oy]. Lp.

G. Schouten. Le mouvement d'une toupie lancée sur un plan horizontal. Nieuw Archief (2) **10**, 429-439.

Der Verf. definiert den Kreisel als einen homogenen Drehkörper, der sich mit einem und demselben Punkt seiner Achse auf eine Horizontalebene stützt. Es handelt sich um die Bewegung des Kreisels in zwei Grenzfällen. 1. Fall, bei dem die Horizontalebene eine solche Reibung ausübt, daß sie eine Verrückung des Stützpunktes auf der Ebene verhindert. Dann ist die Bewegung des Kreisels identisch mit der eines homogenen Drehkörpers um einen festen Punkt seiner Achse. Diese Bewegung hat der Verf. in einer früheren Abhandlung ausführlich erörtert („Le mouvement d'un solide de révolution autour d'un point pris sur son axe de figure." Nieuw Arch. (2) **9**, 261-300; F. d. M. **41**, 803, 1910). 2. Fall, bei dem die Ebene keine Reibung ausübt. Diese Aufgabe führt auf hyperelliptische Integrale. Allein die Differentialgleichungen der Bewegung des Kreisels um seinen Schwerpunkt haben die nämliche Gestalt wie jene, die sich auf die Bewegung des Kreisels in dem ersten Fall beziehen; deshalb können die aus den letzteren gewonnenen Ergebnisse auf die Bewegung des Kreisels in dem

zweiten Falle angewandt werden und können dazu helfen, von den verschiedenen Bewegungen, die der Kreisel ausführen kann, eine klare Vorstellung zu geben. Der Durchführung dieses Gedankens ist die vorliegende Arbeit gewidmet. Lp.

F. PFEIFFER. Über eine Gleit- und Rollbewegung starrer Körper. Zs. f. Math. u. Phys. **62**, 113-148.

Zuerst wird die Bewegung einer homogenen Kreisscheibe auf einer festen Geraden behandelt. Dabei ergeben sich folgende Sätze: Das gesamte Impulsmoment der sich bewegenden Scheibe in bezug auf den momentanen Berührpunkt ist während der ganzen Gleit- und Rollbewegung konstant. Die gesamte Energiemenge, die während der Gleitbewegung der Scheibe auf der rauhen Führungsgeraden durch die Reibung verzehrt wird, ist ihrem Betrage nach unabhängig von der Größe des Reibungskoeffizienten.

Die Scheibe befinde sich in einer beliebigen Anfangslage x_0, θ_0 auf der Führungsgeraden und habe die Geschwindigkeitskoordinaten x'_0 und θ'_0; dadurch erhält das ganze Impulsmoment $-m\,(R\,x'_0 + k^2\,\theta'_0)$ der Scheibe in bezug auf den momentanen Berührpunkt einen bestimmten Zahlenwert J_0. Dieser Wert wird während der ganzen folgenden Bewegung beibehalten, und die lebendige Kraft T der Scheibe ist in jedem Moment gegeben durch $T = \frac{1}{2}m(x'^2 + k^2\,\theta'^2)$. Die erste Phase der Bewegung ist eine Gleitbewegung; zu einem bestimmten Zeitmoment tritt Rollbewegung ein. Das Wertepaar x', θ', das diesem Moment entspricht und während der darauf folgenden Rollbewegung beibehalten wird, macht T zum Minimum unter denjenigen Werten T, welche man für alle Wertepaare x', θ' erhält, die auch das gesamte Impulsmoment gleich J_0 machen.

Die Kreisscheibe werde in irgendeine Anfangslage x, θ gebracht, und es sollen ihr Geschwindigkeitskoordinaten x', θ' so erteilt werden, daß a) das aus diesen Werten sich berechnende gesamte Impulsmoment $-\,m(R\,x' + k^2\,\theta')$ in bezug auf den momentanen Berührpunkt gleich einer vorgeschriebenen Konstante J_0 sei, und daß b) die anfängliche lebendige Kraft $T = \frac{1}{2}m(x'^2 + k^2\,\theta'^2)$ für die eintretende Bewegung kleiner sei als für irgendein anderes Wertepaar x', θ', das auch der Bedingung a) genügt. Dann erfüllen die gesuchten Werte x', θ' auch die Relation $v = 0$, leiten also eine Rollbewegung ein, deren lebendige Kraft konstant gleich $\frac{J_0^2}{2\,m(k^2+R^2)}$ ist.

Die dann zu behandelnde Aufgabe besteht darin, zu untersuchen, wieweit die bei dem einfachen Beispiel gewonnenen Resultate sich sinngemäß auf das allgemeine Problem der Gleit- und Rollbewegung einer beliebigen, mit Masse belegten ebenen Scheibe auf einer beliebigen, in ihrer Ebene liegenden rauhen, festen Kurve ausdehnen lassen. Wesentlich bei dem zuerst behandelten Beispiel ist es, daß die an der Scheibe angreifenden äußeren Kräfte mit Ausnahme der Reibungskraft bei keiner Bewegung Arbeit leisten; so wird denn auch bei der Verallgemeinerung zunächst vorausgesetzt, daß außer der Normalreaktion zwischen Scheibe und Führung und der Reibungskraft nur eine der Größe nach konstante Kraft P auf die Scheibe wirkt, welche im jeweiligen Berührpunkt zwischen beweglicher und fester Kurve normal zur gemeinsamen Tangente der beiden Kurven von der beweglichen Kurve gegen die feste gerichtet ist, und über deren absolute Größe zweckentsprechend verfügt wird.

Es ergibt sich, daß sich nur ein Teil der im ersten Abschnitt gewonnenen Resultate sinngemäß auf das allgemeinere Problem ausdehnen läßt, daß diese Resultate aber durchweg eine Erweiterung auf den Spezialfall zulassen, in dem die rollende Scheibe von einer Kreislinie begrenzt ist, deren Mittelpunkt mit dem Schwerpunkt der auf der Scheibe verteilten Masse zusammenfällt. Am Schlusse wird dann noch ein auf die lebendige Kraft der Rollbewegung bezüglicher Minimalsatz angegeben, der gilt, falls sich die Scheibe auf der festen Kurve unter der Wirkung beliebiger äußerer Kräfte in Rollbewegung befindet. Lp.

G. T. Bennett. The balancing of the four-crank engine. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 218-234.

Eine neue Behandlung des Massenausgleiches bei den vierkurbligen Maschinen (vgl. die bezüglichen Schriften von Lorenz und Schubert, F. d. M. **32**, 741-742, 1901). „Die gegenwärtige Abhandlung ist in der Hauptsache eine geometrische Arbeit, die zur Basis die besonderen Anforderungen des praktischen mechanischen Problems hat. Das Verfahren unterscheidet sich beträchtlich von den bisher angewandten Methoden. Es führt nicht nur zu einigen graphischen Konstruktionen, die den Zeichner unterstützen können, sondern auch zu einigen neuen Formeln, welche die Berechnungen erleichtern. Die Ergebnisse als Ganzes werden sich hoffentlich zur Ergänzung und Vervollständigung der gegenwärtig gebräuchlichen als nützlich erweisen.“ Am Schluß sind die Hauptergebnisse für den praktischen Gebrauch zusammengestellt.

In der an den Vortrag sich anschließenden Besprechung hat F. Morley wegen einiger Konstruktionen auf seinen Aufsatz „Some polar constructions“ aufmerksam gemacht (Math. Ann. **51**, 410-416; F. d. M. **29**, 466, 1898). Lp.

Ad. Janisch. Einiges über den Massenausgleich bei raschlaufenden Explosionsmotoren. Österr. Flugzs. **7**, 101-104.

Berechnung. Untersuchung einzelner Motoren. Nutzanwendung für den Konstrukteur. Schr.

A. Lechner. Über einen Apparat zur Demonstration der Massenwirkung. Zs. f. d. Realschulwesen **38**, 209-211.

Eine Welle, deren zwei Lager an je einem elastischen Faden aufgehängt sind. Schr.

C. Cranz. Lehrbuch der Ballistik. Dritter Band. Experimentelle Ballistik oder Lehre von den ballistischen Messungs- und Beobachtungsmethoden. Herausgegeben von C. Cranz und K. Becker. Mit 118 Figuren im Text. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. VIII u. 339 S. 8°.

Vgl. die Anzeige von Bd. I und IV in F. d. M. **41**, 809, 1910. Unter experimenteller Ballistik wird die Gesamtheit der Messungs- und Beobachtungs-

methoden verstanden, welche die empirischen Unterlagen für die ballistischen Berechnungen liefern und weiterhin zur Verfolgung der verschiedenen physikalischen Erscheinungen beim Schußvorgang dienen. Eine Abgrenzung des Gebietes der experimentellen Ballistik gegen die Waffenkonstruktionslehre und Waffenlehre ergibt sich durch die praktische Unterscheidung: Der Konstrukteur entwirft, zeichnet und konstruiert die einzelnen Teile der Waffe samt Zubehör. Wenn die Waffe schußfertig vorliegt, beginnt die Aufgabe des Ballistikers; er untersucht die verschiedenen Bewegungs-, Druck- und Temperaturverhältnisse beim Schuß aus der Waffe, erschießt die Schußtafeln und verwertet sie für die Teilung der Richtmittel. In der Waffenlehre werden die verschiedenen Waffen und Waffenteile beschrieben.

Der Inhalt des vorliegenden Bandes ist aus dem folgenden Abriß der acht Abschnitte ersichtlich, die in den fortlaufenden Nummern 106 bis 189 ihre weitere Einteilung finden.

1. Mathematische und physikalische Hülfsapparate und Hülfseinrichtungen. 2. Messung von Geschoßgeschwindigkeiten und kleinen Geschoßflugzeiten. Messung der Verbrennungsdauer eines rasch verbrennenden Zündsatzes, der Explosion eines Sprengstoffes usw. 3. Messung von größeren Zeitintervallen: Gesamtflugzeit eines Geschosses, Brenndauer von langsam brennenden Zündsätzen und Zündschnüren. 4. Prüfung der gebräuchlichen ballistischen Chronographen auf ihre relative und absolute Genauigkeit. 5. Messung des Abgangswinkels, Abgangsfehlerwinkels und Auffallwinkels. 6. Untersuchung einer Pulversorte auf Wärmegehalt, Verbrennungstemperatur, Verbrennungsdauer und spezifisches Volumen. 7. Messung des Druckes der Pulvergase. I. Statische Methoden. II. Halbstatische Methoden. III. Dynamische Methoden. 8. Ballistische Photographie. I. Photographie des fliegenden Geschosses samt den das Geschoß umgebenden Luftwellen und Wirbeln. II. Photographische Fixierung der Laufschwingungen. III. Die Photographie im Dienste der Ballistik. IV. Waffen- und Pulveruntersuchung mit elektrischer Momentphotographie. V. Ein ballistischer Kinematograph. Photographische Darstellung des zeitlichen Verlaufs von Vorgängen, die sich in einem Bruchteil einer Sekunde auf kleinem Raum abspielen. — Den Schluß bilden Literaturnoten und Bemerkungen, Sachregister, Namenregister, Verzeichnis der Druckfehler, nachträgliche Zusätze und Berichtigungen zu Band I.

Von dem ganzen monumentalen Werke, das eine Zierde der deutschen wissenschaftlichen Literatur ist, fehlt jetzt nur noch Band II: Die innere Ballistik, die nach der Ankündigung der Verlagshandlung von C. Cranz und O. Poppenberg bearbeitet wird. Während des Weltkrieges auf seinem eigensten Arbeitsfelde unablässig tätig, wird der Verf. des Werkes gewiß manche neue Erfahrungen und Entdeckungen nachzutragen haben. Lp.

A. Dähne. Bausteine zur Flugbahn- und Kreiseltheorie. Berlin: Verlag von R. Eisenschmidt. 44 S., 5 Textfig.

In dem ersten Teil der Schrift „Theorie der Drehung der Körper" erklärt der Verf. alle bisher aufgestellten Theorien der Rotation eines Körpers für falsch. Da er nur Lehrbücher der Physik zitiert und bekämpft, und da die von ihm mitgeteilten Erklärungsversuche einen ganz naiven empirischen Standpunkt

bekunden, so ist zu schließen, daß er kein Werk über die Mechanik des Vorganges kennen gelernt hat. Als kennzeichnend für seine Anschauungen sei mitgeteilt, daß er die Kegelbewegung der Erdachse, welche Ursache der Präzession ist, auf die durch die Rotation der Erde bewirkte Bewegung der Luft und des Wassers der Erde zurückführt.

Folgerichtig wird daher in dem zweiten, die Geschoßbewegung behandelnden Teil eine dem Verf. eigene Theorie verfochten, die mit den bisher aufgestellten Theorien anderer in Widersprüche gerät, für die wissenschaftliche Auffassung aber ohne Wert ist. Lp.

V. R. v. Niesiolowski-Gawin. Über neuere physikalische Forschungsmethoden der Ballistik. Vortrag. Vierteljahrsberichte des Wr. Vereins zur Förd. d. phys. und chem. Unterrichts **18**, 35-41, 74-82.

1. Geschoßbewegung. 2. Elektrische Momentphotographie von E. u. L. Mach. 3. Anwendungen der elektrischen Momentphotographie. Schr.

K. Kollmar. Mathematische Behandlung des Christianiaschwungs. Math. naturw. Mitt. (2) **15**, 9-19.

Ein Schiläufer fahre in gerader Richtung in einer Fallinie der schiefen Ebene ab, komme auf eine horizontale Ebene und wolle am Punkte O, in dem er die Geschwindigkeit v_0 erreicht habe, durch einen Ruck, der durch bloßes Verlegen des Schwerpunktes erreicht wird, mit einem Christianiaschwung nach rechts halten (ohne Reibung). Der Verf. untersucht, welche Bahn die Spitze Q des Schis bei dieser Bewegung beschreiben muß. Er findet für die Koordinaten eines Kurvenpunktes die Parameterstellung:

$$x = b\int_0^\beta \operatorname{tg}\left(\frac{a}{b}\beta\right)\cos\beta\, d\beta,$$

$$y = b\int_0^\beta \operatorname{tg}\left(\frac{a}{b}\beta\right)\sin\beta\, d\beta.$$

Lp.

E. Lieb. Über ungleichförmige Bewegungen eines Fadens, bei denen er seine Gestalt nicht ändert. Zs. f. Math. u. Phys. **62**, 78-93; Diss. Tübingen.

Es wird untersucht, unter welchen Umständen bei ungleichförmiger Bewegung der Achse ein mit ihr verbundener, unausdehnbarer, vollständig biegsamer Faden während der ganzen Dauer der Drehung seine Gestalt behält, wenn er ganz in einer zur Drehachse senkrechten Ebene liegt. Zunächst werden die Differentialgleichungen für die von dem Faden gebildete Gestalt aufgestellt bei einer durch gewisse Gleichungen definierten Drehbewegung. Danach werden verschiedene allgemeine Sätze abgeleitet. Wir führen die folgenden an: Der Krümmungsradius der Gleichgewichtskurve eines ebenen, homogenen, unausdehnbaren Fadens, der sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um einen Punkt der Ebene dreht, ist eine ganze rationale Funktion des vom Drehpunkt

aus gemessenen Fahrstrahles dieser Kurve. Wenn ein biegsamer, unausdehnbarer Faden von der Gestalt einer logarithmischen Spirale sich um den Pol der Spirale mit der Geschwindigkeit $\vartheta = -1/k_1(t+B)$ dreht, wo k_1 und B Konstanten sind, so behält er während der Bewegung diese Gestalt bei, vorausgesetzt, daß am freien Ende die nötige Endspannung angreift. Wird ein unausdehnbarer, biegsamer Faden, der das Dichtegesetz $kr^{-5/2}$ besitzt, in Gestalt einer Parabel auf eine horizontale Ebene gelegt (r = Abstand eines Punktes vom Brennpunkte), und werden die Enden des Fadens mit der Ebene fest verbunden, so kann die Ebene um eine durch den Brennpunkt der Parabel gehende, zur Ebene senkrechte Achse mit beliebig variierender Winkelgeschwindigkeit in Umdrehung gesetzt werden, ohne daß der Faden seine Gestalt verliert. Dies ist, sofern von Kräften abgesehen wird, der einzige Fall, bei dem die Winkelgeschwindigkeit als Funktion der Zeit beliebig gewählt werden kann. Lp.

E. Terradas. Sur le mouvement d'un fil. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 250-255.

Unter Hinweis auf die Dissertation von J. Arnoult: „Sur le mouvement d'un fil dans l'espace" (Nancy, 1911) behandelt der Verf. die Bewegung eines Fadens in dem Falle, wenn alle seine Punkte in bezug auf Achsen, die eine Rotationsbewegung ausführen, dieselbe Bahnlinie beschreiben. Nach der Aufstellung der Gleichungen für die allgemeine Aufgabe wird ein besonderer Fall genauer durchgearbeitet, in welchem die Kurve leicht veranschaulicht werden kann: Man nehme eine Kette ohne Ende, hänge sie am Vorderarm auf und bringe sie nun in Drehbewegung. Die Kette nimmt eine beharrende Gestalt an in bezug auf Achsen, die gemäß der Rotation fortgeführt werden. Lp.

E. Terradas. Sur le mouvement d'un fil. Ann. sc. Ac. Polyt. Porto 8, 15-28.

Behandlung der Bewegung eines Fadens für den Fall, wenn alle seine Punkte dieselbe Bahn in bezug auf Achsen beschreiben, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die z-Achse rotieren. Hieran wird eine „merkwürdige und interessante Anwendung" auf die Gestalt der stationären Bewegung eines Fadens gemacht, der sich um einen Zylinder dreht, ohne in dem mit dem Zylinder in Berührung stehenden Teile zu gleiten. Die analytische Behandlung führt auf elliptische Funktionen. Zwei zugehörige Figuren veranschaulichen die Resultate. Lp.

A. Lechner. Theorie der Rollreibung. Wien. Anz. 1913, 448.

Eine zylindrische Walze erfährt bei ihrer Rollbewegung auf einer Ebene, die leichter deformierbar als die Walze ist, ein ihrer Drehung entgegengesetztes Moment. Dieses Moment der Rollreibung ist ausdrückbar durch $M = \zeta P$, wo P der Normaldruck, ζ eine Größe ist, die vom Radius r der Walze und vom Drucke p auf die Längeneinheit sowie vom Material derart abhängt, daß $\zeta = \eta\sqrt{rp}$. Diese Formel wurde mit Benutzung der Hertzschen Arbeiten „Über die Berührung elastischer Körper" und „Über die Härte" aufgestellt. Das

Moment der Rollreibung erweist sich als kinetisch äquivalent einer im Mittelpunkt der Walze angreifenden Einzelkraft von der Größe $\mathfrak{R} = \eta . \frac{\sqrt{rp}}{r} . P$.

Die aufgestellten Gleichungen stehen im Einklang mit den Versuchen anderer Autoren und sind geeignet, den Unterschied in den Resultaten von Reynolds und Dupuit erheblich zu vermindern. Lp.

J. Andrade. Le frottement et l'isochronisme du spiral double. Propriété remarquable d'un groupe de spiraux doubles convenablement choisis. C. R. **156**, 1218-1219.

Praktische Ergebnisse der Untersuchungen, über deren Grundlage F. d. M. **42**, 785, 1911 berichtet ist. Der Verf. hat damit „vollständig das Problem des Isochronismus des Regulators der Seechronometer gelöst, ohne zu den Terminalkurven zu greifen“. Lp.

C. Bourlet. Appareil de mesure des vibrations de corps solides. C. R. **156**, 870-872.

Um bei bewegten Körpern, wie dem Gestell eines Wagens, oder den Flügeln eines Aeroplans, schnelle Schwingungen nach Zahl und Amplitude zu bestimmen, hat der Verf. einen Apparat ersonnen und praktisch erprobt. Er besteht aus zwei manometrischen Kapseln, die durch einen Kautschukschlauch verbunden sind. Auf der Membran der ersten Kapsel, des „Empfängers“, ist ein hinreichend schweres Metallstück aufgeleimt; dieses wird direkt auf den vibrierenden Körper gesetzt, nimmt dessen Schwingungen an und pflanzt sie durch den Kautschukschlauch auf die zweite Kapsel, den „Schreiber“, fort. Diese, mit einem Schreibstift versehen, zeichnet die Bewegung auf einen sich drehenden Zylinder ein. Die Membran des zweiten Zylinders ist natürlich so einzurichten, daß ihre Eigenschwingungen die aufzuzeichnenden Schwingungen nicht stören. Lp.

Fr. Schicht. Über den Wirkungsgrad der schiefen Ebene als Maschine. Zs. f. d. Realschulwesen **38**, 336-339.

Je nachdem die Nutzarbeit einer Maschine $\gtreqless$ als die Verlustarbeit ist, wird beim Aussetzen der äußeren Kraft die Maschine stehen bleiben oder zurücklaufen, also Selbstsperrung eintreten oder nicht. Hierbei ist aber vorausgesetzt, daß die Reibung beim Vorwärts- und beim Rückwärtsgang gleich groß ist. Es gibt aber auch Fälle, wo sich dies nicht so verhält.

Alle diese Fälle lassen sich an der schiefen Ebene aufzeigen. Schr.

Weitere Literatur.

Encyclopédie des sciences mathématiques. Édition française. Tome IV, vol. VI: C. Crantz, E. Vallier: Balistique extérieure. C. Crantz, C. Benoit: Balistique intérieure. F. Gossot, R. Liouville: Développements

concernant quelques recherches de balistique exécutée en France. T. Forchheimer, A. Boulanger: Hydraulique. Fasc. I. Paris: Gauthier-Villars. Leipzig: B. G. Teubner. 192 S.

D. Buchanan. Oscillations near one of the isosceles triangular solutions of the three body problem. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 288-289.

F. J. B. Corbeiro. The gyroscope. London: Spon. VII + 105 S. 8°.

L. Coupaye e P. Malaval. La resistenza delle artiglierie. Traduzione e prefazione di Bravetta. Torino: Pasta. XXXII + 262 S. 8°.

A. Denizot. Contribution à la théorie de la chute des corps, en ayant égard à la rotation de la terre. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 315-318.

Vgl. F. d. M. **43**, 823, 1912 u. S. 832 dieses Bandes.

Fassbinder. Sur la dynamique des systèmes variables et la rotation de la terre. (Thèse.) Paris: Gauthier-Villars. 57 S. 4°.

P. Field. On constrained motion. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 289.

Sir G. Greenhill. Pendulum theory. Horological Journal, September 1913, 3 S. 4°.

Abdruck aus derselben Zeitschrift 1910; vgl. F. d. M. **41**, 801, 1910.

Chr. Huygens. Die Pendeluhr. Horologium oscillatorium. Hrsg. v. A. Heckscher u. A. v. Oettingen. — Leipzig: W. Engelmann. 267 S. 8°. Ostwalds Klassiker Nr. 192.

E. A. Kielhauser. Zur Darstellung der Wurfbewegung durch Wasserstrahlen. Zeitschr. f. d. Realschulwesen **38**, 204-205.

Einfache Versuchsanordnung ohne besonderen Apparat. Schr.

V. H. O. Madsen. Konstantenbestemmelser ved relative pendulmaalinger. Kjöbenhavn. 122 S. 4°. (Den Danske gradmaaling. Ny raekke 11.)

W. D. MacMillan. A proof of Wilczynski's theorem. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 300-301.

Vgl. das Referat über Wilczynski S. 824 dieses Bandes.

W. D. MacMillan. On Poincaré's correction in Bruns' theorem. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 301.

F. R. Moulton. On orbits of ejection and collision in the problem of three bodies. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 450.

J. X. de Oliveiro. Goniometria de tiro indirecto, com un curso de estado maior e engenharia. 2ª edição, correcta e augmentada. Paris: Briguet. XIII + 160 S. 18mo.

J. Perry. Drehkreisel. Volkstümlicher Vortrag. Übers. v. A. Walzel. 2. verb. u. erw. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner. VIII + 130 S. 8°.

I. Rosina-Piscel. Sopra alcune questioni algebriche relative ai piccoli movimenti. Pisa: Toscano. 179 S. 8°.

B. Hydrodynamik.

Lord Rayleigh. On conformal representation from a mechanical point of view. Phil. Mag. (6) **25**, 698-702.

Man denke sich in der Gleichung $x + iy = f(\xi + i\eta)$ die x, y und die ξ, η auf dasselbe Achsensystem in derselben Ebene bezogen, die (x, y)-Punkte in die entsprechenden (ξ, η)-Punkte durch stetige Bewegung übergeführt. Die so definierte „Deformation" des ebenen (x, y)-Systems verlangt wegen der Stetigkeit der Überführung, daß f auch eine Funktion der Zeit sei, also:

$$(1) \qquad x + iy = f(t, \xi + i\eta).$$

Die Geschwindigkeitskomponenten u, v werden durch dx/dt und dy/dt gegeben, so daß

$$(2) \qquad u + iv = \frac{d}{dt} f(t, \xi + i\eta)$$

ist. Durch Elimination von $\xi + i\eta$ aus (1) und (2) folgt

$$(3) \qquad u + iv = F(t, x + iy);$$

mithin genügen u und v der Gleichung:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)(u, v) = 0.$$

Die so definierte Bewegung wird mit der zweidimensionalen einer zähen Flüssigkeit verglichen.

Lp.

Lord Rayleigh. On the approximate solution of certain problems relating to the potential. — II. Phil. Mag. (6) **26**, 195-199.

Der erste unter demselben Titel veröffentlichte Teil, der in Proc. Lond. Math. Soc. 7, 70-75 erschienen ist (F. d. M. 8, 622, 1876), beschäftigt sich hauptsächlich mit dem Problem der Elektrizitätsströmung längs eines Streifens aus gleichmäßigem Metall, wie Zinnfolie, wenn der Streifen durch Kurven begrenzt wird, die in bezug auf eine Zentralgerade symmetrisch ist.

Der jetzt veröffentlichte Teil faßt die Aufgabe in größerer Abstraktheit auf. „Wenn in zwei Dimensionen φ und ψ Potential- und Strömungsfunktion sind, und wenn beispielshalber ψ Null ist längs der Linie $y = 0$, so kann man nehmen:

$$(1) \qquad \varphi = \int f\,dx - \frac{y^2}{2!} f' + \frac{y^4}{4!} f''' - \cdots,$$

$$(2) \qquad \psi = yf - \frac{y^3}{3!} f'' + \frac{y^5}{5!} f^{\mathrm{IV}} - \cdots,$$

wo f eine sonst willkürliche Funktion von x ist. Diese Werte genügen den allgemeinen Bedingungen für die Potential- und die Strömungsfunktion und machen $d\varphi/dx = f$, $\psi = 0$ für $y = 0$. Die Gleichung (2) kann als die Strömungslinien in Gliedern mit f bestimmend angesehen werden (von denen eine beliebige als Randlinie angesehen werden kann). Wenn umgekehrt y als eine bekannte

Funktion von x angesehen wird und ψ konstant ist (z. B. $=1$), so kann f durch sukzessive Annäherung gefunden werden. Die Durchführung dieses Gedankens wird unter einzelnen besonderen Annahmen gezeigt. Lp.

Lord Rayleigh. On the motion of a viscous fluid. Phil. Mag. (6) **26**, 776-786.

Der Aufsatz enthält Betrachtungen über verschiedene lose untereinander zusammenhängende Eigenschaften von Bewegungen zäher Flüssigkeiten.

Helmholtz (Werke **1**, 223, 1869) und Korteweg (Amst. Ak. Versl. **18**, 343-359 u. Phil. Mag. (5) **16**, 112; F. d. M. **15**, 846, 1883) haben gezeigt, daß, wenn die Geschwindigkeiten an der Umgrenzung gegeben sind, die langsame stetige Bewegung einer unzusammendrückbaren, zähen Flüssigkeit der Bedingung genügt, die Dissipation $\mathbf{F}$ zu einem absoluten Minimum zu machen. Sind u_0, v_0, w_0 die Geschwindigkeiten in einer Bewegung $\mathbf{M}_0$ und u, v, w die in einer andern Bewegung $\mathbf{M}$, die denselben Grenzbedingungen genügt, so ergibt die Differenz der beiden $u' = u - u_0$, $v' = v - v_0$, $w' = w - w_0$ eine Bewegung $\mathbf{M}'$, bei der die Grenzbedingungen verschwinden, und es wird nachgewiesen, unter welchen Bedingungen die Gleichung gilt: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}'$, woraus der obige Satz folgt. Dann werden andere Fälle erörtert, in denen $\mathbf{F}$ ein absolutes Minimum ist. Ein von Korteweg gefundener Satz über die Stabilität der langsamen Bewegung einer zähen Flüssigkeit wird bestätigt unter näherem Eingehen auf die analytischen Bedingungen und unter Bezugnahme auf das Verhalten einer Flüssigkeit in einem rotierenden Gefäße sowie zwischen zwei rotierenden Zylindern. Zuletzt wird auf die Abhandlung von Orr zurückgegriffen „The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid“ (F. d. M. **38**, 741, 1907), um einen Punkt bezüglich des Übergangs der Stabilität der Bewegung in die Instabilität zu behandeln. Lp.

Lord Rayleigh. On the stability of the laminar motion of an inviscid fluid. Phil. Mag. (6) **26**, 1001-1010.

Die Arbeit geht auf einen Gegenstand zurück, den der Verf. in dem Aufsatze behandelt hat: „On the stability or instability of certain fluid motions“ (Lond. Math. Soc. Proc. **10**, 57-70, 1880; F. d. M. **12**, 711, 1880). Aus der früheren Abhandlung wird die Gleichung herübergenommen:

$$(3) \qquad \left(\frac{n}{k} + U\right)\left(\frac{d^2 v}{d y^2} - k^2 v\right) - \frac{d^2 U}{d y^2}\, v = 0.$$

Die Schlüsse, welche sich aus dieser Gleichung ziehen lassen, bilden jetzt den Gegenstand der Untersuchung, bei der auch die Arbeit „On the question of the stability of the flow of fluids“ (F. d. M. **24**, 909, 1892) herangezogen wird. Als Probe der behandelten Fragen diene die folgende Stelle: Wenn die Bewegung eine solche ist, die für eine zwischen zwei festen Wänden unter äußerem Druck oder eingeprägter Kraft sich bewegende Flüssigkeit möglich ist, so daß z. B. $U = y^2 - b^2$, so ist $d^2 U/dy^2$ eine endliche Konstante, und dann sind komplexe

Werte von n offenbar ausgeschlossen. In dem Falle einer einfachen scherenden Bewegung, versinnlicht durch $U = y$, ist $d^2 U/dy^2 = 0$, und es läßt sich aus der Gleichung

$$(4) \qquad \frac{d}{dy}\left(\beta \frac{d\alpha}{dy} - \alpha \frac{d\beta}{dy}\right) = \frac{d^2 U}{dy^2} \frac{q(\alpha^2 + \beta^2)}{(p + U)^2 + q^2},$$

die aus (3) für $n/k = p + iq$, $v = \alpha + i\beta$ folgt, kein Schluß ziehen. Geht man aber auf (3) zurück, so erkennt man, daß in diesem Fall, wenn n komplex ist,

$$(5) \qquad \frac{d^2 v}{dy^2} - k^2 v = 0$$

befriedigt sein müßte über den ganzen Bereich zwischen den Grenzen, wo $v = 0$. Da eine solche Befriedigung nicht stattfinden kann, so folgern wir, daß auch hier ein komplexes n ausgeschlossen ist. — Hiernach ist wohl klar, daß ein eingehendes Referat über die Betrachtungen unmöglich ist. Lp.

Th. de Donder. Sur divers modes de croissance des milieux continus. Belg. Bull. sc. 1913, 614-621.

Wenn das betrachtete Medium seine Gestalt oder sein Volumen ändert, so kann man beispielsweise annehmen, daß jede Linie oder jede Oberfläche oder jedes Volumen, herausgerissen aus dem kontinuierlichen Medium, proportional der Zeit wächst oder auch nach einem weniger einfachen Gesetze. Dann entsteht die Frage: Was für Bewegungen kann ein solches Medium ausführen? In der vorliegenden Abhandlung beschränkt sich der Verf. auf das Studium der stationären Bewegungen auf Grund der Theorie der Integralkovarianten. Lp.

Th. de Donder. Sur divers modes de croissance des milieux continus (Note II). Belg. Bull. sc. 1913, 642-646.

In der ersten Note desselben Jahres hatte der Verf. sich mit den stetigen Bewegungen eines geradlinigen oder ebenen Mediums beschäftigt, bei denen jede Linie oder jede Oberfläche gleichmäßig wächst; hierbei war vorausgesetzt, daß der Zustand stationär wäre. Jetzt werden jene Ergebnisse auf den Fall der variablen Bewegungen ausgedehnt. Außerdem werden die Bewegungen betrachtet, bei denen die Oberflächen nach einem exponentialen oder sinusoidalen Gesetze wachsen. Lp.

Maria Ferrari. Flusso di energia e velocità di gruppo. Rom. Acc. L. Rend. (5) 22_1, 761-766.

„Reynolds betrachtete und bestimmte in seiner Note „On the rate of progression of groups of waves and the rate at which energy is transmitted by waves“ (Nature **16**, 343-344, 1877) auf präzise Weise den Fluß mechanischer Energie in Zügen von Wellen, die sich mit wenig verschiedenen Geschwindigkeiten in einer unbegrenzt tiefen Flüssigkeit fortpflanzen, und nannte „Gruppengeschwindigkeit“ die einem solchen Flusse entsprechende Geschwindigkeit (vgl. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, § 235, S. 446 der deutschen Ausgabe).

Lord Rayleigh kam dann auf die kinematische Bedeutung der Gruppengeschwindigkeit zurück und erweiterte die Reynoldssche Untersuchung dadurch, daß er ermittelte, daß für alle rotationsfreien Wellen in einem Kanal von beliebiger Tiefe die Geschwindigkeit, mit der die Energie sich fortpflanzt, immer mit der Gruppengeschwindigkeit übereinstimmt (On progressive waves. Lond. Math. Soc. Proc. **9**, 21-26, 1877; F. d. M. **10**, 651, 1878). Er erreichte dieses Resultat mittels einer unabhängigen und direkten Berechnung der Energie und ihres Flusses einerseits und der Gruppengeschwindigkeit andererseits. Er hatte also die am Schlusse seiner Abhandlung klar ausgesprochene Vorstellung, daß zwischen den beiden Elementen ein innigeres Band besteht, das der Natur der Erscheinung entspricht und ohne formale Rechnungen zu erhalten ist. Die systematischen Untersuchungen über den Energiefluß, die in der Folge von Poynting, Wien und Volterra angestellt sind, weisen den Weg zur Befriedigung der Forderung von Lord Rayleigh. Dies ist auch das Ziel der gegenwärtigen Note.“ Lp.

P. Appell. Les équations du mouvement d'un fluide parfait déduites de la considération de l'énergie d'accélération. Annali di Mat. (3) **20**, 37-42.

J. L. Lagrange leitet in seiner Mécanique analytique (Oeuvres **11**, 197-236) die Gleichungen der Hydrostatik aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten ab. Bezüglich der Gleichungen der Hydrodynamik drückt sich Basset in seinem Treatise on hydrodynamics (Cambridge, 1888), S. 32, so aus: Die Bewegungsgleichungen können, wie Larmor dies gezeigt hat, durch die Anwendung des Prinzipes der kleinsten Wirkung in Verbindung mit der Lagrangeschen Methode abgeleitet werden. Der Verf. des vorliegenden Artikels leitet sie aus seinem Prinzipe der Energiebeschleunigung ab (C. R. **129**, 317-320; F. d. M. **30**, 641, 1899): In einem materiellen System mit beliebigen reibungslosen, holonomen oder nicht holonomen Verbindungen, das Kräften unterworfen ist, die von der Zeit, den Lagen und den Geschwindigkeiten abhängen, haben die Komponenten x'', y'', z'' der Beschleunigungen der verschiedenen Punkte in einem beliebigen Augenblicke solche Werte, welche die Funktion

$$R = \sum[\tfrac{1}{2}m(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (X x'' + Y y'' + Z z'')]$$

zum Minimum machen. Lp.

L. Roy. Sur le mouvement des milieux visqueux indéfinis. C. R. **156**, 1219-1222; Soc. Franç. de Phys. Nr. 48, 3-4.

Die Gleichung, auf welche die Erforschung der Bewegung der nur wenig deformierten zähen Medien führt, ist von dem Typus:

$$(1) \qquad \varLambda \frac{\partial \varDelta \varphi}{\partial t} + a^2 \varDelta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

In ihr bezeichnen $\varLambda$ und a^2 zwei positive Konstanten, φ eine Funktion der Zeit t und der drei Koordinaten x, y, z und $\varDelta$ das Operationssymbol $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Der Verf. hat die Gleichung (1) in dem Falle einer einzigen Koordinate und eines begrenzten Mediums schon früher integriert (C. R. **152**, 1228; F. d. M. **42**, 888, 1911 u. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **29**, 371-429; F. d. M. **43**, 835, 1912). Gegenwärtig macht er sich an den Fall eines unbegrenzten Mediums. Er betrachtet jedoch nicht die allgemeinsten Anfangsbedingungen, sondern sucht nur die Funktion $\varphi(x, t)$ zu bestimmen, welche durch die Gleichungen definiert wird:

$$\Lambda \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} + a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0;$$

für $t = 0$:

$$(2) \qquad \varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \alpha\sqrt{\eta})e^{-x^2} dx, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\infty} g(x + \alpha\sqrt{\eta'})e^{-x^2} dx,$$

für $x = \pm \infty$:

$$\varphi = 0.$$

Hierin bezeichnen $f(x)$ und $g(x)$ zwei willkürliche, den Dirichletschen Bedingungen genügende Funktionen, η und η' zwei positive Parameter, die eingeführt werden, um gewisse Reihenentwicklungen zu sichern und später die Gewinnung asymptotischer Formeln zu erleichtern. Die Integration wird mittels der Methode des Fourierschen Integrals bewerkstelligt. Lp.

L. Roy. Sur le mouvement des milieux visqueux et les quasi-ondes. C. R. **156**, 1309-1312.

In der vorstehend angezeigten Note ist das auf ein unbegrenztes Medium bezügliche Integral der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \Lambda \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} + a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

gebildet. Jetzt wird untersucht, was aus diesem Integrale wird, wenn der Zähigkeitskoeffizient $\Lambda = 2a^2 \lambda$ sehr klein ist. Dies geschieht, indem für die vorher eingeführten Funktionen $F(y, \tau)$ und $G(y, \tau)$ asymptotische Werte aufgesucht werden. Dadurch ergibt sich, „daß die Bewegung aus der Überlagerung zweier Quasiwellen resultiert, die sich in entgegengesetzter Richtung mit der Geschwindigkeit a unter Annahme der Amplitude und fortschreitender Erstreckung auf die x-Achse fortpflanzen". Lp.

L. Roy. Complément à deux Notes récentes sur le mouvement des milieux visqueux indéfinis. C. R. **156**, 1665-1667.

In den beiden Noten, über welche vorstehend berichtet wird, ist die mit (2) bezeichnete Anfangsbedingung eingeführt worden. Die gegenwärtige Note läßt diese Beschränkung fallen und ermittelt die wesentlichen analytischen Eigenschaften des entsprechenden Integrales. Dasselbe wird in der Gestalt dargestellt:

$$(3)\qquad \varphi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[F(\alpha)\frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha t\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^2-1}}+\mathfrak{Cos}\,\alpha t\sqrt{\alpha^2-1}\right.$$
$$\left.+G(\alpha)\frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha t\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}}\right]e^{-t\alpha^2+ix\alpha}d\alpha.$$

Die hieraus gezogenen Folgerungen sind im Einklang mit denen, die Duhem aus der Hugoniotschen Methode erhalten hat (Recherches sur l'élasticité. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **21**, 388; F. d. M. **35**, 804, 1904). Lp.

P. Duhem. Remarque élémentaire sur le problème des ondes sphériques. C. R. **156**, 1727-1730.

Man bezeichne mit Δ^k das Resultat der k-mal ausgeübten Operation $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Hängt $U(x,y,z)$ nur von der Entfernung r vom Koordinatenanfang ab, so ist

$$\Delta^k U=\frac{1}{r}\frac{d^{2k}}{dr^{2k}}(rU).$$

Eine Funktion $U\ (x,y,z,t)$ möge der Differentialgleichung genügen:

$$\begin{aligned}&L_0U+L_1\frac{\partial U}{\partial t}+L_2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\cdots+L_l\frac{\partial^l U}{\partial t^l}\\&+M_0\Delta U+M_1\Delta\frac{\partial U}{\partial t}+\cdots\qquad +M_m\Delta\frac{\partial^m U}{\partial t^m}\\&+N_0\Delta^2U+N_1\Delta^2\frac{\partial U}{\partial t}+\cdots\qquad +N_n\Delta^2\frac{\partial^n U}{\partial t^n}\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+P_0\Delta^kU+P_1\Delta^k\frac{\partial U}{\partial t}+\cdots\qquad +P_p\Delta^k\frac{\partial^p U}{\partial t^p}=0,\end{aligned}$$

wo die $L, M, N, \ldots, P$ Konstanten sind. Der Typus dieser Gleichungen ist der allgemeinste einer partiellen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und ohne rechte Seite, der eine Funktion $U(x,y,z,t)$ genügen kann, wenn diese Gleichung bei jeder Transformation rechtwinkliger Koordinaten ihre Form behalten soll. Bei jedem Problem, das von einer solchen Gleichung abhängt, erhält man das allgemeine Integral $U(r,t)$ des besonderen Problems der Kugelwellen, indem man das allgemeine Integral $V(r,t)=rU$ des besonderen Problems der ebenen Wellen nimmt und es durch r dividiert. Unter den Typus dieser Gleichung fallen fünf verschiedene Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Lp.

O. Tedone. Sulla integrazione dell'equazione delle onde smorzate col metodo delle caratteristiche. Rom. Acc. L. Rend. (5) 22_1, 757-761.

Nachdem im ersten Paragraphen zwei Formeln, welche die Theorie der Besselschen Funktionen betreffen, bewiesen sind, und im zweiten die Umkehrung einiger Integrale bewerkstelligt ist, wird im dritten Paragraphen die Integration der Gleichung für gedämpfte Wellen

$$(1) \qquad c^2 \Delta^2 \psi = \alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

in Angriff genommen, von der die Wellenausbreitung in einem dispersiven Medium abhängt. Setzt man in ihr $\psi = e^{-\frac{\beta}{a^2} t} \varphi$ und vertauscht proportional x, y, z, t, so geht (1) über in

$$(2) \qquad \Delta^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \varphi = 0.$$

Diese löst der Verf., indem er setzt

$$(3) \qquad D\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos nz - \cos nt,$$

wo $D\varphi$ ein gewisses Symbol bedeutet. Die erhaltenen Endformeln sind nicht einfach genug, um hier mitgeteilt zu werden. Lp.

K. Honda and T. Matsushita. An investigation of the oscillations of tank-water. Tôhoku Univ. Science Rep. 2, 131-148, X Fig.-Taf.

Die Verf. beschäftigten sich nach einer schon früher von Honda und Terada erprobten photographischen Methode mit den Schwingungen von Wasser in Behältern, deren Querschnitt ein Quadrat, ein Kreis, ein Kreisring, ein gleichseitiges Dreieck war. Die Behälter waren aus Zink angefertigt und wurden auf ein Brett gestellt, das auf starken Kautschukröhren ruhte, so daß leichte Schwingungen des Behälters zustande kamen. Die Schwingung wurde im allgemeinen durch einen vertikalen Stab erregt. Der Stab wurde mit seinem unteren Ende an dem Behälter befestigt und trug ein Gewicht, das in eine passende Höhe gebracht werden konnte, so daß damit die Schwingungsperiode zu ändern war. Zum Unterhalten der Schwingung des Stabes wurde ein Stück weichen Eisens an seinem Ende angebracht, ein Elektromagnet in die Nähe gestellt. Ein elektrischer Strom, der den Elektromagneten umfloß, wurde je einmal bei jeder Stabschwingung erregt. Wenn die Periode des Stabes sich der des Wassers in dem Behälter nähert, wird die Amplitude des Wassers bedeutend vergrößert. In dem Falle einer angenäherten Koinzidenz bemerkt man Schwingungsstöße; ist die Koinzidenz genau, so hält eine Schwingung längere Zeit an. Zuweilen war es bequemer, die Schwingung mit der Hand zu erregen. In jedem Falle wurde die Periode der freien Schwingungen nach Aufhören der Erregung mittels einer Hemmuhr beobachtet, indem das Mittel von 10 Sätzen je von ungefähr 50 vollständigen Schwingungen genommen wurde. In dem Falle des kreisförmigen und des kreisringförmigen Behälters wurde eine symmetrische Schwingungsart mit Hülfe eines Hebels erreicht.

Die bekannten hydrodynamischen Lösungen der beobachteten Schwingungen werden zuerst noch einmal entwickelt; nur für den Kreisring mußte diese Lösung neu gefunden werden. Die Vergleichung der experimentell bestimmten Werte mit den aus der Theorie ermittelten ist ganz befriedigend; ebenso stimmen die Stromlinien der Rechnung mit den aus den Photographien zu entnehmenden gut überein. Lp.

H. LAMB. On some cases of wave-motion on deep water. Annali di Mat. (3) **21**, 236-250.

Die Abhandlung erledigt einige Aufgaben der Wellenbewegung auf tiefem Wasser. Der Einfachheit wegen wird die Bewegung als auf zwei Dimensionen beschränkt angenommen, eine vertikale und eine horizontale. Der erste Abschnitt enthält einen etwas vereinfachten Beweis der Resultate von Cauchy und Poisson bezüglich der Wellen, die von einer örtlichen Anfangsstörung der Oberfläche herrühren. Die Methode führt zu einigen neuen Formeln. Die nächste Aufgabe betrifft die Wirkung einer periodischen Ausweitung (einer „einfachen Quelle") in einem inneren Punkte. Hieraus wird leicht das von einer plötzlichen Explosion herrührende Wellensystem abgeleitet. Endlich werden die Wellen betrachtet, die von der Bewegung eines untergetauchten Zylinders veranlaßt werden, der beständig rechtwinklig zu seiner Achse durch ruhiges Wasser fortschreitet. Dabei wird ein recht bemerkenswerter Ausdruck für den vom Zylinder erlittenen, durch die Wellenerzeugung hervorgerufenen Widerstand abgeleitet. Lp.

J. R. WILTON. On the highest wave in deep water. Phil. Mag. (6) **26**, 1053-1058.

Zuerst wird gezeigt, daß es möglich ist, eine zweidimensionale Flüssigkeitsbewegung mit einer beliebigen Kurve als freier Oberfläche zu bekommen, wobei unter „Bewegung" eine stetige Bewegung gemeint ist. Die umgekehrte Aufgabe, die Gestalt der freien Oberfläche zu bestimmen, wenn eine andere Bedingung gegeben ist, wie z. B. die im Titel verlangte Eigenschaft, erfordert tastende Methoden. Dadurch gelangt der Verf. zu dem Ergebnis, daß das Wellenprofil aus einer Folge von Zykloidenbogen bestehen müsse, die miteinander einen Winkel von 120° bilden. Ist die y-Achse vertikal aufwärts, die x-Achse horizontal, so lauten die Gleichungen für einen ersten Bogen:

$$x = \frac{c^2}{g}(\theta + \sin\theta), \qquad y = \frac{c^2}{g}(1 - \sin\theta).$$

Die ganze Wellenlänge liegt zwischen $\theta = -\frac{1}{3}\pi$ und $\theta = \frac{1}{3}\pi$. Die Amplitude der Welle ist $\frac{c^2}{2g} = a$, ihre Länge $(2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi)a$. Das Ergebnis stimmt gut mit dem von Stokes und Michell (vgl. F. d. M. 25, 1477, 1893) überein. Lp.

J. R. WILTON. Some simple transformations of Stokes' current function equation. Messenger (2) **43**, 110-114.

Die in Rede stehende Gleichung wird in der Form geschrieben:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varpi^2} - \frac{1}{\varpi}\frac{\partial \psi}{\partial \varpi} = 0.$$

Man setze $R = \varpi^2$, $r = \sqrt{x^2 + \varpi^2}$, $\xi = r + x$, $\eta = r - x$,

$$r_1 = [(x + \tfrac{1}{2}c)^2 + \varpi^2]^{1/2},\ r_2 = [(x - \tfrac{1}{2}c)^2 + \varpi^2]^{1/2},$$

so geht (1) über in:

$$(2) \qquad \frac{4}{\xi + \eta}\left(\xi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}\right) = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r_1^2} + \frac{r_1^2 + r_2^2 - c^2}{r_1 r_2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r_1 \partial r_2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r_2^2} = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(\log R) = 0,$$

wo φ das der Stromfunktion ψ entsprechende Geschwindigkeitspotential ist. Hieraus werden einige Folgerungen abgeleitet. Lp.

W. B. Morton. On the displacements of the particles and their paths in some cases of two-dimensional motion of a frictionless liquid. Lond. Roy. Soc. Proc. (A) **89**, 106-124.

Der Verf. integriert die Bewegungsgleichungen und entwirft Kurven für die Bahnen von Flüssigkeitspartikeln in den bekannten einfachen Fällen zweidimensionaler Bewegung, nämlich für eine Flüssigkeit in einem rotierenden elliptischen Zylinder und in einem rotierenden dreiseitigen Prisma mit gleichseitigem Dreieck als Querschnitt und für eine unbegrenzt ausgedehnte Flüssigkeit, die durch die Translation oder die Rotation eines elliptischen Zylinders bewegt wird. Lp.

A. H. Gibson. The stability of flow of an incompressible viscous fluid. Phil. Mag. (6) **25**, 81-84.

Osborne Reynolds hat in seinem Aufsatze „On the two manners of motion of water" (Proc. Roy. Inst. of Great Britain 1884; Papers **2**, 153-162) angegeben, daß aus seinen Versuchen folge: Die Bedingungen, welche die Stabilität des Flusses befördern, d. h. Stromfäden im Gegensatz zu wirbelndem Flusse begünstigen, sind bei einer nicht zusammendrückbaren zähen Flüssigkeit: (1) Freie (der Luft ausgesetzte) Oberflächen. (2) Konvergierende Grenzen. (3) Krummlinige Bewegung mit größter Geschwindigkeit an der Außenseite der Kurve. (4) Ein Zuwachs von Zähigkeit. (5) Eine Verminderung der Dichte. Durch eine Prüfung der Bewegungsgleichungen ergab sich für ihn auch, daß die Bedingungen (4) und (5) aus theoretischen Betrachtungen folgen. Was die Folgerung (3) anlangt, so hat der Verf. in dem Aufsatze „The manner of motion of water flowing in a curved path" (Manchester Mem. and Proc. **55**, Nr. 13, 5 S., 1911) aus seinen Versuchen geschlossen, daß zur Begünstigung der Stabilität bei krummliniger Bewegung die größte Geschwindigkeit an der Innenseite

der Kurve liegen muß, nicht an der Außenseite. Der Zweck der vorliegenden Note ist die Herleitung dieser Behauptung sowie der Gültigkeit der Bedingungen (1) und (2) aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen. Lp.

L. Amoroso. Moto lento di un fluido viscoso. Rom. Acc. L. Rend. (5) **22**$_1$, 147.

In der Abhandlung „Integrazione delle equazioni del moto lento di un fluido viscoso" (F. d. M. **43**, 847, 1912) hat der Verf. durch Fortlassung der rechten Seite einer Gleichung einen Fehler begangen, der sich durch die ganze Arbeit zieht. Die völlige Behandlung der Frage soll in einer ausführlicheren Arbeit von neuem durchgeführt werden. Lp.

Th. Rümelin. Wie bewegt sich fließendes Wasser? Ein neuer Weg zur Erklärung des Problems. Nebst Untersuchungen über die beste empirische Formel. Veröffentlichung von vergleichenden Rauhigkeitstafeln. Mit 18 Figuren. Dresden: Zahn & Jaensch. 152 S. 8°.

Die Schrift ist ein origineller Versuch, die Erscheinungen fließenden Wassers zu erklären. Aus der Praxis eines Wasserbauers hervorgegangen, sah der Verf., daß einerseits die reine Theorie der Hydrodynamik das innerste Wesen bis jetzt nicht aufzuhellen vermocht hat, daß aber auch andererseits die bloße Beobachtung ohne theoretische Annahmen die Erscheinungen nicht erfassen kann. Durch verschärfte Beobachtung planmäßig angestellter Versuche bemühte er sich daher, gewisse Vorstellungen, die sich ihm aufgedrängt hatten, als richtig zu erweisen. Eine Grundvorstellung ist hierbei die, daß fließendes Wasser nicht isotrop, sondern ditrop ist: das Wasser wälzt sich beim Fließen; da es aber nicht angeht, daß die Gesamtmasse des Flusses als Ganzes sich umdreht, können sich nur Teile des Flusses wälzen. „Damit kommen wir auf den Ditropismus oder Doppelcharakter der bewegten Flüssigkeit, d. h. die Scheidung des fließenden Gewässers in wälzende Teile oder Wirbelbewegungen und in Fließmedium oder gleitende, geschobene, hemmende Teile." Durch spekulative Betrachtung und Analogieschluß gelangt der Verf. somit zu dem Satze: Fließendes Wasser befindet sich im Zustand der Ditropie.

Die genauere Durcharbeitung dieser Vorstellungen führt dann zu der folgenden Unterscheidung von drei Zuständen der ortsverändernden, sich selbst überlassenen Schwerkraftbewegung des Wassers:

I. Gleitbewegung. „Unter ihr verstehen wir die praktisch wirbellose Bewegung, welche unterhalb der von Reynolds untersuchten Grenzen liegt und in langsamem Gleiten kleinerer oder größerer Teile der Wassermasse besteht."

II. Fließbewegung. „Diejenige Bewegung, welche wir mit Fließen bezeichnen, und für welche die Erscheinung der Ditropie und der Pulsationen ein typisches Merkmal bildet."

III. Stürzbewegung. „Alle diejenigen Bewegungsarten des Wassers, welche nicht mehr als ein regelrechtes Fließen angesehen werden können, wie das dem freien Fallen ähnliche sehr rasche und sich beschleunigende Dahin-

stürzen des Wassers auf steiler Unterlage oder das ebenso erfolgende Schütten, Spritzen und dergleichen aus Röhren usw., wobei die Wassermasse im ganzen fortgetragen wird.“

Auf die Einzelheiten dieser Untersuchungen, besonders die unter II erwähnten Pulsationen, die eine Hauptrolle in den Überlegungen bilden und aus akustischen Erscheinungen hergenommen sind, können wir nicht eingehen. Es ist anzuerkennen, daß die Arbeit eine Reihe interessanter Beobachtungen bringt und sie aufzuklären versucht. Es muß aber auch gesagt werden, daß der Verf. von den theoretischen Arbeiten über den Gegenstand offenbar gar keine Kenntnis erhalten hat. Die ganze Literatur über Wirbelbewegungen seit Helmholtz ist gar nicht erwähnt; die neueren Lehrbücher, wie z. B. das von Lamb, und die Arbeiten von Rayleigh, ferner die von vielen andern Forschern über Turbulenzbewegung werden nicht angeführt. Wir haben es also mit Untersuchungen zu tun, die das ganze Phänomen auf dem Grunde eigenartiger Vorstellungen, die aus der Beobachtung geschöpft sind, und ohne tiefere Kenntnis der notwendigen mathematischen Hülfsmittel aufbauen wollen. Sie bleiben in den ersten, aus den Beobachtungen eines Praktikers fließenden Abstraktionen und ihren Folgerungen stecken. Einen wirklichen Nutzen werden daher nur die kritischen Sichtungen der empirischen Formeln des zweiten Teiles der Arbeit für die praktische Hydraulik haben. Lp.

Fritz Noether. Über die Entstehung einer turbulenten Flüssigkeitsbewegung. Münch. Ber. 1913, 309-329.

Die Untersuchung beschäftigt sich mit der ebenen Strömung einer Flüssigkeit zwischen zwei parallelen, ebenen, vertikal stehenden Wänden, von denen die eine ruht, während die andere mit konstanter Geschwindigkeit in ihrer eigenen Ebene horizontal bewegt wird. Dies ist die den theoretischen Untersuchungen von H. A. Lorentz und A. Sommerfeld zugrunde gelegte vereinfachte Darstellung der von Couette (F. d. M. 22, 964, 1890) verwandten experimentellen Anordnung, bei der die Flüssigkeit zwischen koaxialen Kreiszylindern strömte, von denen der eine ruhte, der andere gleichförmig gedreht wurde. Nach einem von v. Mises (Weber-Festschrift; F. d. M. **43**, 401, 1912) erhaltenen Resultate liegt es nahe, anzunehmen, daß die Laminarströmung zwar tatsächlich für alle Geschwindigkeiten stabil ist, solange nur kleine störende Kräfte auf sie wirken, daß sie aber oberhalb der kritischen Geschwindigkeit labil wird, wenn die Größe der Störungen eine gewisse Grenze überschreitet; ähnlich wie eine Kugel, die auf der Spitze eines Berges in einer kleinen Vertiefung liegt, nach der Methode der kleinen Schwingungen sich als stabil herausstellen würde, während recht kleine, aber endliche Anstöße schon genügen, um sie ins Rollen zu bringen.

Der Verf. versucht, dieser Frage näher zu kommen, indem er von einer laminaren anfänglichen Geschwindigkeitsverteilung ausgeht, die aber von der Geschwindigkeitsverteilung der stationären Laminarbewegung endlich verschieden ist. Der nun folgende Strömungszustand kann eine nicht stationäre Laminarbewegung sein, vermittelst deren die Geschwindigkeitsverteilung sich asymptotisch der der stationären Laminarbewegung nähert. Die Frage, ob diese nichtstationäre Laminarbewegung stabil ist, wird durch die Betrach-

tung eines speziellen Falles beantwortet. Indem ein einfaches Gesetz für den anfänglichen Zustand angenommen wird, ergibt sich, daß jene Laminarbewegung für genügend große Wandgeschwindigkeiten nicht mehr stabil ist. Die nichtstationäre Laminarbewegung, die zur stationären zurückführen würde, tritt also tatsächlich nicht ein, sondern eine nichtlaminare turbulente Bewegung. Ihr näherer Charakter bleibt noch unbekannt; es wird aber vermutet, daß sie nicht zur stationären Laminarbewegung führt, sondern zu der experimentell bekannten turbulenten Strömungsform. Hierin wird ein tatsächlicher Hinweis auf den instabilen Charakter der stationären Laminarbewegung erblickt. Der Eintritt der Instabilität in diesem Sinne bedeutet eine obere Grenze für die „kritische" Geschwindigkeit. Lp.

O. Blumenthal. Zum Turbulenzproblem. Münch. Ber. 1913, 563-595.

In demselben Jahrgange der Akademieberichte hat Fritz Noether einen neuen Weg zur Behandlung des Turbulenzproblems angegeben (Referat vorstehend). Es handelt sich um den Nachweis, daß eine kritische Geschwindigkeit existiert, oberhalb deren die zweidimensionale, laminare Strömung einer reibenden Flüssigkeit in einen geraden Kanal instabil ist. Das Neuartige des Noetherschen Ansatzes besteht darin, daß er endliche Störungen der Laminarströmung in Betracht ziehen will und dazu den Weg einschlägt, die Frage für nichtstationäre laminare Strömungen zu stellen und sie hier mit Hülfe der Methode der kleinen Schwingungen zu entscheiden, nachdem R. v. Mises in der Weber-Festschrift 1912 und Haupt in den Münchener Ber. 1912 gezeigt hatten, daß die stationäre Laminarströmung kleinen Schwingungen gegenüber bei allen Geschwindigkeiten stabil ist (F. d. M. **43**, 401, 501 u. 851, 1912). Als Beispiel hat Noether diejenige nichtstationäre Bewegung gewählt, die entsteht, wenn zur Ausgangszeit die Geschwindigkeiten über den Querschnitt nach einer kubischen Parabel verteilt sind. Er glaubt zu finden, daß diese Strömung bei genügend großer Geschwindigkeit instabil ist, indem sie sehr langwellige Störungsbewegungen von bestimmter Fortpflanzungsgeschwindigkeit zuläßt. Der Verf. weist durch eine längere Beweisführung scharfsinnig nach, daß dieses Resultat irrig ist. Es ist also immer noch kein Fall bekannt, in dem eine laminare Strömung in eine turbulente übergehen kann. Lp.

Cl. Schaefer und G. Frankenberg. Über den Einfluß der Temperatur auf die turbulente Strömung. Physik. Zs. **14**, 89-93.

G. Mie. Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn W. Sorkau über Turbulenzreibung. Physik. Zs. **14**, 93-95.

W. Sorkau. Über den Zusammenhang von Molekulargewicht und Turbulenzreibungskonstante. Physik. Zs. **14**, 147-152.

In einer Doktordissertation (Über den Einfluß von Temperatur, spezifischem Gewicht und chemischer Konstitution auf die Turbulenzreibung. Diss. Greifswald 1912) hat Sorkau mit Hülfe sehr zahlreicher Experimentaluntersuchungen geschlossen, daß 3 Turbulenzgebiete zu unterscheiden sind,

für welche die Gleichung $p^{1/n_i} t = C_i$ ($i = 1, 2, 3$) (p Druck, t Durchflußzeit, n_i und C_i Konstanten) mit drei verschiedenen Konstantenpaaren $n_1 C_1$, $n_2 C_2$, $n_3 C_3$ gilt. Für C_1 findet er die folgende Abhängigkeit von der absoluten Temperatur ϑ: $C_1 = e^{-\vartheta/273}$; C_2 und C_3 sollen sich mit der Temperatur so wenig ändern, daß man bei der Turbulenz II und III auf eine Temperaturunabhängigkeit schließen könne. Cl. Schaefer und G. Frankenberg bestätigen im wesentlichen, daß man die Erscheinungen durch Formeln von der zuerst genannten Art darstellen kann; sie wenden sich aber gegen das Resultat, daß bei der Turbulenz I eine universelle Temperaturabhängigkeit und bei der Turbulenz II und III gar keine Temperaturabhängigkeit vorhanden sein soll. Mie sieht in den Sorkauschen Resultaten nur eine Annäherung, welche einen großen Teil der Erscheinungen recht gut darstellt; allgemein könne aber die turbulente Strömung nicht nach einem Gesetz $p^n t = C$ dargestellt werden, wenn n einen konstanten Exponenten bedeutet. In seiner etwas später erschienenen Abhandlung gibt Sorkau noch für die Konstante C_1 der Turbulenz I das Gesetz an, daß sie der Quadratwurzel aus dem Molekulargewichte proportional ist; das Gesetz wird bei dem Vergleich von Äthylazetat, Methylpropionat, Propylazetat und Butylazetat geprüft und richtig befunden. A. K.

P. Alibrandi. Sopra alcune questioni idrodinamiche. Nuovo Cimento (6) **6**, 223-248.

Die Abhandlung zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teile wird die Unmöglichkeit des Haftens einer Flüssigkeit an den Wänden erörtert. „Im Nuovo Cimento vom Juni 1912 (F. d. M. **43**, 857) hat U. Crudeli im Verfolg gewisser Untersuchungen von Duhem nachgewiesen, daß die Bewegung eines Körpers durch eine Flüssigkeit, die völlig von einer festen Wandung umschlossen ist, mit dem physikalischen Begriffe des vollständigen Haftens der Flüssigkeit an der bespülten Wand nicht verträglich ist. Die Bewegungen der Füssigkeit werden langsam, stetig und isotherm angenommen; außerdem werden einige beschränkende Bedingungen hinzugefügt. In diesem ersten Teile der gegenwärtigen Arbeit werde ich eine ähnliche Behauptung, und zwar auf etwas andere Art, beweisen, aber auch unter der Voraussetzung der Langsamkeit usw. der Bewegungen, im übrigen jedoch einen hinreichend allgemeinen Fall umfassend“.

Der zweite, bedeutend längere Teil handelt von der ruhigen und der turbulenten Strömung und sucht die hierbei auftretenden Schwierigkeiten der Auffassung durch Heranziehen der im ersten Teil vertretenen Anschauung zu beseitigen, die von verschiedenen Autoren vertretenen Ansichten zu klären oder zu berichtigen. Lp.

R. Détrait. Sur le glissement des liquides à la paroi. C. R. **156**, 1670-1673.

Versuche über das Fließen adhärierender Flüssigkeiten in Kapillarröhren aus Glas und aus Schwefel sind durch empirische Formeln zusammengefaßt. Daraus werden spezielle Folgerungen über die Reibungskräfte für die einzelnen Fälle gezogen. Lp.

L. S. da Rios. Sulla stabilità del regime dei corsi d'acqua ad asse curvilineo. Veneto Ist. Atti **72**, 1293-1302.

In dem Buche „La forme du lit des rivières à fond mobile" (Paris, Gauthier-Villars, 1908) hat L. Fargue ein Gesetz in der Gestalt einer Differentialgleichung aufgestellt und aus dieser Beziehung einige Folgerungen gezogen, die sich als nicht ganz zutreffend erwiesen haben. Der Verf. sucht diesen Mängeln durch eine neue Behandlung abzuhelfen. Lp.

U. Cisotti. Sur les mouvements rigides d'une surface de tourbillons. C. R. **156**, 539-541.

Es bestehe in einer unbegrenzten, in rotationsloser Bewegung begriffenen Flüssigkeit eine geschlossene Wirbelfläche, die Kräften unterworfen ist, welche ein Potential haben. Während der Bewegung wird diese Fläche (im allgemeinen) umgestaltet, indem die Umgestaltung von der Bewegung der Flüssigkeit selbst abhängt. Der Verf. wirft die Frage auf, ob die erwähnte Oberfläche sich starr verschieben kann, und zeigt, daß dies in der Tat möglich ist. „Diese bejahende Beantwortung der Frage gibt Anlaß zu einer sehr einfachen Anwendung auf die klasischen Methoden von Kirchhoff, die sich auf die Bewegung eines in eine unbegrenzte Flüssigkeit eingetauchten Körpers beziehen." Lp.

U. Cisotti. Sulle onde semplici di tipo permanente e rotazionale. Nuovo Cimento (6) **7**, 251-259.

Man denke sich eine schwere Flüssigkeit in einem geradlinigen, unbegrenzten Kanal mit horizontalem Boden und mit vertikalen, zueinander parallelen Seitenwänden. Eine leichte Störung der Oberfläche, z. B. ein Lufthauch, erzeugt fortschreitende Wellen der Oberfläche. Bei der gewöhnlichen Behandlung der Aufgabe wird die Bewegung als in Parallelebenen zu den Seitenwänden stattfindend und als rotationslos angenommen. Der Verf. untersucht eine andere Auffassung als die von Airy herrührende, nämlich die einer Existenz fortschreitender Wellen von sinusoidischem Profil allgemeinerer Art. Unter Verzicht auf die Hypothese der Rotationslosigkeit der Wellenbewegung ergibt sich, daß gleichfalls unendlich viele Typen fortschreitender sinusoidaler Wellen existieren, die einen permanenten Charakter haben und mit Rotation behaftet sind. Lp.

U. Cisotti. Intumescenze e depressioni che dislivelli del letto determinano in un canale scoverto. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{22}_1$, 417-423.

Die Arbeit behandelt einen allgemeineren Fall als den, der in dem Aufsatze Sull'intumescenza del pelo libero nei canali a fondo accidentato des Vorjahres erledigt wurde (F. d. M. **43**, 859, 1912). Es wird angenommen, daß der horizontale ebene Boden des Kanales an einer Stelle um einen Winkel α eine kurze Strecke ansteigt und dann um denselben Winkel wieder absteigt, oder daß statt dieser Erhöhung des Bodens eine ähnliche Vertiefung stattfindet. Durch Näherungsmethoden, bei denen, wie schon in der früheren Note, die höheren Potenzen des Verhältnisses h/H ($h =$ Höhe des Bodenhindernisses, $H =$ Höhe

des Wasserspiegels über dem Boden) vernachlässigt werden, gelangt der Verf. zu eleganten Formeln in Gammafunktionen für die Erhöhung (Senkung) des Wasserspiegels oberhalb der Unebenheit des Bodens. Lp.

U. Cisotti. Corrente rapida con brusco salto sul fondo. Rom. Acc. L. Rend. (5) **22**$_1$, 580-584.

Der horizontale Boden eines Kanales sei an einer Stelle, senkrecht zur Längsrichtung, plötzlich um h Meter tiefer gelegt. In größerem Abstande von dieser Stelle ist stromaufwärts die Höhe des Wasserspiegels über dem Boden H, stromabwärts $H+h$. Legt man den Koordinatenanfang in die untere Stelle des Anfanges der Bodensenkung, die y-Achse vertikal aufwärts, die x-Achse in die Längsrichtung des Kanales, so ergeben sich für die freie Flüssigkeitsfläche die Gleichungen

$$x = \frac{2H}{\pi}\left[\log\frac{1-\zeta}{1+\zeta} + \frac{h}{2H}\log\frac{8H}{h}\right], \qquad y = H + h\left[\tfrac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\zeta\right],$$

wo ζ ein Parameter $-1 \leqq \zeta \leqq 1$, $-\frac{1}{4}\pi \leqq \operatorname{arctg}\zeta \lesseqgtr \frac{1}{4}\pi$. Diese Formeln werden genauer diskutiert. So folgt für den Winkel ϑ der Tangente der Kurve (x, y) der freien Oberfläche mit der x-Achse ein Ausdruck, der sich angenähert auf

$$\vartheta = \frac{h}{2H}\left\{1 - \frac{2}{\zeta^2+1}\right\}$$

reduziert. Die Kurve besitzt einen Wendepunkt in der Höhe $y = H + \frac{1}{2}h$ und dem Abstande $x = \frac{h}{\pi}\log\frac{8H}{h}$ von der Bodensenkung; hier ist $\vartheta = -\frac{h}{2H}$. Lp.

U. Cisotti. Efflusso da un recipiente forato sul fondo. Rom. Acc. L. Rend. (5) **22**$_2$, 475-478.

Der Boden eines Behälters mit rechteckigem Querschnitt, der Flüssigkeit enthält, hat ein ganz kleines Loch, durch welches die Flüssigkeit gleichmäßig abfließt. Bei genügender Höhe des Flüssigkeitsspiegels haben alle Flüssigkeitsteilchen in der Nähe des Spiegels senkrecht abwärts gerichtete Bahnen, so daß der Spiegel parallel zur Horizontalebene sich senkt. Dies hört auf, wenn der Spiegel bis zu einem gewissen Abstande vom Boden gelangt ist. Die entscheidende (discriminante) Entfernung, wo dies geschieht, ist ziemlich genau gleich der Breite des Behälters, wie der Verf. nachweist. In nächster Nähe der Ausflußöffnung sind die Stromlinien Tangentenkurven. Bei unendlich großer Breite des Behälters sind die Flußlinien der Teilchen gerade Linien, die nach der Öffnung zusammenlaufen. Lp.

T. Levi-Civita. Théorème de Torricelli et début de l'écoulement. C. R. **157**, 481-484.

„Es ist mir nicht bekannt, daß man die Gültigkeit der Formel $v^2 = 2gh$ auch für den Eintritt der Bewegung angezeigt hätte, d. h. für den Augenblick, in welchem die Bewegung zufolge der plötzlichen Öffnung in der Wandung

eines Behälters entsteht, der eine in Ruhe befindliche Flüssigkeit enthält. Ich werde dies auf eine ganz elementare Weise erhärten, durch bloße Heranziehung des Theorems der lebendigen Kräfte. Auf diese Art wird nachgewiesen, daß bei jeder Weite der Mündung Ω jene Formel in aller Strenge die Anfangsgeschwindigkeit für jedes Element $d\Omega$ definiert, wo h sich wohlverstanden auf das bezügliche Element bezieht.“ Analytisch betrachtet, kommt alles auf ein gemischtes harmonisches Problem für das Innere des Gefäßes zurück, bei dem die Bedingung an der Öffnung der Torricellische Wert von v ist. Lp.

Ed. Maillet. Sur les systèmes de réservoirs et divers problèmes d'algèbre et d'analyse corrélatifs. Journ. de Math. (6) **9**, 171-231.

„Ich habe früher (F. d. M. **40**, 359-360, 1909) die Systeme von n Behältern $S_1, S_2, \ldots, S_n$ untersucht und dabei vornehmlich die Flüssigkeitsbehälter mit freier Oberfläche, deren Verbindungsstücke nicht untergetaucht sind, unter der Voraussetzung, daß jedes Stück nur zwei Behälter verbindet.

Nun kann es aber bei den Flüssigkeiten vorkommen, daß manche Stücke untergetaucht sind, daß nämlich der Erguß des Stückes, das z. B. S_i und S_k in Verbindung setzt, von den Flüssigkeitshöhen z_i und z_k dieser beiden Behälter abhängt. Ferner kommen Probleme gleicher Art in der Gas- und in der Wärmetheorie vor. Endlich können auch manchmal Verbindungsstücke so eingerichtet werden, daß jedes eine beliebige Anzahl von Behältern verbindet, so daß S_i durch dieses Stück einen Erguß gewinnt oder verliert, der von den Flüssigkeitshöhen, Drucken usw. abhängt. Somit wird man dazu geführt, die Untersuchung des folgenden allgemeinen Problems in Betracht zu ziehen:

Man habe n Gegenstände oder Behälter $S_1, S_2, \ldots, S_n$, denen eine Eigenschaft oder ein Zustand zukommt, definiert für jeden einzelnen durch je eine charakteristische Variable $z_1, z_2, \ldots, z_n$, die sich gegenseitig beeinflussen, und von denen jede außerdem äußere Beeinflussungen erhalten kann, die Funktionen der z_i oder der Zeit sind. Welches sind die Schwankungen der $z_1, \ldots, z_n$?

Es ist mir gelungen, für sehr ausgedehnte Fälle 1. die Systeme der Differential- und impliziten Gleichungen des allgemeinen angeführten Problems aufzustellen, 2. zu zeigen, daß bei einer begrenzten Speisung die Größen $z_1, \ldots, z_n$ beschränkt bleiben, wohlverstanden, wenn die inneren und äußeren Verbindungswege geeignet untergebracht sind, 3. die Stabilität des dauernden Zustandes zu erforschen, ebenso die kleinen periodischen Störungen und die diesem Zustande benachbarten Zustände.

Die Grundlage meiner Untersuchungen ist das folgende Postulat, das ich zugelassen habe: Der Erguß eines Verbindungsweges zweier (und nur zweier) Behälter ist gewöhnlich, abgesehen in begrenzten Gebieten, eine einwertige (kann aber mehrwertig sein) Funktion von z_1 und z_2, die mit z_1 wächst, dagegen abnimmt (oder nicht zunimmt), falls z_2 wächst, wenn $z_1 > z_2$, wo z_1 und z_2 die charakteristischen Zahlen von S_1 und S_2 sind. Dieses Postulat stimmt mit den bekannten Tatsachen überein (Bazin, Boussinesq, Parenty usw.), selbst wenn die Anordnung wie beim Siphon ist, in welchem Falle der Erguß in einem beschränkten Gebiete zweiwertig ist; er könnte zu Bestätigungsversuchen dienen.

Eine Bazinsche Formel bezüglich eingetauchter Behälter in der Hydraulik der Flüssigkeiten scheint zum Teil mit diesem Postulat in Widerspruch

zu stehen. Doch kommt es auch vor, daß die bezüglichen Versuche im Gegenteil mit ihm übereinstimmen, demgemäß natürlich auch die Formel in den Grenzen, für die sie abgeleitet ist.

Manchmal bin ich auf Probleme der Algebra und der Analysis gestoßen, die ich nicht vollständig gelöst habe, oder deren Tragweite merklich allgemeiner verfolgt werden kann, als es für die beabsichtigten Folgerungen nötig ist. Manche von ihnen, deren Lösungen ich hier nachgegangen bin, bilden den Gegenstand einer besonderen Darlegung, die man lesen kann, ohne den Rest der Abhandlung (§§ IV-VI) durchzuarbeiten. Eine weitere Lösung einiger von diesen Problemen, die dem reinen Mathematiker zufallen, wäre sehr erwünscht. Als spezielle Fälle würde sie Anwendungen auf die Systeme von n Behältern bringen. Ich weise hauptsächlich auf die Bearbeitung einer algebraischen Gleichung hin (§ V), welche die sogenannte säkulare Gleichung umfaßt.“ Lp.

H. Villat. Sur l'écoulement des fluides pesants. C. R. **156**, 58-61.

Der Verf. gibt in der Note ein Integral an, „das man in dem Falle zweier Dimensionen das allgemeine Integral der rotationslosen permanenten Bewegung einer schweren Flüssigkeit nennen könnte“, und skizziert dann den zur Lösung der Aufgabe einzuschlagenden Weg. Lp.

H. Villat. Sur la validité des solutions des problèmes d'Hydrodynamique. C. R. **157**, 700-703.

Brillouin hat in der Abhandlung „Les surfaces de glissement d' Helmholtz et la résistance des fluides“ (F. d. M. **42**, 793, 1911) gezeigt, daß bei den Problemen der Hydrodynamik bezüglich des Fließens von Flüssigkeiten um feste Hindernisse die durch die klassischen Methoden gewonnene Lösung allgemein trügerisch wird, weil sie zu Unmöglichkeiten führt. In einer demnächst zu veröffentlichenden Arbeit will der Verf. zeigen, wie solche Schwierigkeiten behoben werden können; jetzt gibt er ohne Beweis einige Resultate an, zu denen er gekommen ist. Lp.

H. Villat. Sur la détermination des problèmes d'Hydrodynamique relatifs à la résistance des fluides. C. R. **156**, 442-445.

„Wenn man überall in der Flüssigkeit die Stetigkeit der Geschwindigkeiten und der Drucke fordert, geben bekanntlich die Gleichungen der Hydrodynamik für den permanenten Zustand unannehmbare Lösungen: der erhaltene Druck wird allgemein irgendwo unendlich negativ und bleibt in ausgedehnten Gebieten negativ. Die Einführung der Unstetigkeitsflächen hat, wie jetzt allgemein bekannt ist, in zahlreichen Fällen das Auffinden einer Lösung ermöglicht, die dieser Schwierigkeit entgeht. Ist diese Lösung die einzige? Mit andern Worten, haben die Gleichungen der permanenten Bewegung einer rotationslosen Flüssigkeit bei Anwesenheit eines gegebenen Widerstandes eine ganz bestimmte Lösung, für welche die Geschwindigkeiten fast überall stetig sind (ausgenommen vielleicht an einigen Unstetigkeitsflächen), und für welche der Druck stetig und

überall positiv ist? Als bekannt (nach Größe und Richtung) wird die Geschwindigkeit des Flüssigkeitsstromes im Unendlichen angenommen, als gegeben der Druck in einem Punkte (z. B. im Unendlichen). Diese Frage muß verneinend beantwortet werden, wie schon Boussinesq vermutet hat, der in einer neueren Abhandlung die Tatsache als wahrscheinlich andeutete: Die Gleichungen der Hydrodynamik können mehr als eine Lösung von der angegebenen Art haben. Ich habe unendlich viele allgemeine Fälle bestimmt, in denen wenigstens zwei existieren, die mit gleichem Recht vom physikalischen Gesichtspunkt aus annehmbar sind. Ich will im folgenden kurz eine Kategorie solcher auf ebene Bewegungen bezüglichen Fälle angeben.“ Lp.

V. Vâlcovici. Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen mit zwei freien Strahlen. Inaug.-Diss. Göttingen. 62 S.

Anschließend an die oft erwähnte Arbeit von Levi-Civita, Scie e leggi di resistenza (1907), hat der Verf., indem er einen von Th. von Kármán herrührenden Gedanken verfolgte, die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für den Fall eines in einer allseitig ins Unendliche ausgedehnten Flüssigkeit sich gleichförmig bewegenden Körpers bewiesen sowie die erste Annäherung bei der kreiszylindrischen Schale berechnet. Die Übersichtlichkeit der Levi-Civitaschen Methode erlaubt eine derartige Wahl der gesuchten Funktion, daß man ungefähr die der vorgegebenen Kontur entsprechende Lösung erhält. Auf diese Weise hat Villat in der vorstehend angekündigten großen Arbeit durch eine geschickte Umformung der Schlußformel manche Aufgaben vollständig lösen können, wo die starren Wände nicht mehr geradlinig waren.

Bis jetzt hat man solche Aufgaben behandelt, wo das Grundgebiet einfach zusammenhängend ist (inneres Gebiet des Einheitskreises) oder zweifach zusammenhängend (Inneres eines Kreisringes). Der letztere Fall erfordert den Gebrauch elliptischer Funktionen und bringt große rechnerische Schwierigkeiten mit sich. Man hat noch nicht einmal die notwendigen Gleichungen zur Bestimmung der in jeder Aufgabe vorkommenden Parameter deutlich aufgestellt. Ihre Lösung ist eine schwierige Aufgabe.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit in ihrem ersten Teil ist die Behandlung der Ausströmung eines Strahles aus einem Gefäß gegen einen Körper. Der Fall führt auf einen Kreisring als Grundgebiet G, wie schon Villat bemerkt hat. Die verschiedenen auftretenden Parameter sind durch Gleichungen verbunden, deren genaue Aufstellung und Lösungsmöglichkeit erörtert wird.

In dem zweiten Teil wird der Fall der symmetrischen Bewegung behandelt, der bedeutende rechnerische Vereinfachungen bietet. Trotzdem läßt sich die Auflösung der aufgestellten Gleichungen nicht bis zu Ende führen. Für die verschiedenen zu bestimmenden Parameter werden Reihenentwicklungen angesetzt, deren unbestimmte Koeffizienten durch die physikalischen Bedingungen des Problems zu ermitteln sind. Diese Werte werden zur Entscheidung der Theorie über einen wichtigen praktischen Fall benutzt: Vergleich der Ergebnisse der Eiffelschen Versuchsanstalt (Strahl aus einem Gefäß gegen einen Körper) mit den Prandtlschen Widerstandsversuchen (Körper in einem Kanal). Diese Versuche, die durch die Forderungen der Praxis ins Leben gerufen sind, geben für den auf den Körper ausgeübten Druck Werte an, die für den Fall eines Körpers in einer nach allen Richtungen unendlich ausgedehnten Flüssig-

keit gelten sollen. Der zweite Teil der Arbeit soll die theoretischen Abweichungen jeder der beiden Versuchsarten von der wirklich beabsichtigten bestimmen, unter der Annahme, daß die Helmholtz-Stokessche Hypothese aufrecht erhalten bleibt und die Strömung zweidimensional ist. Zunächst wird die symmetrische Strömung des Strahles berechnet, der aus einer ebenen Düse austritt und eine ebene Platte trifft. Als spezielle Fälle hat man die Strömung um den Körper in einem Kanal und in der in allen Richtungen unendlich ausgedehnten Flüssigkeit.

Der Fehler, den man bei der experimentellen Ermittlung des Widerstandes begeht, ist sowohl bei den Eiffelschen, als auch bei den Göttinger Versuchen sehr klein.

Lp.

V. Vâlcovici. Sur la résistance hydrodynamique d'un obstacle dans un mouvement avec des surfaces de glissement. C. R. **157**, 1131-1132.

Der Verf. gibt an, daß er die Lösung der folgenden Aufgabe gefunden hat: Aus einem zylindrischen Kanal, dessen Erzeugende sich nur in einer Richtung unbegrenzt erstrecken, kommt ein Flüssigkeitsstrom, der durch Helmholtzsche Gleitflächen begrenzt wird; er stößt auf ein Hindernis mit scharfen Rändern und läßt hinter diesen eine Flüssigkeitsmasse in Ruhe, die sich bis ins Unendliche erstreckt und von der bewegten Flüssigkeit durch Gleitflächen getrennt ist. Die Komponente der auf das betrachtete Hindernis ausgeübten Einwirkung der Flüssigkeit in der Richtung der Erzeugenden zu finden.

Die Aufgabe unterscheidet sich von denen, die in den an die oft zitierte Arbeit von Levi-Civita sich anschließenden Untersuchungen behandelt sind, dadurch, daß sie einen dreidimensionalen Strom fordert, während sonst immer zweidimensionale Strömungen betrachtet sind (vgl. das vorstehende Referat).

Lp.

Anita de Faccio. Sulle lamine vorticose in seno a un liquido perfetto. Veneto Ist. Atti **72**, 971-988.

Für eine mathematische Behandlung eignen sich, wie hier gezeigt wird, solche Fälle, bei denen das von den Wirbeln eingenommene Feld sich auf eine flache Schicht von geringer Dicke beschränkt, das vom geometrischen Gesichtspunkt aus einem Oberflächenstück σ vergleichbar ist, begrenzt von einem Rande S. In diesem Falle wirkt die von den Wirbeln auf den verschiedenen Flüssigkeitsteilchen induzierte Geschwindigkeit vorwiegend in der nächsten Nähe des Randes S, und zwar um so mehr, je kleiner die Dicke ist. Indem man sie hinreichend klein hält, kann man dann absehen von dem, was sich in einer gewissen Entfernung von S zuträgt, und die Untersuchung der Erscheinung auf die Deformation der Endstreifen der Wirbelplatte beschränken. Diese Untersuchung wird in der Arbeit durchgeführt. § 1. Asymptotischer Ausdruck der Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte des Randes. § 2. Fall einer Schicht von endlicher Dicke. § 3. Untersuchung der Bewegung während eines endlichen Zeitraumes. § 4. Fall, bei welchem die Wirbelintensität konstant ist längs des ganzen Randes.

Lp.

L. Föppl. Wirbelbewegung hinter einem Kreiszylinder. Münch. Ber. 1913, 1-17.

Wird ein Kreiszylinder, der sich in einem Gefäß mit Wasser befindet, aus der Ruhe heraus in translatorische Bewegung versetzt, so lösen sich bald nach Eintritt der Bewegung an seinem hinteren Rande zwei Wirbel mit entgegengesetztem Drehsinn ab. Beim Experiment macht man die Wahrnehmung, daß dieses so vollkommen ausgebildete Wirbelpaar in seiner Lage zum Zylinder fest in Ruhe bleibt. Daher entsteht die Frage, ob es hinter dem Zylinder Lagen gibt, wo sich ein Wirbelpaar in relativer Ruhe gegen den Zylinder befinden kann. Der Verf. sucht zu diesem Zwecke den geometrischen Ort für die Ruhelage des Wirbelpaares hinter einem Kreiszylinder vom Radius 1 und findet eine Kurve, die symmetrisch zur Bewegungsrichtung des Zylinders liegt. Eine photographische Abbildung des Versuches zeigt, daß die beiden Zentren des Wirbelpaares in der Tat genau auf dieser Kurve liegen. Bei dem Vorgange löst sich an der hinteren Zylinderwand ein Wirbelpaar ab, das unter fortdauerndem Wachstum der Wirbelstärke sich jener Kurve nähert und, nachdem es die Kurve erreicht hat, langsam längs der Kurve unter abermaliger Zunahme der Wirbelstärke weiterwandert. Das Strömungsbild entspricht der Darstellung, die Th. von Kármán gegeben hat (F. d. M. **42**, 792 u. 800, 1911; **43**, 854, 1912). Die Veränderung des beobachteten Strömungsbildes hat in der Labilität einer der vier Hauptschwingungen des Wirbelpaares seinen Grund, wie in § 2 gezeigt wird. Der § 3 dient zur theoretischen Erklärung des Widerstandes des bewegten Kreiszylinders aus dem beobachteten Fortwandern des Wirbelpaares, und im § 4 wird die Ausdehnung der Betrachtungen auf die Bewegung einer ebenen Platte angedeutet. Lp.

O. Olsson. Partikulära integraler till differentialekvationerna för fasta kroppars rörelse i vätskor. Arkiv för Mat., Astron. och Fys. 8, Nr. 38, 34 S.

Der Verf. zeigt, daß bei gewissen Symmetrieeigenschaften eines festen Körpers ein neues allgemeines algebraisches Integral für die Bewegung des Körpers in einer Flüssigkeit erhalten werden kann, und daß unter Umständen dann auch eine vollständige Integration der Bewegungsgleichungen möglich ist. Lp.

A. H. Gibson. On the motion of long air-bubbles in a vertical tube. Phil. Mag. (6) **26**, 952-965.

Außer der Beschreibung von Versuchen über die Erscheinung werden auch theoretische Betrachtungen gegeben, deren Ergebnisse mit denen der Versuche gut übereinstimmen. Lp.

F. Noether. Über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel. Zs. f. Math. u. Phys. **62**, 1-39. Habil.-Schrift Karlsruhe, 39 S.

Der Widerstand, den ein in einer Flüssigkeit bewegter Körper findet, oder der Gesamtdruck, den strömende Flüssigkeit auf einen ruhenden Körper ausübt,

hängt von der Spannungsverteilung in der Flüssigkeit längs der Körperoberfläche ab. Die wesentliche Schwierigkeit für die strenge Behandlung des Problems mit Hülfe der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen ist der quadratische Charakter dieser Gleichungen, der ihre vollständige Auswertung vorläufig kaum erwarten läßt. Stokes hat den Fall einer Flüssigkeit von sehr großer Zähigkeit oder sehr geringer Dichte behandelt, für die die inneren Widerstände so groß gegenüber den Trägheitskräften sind, daß letztere vernachlässigt werden können. Dann werden die erwähnten Differentialgleichungen linear, und das Stokessche Resultat für eine Kugel ist die Formel des Widerstandes $W = 6\pi\mu Ua$, wo U die Geschwindigkeit der Formel, a ihr Radius, μ der Koeffizient der inneren Reibung ist. Der Verf. geht von der Stokesschen Bewegung aus, die zwar die Randbedingungen streng befriedigt, aber nicht die Differentialgleichungen; er sucht eine Annäherung an die Differentialgleichungen.

Er betrachtet nicht wie Stokes eine Parallelströmung, in der die Kugel ruht, sondern eine Strömung, die durch eine in großer Entfernung von der Kugel befindliche Quelle und eine auf der entgegengesetzten Seite befindliche Senke hervorgerufen wird; diese Strömung unterscheidet sich in der Nähe der Kugel nicht wesentlich von einer Parallelströmung, wenn die Entfernung der Quelle hinreichend groß ist gegenüber dem Kugelradius. In unendlicher Entfernung aber ist diese Strömung wesentlich von der Parallelströmung verschieden, und dadurch wird es ermöglicht, daß die bei der Stokesschen Bewegung gekennzeichneten Schwierigkeiten hier nicht auftreten. So gelingt es in der Tat, eine eindeutige Lösung für die Differentialgleichungen und Randbedingungen in erster Näherung zu finden. — Mit der Frage nach dem Gültigkeitsbereich der Stokesschen Formel hängt die andere zusammen, bei welcher unteren Geschwindigkeitsgrenze die bei großen Geschwindigkeiten stets beobachtete Rückströmung und Wirbelbildung auf der Rückseite des Körpers eintritt. Die gefundene erste Annäherung gibt allerdings auch hier eine vorläufige Antwort; doch bleibt, da diese Grenze schon aus dem Gebiete sehr kleiner Reynoldsscher Zahl herausfällt, noch abzuwarten, wie durch die weitere Entwicklung diese Grenze beeinflußt wird. Lp.

C. W. Oseen. Über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel. Ark. för Mat., Astr. och Fys. **9**, Nr. 16, 15 S.

In der vorstehend angezeigten Abhandlung hat F. Noether „den Versuch gemacht, den Einfluß der sogenannten quadratischen Glieder auf die Bewegung der Flüssigkeit in der Umgebung der Kugel in erster Näherung zu berechnen. Dieser Versuch ist nun, meines Erachtens, nicht gelungen“. Der Verf. begründet in dem Artikel dieses Urteil, indem er den Fehler in den Überlegungen Noethers aufdeckt. Lp.

M. S. Smoluchowski. On the practical applicability of Stokes' law of resistance and the modifications of it required in certain cases. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 192-201.

„Das Stokessche Gesetz für den Widerstand einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit beruht bekanntlich auf den grundlegenden Annahmen: I. Langsam-

keit der Bewegung, so daß die Trägheitsglieder in den hydrodynamischen Gleichungen im Vergleich mit den Wirkungen der Zähigkeit vernachlässigt werden können. II. Vollständige Adhäsion der Flüssigkeit an der Kugel ohne Gleiten, indem diese als ein starrer Körper angesehen wird. III. Unbegrenztheit der Flüssigkeit und Unbewegtheit im Unendlichen. In dem Folgenden möchte ich einige Bemerkungen über dieses Gesetz beibringen im Hinblick auf manche Fälle von praktischer Wichtigkeit, wo die zugrunde liegenden Bedingungen in gewisser Weite geändert werden; dies dürfte für solche von einigem Interesse sein, die sich mit Untersuchungen über Gegenstände beschäftigen, welche mit dem Stokesschen Gesetz zusammenhängen." Die nun gemachten Bemerkungen geben eine Übersicht über die von verschiedenen Forschern gemachten Vorschläge über Abweichungen von jenen drei Annahmen von Stokes und über die dadurch erzielten Ergebnisse nebst ihren Prüfungen an der Erfahrung. Natürlich werden die eigenen veröffentlichten Arbeiten (vgl. F. d. M. 42, 815, 1911) besonders herangezogen und neue Gedanken über die Vorgänge in der Flüssigkeit erwogen. Lp.

E. Almansi. Sopra le azioni le quali si esercitano fra corpi che si muovono o si deformano entro una massa liquida. Rom. Acc. L. Rend. (5) **22**$_2$, 533-544.

Wenn zwei in einer nach allen Richtungen hinreichend weit sich ausdehnenden Flüssigkeit untergetauchte Kugeln, die ihre Mittelpunkte in zwei festen Punkten des Raumes haben, und deren Radien periodisch um einen Mittelwert herum sich ändern, von dem diese sich aber immer nur sehr wenig entfernen, so üben bekanntlich die Kugeln aufeinander eine Anziehung oder Abstoßung aus, je nachdem ihre Pulsationen dieselbe oder entgegengesetzte Phase haben. Wenn ebenso die Radien der Kugeln konstant sind und die Mittelpunkte sich auf einer Geraden so verschieben, daß sie um zwei feste Punkte oszillieren, so ziehen sich die beiden Kugeln an oder stoßen sich ab, je nachdem ihre Mittelpunkte in jedem Augenblicke entgegengesetzt oder gleich gerichtete Geschwindigkeiten haben. Die analytische Behandlung von Problemen dieser Art begegnet, wenn man die Bewegung der Flüssigkeit als rotationslos, die Massenkräfte als vernachlässigbar annimmt, solchen Schwierigkeiten, daß sie mit Ausnahme einer äußerst beschränkten Zahl von Fällen (unter ihnen die angeführten) als unüberwindbar anzusehen sind. Wenn man jedoch sich damit begnügt, die allgemeinen Charaktere der Erscheinung festzustellen, z. B. ob zwischen Körpern bei gegebenen Bedingungen der Bewegung Anziehungen oder Abstoßungen eintreten, unter Verzicht auf ihre quantitative Auswertung, so gelangt man mit Leichtigkeit in allen Fällen, die größeres Interesse haben, zu dem gesteckten Ziele. Die Behandlung des so reduzierten Problems ist hier vorgenommen. Lp.

F. Pfeiffer. Theorien des Flüssigkeitswiderstandes. Deutsche Math.-Ver. **22**, 113-126.

Dieser in Danzig am 13. März 1912 gehaltene Habilitationsvortrag ist zuerst in der „Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen" vom Jahre 1912 veröffentlicht. In ihm werden die Theorien des Flüssigkeitswiderstandes seit Newton bis auf die Gegenwart besprochen, zuletzt besonders die von

Prandtl und seinen Schülern in neuester Zeit entwickelte Theorie. Von den hierher gehörigen Arbeiten werden am Schlusse die Untersuchungen von Kármán eingehender gewürdigt. Hiernach ist der Mittelwert des Betrages W des Widerstandes während der Zeit T durch die Formel $W = \psi \varrho d U^2$ ausgedrückt, wo die Widerstandsziffer

$$\psi = \left\{0,799 \frac{u}{l} - 0,323 \left(\frac{u}{U}\right)^2\right\} \frac{d}{l},$$

d eine charakteristische lineare Abmessung des Körpers (etwa die Plattenbreite) ist, ϱ die Dichte der Flüssigkeit, u die Geschwindigkeit des Wirbelsystems, U die des Körpers, l die Teilung der Wirbelreihen. Das Widerstandsgesetz ist also das quadratische. „Erst wenn es möglich ist, die zunächst nach dem Experiment zu entnehmenden Größen u/U und l/d, die in der Widerstandsziffer auftreten, rein rechnerisch zu ermitteln und diese Überlegungen auf räumliche Probleme auszudehnen, erst dann wird man von einer vollständigen theoretischen Einsicht in das Widerstandsproblem sprechen können.“ Lp.

A. H. Gibson. The loss of energy at oblique impact of two confined streams of water. Edinb. Roy. Soc. Trans. 48, 799-811.

Der Verlust ist in der Form $a V^2 + b v^2$ ausdrückbar, wo V und v die Wassergeschwindigkeit in dem Hauptrohr und dem Einlaßrohr sind. Die Koeffizienten a und b, die für jedes einzelne Rohrpaar konstant sind, hängen von den Flächeninhalten der Querschnitte ab und von dem Winkel, unter dem die Rohre sich treffen. Es ergibt sich, daß für eine besondere Paarung von Flächeninhalt und Winkel der Verlust am kleinsten wird. J.

W. J. Harrison. The motion of viscous liquid due to uniform and periodic motion maintained over a segment of an infinite plane boundary. London Roy. Soc. Proc. (A) 88, 13-23.

„Der Verf. wurde zur Betrachtung der Probleme, deren Lösung in diesem Aufsatze vorgelegt wird, durch den Versuch geführt, eine gewisse Aufgabe in der Theorie des Schmierens zu lösen. Diese Lösungen haben aber nach seiner Meinung ein hinreichendes Interesse an sich, um ihre gesonderte Veröffentlichung als Beispiele in der theoretischen Hydrodynamik zu rechtfertigen; die mehr physikalischen Anwendungen auf das Schmieren bleiben für eine spätere Entwicklung vorbehalten. Bei den ersten drei Problemen wird eine zähe Flüssigkeit durch eine gleichförmige oder periodische Bewegung eines Teiles (Streifens von unbegrenzter Länge) ihrer ebenen Begrenzung in Bewegung erhalten. In den übrigen beiden Problemen wird die Flüssigkeit durch eine zweite Ebene parallel zur ersten begrenzt.“ Die Stromlinien werden berechnet und abgebildet. Lp.

W. J. Harrison. The hydrodynamical theory of lubrication with special reference to air as lubricant. Cambr. Phil. Soc. Trans. 22, 39-55.

Der Verf. setzt als Träger der sich drehenden Wellen vollständige Hohlzylinder voraus, weil dann die theoretische Behandlung einfacher wird und eine leichtere experimentelle Prüfung zuläßt als bei seinen Vorgängern O. Reynolds (F. d. M. **18**, 946, 1886) und N. Petroff (F. d. M. **31**, 713, 1900). Erst nach Vollendung der Untersuchungen für diesen Fall ist dem Verf. die bezügliche Abhandlung von A. Sommerfeld bekannt geworden (F. d. M. **35**, 765. 1904). Wie er selbst angibt, sind die Endformeln identisch, doch sei seine Behandlung des Problems etwas anders als die Sommerfeldsche, kürzer und in einem oder in zwei Punkten direkter, eigne sich auch besser für Experimentatoren.

„Eine Frage wird in dem Verlaufe der Untersuchung bezüglich der Verläßlichkeit von Versuchen erhoben, die bisher angestellt sind, um das von dem Zug des Schmiermittels auf die Welle ausgeübte Moment zu bestimmen. Dieser Punkt ist von Wichtigkeit, da mittels dieses Momentes der nominelle Reibungskoeffizient der Welle erhalten wird."

In dem letzten Teil der Arbeit wird die Methode dahin ausgedehnt, daß sie das Schmieren mittels einer zähen, elastischen Flüssigkeit wie Luft zu berechnen ermöglicht. Die von Kingsbury 1897 angestellten Versuche (J. Amer. Soc. Nav. Eng. **9**, 267) zeigen in manchen Einzelheiten bedeutende Unterschiede von dem, was in dem Falle des Schmierens durch eine unzusammendrückbare Flüssigkeit zu erwarten war. Die Differentialgleichung, welche den Druck in der Luftschicht bestimmt, hat der Verf. explizit nicht integrieren können; aber er hat ihr Integral nach den Daten von Kingsbury mit Hülfe der Rungeschen numerischen Methoden berechnet. Der Grad der Annäherung der Theorie an das Experiment ist ganz befriedigend. Die Rechnung ist durchgeführt für den Fall ebener Platten; die Ergebnisse zeigen die entschiedene Wirkung der Zusammendrückbarkeit der Luft auf die Größe und Verteilung des Luftdrucks. Lp.

R. Grammel. Über Schwingungen nach dem quadratischen Widerstandsgesetz. Physik. Zs. **14**, 20-21.

„Kürzlich hat Ph. Forchheimer (Zs. Ver. D. Ing. **56**, 1291, 1912) die Schwingungsvorgänge im Wasserschloß einer Turbinenleitung einer Diskussion unterworfen für den Fall, daß der Widerstand proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit ist; Forchheimer beschränkt sich auf den ersten Ausschlag. Da, wie es scheint, der Schwingungsvorgang für diesen Fall noch nirgends behandelt worden ist, so sollen hier kurz die Ergebnisse der leicht durchzuführenden Rechnung zusammengestellt werden." Lp.

R. Grammel. Über Schwingungen nach dem quadratischen Widerstandsgesetz. Physik. Zs. **14**, 125.

Die Differentialgleichung $\frac{d^2 x}{dt^2} + k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\alpha^2 x = 0$ ist für positive k von W. v. Ignatowsky im Arch. d. Math. u. Phys. (3) **17**, 338-344 (F. d. M. **42**, 396, 1911) schon in ähnlicher Weise untersucht worden. Lp.

J. Wylie. Graphical constructions for steering course of a ship. Phil. Mag. (6) **25**, 558-567.

„Gegeben ist eine Anzahl paralleler Wasserstreifen; in jedem Streifen fließt das Wasser mit konstanter Geschwindigkeit, aber die Geschwindigkeit ändert sich von Streifen zu Streifen. Den Weg kleinster Zeit zu finden und den Kurs, nach welchem ein Schiff zu steuern ist, das von einem gegebenen Punkt in einem Streifen zu einem Punkt in einem der andern Streifen fahren soll." Diese Aufgabe wird graphisch gelöst mittels elementargeometrischer Überlegungen.
Lp.

L. E. Bertin. Calcul de l'augmentation du chargement ou de la vitesse obtenue par l'accroissement des dimensions d'un paquebot. C. R. **156**, 19-25.

Die Berechnung geht von einer empirischen Formel aus und gelangt unter angenähert zutreffenden Annahmen zu Endformeln, deren zahlische Auswertung tabellarisch veranschaulicht und zu praktischen Vorschlägen benutzt wird.
Lp.

Comte de Sparre. Sur les coups de bélier dans les conduites formées de sections de diamètres différents. C. R. **156**, 1521-1523.

Bei großen Fallhöhen wird man oft dazu geführt, die Leitungsröhren mit solchen Querschnitten zu bilden, deren Durchmesser sich allmählich mit dem Abstande von der Schöpfstelle verkleinert, wo der Druck ja zunimmt. Man könnte meinen, der Widderstoß werde in keinem Falle den Wert überschreiten, den er haben würde, wenn die Leitung überall den Durchmesser des unteren Teiles hätte, wo die Geschwindigkeit des Wassers am größten ist, da die Verbreiterung des oberen Teiles entschieden die gesamte, in der Leitung aufgespeicherte lebendige Kraft verkleinere. Dem ist aber nicht so bei einem jähen Verschluß, wie der Verf. an einem einfachen Beispiel zeigt.
Lp.

O. Gröger. Eine neue Geschwindigkeitsformel für natürliche Flußgerinne. Zs. d. österr. Ing.- u. Architektenvereins **65**, 577-582 und 4 Tafeln.

Aus einer sehr großen Menge von Beobachtungsmaterial wird die Formel $V_m = 23{,}781 \,.\, T^{0{,}776} \,.\, I^{0{,}458}$ (V_m mittlere Geschwindigkeit, T mittlere Tiefe, I Gefälle) errechnet. Die Formel wird auch tabellarisch und nomographisch ausführlich dargestellt.
Schr.

R. Ehrenberger. Graphische Darstellung der Formeln von Lindboe. Zur Ermittlung der mittleren Geschwindigkeiten in natürlichen Wasserläufen unter Verwendung von „Logarithmenpapier". Österr. Wochenschrift f. d. öff. Baudienst **19**, 451-454.

Die Formel von Lindboe (Zs. für Gewässerkunde, 1911, Heft 1) lautet $v = K \,.\, \lambda \,.\, t^n \,.\, I^r$, wobei $\lambda = m + q\left(\frac{t}{b}\right)^p$ ist. Hierin bedeuten: v die Wasser-

geschwindigkeit, K, m, n, p, q, r konstante Werte, b die Wasserspiegelbreite, t die mittlere Profiltiefe, I das relative Gefälle. Für die Konstanten werden verschiedene Werte angegeben, indem für I und $\frac{t}{b}$ zwei, für t drei Intervalle unterschieden werden, so daß sich $2 . 2 . 3 = 12$ Teilformeln ergeben. Diese werden auf Logarithmenpapier nomographisch dargestellt. Schr.

N. Haponowicz. Eine graphische hydraulische Tafel. Zs. d. österr. Ingenieur- und Architektenvereins **65**, 407-410.

Diagramm für die verschiedenen Formeln für die Geschwindigkeit des fließenden Wassers nach Matakiewicz, Lindboe, Bazin, Kutter, Ganguillet-Kutter; zur Ablesung ist ein Abgreifen mit dem Zirkel notwendig. Schr.

R. Müller. Graphische Ermittlung der Hochwasserretention während der Wirkung des Überfalles bei Stauweihern. Allg. Bauztg. **78**, 58-70. (Hierzu 2 Tafeln.)

An Beispielen wird die Frage besprochen, welchen Einfluß die Überfallbreite auf die zu gewärtigende Überfallhöhe und damit auf die maximale Überfallquantität, welche zugleich auch die Hochwasserretention kennzeichnet, ausübt. Schr.

Weitere Literatur.

D. Bánki. Der Energiesatz der kreisenden Flüssigkeit. Zs. des Ver. deutscher Ing. **57**, 17-25.

R. G. Blaine. Hydraulic machinery, with an introduction to hydraulics. Third edition, revised. London: Spon. 482 S. 8°.

H. Blasius. Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. Mitt. über Forsch. d. Ingenieurw. **131**, 1-39.

A. Boulanger. Étude sur la propagation des ondes liquides dans les tuyaux élastiques. Paris: Gauthier-Villars. VII + 120 S. 8°. (Travaux et Mémoires de l'Université de Lille II.)

R. B. Buckley. Irrigation pocket book. Facts, figures, and formulae for irrigation engineers. 2d edition. London: Spon. 492 S. 8°.

A. Budau. Kurzgefaßtes Lehrbuch der Hydraulik, Hydrostatik — Hydrodynamik — Hydrometrie für Ingenieure usw. Wien: C. Fromme. VIII + 326 S. Lex.-8°.

R. L. Daugherty. Hydraulic turbines; with a chapter on centrifugal pumps New York: McGraw-Hill. 160 S. 8°.

A. Finzel. Über die Reflexion scherender Deformationen an der Grenzfläche zweier Flüssigkeiten. Diss. Erlangen. 62 S. 8°.

G. Hamel. Die rechnerische Behandlung turbulenter Flüssigkeitsbewegungen. Zs. des Ver. deutscher Ing. **57**, 479.

G. Lavergne. Les turbines. 4e édition. Paris: Gauthier-Villars. 216 S. 8°.

L. M. Le Dantec. Théorie géométrique et mécanique de l'hélice-turbine. Paris: Dupont. 77 S. 4°.

H. Lorenz. Nouvelle théorie et calcul des roues-turbines. Traduit de l'allemand par H. Espitallier et H. Strehler. Paris: Dunod et Pinat. XIV + 312 S. 8°.

R. Müller. Theorie der zeitlich veränderlichen Strömung des Wassers in Turbinenleitungen mit Berücksichtigung graphischer Verfahren. Dresden: Dressel.

J. Nordlund. Über die Gültigkeit des Stokesschen Gesetzes für die Bewegung von Flüssigkeitströpfchen in Flüssigkeiten. Berlin: R. Friedländer u. Sohn. 18 S. 8°.

L. Prandtl. Abriß der Lehre von der Flüssigkeits- und Gasbewegung. Jena: Fischer.

F. Prášil. Technische Hydrodynamik. Berlin: J. Springer. VIII + 269 S. gr. 8°.

A. S. Ramsey. A treatise on hydromechanics. Part II. Hydrodynamics. London: G. Bell and Sons. XII u. 360 S. [Nature **91**, 579.]

C. Aerodynamik.

O. Janzen. Beitrag zu einer Theorie der stationären Strömung kompressibler Flüssigkeiten. Phys. Zs. **14**, 639-643.

„Von hohem Interesse ist die Frage, ob das hydrodynamische Paradoxon für kompressible Flüssigkeiten Geltung behält, d. h. ob ein fester Körper in stationär fließender Luft keinen Widerstand findet, wenn man voraussetzt, daß die Geschwindigkeit überall eine stetige Funktion des Ortes sei.“ Diese und andere Fragen werden an einem besonderen Falle zweidimensionaler Strömung untersucht.

Ergebnisse: In eine Parallelströmung werde ein Kreiszylinder gestellt, die Achse senkrecht zur Stromrichtung. Man setze eine kontinuierliche Strömung in reibungsloser kompressibler Flüssigkeit voraus. 1. Das Geschwindigkeitspotential wird angenähert berechnet. 2. Es wird gezeigt, daß für Luft die Kompressibilität bei Geschwindigkeiten etwa bis zu 100 m/sek. einen sehr geringen Einfluß auf die Stromlinien besitzt, 3. daß dieser Einfluß mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wächst, 4. daß der Zylinder auch in kompressibler Flüssigkeit keinen Widerstand findet. 5. Die angegebene Methode zur Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials ist auch auf andere Aufgaben anwendbar, wenn die Lösung für inkompressible Flüssigkeiten bekannt ist. Lp.

U. Crudeli. Sul moto rettilineo, non vorticoso, dei gas. Nuovo Cimento (6) **6**, 105-110.

Wenn die x-Achse parallel zu der Bewegungsrichtung der Strömung ist, so lauten die Bewegungsgleichungen für den betrachteten Fall:

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x},\ 0=\frac{\partial p}{\partial y},\ 0=\frac{\partial p}{\partial z},$$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}=0$, p eine Funktion von ϱ und der Temperatur. Die Bezeichnungen haben die üblichen Bedeutungen. Die Funktion $u=xf(t)+g(t)$, wo $f(t)$ und $g(t)$ zu bestimmende Funktionen sind, genügt diesen Bedingungen, und dann ist $\partial^2 u/\partial x^2=0$. Der Verf. weist nach, daß solche Lösungen tatsächlich existieren, und bestimmt sie näher. Lp.

O. Martienssen. Die Gesetze des Wasser- und Luftwiderstandes und ihre Anwendung in der Flugtechnik. Mit 75 Textfiguren. Berlin: Julius Springer. VI u. 131 S.

Das Buch ist aus einer Vorlesung an der Universität Kiel über die physikalischen Gesetze der Wasser- und Luftschiffahrt hervorgegangen. Es gibt eine zusammenhängende Darstellung der Luft- und Wasserwiderstandsgesetze auf Grund streng physikalischer Folgerungen unter gleichzeitiger Berücksichtigung der neuesten experimentellen Resultate. Bei der theoretischen Ableitung der Widerstandsgesetze ist besonderer Wert darauf gelegt, zu zeigen, innerhalb welcher Geschwindigkeitsgrenzen Luft und Wasser gleichzeitig behandelt werden können. Die Anwendungen der Gesetze sind auf flugtechnische Fragen beschränkt.

I. Der innere Druck einer Flüssigkeit. II. Der Druck auf einen eingetauchten Körper. III. Der Widerstand eines Körpers in einer Flüssigkeit. IV. Die Bewegungsgleichungen einer idealen Flüssigkeit. V. Die Integration der Eulerschen Gleichungen. VI. Der Widerstand von Kugel und Platte in einer reibungslosen Flüssigkeit. VII. Die Wirkung der inneren Reibung einer Flüssigkeit. Zusammenfassung der Resultate. VIII. Experimentelle Resultate über den Luftwiderstand einiger wichtiger Körperformen. 1. Widerstand einer senkrecht vom Winde getroffenen Fläche. 2. Widerstand einer gegen den Wind geneigten ebenen Fläche, 3. einer gekrümmten Fläche. 4. Widerstand von Doppelflächen. 5. Widerstand von Rotationskörpern. IX. Die zum Fliegen benötigte Leistung. 1. Der Segelflieger. 2. Der Schwingenflieger. 3. der Schraubenflieger. X. Die Stabilitätsbedingungen der Flugzeuge. 1. Die Längsstabilität. 2. Die Querstabilität. XI. Der Luftpropeller.

Die vielen Untersuchungen aus der Ballistik, über welche z. B. Cranz in seinem Lehrbuche der Ballistik berichtet, die ja zur Frage des Luftwiderstandes manchen Beitrag liefern, sind nicht berücksichtigt worden. Daß der Name Rayleigh durchgängig ohne y erscheint, ist in einem wissenschaftlich gehaltenen deutschen Werke ein unangenehmer Schönheitsfehler. Lp.

Maurain et de Moismont. Mesures comparatives du frottement de l'air sur des surfaces de nature différente. C. R. 157, 1127-1130.

Mitteilung von Vergleichsversuchen für Luftreibung von poliertem Stahl, zelloniertem Flugzeugstoff und Ballonstoff an einer rotierenden Scheibe. Die Verf. halten die Methode für neu, jedoch sind ähnliche Versuche schon von Stodola in seinem Dampfturbinenbuch mitgeteilt. Rr.

G. Eiffel. The resistance of the air and aviation. Experiments conducted at the Champ de Mars Laboratory. Second edition, revised and enlarged. Translated by J. C. Hunsaker. London: Constable and Co.; Boston and New York: Houghton Mifflin Co. XVI u. 242 S. u. XXVII Tafeln.

Diese sorgfältigen Versuchsergebnisse in der Flugwissenschaft liefern den Stoff, auf den mathematische Forschungen sich gründen. (Vgl. Nature **92**, 342-343.) J. (Lp.)

Lord Rayleigh. Sur la résistance des sphères dans l'air en mouvement. C. R. **156**, 109-110.

Bezüglich der Note von Eiffel in C. R. **155**, 1597-1599 (F. d. M. **43**, 869, 1912) meint der Verf., daß bei richtiger Anwendung des Satzes von der mechanischen Ähnlichkeit die von Eiffel gefundenen Unregelmäßigkeiten der Größe K verschwinden. Lp.

G. H. Bryan. A danger of so-called „automatic stability". Nature **91**, 556-557.

Der Verf. warnt vor den unklaren Vorstellungen, die mit dem Ausdruck automatische Stabilität verknüpft sind, und zeigt an einem Beispiele, daß bei ihm durch Anwendung des viel empfohlenen automatischen Pendels die Schwingungen nicht verringert, sondern vergrößert werden. Lp.

J. B. Dale. Automatic stability in aeroplanes. Nature **91**, 661.

G. H. Bryan. Automatic stability in aeroplanes. Nature **91**, 661.

Die Erläuterung Bryans zu seinem Modell, das die von der Reibung herrührende Instabilität veranschaulicht (vgl. vorstehendes Referat), findet Dale etwas dunkel; es sei jedenfalls schwer, zu sehen, ob in der Schlußfolge nicht eine Verletzung des Prinzips der Erhaltung der Energie stecke. — Bryan fügt hinzu, daß das von ihm betrachtete System die Existenz einer äußeren Energiequelle voraussetze, und daß er dies auszusagen der Kürze wegen unterlassen habe. Lp.

A. Sée. Sur un nouveau principe de stabilité longitudinale des aéroplanes. C. R. **156**, 613-615.

Erzeugung eines stabilisierenden Momentes der Längsstabilität für Änderungen des Flugwinkels durch Anordnung einer nach unten gewölbten, frei drehbaren Vordertragfläche. Rr.

R. Knoller. Über Längsstabilität der Drachenflugzeuge. Zs. d. österr. Ing.- und Archit.-Vereins **65**, 593-600, 609-617.

1. Gleichgewicht an Flügelflächen. 2. Statische Stabilität der Flügelflächen. 3. Statische Stabilität gekoppelter Flächen. 4. Grundlagen der dynamischen Stabilität. 5. Die stationäre Schwingung. 6. Einfluß der Dämpfung. 7. Die abklingende Schwingung. 8. Die gedämpfte Stabilität. Schr.

F. Brauneis. Schwingungen des Luftschiffes oder Flugapparates. Österr. Flugzs. **7**, 39-43, 68, 88-89.

Stabilisierung des Luftschiffs. Eine wesentliche Forderung ist, daß sie dem Impuls der Böe sofort entgegenwirkt. Berechnungen. Schr.

Ballif. Cinématique de l'aéroplane. Nouv. Ann. (4) **13**, 30-38.

Kinematische Betrachtungen über drei Kurven zweier Punkte von konstanten Geschwindigkeiten, welch letztere gegebene Winkel mit der Verbindungslinie einschließen sollen. Rr.

H. v. Sanden. Über den Auftrieb zylindrischer Körper im natürlichen Winde. Zs. f. Math. u. Phys. **61**, 225-245.

Die von O. Lilienthal entdeckte Erscheinung erhöhten Auftriebes in der Nähe der Erdoberfläche wird auf die Ursache der nach oben wachsenden Windgeschwindigkeit zurückgeführt.

Das mathematische Problem besteht darin, das Strömungsbild um einen Zylinder in einer Parallelströmung mit konstanter Wirbelstärke zu berechnen. Nach Zurückführung der Aufgabe auf die Berechnung einer Potentialströmung wird diese nach einer von Runge gegebenen graphischen Methode durch sukzessive Approximation gelöst und für einen Zylinder mit parallel im Winde liegender Symmetrieachse ein merklicher Auftrieb berechnet, der nur von der ursprünglichen Wirbelstärke herrühren kann. Rr.

R. Dietzius. Die Variabilität der Steiggeschwindigkeit von Registrier- und Pilotballonen. Wien. Ber. **122**, 543-605.

Es wird rechnerisch gezeigt, daß die Einflüsse der Temperatur, der Temperaturdifferenz, des Luftwiderstandes, des Registrierapparates so erheblich sind, daß man aus den Abweichungen der Steiggeschwindigkeit von der Hergesellschen oder Birkeland-Hesselbergschen Tabelle oder Formel auf vertikale Luftströmungen nicht schließen darf. Rr.

A. Lechner. Einfache Experimente zur Phygoiden-Theorie. Phys. Zs. **14**, 210-212.

Die Theorie der Flugbahn („Phygoide") eines in der Luft gleitenden oder segelnden Modelles („Aerdon") bildet einen wesentlichen Teil der Betrachtungen

im zweiten Bande der Aerodynamik von Lanchester. Im Kapitel VI ist auch eine Reihe von Versuchen in Luft zur Nachprüfung und Bestätigung der Phygoidentheorie beschrieben. Der Verf. des vorliegenden Aufsatzes verlegt diese Versuche in das Medium des Wassers. Unter der auch von Lanchester gemachten Annahme über das Widerstandsgesetz $D = kv^2$ werden kurz die Grundgleichungen für die Phygoide angegeben und Andeutungen über ihre graphische Darstellung gemacht. Dann wird beschrieben, wie mit Hülfe eines einfachen Modells die Gestaltungen der Phygoiden vorgezeigt werden können.

Lp.

V. Karpen. Le vol à la voile. Journ. de Phys. (5) **3**, 101-111, 399-412.

„Die Gleichungen der Bewegungen des segelnden Vogels, die ich aufgestellt habe, indem ich für den Luftwiderstand die Formeln der Theorie des Flugwerkzeuges sowie einige an den Fliegern angestellte Messungen annahm, haben es mir ermöglicht, die Frage des Segelfluges in ihrer ganzen Allgemeinheit zu lösen und besonders die Bedingungen zu bestimmen, unter denen die für den Flug notwendige Energie ganz vom Winde entnommen werden könnte.“

Wegen der vielen zu erklärenden Bezeichnungen verzichten wir auf die Wiedergabe der aufgestellten Differentialgleichung, aus welcher der Verf. seine Schlüsse zieht: „Der Kunstgriff, dessen sich der Vogel bedienen muß, um die Schwankungen der horizontalen Geschwindigkeit des Windes bestens auszunutzen, besteht darin, daß er fortwährend möglichst seine relative Geschwindigkeit in einem der Beschleunigung des Windes entgegengesetzten Sinne richtet, daß er seine Symmetrieebene nach der relativen Geschwindigkeit richtet, und daß er für diese Geschwindigkeit einen Wert beibehält, nahezu gleich dem, der die Arbeit zu einem Minimum macht, welche für das Schweben und das Zurücklegen der Einheit der durchlaufenen relativen Entfernung notwendig ist.“

Die behandelten Einzelfälle sind: Flug bei einer in Größe und Richtung konstanten Windbeschleunigung. Flug bei einem beliebig schwankenden Winde. — Nach einer Auswertung der bei dem Segelfluge in Betracht kommenden Kräfte werden dann Beispiele von Winden gegeben, bei denen der Segelflug möglich ist, und die bisher gebrauchten Theorien besprochen, und es werden Fälle genauer durchgerechnet, die nach besonderen Voraussetzungen über die Windschwankungen erledigt werden können.

Lp.

V. Karpen. Sur le vol des oiseaux dit „vol à la voile“. C. R. **156**, 213-215, 762-764, 1663-1664.

Der Segelflug der Vögel wird auf die Ausnutzung der zeitlichen und räumlichen Ungleichmäßigkeit der Windströmung nach den Regeln von Auftrieb und Widerstand von Flügelflächen zurückgeführt und die Größenordnung der erforderlichen Ungleichmäßigkeit an Beispielen angegeben (vgl. das vorstehende Referat).

Rr.

P. Idrac. Observations sur le vol des goélands à l'arrière des navires. C. R. **157**, 1130-1131.

Beobachtung, daß die Möven sich des hinter Schiffen aufsteigenden Luftstromes von etwa 4 m/sek. zum Segeln bedienen. Es wurden solche 20-30 und 200-300 m hinter dem Schiff beobachtet. Rr.

E. Gheorgov. Beitrag zur Theorie des Gleitfluges. Österr. Flugzs. 7, 523-526.

Theorie nach E m d e n. Bestimmung der größten Flugdauer. Numerische Werte für einige Flugzeugtypen. Schr.

R. J. Hofmann. Luftschraubenberechnung. Österr. Flugzs. 7, 449-451.

Theorie von D r z e w i e c k i. Rechenbild und ein Rechenschieber für die Berechnung. Schr.

R. Katzmayr. Über die Abbildung der Stromlinien im Schraubenstrahl. Österr. Flugzs. 7, 351-357.

R. Katzmayr. Über ein neues Verfahren, die Stromlinien in Flüssigkeiten sichtbar zu machen. Mitt. d. k. k. techn. Versuchsanst. 2, 46-51, 1 Taf.

Die Sichtbarmachung der Luftströmungen erfolgt durch Wollfäden, die an einem Ende festgehalten werden. Die Bewegungen werden stereophotogrammetrisch aufgenommen. Schr.

R. J. Hofmann. Ganghöhenmeßvorrichtung. Österr. Flugzs. 7, 191-192.

Einfaches Werkzeug aus einem Viertelkreis mit Liniennetz und einem Senkel oder einer Libelle. Schr.

K. Mayer. Neue Bauart von doppeltwirkenden Zwillingspumpen. Rundschau f. Technik u. Wirtsch. 6, 266-268.

K. Mayer. Rundschau über einige Neuerungen auf dem Gebiete der Kolbenpumpen. Rundschau f. Technik u. Wissensch. 6, 347-348.

„Beim Kuppelungswinkel von $\frac{1}{2}\pi$ werden sonach nur zwei Phasen vom Schubkurbeltriebverhältnisse verändert, die eine im ungünstigen, die andere im günstigen Sinne! Gelingt es nun, den ungünstigen Einfluß des Schubkurbeltriebverhältnisses auf zwei oder mehrere Phasen zu verteilen, so kann eine relativ günstigere Wasserförderung erzielt werden als im vorerwähnten Falle. Dies wurde erreicht durch entsprechende Wahl des Kupplungswinkels, kleiner als $\frac{1}{2}\pi$, bei gleich wirksamen Kolbenquerschnitten, und durch ein zweites Verfahren, durch entsprechende Abänderung des Verhältnisses der wirksamen Kolbenquerschnitte bei Beibehaltung des Kuppelungswinkels von $\frac{1}{2}\pi$, wobei jedoch die Kolbenquerschnitte wechselseitig gleich groß sein müssen. . . . Nun ist es aber möglich, durch passende Vereinigung der beiden erwähnten Verfahren die Wasserförderung noch weiterhin zu verbessern. . . .“ Schr.

Weitere Literatur.

A. Delaunay. Les bases théoriques de l'aviation. Paris: Imhaus et Chapelot. 46 S. 8°.

Estournelles de Constant et P. Painlevé. Pour l'aviation. 4e édition. Paris: Librairie aéronautique. 320 S. 16mo.

Études sur les surfaces, la résistance de l'air, etc. Paris: Dunod et Pinat. 89 S. 8°. (Bulletin de l'Institut Aéronautique. Fasc. II, 1912.)

K. Gehlen. Querstabilität und Seitensteuerung von Flugmaschinen. Diss. Aachen.

Leman. Das Gleichgewicht von Drache und Motorflugzeug und die Flugzeugberechnung. Unterrichtsbl. f. Math. **19**, 41-55.

L. Marchis. Cours d'aéronautique. 3e partie: La dynamique expérimentale des fluides. Paris: Dunod et Pinat. 283 S. 8°.

S. Reber. An outline of the theory of ballooning. A lecture. Journ. Franklin Inst. **174**, 385-415.

G. F. C. Searle. A simple method of determining the viscosity of air. Cambr. Phil. Soc. Proc. **17**, 183-192.

Enthält auch mathematische Betrachtungen. J.

S. L. Wakden. Aeroplanes in gusts, soaring flight and the stability of aeroplanes. 2nd edition. London: Spon. XXVI + 280 S. 8°.

Kapitel 5.

Potentialtheorie.

C. Jaccottet. Sur l'existence des potentiels et de leurs dérivées. Ens. math. **15**, 281-297.

Vortrag, in dem die Hauptpunkte der Entwicklung der Potentialtheorie kurz dargelegt werden. Von den beiden Ausgangspunkten, von denen aus die Theorie behandelt werden kann, je nachdem man von der Definition des Potentials durch ein bestimmtes Integral oder von der Laplaceschen Gleichung ausgeht, kommt hier nur der erste in Betracht. Es werden der Begriff der Dichtigkeit und die darüber in der Regel gemachten Voraussetzungen erörtert; dann wird die Frage besprochen, wieweit der mathematisch definierte Begriff noch physikalische Bedeutung hat. Dabei wird ausführlich auf eine Schrift von Leathem eingegangen (Cambridge 1905). Es folgen die wichtigsten Eigenschaften des Potentials. Bei dem Potential äußerer Punkte werden die Untersuchungen berührt, die sich darauf beziehen, wie man durch verschiedene Verteilung derselben Masse in demselben Volumen die gleiche Wirkung erzielen kann. In bezug auf die Poissonsche Gleichung und die bei ihrer Ableitung gemachten Voraussetzungen werden vier Perioden unterschieden, die von Poisson, der nur konstante Werte der Dichtigkeit k berücksichtigt, die von Gauß, der k als differenzierbare Funktion, die von Hölder, der k als kontinuierlich von der Art $k(x_2, y_2, z_2) - k(x_1, y_1, z_1) \leqq Ar_{12}^{\lambda} (\lambda > 0)$, die von Petrini,

der k als integrabel voraussetzt. Daran schließen sich die Fragen über die Existenz der zweiten Ableitungen nach beliebigen Richtungen: In analoger Weise werden die Haupteigenschaften des Flächenpotentials besprochen, kurz auch die des Potentials von Linien sowie von Doppelbelegungen. Zum Schluß wird auf Plemeljs Untersuchungen hingewiesen, die den Begriff der Dichtigkeit ganz ausschließen. Wn.

A. Korn. Zur Frage der internationalen Vereinheitlichung wichtiger Begriffe und Bezeichnungen in der Potentialtheorie und Elastizitätstheorie. Physik. Zs. **14**, 1105-1109; Verh. Deutsche Phys. Ges. **15**, 992-1001; Die Naturwissenschaften **1**, 1084-1087; Elektrotechnik u. Maschinenbau **31**, 861-864.

Durch die Initiative des Verf. wurde im Jahre 1911 ein internationales Komitee gegründet, dem eine größere Anzahl hervorragender Vertreter der Mathematik, Physik und Astronomie beitraten, zu dem Zwecke, wichtige Begriffe in der Potentialtheorie und Elastizitätstheorie zu vereinheitlichen. Verf. setzt hier eine Anzahl von Desideraten auseinander, um im allgemeinen die Absichten dieser Vereinheitlichungsbestrebungen zu charakterisieren. A. K.

A. Korn. Terminologie du potentiel et de l'élasticité. Office Centr. Ass. Internationales **19**, IV, 482-498.

Der Verf. erörtert, wie erwünscht es sei, in abstrakten Disziplinen ebenso einheitliche Bezeichnungen einzuführen, wie es in technischen Fächern bereits gelungen ist, z. B. in der Elektrotechnik. Aussichtsvoll erscheint ihm der Versuch der Vereinheitlichung nur dann, wenn man zunächst in eng umgrenzten Gebieten, in diesen aber eine internationale Verständigung zu erreichen sucht. Ein solches Gebiet ist die Potentialtheorie. In ihr bringt schon die verschiedene Definition des Potentials Verwirrung hervor. Es wird vorgeschlagen, als Potential schlechtweg die Summe

$$\Sigma \frac{c_i}{r_i}$$

zu bezeichnen, wo die c_i irgendwie gegebene Zahlen sind. Werden an Stelle der c_i Massen gesetzt, eventuell nach Multiplikation mit der Gravitationskonstante, so soll die Bezeichnung Newtonsches Potential benutzt werden, dagegen die Bezeichnung elektrostatisches Potential, wenn die c_i elektrische Massen vorstellen. Diese Beiwörter seien in den Anwendungen stets hinzuzufügen. Weiter werden die Begriffe Kräftefunktion, wofür Kräftepotential zu setzen sei, Geschwindigkeitspotential, harmonische Funktionen (statt Potentialfunktionen), Greensche Funktion besprochen, einheitliche Bezeichnungen für Flächen- und Linienintegrale gefordert, desgleichen eine allgemeine Festsetzung über das zugrunde zu legende System rechtwinkliger Koordinaten. Die Definition des Potentials als Arbeit ist nicht zweckmäßig. Die Einführung der Vektoranalysis hat die Heterogenität in der Bezeichnung noch vermehrt; auch besteht in der Vektoranalysis keine einheitliche Bezeichnung, daher kann sie vorläufig nicht als Grundlage dienen. Zum Schluß werden die in der Elastizitätstheorie üblichen Bezeichnungen kurz berührt. Wn.

A. Korn. Über die erste und zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie. Palermo Rend. **35**, 317-323.

In dieser Abhandlung behandelt der Verf. als erstes und wichtigstes Beispiel seiner Theorie der unsymmetrischen Kerne die erste und zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie und ihre Lösung mit Hülfe der Methode des arithmetischen Mittels. Das Endresultat ist im Grunde dasselbe wie die zuerst von Poincaré vorausgesehene Lösungsformel (Acta Math. **20**, 59-142, 1896), deren strengen Beweis der Verf. zuerst unter Benutzung eines Theorems von Zaremba 1901 in seinen Abhandlungen zur Potentialtheorie gegeben hat. Jetzt wird gezeigt, wie sich dieses spezielle Beispiel jener allgemeinen Theorie der unsymmetrischen Kerne unterordnet; außerdem ergeben sich dabei instruktive Folgerungen für die Greensche Funktion. Lp.

T. J. I'A. Bromwich. Certain potential functions and a new solution of Laplace's equation. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 100-125.

Es werden Reihen für das Potential eines ebenen Kreises sowie das einer Halbkugel hergeleitet für den Fall, daß die Dichtigkeit irgendeiner Potenz des Abstandes vom Mittelpunkte proportional ist. Dabei werden einige bemerkenswerte Formeln über Kugelfunktionen aufgestellt.

Was zunächst das Potential des ebenen Kreises betrifft, so sei a sein Radius, s der Abstand eines Massenpunktes vom Mittelpunkt, $k s^m$ die Dichtigkeit, wobei $m > -2$ sein muß, damit die Masse endlich ist. Ferner seien r, ϑ, φ die räumlichen Polarkoordinaten des Aufpunktes, bezogen auf die Symmetrieachse als Polarachse. Für $r > a$ ergibt sich die gesuchte Reihe für das Potential V_0 leicht aus der bekannten Entwicklung der reziproken Entfernung zweier Punkte, ebenso für $r < a$, für welchen Fall das Potential mit V_1 bezeichnet wird. Neu ist das Resultat, daß, falls m weder $= -1$, noch gleich einer ungeraden Zahl ist, V_1 sich in der Form darstellen läßt:

$$(4) \qquad V_1 = 2\pi \left(\frac{k}{p}\right) r^{m+1} P_{m+1}(|\mu|) + R,$$

wo R eine nach den geraden Potenzen von $\frac{r}{a}$ fortschreitende Reihe bezeichnet, deren Koeffizienten Kugelfunktionen von $\mu = \cos\vartheta$ sind, noch mit gewissen Konstanten multipliziert. p ist gleich dem negativen Differentialquotienten von $P_{m+1}(\mu)$ für $\mu = 0$. Für beliebige, nur den obigen Beschränkungen unterworfene Werte von m wird $P_{m+1}(|\mu|)$ in eine nach Kugelfunktionen von μ mit geradem Index fortschreitende Reihe entwickelt. Der Fall, daß $m = -1$ oder gleich einer ungeraden ganzen Zahl ist, läßt sich einmal durch einen Grenzübergang erledigen. Im Resultat tritt an Stelle des ersten Summanden der rechten Seite von (4) ein anderer, in dem eine Funktion von der Form

$$(7) \qquad Y_n = \frac{\partial}{\partial n}\left(\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\mu)\right)$$

auftritt. Andrerseits kann man den in Rede stehenden Ausnahmefall auch direkt behandeln und erhält so für das Glied, das an Stelle des ersten Summanden der rechten Seite von (4) tritt, den Ausdruck:

$$X_n = r^n P_n(\mu) \log \left(\frac{r(1+\mu)}{2a}\right) + r^n f(\mu),$$

worin n eine ganze Zahl bezeichnet, $f(\mu)$ eine nach den Kugelfunktionen $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ fortschreitende endliche Reihe. Es wird der Zusammenhang beider Resultate erörtert, und daraus folgt folgende Darstellung vor Y_n für ganzzahlige n und positive μ:

$$Y = \left(\frac{r}{a}\right)^n \left\{P_n(\mu) \log \frac{r(1+\mu)}{2a} + R_1\right\},$$

worin R_1 eine endliche, nach den Kugelfunktionen $P_0, P_1, \ldots, P_n$, fortschreitende Reihe ist, deren Koeffizienten sich dadurch bestimmen lassen, daß Y_n der Laplaceschen Gleichung genügt. Das ist die neue Lösung der Laplaceschen Gleichung. Nebenbei wird $\log(1+|\mu|)$ nach Kugelfunktionen entwickelt.

Für die Halbkugel vom Radius a, deren Dichtigkeit $k\,s^{m-1}$ ist (s der Abstand vom Mittelpunkt), ergeben sich, falls $r < a$, für das Potential die Formeln:

$$(23) \qquad V_1 = \frac{2\pi\, k\, r^{m+1}}{(m+1)(m+2)} \left\{-2 + \frac{P_{m+1}(\mu)}{P_{m+1}(0)}\right\} + F(r, \mu),$$

$$(24) \qquad V_2 = \frac{2\pi\, k r^{m+1}}{(m+1)(m+2)} \left\{-\frac{P_{m+1}(-\mu)}{P_{m+1}(0)}\right\} + F(r, \mu).$$

Darin sind wieder r, ϑ, φ die Polarkoordinaten des Aufpunktes, $\mu = \cos\vartheta$, und die Formel (23) gilt für positive μ, also für Punkte innerhalb der Halbkugel, (24) für negative μ, d. h. für äußere Punkte. Die vorstehenden Formeln gelten nicht für den Fall, daß m eine gerade Zahl ist. Hier treten an Stelle der ersten Summanden rechts in (23) und (24) andere, die wieder die obige Funktion Y enthalten, und zwar mit dem Index $m+1$. Wn.

D. Pompéiu. Sur la théorie du potentiel et son type de singularité des fonctions analytiques uniformes. Ann. sc. Ac. Pol. Porto 8, 226-241.

Um die Eigenschaften des Potentials U und der drei Komponenten X, Y, Z der Attraktion für einen innerhalb der anziehenden Masse liegenden Punkt nachzuweisen, geht man bei dem üblichen Beweisverfahren zu Polarkoordinaten über. „Man gelangt aber zu demselben Ergebnis, indem man die klassischen Verallgemeinerungen des Begriffes eines bestimmten Integrals anwendet („Convergence des intégrales définies", z. B. Jordan, Cours d'analyse **2**, Kap. 3). Dieses Verfahren ist benutzt in den Vorlesungen von Poincaré (Théorie du potentiel newtonien, p. 62). Ich beabsichtige, zu zeigen, daß man mittels dieses Verfahrens zu einem vollständigen Ergebnis bezüglich der Funktionen U, X, Y, Z gelangt, weil man nämlich so ihre Stetigkeit erweisen kann und nicht bloß ihre Endlichkeit und Bestimmtheit."

In dem letzten Teil (S. 237-241) „Geschichtliches" setzt der Verf. den eigentlichen Zweck seines Aufsatzes auseinander: er will sich besonders Zoretti gegenüber (F. d. M. **36**, 451, 1905) in verschiedenen Dingen die Priorität wahren durch die Erklärung, daß der Inhalt der vorliegenden Veröffentlichung nur die notwendigen Unterlagen zu seiner Note in C. R. **139**, 914-915 enthält (F. d. M. **35**, 394, 1904), näher ausgeführt in der Thèse „Sur la continuité des fonctions de variables complexes" (F. d. M. **36**, 454, 1905). Lp.

A. Tonolo. Sur le potentiel d'une ligne analytique. C. R. **156**, 295-297.

Anknüpfend an eine frühere Arbeit, über die F. d. M. **43**, 880, 1912 berichtet ist, zeigt der Verf. folgendes. Haben x_1, x_2, x_3 dieselbe Bedeutung wie früher, ist ferner

$$ds^2 = \sum_1^3 a_{rs}\, dx_r\, dx_s \qquad (a_{rs} = a_{sr})$$

das Quadrat des Bogenelements der betrachteten Kurve, $\varDelta u$ der Differentiaparameter erster Ordnung einer Funktion u von x_1, x_2, x_3, so kann man für die in der früheren Arbeit mit y_1, y_2 bezeichneten Funktionen zwei passend zu wählende Integrale der Gleichung $\varDelta u = 0$ nehmen. Solche sind

$$y_1 = (x_1 + i\, x_2) e^{-i\int r dx_s},$$
$$y_2 = (x_1 - i\, x_2) e^{i\int r dx_s}$$

und das Produkt $y_1\, y_2$ ist dann genau $= x_1^2 + x_2^2 = r^2$. Wn.

P. Appell. Sur le potentiel d'un polyèdre homogène. Palermo Rend. **35**, 79-81, 282.

Elementare Bestimmung der Newtonschen Anziehung eines homogenen Polyeders auf einen Punkt durch Aufstellung des Potentials nach einer Methode, die, wie an der zweiten Stelle bemerkt wird, sich schon bei Betti findet in der „Teorica delle forze newtoniane e sue applicazioni all'elettrostatica e al magnetismo" (Pisa, 1879), S. 100-103. Lp.

C. Meyer. Über den ersten Differentialquotienten des logarithmischen Kurvenpotentials. (Progr. Nr. 1048.) Realschule Hamm 1913.

Die Arbeit bezweckt, die Untersuchungen von Petrini über die ersten und zweiten Derivierten des Newtonschen Flächenpotentials (vgl. F. d. M. **39**, 819, 1908) auf das logarithmische Potential von Kurven auszudehnen. Nach Ableitung eines Hülfssatzes über den Grenzwert

$$\lim_{h=0} \int_b^{\frac{a}{h}} f(t, h) dt$$

(unter gewissen Voraussetzungen über f) wird zunächst eine einwandfreie Definition des Kurvenpotentials gegeben, wobei die Dichtigkeit als integrable Funktion vorausgesetzt wird. Weiter werden die für die Existenz der ersten Derivierten des Potentials einer Geraden notwendigen und hinreichenden Bedingungen ermittelt und die Untersuchung dann auf reguläre Kurven ausgedehnt. Die Resultate der Arbeit im einzelnen anzugeben, würde zu viel Raum erfordern. Von früheren Arbeiten über sein Thema erwähnt der Verf. nur die von Bromwich (s. F. d. M. **36**, 824, 1905), dessen Resultate in gewissem Sinne verallgemeinert werden; außerdem ist hier die Darstellung ausführlicher und strenger. Dagegen ist dem Verf. eine weitere Arbeit von Petrini (cf. F. d. M. **40**, 839, 1909) entgangen, in der bereits exakte Bedingungen für die

Existenz der ersten und zweiten Ableitungen des logarithmischen Kurvenpotentials aufgestellt sind. Wn.

C. Neumann. Zur Theorie des logarithmischen Potentials. Aufsatz XII. Leipz. Ber. **65**, 144-184.

Es wird das folgende Theorem bewiesen: „Die Funktion $f(x)$ besitze eine endliche Zahl von Unstetigkeitspunkten $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$, durch welche die x-Achse in $n+1$ Abteilungen zerfällt; und in jeder einzelnen Abteilung sei $f(x)$ gleichmäßig stetig. Überdies sei vorausgesetzt, daß der absolute Wert von $f(x)$ durchweg kleiner als eine endliche Konstante μ sei. Dann gilt für den Ausdruck

$$(38)\qquad \mathfrak{A}(\alpha, x_0) = R + h\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)\,dx}{\alpha + i(x - x_0)}$$

in jeden Punkte x_0 der x-Achse die Formel

$$(39)\qquad \lim_{\alpha=0} \mathfrak{A}(\alpha, x_0) = \tfrac{1}{2}\pi[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)],$$

in der das zu Null herabsinkende α positiv zu denken ist."

Der Gang des Beweises ist der, daß das Integral $\mathfrak{A}(\alpha, x_0)$ zunächst durch die Summe zweier andern Integrale $\mathfrak{A}'(\alpha, x_0)$ und $\mathfrak{A}''(\alpha, x_0)$ ausgedrückt wird, deren jedes die Grenzen 0 und ∞ hat, daß ferner $\mathfrak{A}'$ sowohl wie $\mathfrak{A}''$ in zwei Teilintegrale zerlegt und auf jeden Teil der Mittelwertsatz angewandt wird. Dadurch wird eine obere Grenze für den absoluten Wert von $\mathfrak{A}''$ und $\mathfrak{A}'$ gewonnen, und durch passende Wahl der Grenzen der Teilintegrale läßt sich erreichen, daß der absolute Wert von $\mathfrak{A}'' - \frac{\pi}{2} f(x+0) < \pi\varepsilon$ ist, sowie daß die kleine Größe ε zugleich mit α verschwindet. Gleiches gilt für $\mathfrak{A}' - \frac{1}{2}\pi f(x_0 - 0)$, und daraus folgt der obige Satz.

Umschließt man die Unstetigkeitspunkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ der Funktion f durch Kreise mit sehr kleinen Radien, so wird (zweites Theorem) gezeigt, daß für die Gesamtheit derjenigen Punkte x_0, die außerhalb jener Kreislinien oder auf denselben liegen, die obige Konvergenz $\lim\limits_{\alpha=0} \mathfrak{A}(\alpha, x_0)$ eine g l e i c h m ä ß i g e ist.

Bezeichnet man ferner mit $\mathfrak{B}(\alpha, x_0)$ und $\mathfrak{C}(\alpha, x_0)$ die Integrale, die aus $\mathfrak{A}(\alpha, x_0)$ entstehen, wenn man für $\alpha + i(x - x_0)$ setzt $\sin[\alpha + i(x - x_0)]$, resp. $\operatorname{tang}[\alpha + i(x - x_0)]$, so ist

$$\lim_{\alpha=0} \mathfrak{B}(\alpha, x_0) = \lim_{\alpha=0} \mathfrak{C}(\alpha, x_0) = \lim_{\alpha=0} \mathfrak{A}(\alpha, x_0)$$

(drittes Theorem). Dasselbe gilt auch (viertes Theorem) für die Funktion $\mathfrak{L}(\alpha, x_0)$, die aus $\mathfrak{A}(\alpha, x_0)$ dadurch entsteht, daß man $1 : [\alpha + i(x - x_0)]$ durch die Funktion $W'[\alpha + i(x - x_0)]$ ersetzt, falls W' die Ableitung einer monogenen Funktion $W(\alpha + i\sigma)$ darstellt, deren rein imaginärer Teil $i\,V(\alpha, \sigma)$ folgenden Bedingungen genügt:

$$\lim_{\alpha=0} [V(\alpha, \infty) - V(\alpha, 0)] = K, \lim_{\alpha=0} [V(\alpha, \infty) - V(\alpha, \sigma)] = 0 \text{ für } \sigma > 0.$$

K ist dabei eine bestimmte positive, von Null verschiedene Konstante.

Zum Schluß wird die Beziehung des ersten Theorems zur Poissonschen Kreisformel dargelegt. Verwandelt man die x-Achse durch die Methode der reziproken Radien in einen Kreis, so geht der obige Ausdruck für $\mathfrak{A}(\alpha, x_0)$ in folgenden über:

$$\mathfrak{A}(\alpha, x_0) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(R^2 - \varrho^2) f(\varphi)\, d\varphi}{[R^2 + \varrho^2 - 2 R\varrho \cos(\varphi - \varphi_0)]},$$

und für $\alpha = 0$ wird $R = \varrho$, $\lim_{\alpha=0} \mathfrak{A}(\alpha, x_0)$ geht daher in die Poissonsche Kreisformel über. In ähnlicher Weise hängt das dritte Theorem mit der Lösung der Kreisbogenzweieck-Aufgabe zusammen, einer Aufgabe, die in den früheren Aufsätzen des Verf. behandelt ist. Wn.

H. Petrini. L'existence de certaines intégrales prises sur la fonction potentielle logarithmique et ses dérivées. Arkiv för Mat., Astron. och Fys. 8, Nr. 24, 66 S.

H. Petrini. L'existence de certaines intégrales qui se rapportent au théorème de Green pour la fonction potentielle Newtonienne. Arkiv för Mat., Astron. och Fys. 9, Nr. 17, 44 S.

Sei T ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der Ebene der Variabeln x und y; seine Begrenzung heiße S. Sei T' ein von einer stetig gekrümmten doppelpunktlosen Kurve S' begrenztes Gebiet ganz im Innern von T. Es möge schließlich $U(x, y)$ eine in T reguläre Potentialfunktion bezeichnen. Bekanntlich gilt die Formel

$$(1) \qquad 2\pi U(x, y) = -\int_{S'} \frac{\partial U}{\partial n'} \log \frac{1}{R'}\, ds' + \int_{S'} U' \frac{\partial}{\partial n} \left(\log \frac{1}{R'}\right) ds',$$

unter ds' das Bogenelement, $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung in der Richtung der Innennormale, R' die Entfernung der Punkte (x, y) und s' auf S' verstanden. Setzt man

$$(2) \qquad V = \int_{S'} \frac{\partial U}{\partial n'} \log \frac{1}{R'}\, ds', \qquad W = \int_{S'} U' \frac{\partial}{\partial n'} \left(\log \frac{1}{R'}\right) ds',$$

so gewinnt man aus (1) die weitere Formel

$$(3) \qquad \begin{aligned} 4\pi^2 U(x, y) = &-\int_{S'} V' \frac{\partial}{\partial n'} \left(\log \frac{1}{R'}\right) ds' + \int_{S'} \frac{\partial V'}{\partial n'} \log \frac{1}{R'}\, ds' \\ &+ \int_{S'} W' \frac{\partial}{\partial n'} \left(\log \frac{1}{R'}\right) ds' - \int_{S'} \frac{\partial W'}{\partial n'} \log \frac{1}{R'}\, ds'. \end{aligned}$$

In der ersten der beiden vorliegenden Abhandlungen werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür abgeleitet, daß in der Formel (3) gliedweise zur Grenze $\lim S' = S$ übergegangen werden kann. Alsdann wird weiter untersucht, wie sich die Ausdrücke rechter Hand verhalten, wenn (x, y) gegen S konvergiert. Die zweite Arbeit beschäftigt sich mit dem analogen Problem für das Newtonsche Potential. Die Voraussetzungen bezüglich der Berandung S des der Betrachtung zugrunde liegenden Gebietes werden allgemeiner, als vorstehend der Kürze halber angegeben ist, gefaßt. Ltn.

H. A. v. Bekh-Widmannstetter. Eine neue Randwertaufgabe für das logarithmische Potential. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 397-398.

Der Verf. glaubt, daß es mathematisches Interesse hat, Randbedingungen zu behandeln wie diese:

$$Ax^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2Bxy \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + Cy^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F(x, y),$$

und verweist auf seine bezügliche vorjährige Arbeit (F. d. M. 43, 890, 1912). Lp.

L. Lichtenstein. Über das Poissonsche Integral und über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials. Journ. für Math. **142**, 189-190.

Eine Ergänzung zu der gleichbetitelten Abhandlung im Journ. für Math. **141**, 12-42. Ltn.

R. Marcolongo. Una estensione della teoria del potenziale e sue applicazioni. Napoli Rend. (3) **19**, 53-63.

Der Potentialbegriff wird dahin erweitert, daß an Stelle des Abstandes zweier Punkte (x, y, z), (ξ, η, ζ) die Funktion

$$\varrho = \sqrt{\frac{(\xi - x)^2}{a^2} + \frac{(\eta - y)^2}{b^2} + \frac{(\zeta - z)^2}{c^2}}$$

gesetzt wird. Das Potential für Punkte außerhalb der Masse genügt dann an Stelle der Laplaceschen Gleichung $\varDelta V = 0$ der folgenden:

$$\varDelta' V = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Ferner gilt für Punkte P innerhalb einer dreidimensionalen Masse die der Poissonschen Gleichung analoge

$$\varDelta' V = -4\pi k(P),$$

und V besitzt auch alle sonstigen charakteristischen Eigenschaften des Newtonschen Potentials. In gleicher Weise wird der Begriff des Flächenpotentials, des Potentials einer Doppelschicht und der des retardierten Potentials (bei dem die Dichtigkeit nicht eine Funktion des Ortes allein, sondern eine solche des

Ortes und des Ausdrucks $t - \frac{\varrho}{\omega}$ ist, wo t die Zeit bezeichnet) auf den Fall ausgedehnt, daß an Stelle des Abstandes zweier Punkte die obige Funktion ϱ tritt. Auch der Greensche Satz mit seinen Folgerungen sowie gewisse Sätze von Gauß werden dahin erweitert, daß an Stelle des Laplaceschen Differentialausdrucks Δ der oben definierte Ausdruck Δ' tritt. Sämtliche Resultate werden in der Bezeichnung der Vektoranalysis abgeleitet. Wn.

R. Garnier. Sur les simplifications du potentiel élastique dues à la symétrie cristalline. S. M. F. Bull. **41**, 228-234.

Das elastische Potential, das im allgemeinen Falle 21 Konstanten enthält, läßt sich, wie bekannt, auf eine geringere Zahl von Konstanten reduzieren, falls der elastische Körper ein homogener Kristall ist, der Symmetrieebenen besitzt, und falls ein spezielles Koordinatensystem, das Hauptachsensystem, eingeführt wird. Fragt man umgekehrt, welche Beziehungen zwischen den 21 Konstanten bestehen müssen, damit der Ausdruck für das elastische Potential bei gewissen Transformationen ungeändert bleibt, so erhält man genau die sämtlichen Symmetrieverhältnisse, die bei den Kristallen wirklich vorhanden sind. Für dieses von Somigliana gefundene Resultat (vgl. u. a. F. d. M. **33**, 805, 1902) wird hier eine einfachere, wesentlich auf geometrische Betrachtungen gestützte Ableitung gegeben.

Werden in dem Ausdruck f für das elastische Potential statt der darin auftretenden Größen x_x, y_y die andern $x_x + y_y = \zeta$, $x_x - y_y = \xi$ eingeführt, so zerfällt f in die Summe dreier quadratischen und dreier bilinearen Formen, und nun wird gefragt, wann sich jede dieser Formen bei einer Drehung um die z-Achse reproduziert, wobei zu beachten ist, daß ζ bei dieser Drehung ungeändert bleibt. Die Frage läßt sich leicht mittels der geometrischen Bedeutung jener Formen beantworten. Die weiteren Resultate für die Drehung um zwei oder mehr Achsen ergeben sich dann leicht. Wn.

Weitere Literatur.

P. Appell. Les polynomes $V_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux potentiels à q variables. Palermo Rend. **36**, 203-212.

Referat in Abschnitt VII, Kap. 2 D.

K. Hertel. Das Problem der Anziehung eines Punktes nach zwei festen Zentren in der Ebene mit elliptischer Maßbestimmung. Diss. Erlangen. 58 S. 8° (1912).

W. A. Hurwitz. On Green's theorem for the plain. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 282.

F. A. Tarleton. An introduction to the mathematical theory of attraction. Volume 2. New York: Longmans. XI + 207 S. 12mo.

Elfter Abschnitt.

Mathematische Physik.

Kapitel 1.

Molekularphysik, Kapillarität, Elastizität, Akustik.

A. Molekularphysik und Allgemeines.

K. STRECKER. Ausschuß für Einheiten und Formelgrößen. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **15**, 143-150, 622-624.

F. NEESEN. Über die Tätigkeit des Ausschusses für Einheiten und Formelzeichen (AEF). Physik. Zs. **14**, 167-170.

An der erstbezeichneten Stelle befindet sich eine neue Fassung des Entwurfes VII: Einheitsbezeichnungen, nebst dem von K. Scheel und K. Strecker abgefaßten Bericht über die Äußerungen zum Entwurf VII. Ebenso wird an der zweiten Stelle der Entwurf V: Wechselstromgrößen, mitgeteilt nebst den zugehörigen Erläuterungen von J. Teichmüller und R. Richter.

Neesen gibt in dem zu Münster auf der Naturforscherversammlung gehaltenen Vortrag einen dankenswerten Bericht über den Zweck des (AEF) und das bisher von ihm Erreichte. Lp.

N. ZEILON. Sur les intégrales fondamentales des équations à caractéristique réelle de la physique mathématique. Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. **9**, Nr. 18, 70 S.

Die gegenwärtige Abhandlung ist eine Anwendung der in einer früheren Arbeit des Verf. gegebenen Methode (F. d. M. **43**, 456, 1912) zur Bildung des Fundamentalintegrals einer beliebigen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Es handelt sich besonders um den Fall des in dem Nenner des a. a. O. gegebenen Integranden vorkommenden homogenen Polynoms $f(i\alpha, i\beta, i\gamma)$, wo die Kurve $f=0$ keine vielfachen Punkte hat. Die Gleichung

$$(1) \qquad f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) u = 0$$

ist dann eine Gleichung vom hyperbolischen Typus. Zur Behandlung wählt der Verf. ein von Volterra stammendes Verfahren, das man die Methode

der Hülfsgleichung nennen kann. „Dieses Verfahren hat für uns den Vorteil, einerseits die äußerst anmutenden Beziehungen mit den Abelschen Integralen zu vertiefen, die Fredholm in dem Falle einer Gleichung vom elliptischen Typus gefunden hat, andrerseits die Analogie mit den wohlbekannten Grundlösungen der Gleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen hervorspringen zu lassen. Man erhält jedoch hier Greensche Formeln, in welche gewisse Differentialoperationen eingehen, und wenn man diese Operationen ausführen will, so verfällt man wieder auf das Hadamardsche Symbol, dessen Vorkommen man dann nicht mehr vermeiden kann. Die Gleichungen von dem hier durchforschten Schlage spielen in der mathematischen Physik eine wichtige Rolle. Man braucht nur das Problem der zweidimensionalen elastischen Bewegung anzuführen, das auf eine solche Gleichung vierter Ordnung zurückkommt. Unglücklicherweise erfordert die Zusammengesetztheit dieser Gleichung eine Behandlung, die den Rahmen dieser Arbeit überschreiten würde. Ich habe mich daher damit begnügt, die allgemeinen Überlegungen zunächst auf die Gleichung der Zylinderwellen anzuwenden und dann auf eine Gleichung dritter Ordnung, zwar ohne Anwendung auf die Physik, aber von solcher Art, daß sie die allgemeinen Sätze nach meiner Ansicht recht gut beleuchtet, indem sie auf verhältnismäßig einfache Funktionen führt."

I. Einleitung und algebraische Vorbereitungen. II. Die Fredholmschen Formeln und ihre Ausdehnung auf die Gleichungen von reeller Charakteristik. III. Fall eines reduziblen Polynoms $f(\alpha, \beta, \gamma)$. IV. Die Greensche Methode. V. Anwendungen der vorstehenden Theorie. Lp.

N. Zeilon. Sur les dérivées d'ordre $n-1$ de l'intégrale fondamentale d'une équation différentielle elliptique. Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. **9**, Nr. 19, 11 S.

Die Note leitet für eine Differentialgleichung beliebiger Ordnung vom elliptischen Schlage das Analogon des wohlbekannten Satzes über die Unstetigkeiten des Potentials einer Doppelbelegung ab. Für diese Untersuchung, die sich auf den Fall einer Gleichung mit drei unabhängigen Veränderlichen bezieht:

$$(1) \qquad f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) u = 0,$$

deren Koeffizienten konstant sind, geht der Verf. von der Grundlösung aus, die er in demselben Archiv **6**, Nr. 38 (F. d. M. **43**, 456, 1912) gegeben hat:

$$F(x, y, z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}}{f(i\alpha, i\beta, i\gamma)} \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma.$$

Das umgeformte Integral wird in zwei andere Integrale I_1 und I_2 zerlegt, indem in bezug auf das Volumenelemeent $d\alpha\, d\beta\, d\gamma$ integriert wird 1. über einen Zylinder parallel zur γ-Achse von endlichem, aber sehr großem Radius, 2. über den Außenraum des Zylinders. Lp.

J. Lodge. Continuity. Brit. Ass. Rep. **83** (Birmingham), 3-42.

Der Inhalt dieser Eröffnungsrede der British Association zu Birmingham wird am Schluß in folgenden Sätzen angegeben: Ein ausgeprägter Zug des gegenwärtigen wissenschaftlichen Zeitalters ist die Entdeckung mannigfaltiger Arten des Atomismus und eines solchen Interesses an ihm, daß die Stetigkeit in Gefahr erscheint, aus dem Gesichtskreis zu verschwinden. Ein anderes Streben richtet sich auf negative Verallgemeinerungen von einem beschränkten Gesichtspunkt aus. Ein anderes Streben geht darauf aus, sich in recht schwankende Formen der Aussagen zu flüchten und vor näherer Prüfung von Verwickeltem und Dunklem zurückzuweichen. Ein anderes leugnet die Existenz von allem, was sich nicht an Sinnesorgane wendet und keine bereitwillige Antwort auf Laboratoriumsversuche gibt. Gegen diese Bestrebungen streitet der Verf. Er dringt auf den Glauben an schließliche Stetigkeit als wesentlich für die Wissenschaft. Er betrachtet die wissenschaftliche Konzentration als eine ungeeignete Grundlage für philosophische Verallgemeinerung. Er glaubt, daß dunkle Phänomene, auf geeignete Weise angeschaut, einfach ausgedrückt werden können, und er betont, daß die Nichtwahrnehmbarkeit von allem, was vollkommen gleichförmig und allgegenwärtig ist, nur das ist, was erwartet werden darf, aber nicht ein Beweisgrund gegen sein wirkliches und stoffliches Vorhandensein ist. Lp.

M. Planck. Das Prinzip der Erhaltung der Energie. Von der philosophischen Fakultät Göttingen preisgekrönt. Dritte Auflage. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. XVI u. 278 S. 8°. (Wissenschaft und Hypothese. VI.)

Unveränderter Abdruck der zweiten Auflage (F. d. M. **39**, 836, 1908). Lp.

P. Langevin. L'inertie de l'énergie et ses conséquences. Journ. de Phys. (5) **3**, 553-591.

Aus dieser für die neue Auffassung der Grundbegriffe der Physik höchst bedeutsamen Abhandlung führen wir die folgende Stelle wörtlich an (S. 556):

Die Trägheit ist nicht mehr eine Grundeigenschaft, weil es möglich ist, ihr dadurch, wenigstens für einen Teil, Rechnung zu tragen, daß man von den Gesetzen des Elektromagnetismus ausgeht, die wahrscheinlich ursprünglicher und einfacher sind. Die Masse ist nicht mehr unveränderlich, weil ihre drei verschiedenen Definitionen aufhören, sich zu decken, wenn die Geschwindigkeit der Materie aufhört, klein zu sein im Verhältnis zu der des Lichtes, und weil sie alle drei für ein und dasselbe Stück der Materie je nach drei verschiedenen Gesetzen zu veränderlichen Werten als Funktion der Geschwindigkeit führen. Aber noch weiter: In der Nähe der Ruhelage, bei schwachen Geschwindigkeiten fallen jene drei Definitionen zusammen und führen für ein gegebenes Stück der Materie zu einer gewissen Anfangsmasse m_0; allein diese Anfangsmasse hängt von dem physikalischen oder chemischen Zustand des Systems ab und schwankt bei jeder Wandlung, die von einem Austausch der Energie mit dem Inneren begleitet wird, z. B. durch Strahlung.

Dadurch werden wir zu dem Schluß geführt, daß jeder Zuwachs ΔE der gesamten Energie eines ruhenden oder bewegten Körpers sich umsetzt in einen proportionalen Zuwachs Δm seiner Masse gemäß der merkwürdig einfachen

Beziehung $\Delta m = \Delta E/V^2$, in der V die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume darstellt. Die Masse eines Körpers bleibt selbst für schwache Geschwindigkeiten nur so lange bei der Messung konstant, wie die innere Energie sich nicht ändert. Bei einem isolierten System, dessen verschiedene Teile untereinander Energie austauschen, erhalten sich die einzelnen Massen nicht; nur die Masse der Gesamtheit bleibt unter der Bedingung unverändert, daß das System an dem Betrage der Energie weder etwas bekommt, noch etwas verliert. Die Erhaltung der Masse hört auf, ein gesondertes Prinzip zu sein; es verschmilzt mit der Erhaltung der Energie. Hat nicht das Aussehen unseres Gebäudes an Einfachheit und Harmonie gewonnen bei dieser Vereinigung zweier zuerst als unabhängig betrachteten Prinzipe? Als letzteres der Zeit nach und als mühsamst durch eine Folge von Verallgemeinerungen errungen, scheint uns das der Energie jetzt als viel tiefer gehend und reicher als das andere, das darauf zurückgeführt ist, nur eine der Ansichten zu sein."

Nach diesen einleitenden Betrachtungen, die den Grundton des Ganzen anschlagen, wird die Lehre von der Trägheit der Energie unter fortlaufender Bezugnahme auf die geschichtliche Entwicklung in allen Gebieten der Physik nach den eigenen Vorstellungen des Verf. entwickelt. Lp.

L. Décombe. Sur la dissipation de l'énergie. Journ. de Phys. (5) 3, 89-101.

In dieser Arbeit führt der Verf. seine in einer Note des Vorjahres (F. d. M. **43**, 812, 1912) begonnenen Überlegungen fort und setzt seine Gedanken besonders für Physiker auseinander. „Die Zerstreuung der Energie bekundet sich bei allen Erscheinungen, wo bis zu einem beliebigen Grade solche Kräfte der dynamischen Reibung oder der Zähigkeit auftreten, die man im allgemeinen als passive Widerstände kennzeichnet, und die der Versuch als Funktionen der Geschwindigkeiten ermittelt. Tatsächlich besteht in dem irreversiblen Freiwerden von Wärme, das von der Arbeit der passiven Widerstände untrennbar ist, im wesentlichen das Phänomen der Zerstreuung. Es scheint also in einem unlösbaren Widerspruch mit dem Prinzip der Unabhängigkeit von dem Zustande der Ruhe und der Bewegung zu stehen, gerade wie die passiven Widerstände immer als rein empirisch in der Mechanik angesehen sind. Bevor man jedoch bei diesem Schluß stehen bleibt, hat man Anlaß, zwischen dem wesentlichen Inhalt des Prinzips und der Fassung zu unterscheiden, in der es gewöhnlich ausgesprochen wird, und zu untersuchen, ob es nicht einer allgemeineren Form fähig ist, aus der man mehr erschließen kann." Dieser Aufgabe unterzieht sich der Verf., geht auf mehrere Hauptfälle ein und gelangt zuletzt zu dem Schluß: „Mit Berücksichtigung der vorstehenden Theorie ergäbe sich das der Geschwindigkeit proportionale absorbierende Glied, das empirisch bei den verschiedenen Theorien der Lichtabsorption eingeführt wird, aus sehr kleinen Unstetigkeiten, die der Umwälzungsbewegung der Elektronen in dem Atom anhaften. . . . Man erhielte so eine elektronische konkrete Darstellung der untergeordneten und verworrenen Bewegung der Wärmeerregung, wie sie im Innern der Körper vorhanden sein muß." Lp.

H. Dingler. Über das Newtonsche Gravitationsgesetz. Zs. f. positivistische Philos. 1, 7 S.

Auf eine Gedankenreihe von Kant und Erdmann und eine andere, von dem Machschen Ökonomieprinzip ausgehende, von Avenarius und Petzold ausgebaute, von F. Klein und Poincaré ergriffene sich stützend, hat der Verf. „gezeigt, daß durch eine Vereinigung dieser beiden Gedankenreihen sowie durch ein detailliertes Studium der exaktwissenschaftlichen Methodik es gelinge, eine Theorie aufzustellen, die gar keine metaphysischen Elemente mehr enthält". Er bezeichnet diese Theorie als „Exhaustionstheorie", betrachtet das Newtonsche Gravitationsgesetz unter dem Gesichtspunkte dieser Exhaustionstheorie und vermeint durch diese Betrachtung, „den Elementarvorgang der sogenannten Potentialtheorie als rein logische Hohlform erhalten zu haben".

Die einzelnen Paragraphen sind betitelt: 1. Einleitung. 2. Die apriorische Ableitung des Gesetzes aus dem Machschen Ökonomieprinzip. 3. Beziehung zur Wirklichkeit. 4. Die Forschungen H. v. Seeligers. „Wenn praktisch das Gesetz einmal eine Abweichung zeigt, so zeigt dies das Vorhandensein eines störenden Umstandes und nicht etwa ein Falschsein des Gesetzes an. Ja, wenn gar keine bekannte Ursache die Abweichung erklären kann, dann definiert sie eben eine neue, noch unbekannte solche." Lp.

S. B. Mc Laren. Aether, matter and gravitation. Proc. 5. Intern. Math. Congr. 2, 264-269.

Nach der Einleitung, in der die Bezeichnungen erklärt werden, behandelt der Verf. in 5 kurzen Paragraphen: 1. Zeit und Raum, 2. die Bewegungsgleichungen, 3. Äther als ein polarisierbares Feld, Materie als eine Äthersenke, 4. optische, von der Bewegung des Äthers nicht betroffene Phänomene, 5. Hohlräume im Äther, Elektron und Magneton, positive und negative Ladung. — Neben der relativen Zeit führt der Verf. auch die absolute Zeit τ ein, in jeder Stromlinie sind also x, y, z, s ($s = ct$) Funktionen von τ. „Somit habe ich eine Variable mehr zur Verfügung als Minkowski; aber andererseits habe ich weniger physikalisch abschließliche Begriffe. Elektrische Ladung wird erklärt als Fluß der Materie, elektrischer Strom auch." Die Ausdrücke für die Energie und die Bewegungsgröße des Gravitationsfeldes stimmen mit denen von M. Abraham überein. Lp.

S. B. Mc Laren. A theory of gravity. Phil. Mag. (6) 26, 636-673.

Riemann (Ges. Werke, 2. Aufl., S. 529) betrachtet jedes Stück Materie als eine Äthersenke, wohin von allen Seiten Äther fließt, um den dort zerstörten Äther zu ersetzen. Der Verf. will diesen Gedanken unter Hinzuziehung des Relativitätsprinzips zu einer Theorie der Gravitation ausbauen. „Riemanns Ideen ziehen an durch ihre Einfachheit und die tiefgründige Erklärung, die sie für die Newtonsche Anziehung geben. Allein sie stellen uns vor Probleme, die nach meinem Bedünken durch alle Methoden unlösbar sind, die weniger radikal sind als die der Relativisten. Wenn die Schwere mit ihrer Herkunft aus der Massenbewegung des Äthers abgetan ist, was sollen wir dann zur Optik sagen? Vielleicht können wir zurechtkommen, wenn wir den Äther, obschon ein Fluidum, als polarisierbar betrachten. So mag er quasielastische Eigenschaften besitzen, und diese können die Ursache für die Lichtwellen ab-

geben. Dann besteht das Problem für einen Nachgänger von Riemann: zu erklären, wie der Weg eines Lichtstrahles und seine Geschwindigkeit ungeändert bleiben durch alle Bewegungen des Mediums, durch welches Licht hindurchgeht. Sogar dieses unglaubliche Kraftstück scheint nicht über das Vermögen des Relativisten zu gehen.

In der vorliegenden Abhandlung komme ich zu den folgenden Schlüssen: Es sei J eine überall endliche und stetige Funktion, ebenso ihre ersten Differentialquotienten. J genügt der Gleichung

$$(36) \qquad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\right) J + 4\pi m = 0,$$

wo m das absolute Gewicht ist, eine und dieselbe Konstante für alle Materie. Die Kraft auf ein Volumenelement dv der Masse ist

$$(39) \qquad m dv \nabla J \text{ oder } m dv\, \mathbf{N},$$

wo $\mathbf{N}$ die Newtonsche Gravitationskraft ist. Es sei ϱ die Dichte des Äthers, $\mathfrak{u}$ seine Geschwindigkeit. Die Bewegung ist in einem für die Relativitätstheorie geeigneten Sinne rotationslos (§ 1) und

$$(40) \qquad \varrho \mathfrak{u} = \nabla J, \; \varrho c = -\frac{dJ}{c\,dt}.$$

Somit ist J ein Potential (§ 5). Aus (36) und (40) folgt:

$$\frac{d\varrho}{dt} + \operatorname{Div} \varrho\, \mathfrak{u} = -4\pi m.$$

Mithin verschwindet die Äthermenge $4\pi m$ in jeder Sekunde aus dem von Materie eingenommenen Einheitsvolumen.

Es ist nicht meine gegenwärtige Absicht, die verschiedenen möglichen Beschaffenheiten des Äthers zu erörtern. In § 6 erläutere ich die mir am einfachsten scheinende. Nach ihr gibt es nur eine einzige Ursubstanz, ein Fluidum, dessen Dichte und Bewegung überall stetig ist. Die Substanz hat jedoch zwei Formen, „Materie" und „Äther", die einander ausschließen. Materie ist ein Bereich, wo das Fluidum wächst oder vergeht. Bei diesem Vorgange wird die Bewegungsgröße des Äthers, des geborenen oder des absterbenden, aus dem umgebenden Äther erworben, und alle Bewegungsgröße ist die der einen fluiden Substanz. „Verfall" oder „Wachstum" von Äther erheischt aber eine äußere Energiequelle, und das Prinzip von der Erhaltung der Energie ist nur ein mathematisches Gespinst, das dadurch aufrechterhalten wird, daß man der Materie einen Energiebetrag von $-mJ$ in jeder Volumeneinheit zuschreibt.

Die Bewegungsgleichungen der so beschaffenen Substanz werden in § 6 betrachtet. Dort wird gezeigt, daß eine andauernde rotationslose Bewegung von dem in (40) formulierten Schlage immer möglich ist.

Im „Äther" gibt es kein Wachsen oder Vergehen, aber das Fluidum besitzt polare Eigenschaften. Diese werden durch die elektromagnetischen Vektoren $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ definiert, die den Maxwellschen Gleichungen genügen:

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = c \operatorname{Curl} \mathbf{H}, \qquad \frac{d\mathbf{H}}{dt} = -c \operatorname{Curl} \mathbf{E},$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{Div} \mathbf{H} = 0.$$

An der Grenze zwischen „Materie" und „Äther" geht die Ursubstanz frei aus der einen Form in die andere über, stetig sich hierbei bewegend. Die Bedingungen, welche die Übergangsfläche bestimmen, sind: erstens verhalten sich **E** und **H** wie eine vollkommen spiegelnde Fläche; ferner:

$$\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) + mJ_0 = \mathfrak{a} - V_a. \tag{94}$$

Hier ist $\mathfrak{a}$ eine Konstante, V_a eine Potentialfunktion, die in einer rein mechanischen Theorie (§ 10) verschwindet. Die Bedingung (§ 4) ist erforderlich, um die Erhaltung der Energie und der Bewegungsgröße zu sichern. J_0 ist in (94) nicht mit J identisch, sondern unterscheidet sich von ihm um ein der Zeit proportionales Glied: $J = J_0 - \varrho_0 c^2 t$, wo ϱ_0 die Dichte des Äthers im Unendlichen ist; J_0 ist das Newtonsche Potential, das somit unbedeutend vom Geschwindigkeitspotential sich unterscheidet.

In diesem System steckt noch manches Fragestück. ... Ich suche mich diesen Problemen in erster Instanz zu nähern, als ein Gläubiger der physischen Wirklichkeit der vierten Dimension. Ich argumentiere, daß die vierdimensionale Minkowskische Geometrie kein mathematisches Gespinst ist, sondern eine notwendige Folgerung aus der gewöhnlichen Erfahrung; ferner daß die Minkowskische Welt, obschon ohne Wechsel (change), doch nicht ohne Zeit oder Bewegung ist. Die Zeit ist indessen hier nichts als eine rein logische Reihenfolge, das Symbol einer Ordnung, in der die Elemente des Minkowskischen Raumes gedacht werden. ...

Der Gedanke, die Lichtgeschwindigkeit könne variieren, ist schon von Einstein und Abraham ausgesprochen worden. Ihre Vorstellungen haben aber, soweit ich sie verstehen kann, nicht viel mit den hier vertretenen gemeinsam. Die Geschwindigkeitsänderung ist nicht eine wahrnehmbare Erscheinung; denn jedes physikalische Zeitmaß ist eine Messung durch Geschehnisse, und die Lichtgeschwindigkeit wird im Grunde nur durch die Anzahl der Ausschläge gegeben, welche die Uhr gemacht hat. Die Stokessche Theorie der Aberration hängt ebenfalls mit der unsrigen zusammen. Nimmt man die Ortszeit in irgendeinem Punkte des Äthers, so ist die Bewegung in der Nähe des Punktes rotationslos im gewöhnlichen Sinne. Im § 8 deute ich auf eine physikalische Basis für den Unterschied zwischen negativen und positiven Ladungen hin. Wenn das Elektron immer negativ ist, kann das Magneton immer positiv sein."

Lp.

A. Einstein. Physikalische Grundlagen einer Gravitationstheorie. Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich **58**, 284-290.

M. Grossmann. Mathematische Begriffsbildungen zur Gravitationstheorie. Ebenda **58**, 291-297.

Zwei Vorträge, gehalten am 9. September 1913 auf der Jahresversammlung der Schweiz. Naturforschenden Gesellschaft in Frauenfeld. Man vergleiche das Referat dieses Bandes: „Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation".

„Ein Schwerefeld kann hinsichtlich seiner Einwirkung auf mechanische und andere physikalische Vorgänge ersetzt werden durch einen Beschleunigungszustand des Bezugskörpers (Koordinatensystem). Diese Äquivalenzhypothese

gestattet, den Einfluß eines Gravitationsfeldes auf physikalische Vorgänge jeder Art vorauszusagen. — Dadurch wird man gezwungen, die Theorie von Raum und Zeit, die als Relativitätstheorie bekannt ist, zu verallgemeinern, da diese ja auf der Voraussetzung von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gegründet war.“

Diese aus der Einleitung des Einsteinschen Vortrages herausgenommenen Sätze zeigen den Ursprung der neuen Gedankenentwicklungen, die in den beiden Vorträgen, ausführlicher aber in der zitierten größeren Schrift dargelegt sind. Lp.

A. Einstein. Zum gegenwärtigen Stande des Gravitationsproblems. Physik. Zs. **14**, 1249-1266.

Der auf der Naturforscherversammlung in Wien gehaltene Vortrag schließt auf S. 1262 mit den Bemerkungen: „Im vorstehenden sind die nächstliegenden Wege skizziert worden, die sich der Gravitationstheorie darbieten. Entweder man bleibt bei der gewöhnlichen Relativitätstheorie, d. h. man nimmt an, daß die die Naturgesetze ausdrückenden Gleichungen nur linearen orthogonalen Substitutionen gegenüber kovariant bleiben. Man kann dann eine Skalartheorie der Gravitation aufstellen (Nordströmsche Theorie), welche ziemlich einfach ist und den hauptsächlichen an eine Gravitationstheorie zu stellenden Anforderungen Genüge leistet, die Relativität der Trägheit aber nicht als Konsequenz enthält. Oder man erweitert die Relativitätstheorie in der skizzierten Weise. Man gelangt dann zwar zu Gleichungen von beträchtlicher Kompliziertheit, aber es folgen dafür die zu suchenden Gleichungen aus den Grundlagen unter Verwendung von erstaunlich wenigen Hypothesen, und es wird der Auffassung von der Relativität der Trägheit genügt. Ob der erste oder der zweite Weg im wesentlichen der Natur entspricht, müssen Aufnahmen von neben der Sonne erscheinenden Sternen bei Sonnenfinsternissen entscheiden.“

An diesen Vortrag schloß sich eine lebhafte Erörterung, an der sich Mie, Riecke, Hasenöhrl, Jäger, Zemplén, Reißner, Born neben dem Vortragenden beteiligten. Lp.

G. Nordström. Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzips. Ann. der Phys. (4) **42**, 533-554.

In diesem Aufsatze wird die Gravitationstheorie, die der Verf. in Physik. Zs. **13**, 1126-1129 (F. d. M. **43**, 906, 1912) und in den Ann. der Phys. **40**, 856-878 (Referat Abschn. X dieses Bandes) veröffentlicht hat, in einigen Beziehungen näher entwickelt und diskutiert. Die dort vorkommenden Unbestimmtheiten der Theorie lassen sich durch eine sehr plausible Festsetzung aufheben, die auf Laue und Einstein zurückgeht. Nach Laue läßt sich der Einsteinsche Äquivalenzsatz (obwohl nicht in seinem vollen Umfang) dadurch aufrechterhalten, daß man die Ruhdichte der Materie in passender Weise definiert. Es zeigt sich, daß der Einsteinsche Äquivalenzsatz eine ganz bestimmte Abhängigkeit des Gravitationsfaktors g vom Gravitationspotential Φ fordert; daher wird $g = g(\Phi)$ gesetzt. Bezeichnet man noch die Ruhdichte mit ν, so werden die Gleichungen (48) und (49) der letzten der oben zitierten

Abhandlungen, die „Grundgleichungen für das Gravitationsfeld“, jetzt durch die folgenden ersetzt:

$$(19) \qquad \Phi' \left\{ \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial u^2} \right\} = c^2 \nu,$$

$$(20) \qquad \begin{cases} \mathfrak{K}^g_x = -\, c^2 \nu \dfrac{\partial}{\partial x} \ln \Phi', & \mathfrak{K}^g_y = -\, c^2 \nu \dfrac{\partial}{\partial y} \ln \Phi', \\ \mathfrak{K}^g_z = -\, c^2 \nu \dfrac{\partial}{\partial z} \ln \Phi', & \mathfrak{K}^g_u = -\, c^2 \nu \dfrac{\partial}{\partial u} \ln \Phi'. \end{cases}$$

Das neue Gravitationspotential Φ' ist nicht mit der Unbestimmtheit von Φ behaftet, und es ist $g(\Phi) = c^2/\Phi'$. In den so geschriebenen Grundgleichungen kommt keine der Gravitationskonstante entsprechende universelle Konstante vor. Dies ist das Ergebnis der Betrachtungen über die eindeutige Festlegung der Theorie in § 1. Im zweiten Paragraphen über die Abhängigkeit der Masse eines Körpers vom Gravitationspotential wird bewiesen, daß die träge Masse eines Systems mit den in § 1 angegebenen Eigenschaften von dem Gravitationspotential Φ_a des äußeren Feldes abhängt. Als Beispiel der Theorie werden in § 3 Formeln für die träge und gravitierende Masse eines kugelförmigen Elektrons mit gleichförmiger Oberflächenladung aufgestellt. Die Abhängigkeit der Längendimensionen vom Gravitationspotential wird im § 4 festgestellt. Die Abhängigkeit der Längendimensionen der Körper von Φ' veranlaßt in § 5 die Frage, ob nicht auch der zeitliche Verlauf der physikalischen Vorgänge vom Gravitationspotential beeinflußt wird. An behandelten Beispielen zeigt sich, daß dies tatsächlich geschieht. „Es ist zu vermuten, daß der Verlauf aller physikalischen Vorgänge in entsprechender Weise beeinflußt wird. Aus dem zuletzt behandelten Beispiel folgt, daß die Wellenlänge einer Spektrallinie vom Gravitationspotential abhängt.“ Aus der Abhängigkeit der Längendimensionen und Massen der Körper sowie des zeitlichen Verlaufes der Erscheinungen vom Gravitationspotential folgt (§ 6), daß wir bei der Festsetzung der Grundeinheiten das Gravitationspotential in Betracht nehmen müssen. Zuletzt (§ 7) werden die Bewegungsgleichungen eines materillen Punktes aufgestellt, und es wird ermittelt, wann man diese Bewegungsgleichungen als die eines Körpers gebrauchen darf, der dann also als materieller Punkt anzusehen ist. Lp.

M. BEHACKER. Der freie Fall und die Planetenbewegung in Nordströms Gravitationstheorie. Physik. Zs. 14, 989-992.

Nordström hat eine dem Relativitätsprinzip mit $c =$ konst. entsprechende Gravitationstheorie geschaffen. Um diese Theorie mit der Erfahrung zu vergleichen, behandelt der Verf. den freien Fall im leeren Raum und die Bewegung eines Planeten im Schwerefeld der Sonne. Das Ergebnis seiner Betrachtungen faßt er am Schluß des Artikels in den Satz zusammen: Die Nordströmsche Gravitationstheorie gibt den freien Fall im leeren Raum und die Bewegung eines Planeten im Schwerefelde der Sonne in einer völlig der Erfahrung entsprechenden Weise wieder. Lp.

P. Ehrenfest. Over Einstein's theorie van het stationaire gravitatieveld. Amst. Ak. Versl. **31**, 1234-1239.

Bei der Erörterung seiner Äquivalenzhypothese sagt Einstein, es sei schwer zu erkennen, woher gewisse Schwierigkeiten entspringen, ob aus der Äquivalenzhypothese oder aus den andern, spezielleren Annahmen (z. B. betreffs der dynamischen Einwirkungen starrer kinematischer Verbindungen). Das Hauptergebnis der Betrachtungen des vorliegenden Aufsatzes ist: „Alle statischen Anziehungsfelder mit Ausnahme einer ganz besonderen Klasse stehen im Widerspruch mit der Einsteinschen Äquivalenzhypothese. Schon das statische Anziehungsfeld, das von mehreren in bezug aufeinander stationären Anziehungszentren hervorgerufen wird, ist mit der Äquivalenzhypothese unvereinbar.“

Lp.

J. Ishiwara. Die neue Gravitationstheorie in vierdimensional-vektoriellen Darstellungen. Tôhoku Math. Journ. **3**, 9-14.

Im Interesse mathematischer Einsicht gibt der Verf. seine in Physik. Zs. **13**, 1189-1193 (F. d. M. **43**, 906, 1912) veröffentlichte Theorie in vierdimensional-vektoriellen Darstellungen nach dem Minkowski-Sommerfeldschen Schema und bedient sich dabei der Bezeichnungen aus seiner Skizze der vierdimensionalen Vektoranalysis im Jahrbuche der Radioaktivität und Elektronik **9**, 589 ff., 1912.

Lp.

Ch. H. van Os. Over een stelsel krommen, dat in Einstein's gravitatietheorie optreedt. Amst. Ak. Versl. **22**, 61-64.

In dem Ehrenfestschen Artikel über die Einsteinsche Gravitationstheorie kommt ein System von ∞^2 Kurven vor, bestimmt durch die Bedingung, daß ein Hyperboloid

$$(1) \qquad H \equiv A(x^2+y^2-z^2)+Bx+Cy+Dz+E=0,$$

ein sogenanntes „Lichthyperboloid“ immer durch zwei von diesen Kurven gelegt werden kann. Die Kurven sind Schnitte der Hyperboloide H. Da letztere auch einen Kegelschnitt K_∞ gemeinsam haben müssen: $x^2+y^2-z^2=0$, $w=0$, so daß ihre Schnitte entarten, so sind die betrachteten Kurven entweder gerade Linien oder Kegelschnitte. Die vorliegende Note geht auf die Betrachtung dieser Kurven näher ein und zieht einige spezielle physikalische Folgerungen aus ihrer Natur. Zum Schlusse wird das Ehrenfestsche Problem auf ein n-dimensionales Laboratorium oder eine n-dimensionale „Welt“ ausgedehnt.

Lp.

M. Abraham. Das Gravitationsfeld. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 256-263.

Eine knappe Darstellung der „neuen Gravitationstheorie“ des Verf., bei der von den geeignet verallgemeinerten Ausdrücken der 10 Komponenten des Gravitationstensors und von den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen ausgegangen wird und im übrigen die Voraussetzungen möglichst wenig eingeschränkt sind. (Vgl. F. d. M. **43**, 899-905, 1912.)

Lp.

E. Almansi. Le equazioni generali della dinamica e la legge di gravitazione. Rom. Acc. L. Mem. (5) **9**, 473-502.

„Die theoretische Forschung über die Bewegung der Himmelskörper, insofern wenigstens solche Körper als Punkte angesehen werden können, beruht völlig auf den Fundamentalgleichungen der Dynamik:

$$\text{(I)} \qquad m \frac{d^2 x}{dt^2} = X \text{ usw.}$$

und auf dem Newton schen Gesetze

$$\text{(1)} \qquad F = k \frac{m m'}{R^2}.$$

Es ist wirklich wunderbar, daß eine so weite Klasse von Erscheinungen in einer so einfachen Weise hat dargestellt werden können, daß es möglich gewesen ist, in den wenigen hingeschriebenen Zeichen die Resultate einer unzählbaren Reihe von Beobachtungen zu verdichten.“

Die Allgemeingültigkeit dieser Formeln stellt der Verf. in Zweifel wegen der Unmöglichkeit eines absoluten Bezugssystems und wegen der Unmöglichkeit, bei der Definition der Gravitation zwischen zwei Körpern von der das Weltall erfüllenden Materie abzusehen. „Ich kann nicht der Meinung von Arrhenius zustimmen, der unter Berufung auf die Rechnung von Seeliger sich darauf beschränkt, man müsse nur schließen, wir vermögen nicht die Anziehung zu berechnen. Definieren können wir sie nicht, das ist der Eckstein. Wenn wir trotzdem von Anziehung reden wollen, müssen wir uns bescheiden, für jeden Punkt des Raumes die Existenz einer Kraft F zu fordern, die von der Lage der unendlichen Massen des Weltalls abhängt und die unter bloßer Berücksichtigung der benachbarten Massen berechnet werden kann.“

Durch weitere Überlegungen kommt der Verf. dann dazu, die Anziehung zwischen zwei Massenpunkten als Differenzwirkungen anzusehen; eine Folge ist, daß das Newton sche Gesetz des umgekehrten Quadrates der Entfernung durch eine geringe Änderung des Exponenten 2 abzuwandeln sei, daß auch eine Absorption der Anziehung denkbar sei. Setzt man für die beiden Punkte P_1, P_2 die Differenzen der Koordinaten $x_2 - x_1 = z_{12}, y_2 - y_1 = y_{12}, z_2 - z_1 = z_{12}$, ferner die eben erwähnten Differenzen der Anziehungen entsprechend gleich X_{12}, Y_{12}, Z_{12}, so erhält man statt des Systems (I) das System:

$$\text{(II)} \qquad \frac{d^2 x_{12}}{dt^2} = X_{12}, \qquad \frac{d^2 y_{12}}{dt^2} = Y_{12}, \qquad \frac{d^2 z_{12}}{dt^2} = Z_{12}.$$

Es bleibt aber die Frage nach der Richtung der Achsen des Bezugssystems übrig. Durch eine längere Betrachtung, die wir hier nicht wiedergeben können, wird der Schluß erlangt: „Die Bewegung der Körper des betrachteten Systems S geschieht so, daß in jedem Augenblick die Gleichungen (II) in bezug auf die Richtungen der kleinsten lebendigen Kraft für dasselbe System erfüllt sind.“

„Alles, was wir über die isolierten Systeme gesagt haben, ist nur angenähert wahr. Aus den Gleichungen (II) kann man in dem Fall eines isolierten Systems zu den Gleichungen (I) übergehen, wofern die Differenzen der Anziehung, die von den Körpern außerhalb des Systems ausgehen, vernachlässigt werden. Diese können ganz geringfügig sein, sind aber im allgemeinen nicht identisch Null.“

Im Schlußabschnitt legt der Verf. seine Anschauungen über absolute Bewegung, absolute Beschleunigung, absolute Anziehung, absolute Rotation kurz dar. Lp.

J. Koenigsberger. Die Möglichkeit experimenteller Prüfung der elektromagnetischen Gravitationstheorien. Ber. Naturf. Ges. Freiburg i. Br. **20**, XXI-XXVI.

Der Verf. erörtert die Frage, ob man aus Experimenten auf die Richtigkeit der Hypothesen von der Identität oder der Verschiedenheit von träger und schwerer Masse schließen könne, und kommt zu dem Ergebnis, daß die bisher vorliegenden Experimente für die Identität von träger und schwerer Masse und gegen eine elektrostatische Gravitationstheorie sprechen. Lp.

L. Décombe. Théorie électronique de la gravitation. C. R. **156**, 940-943.

Unter „Spektron" wird ein System von n Elektronen verstanden, die auf einer und derselben Bahn innerhalb einer kubischen Verteilung positiver Elektrizität gravitieren; die Verteilung wird sphärisch angenommen. Der Verf. berechnet die elektrische Aktion zweier beliebigen Spektronen aufeinander und macht ferner die Voraussetzungen: 1. Die mechanische Masse eines Spektrons entspringe einzig aus der seiner Elektronen. 2. Die Größe $\frac{1}{V}\frac{e}{m}\frac{\pi^2 a^2}{T^2}$ sei eine universelle Konstante $\sqrt{\varphi}$. Dann nimmt die mittlere Aktion F_m zweier Spektronen, deren Bahnen alle möglichen Orientierungen im Raume annehmen können, die wesentlich positive Form an:

$$F_m = \varphi \frac{M M'}{d^2},$$

wo M und M' die Gesamtmassen jedes Spektrons sind. Sie läßt sich also mit der universellen Gravitation identifizieren. Lp.

L. Décombe. Sur la théorie électronique de la gravitation. C. R. **156**, 1222-1225.

Verschiedene Bemerkungen zu der vorstehend angezeigten Note. I. Die Kreisform der Bahn ist nicht die einzige, welche die Auffindung des Newtonschen Gesetzes ermöglicht. II. Über die Größe von V ist nichts bekannt. Die unter 2. im vorstehenden Referate angeführte Gleichung drückt die notwendige und hinreichende Bedingung für die Identifizierung der gegenseitigen Aktion zweier Spektronen mit der universellen Gravitation aus. III. Diese Bemerkung bezieht sich auf eine Veröffentlichung des Verf. im Februarheft 1913 des Journ. de Phys. IV. Nach dem Vorangehenden scheint es nur gestattet zu sein, folgendes auszusagen: Der universelle Bildungsstand des Atoms, dem wir den Namen Spektron gegeben haben, scheint als eine Art von primordialem, dynamischem Element angesehen werden zu müssen, das eine fundamentale Rolle in

den Strahlungs- und Gravitationserscheinungen spielt. Seine wahrscheinliche, unterhalb des Magnetons liegende Größenordnung nähert es eher dem universellen Magneten, mittels dessen Ritz die Spektrallinien zu erklären gesucht hat. Lp.

TH. TOMMASINA. M. Marcel Brillouin et le principe de relativité. Critiques superposées. — 45e Note sur la physique de la gravitation universelle. Arch. sc. phys. et nat. (4) **35**, 614-617.

Die Note, welche gewisse Äußerungen von Marcel Brillouin in der Abhandlung „Propos sceptiques au sujet du principe de relativité" bestreitet, enthält manche Äußerungen, die wohl auch nicht allgemein angenommen sind: „Jeder in Bewegung begriffene Körper wird bewegt. Jedes begrenzte materielle System wird bewegt, und der Äther, d. h. das umgebende, materielle, aber auch unbegrenzte Feld ist der Beweger" usw. „Um aus der gegenwärtigen Verwirrung herauszukommen und das Ziel zu erreichen, dessen Wichtigkeit anerkannt wird, braucht man nur meine Theorie der Gravitation anzunehmen als einer ausschließlichen Funktion der Maxwell-Bartolischen Drucke der allgemeinen Strahlung." Lp.

TH. TOMMASINA. Max Abraham et le champ gravitationnel. — 46e Note sur la physique de la gravitation universelle. Arch. sc. phys. et nat. (4) **36**, 68-71.

In der Annahme eines Gravitationsfeldes erblickt der Verf. unklare Vorstellungen über das Wesen der Gravitation; diese Unklarheiten seien nur zu beheben durch Annahme der „gravitierenden oder gravitationellen Aktion der Maxwell-Bartolischen Kräfte oder des Strahlungsdruckes". Lp.

TH. TOMMASINA. Sur le mouvement absolu, le repos apparent et la relativité des vitesses et des trajectoires. — 47e Note sur la physique de la gravitation universelle. Arch. sc. phys. et nat. (4) **36**, 276-279.

Die Schwierigkeiten und vermeintlichen Mängel der Relativitätstheorie will der Verf. durch eigene Festsetzungen über die Begriffe der absoluten Ruhe usw. beseitigen. Er faßt das Wesen seiner Ausführungen zuletzt in einem Axiom zusammen: „Jede wahre Bewegung ist absolut, jede Ruhe ist nur scheinbar; jede Geschwindigkeit ist relativ, denn wir können nie die wahre, absolute Geschwindigkeit irgendeiner Translationsbewegung erkennen, ebensowenig ihre wahre, absolute Bahn, welche ihre Gestalt ist." Lp.

TH. TOMMASINA. Pierre Prevost et la théorie corpusculaire gravifique de Le Sage. — 48e Note sur la physique de la gravitation universelle. Arch. sc. phys. et nat. (4) **36**, 280-284.

Bei Gelegenheit der Aufstellung einer Büste für den Genfer Physiker Pierre Prevost macht der Verf. darauf aufmerksam, daß dieser Gelehrte ein Anhänger der Emissionstheorie, besonders in der Wärmetheorie, geblieben

ist, ein Gegner der Undulationstheorie. Als Freund von Le Sage, von dem er mehrere nachgelassene Manuskripte sowie den Briefwechsel mit berühmten Zeitgenossen (Euler, Lambert, Charles Bonnet, Bailly, Clairaut, La Condamine, d'Alembert, Boscovich) veröffentlicht hat, fand er in der von Le Sage zur Erklärung der Gravitation ersonnenen Hagelschauertheorie der das Universum erfüllenden Körperchen eine Stütze seiner eigenen Ansichten. In sein Hauptwerk Essais de philosophie ou Étude de l'esprit humain (Genève, An XIII) hat er daher manche Bruchstücke aus Schriften von Le Sage aufgenommen. Lp.

G. Mie. Grundlagen einer Theorie der Materie. (Dritte Mitteilung, Schluß). Ann. der Phys. (4) **40**, 1-66.

Über die beiden ersten Mitteilungen ist F. d. M. **43**, 910, 1912, berichtet worden. Die vorliegende Schlußmitteilung umfaßt die Kapitel: III. Kraft und träge Masse. IV. Das Problem des Wirkungsquantums. V. Die Gravitation. Wegen der Unmöglichkeit, dem Verf. in seinen mathematischen Entwicklungen und kritischen Betrachtungen gerecht zu werden, müssen wir uns damit begnügen, aus den Schlußbemerkungen der höchst bedeutsamen Arbeit die Hauptstellen herzusetzen.

„Die Gravitation, deren experimentelle Erforschung vorzubereiten das Hauptziel war, zeigt sich nach wie vor gleich spröde. Die Theorie der Gravitation hat sich zwar vollständig durchführen lassen in der Weise, daß sie sowohl mit dem Relativitätsprinzip wie auch mit allen bisher von der Gravitation bekannten Erfahrungstatsachen im Einklang ist, sie ergibt auch zwei neue Resultate, die auf den ersten Blick äußerst interessant erscheinen. Aber bei genauerer Betrachtung zeigt sich, daß diese theoretischen Resultate gar keine Aussichten für ein erfolgreiches Experiment geben. Das erste Resultat ist, daß das Verhältnis von schwerer Masse zu träger Masse von der Temperatur abhängt, und daß die Abhängigkeit der Temperatur bei Körpern von kleinem Atomgewicht sehr viel stärker ist als bei Körpern von großem Atomgewicht. Da die Unterschiede, welche die Theorie für die Schwerebeschleunigung verschiedener Stoffe vorhersehen läßt, von der Größenordnung 10^{-12} bis 10^{-11} sind, läßt sich experimentell nichts damit anfangen. Das zweite Resultat ist, daß es im Äther Longitudinalwellen geben muß, nach denen zu suchen es sich vielleicht lohnte. Von den uns bekannten Prozessen kommen die Schwingungen der Atome und Elektronen in Betracht, die zugleich mit dem Licht auch die longitudinalen Schwerewellen liefern müssen. Indessen steht ihre Intensität zu der der Lichtwellen bei Elektronenschwingungen jeder Frequenz ungefähr im Verhältnis $1 : 8{,}3 . 10^{42}$, und wir müssen es deshalb für ganz ausgeschlossen halten, daß es irgendein Reagens gibt, das auf sie anspricht. Es läßt sich also kein Weg angeben, auf welchem man nach den an sich jedenfalls höchst interessanten Longitudinalwellen suchen könnte."

„In etwas lockerem Zusammenhang mit der übrigen Theorie steht die von mir in den Abschnitten 31 bis 36 dargelegte Auffassung von den Wirkungsquanten und von dem Licht der Bandenspektren. Diese Auffassung ist sehr vage und hypothesenreich; trotzdem glaube ich, daß man einige Konsequenzen daraus ziehen könnte, die zu neuen spektroskopischen Untersuchungen Anlaß geben müßten." Lp.

N. Bohr. On the constitution of atoms and molecules. Phil. Mag. (6) **26**, 1-25, 476-502, 857-875.

„In der vorliegenden Abhandlung ist versucht worden, eine Theorie des Baues der Atome und der Molekeln auf der Grundlage der Gedanken zu entwickeln, die Planck eingeführt hat, um der Strahlung aus einem schwarzen Körper gerecht zu werden, und die Theorie des Gefüges von Atomen, die Rutherford in Vorschlag gebracht hat, um die Zerstreuung der α-Teilchen durch die Materie zu erklären.

Plancks Theorie beschäftigt sich mit der Emission und Absorption der Strahlung aus einem Atomvibrator von konstanter Frequenz, unabhängig von dem Energiebetrage, den das System in dem betrachteten Augenblick besitzt. Die Annahme solcher Vibratoren schließt jedoch die Annahme quasielastischer Kräfte ein und ist unverträglich mit der Rutherfordschen Theorie, nach der alle Kräfte zwischen den Teilchen eines Atomensystems dem Quadrate des Abstandes voneinander proportional sind. Um also die von Planck erlangten Hauptergebnisse anzuwenden, ist es nötig, neue Annahmen bezüglich der Emission und Absorption der Strahlung durch ein Atomensystem einzuführen. Die in der Abhandlung benutzten Hauptannahmen sind die folgenden:

1. Die Energiestrahlung wird nicht ausgesandt (oder verschluckt) auf die in der gewöhnlichen Elektrodynamik angenommene stetige Art, sondern nur während des Überganges der Systeme zwischen zwei stationären „Zuständen".

2. Das dynamische Gleichgewicht der Systeme in den stationären Zuständen wird durch die gewöhnlichen Gesetze der Mechanik beherrscht, während diese Gesetze nicht bestehen für den Übergang der Systeme zwischen den verschiedenen stationären Zuständen.

3. Die während des Überganges eines Systems zwischen zwei stationären Zuständen ausgesandte Strahlung ist homogen, und die Beziehung zwischen der Frequenz ν und dem gesamten ausgesandten Energiebetrage E wird durch $h\nu$ gegeben, wo h die Plancksche Konstante ist.

4. Die verschiedenen stationären Zustände eines einfachen Systems, das aus einem um einen positiven Kern rotierenden Elektron besteht, werden durch die Bedingung bestimmt, daß das Verhältnis der während der Bildung der Konfiguration ausgesandten Gesamtenergie und der Drehfrequenz des Elektrons ein ganzes Vielfaches von $\frac{1}{2}h$ ist. Nimmt man an, die Bahn des Elektrons sei kreisförmig, so ist diese Annahme gleichwertig mit der andern, daß die Winkelbewegungsgröße des Elektrons um den Kern ein ganzes Vielfaches von $h/2\pi$ ist.

5. Der permanente Zustand eines Atomensystems, d. h. der Zustand, bei welchem die ausgesandte Energie ein Größtes ist, wird durch die Bedingung bestimmt, daß die Winkelbewegungsgröße jedes Elektrons um das Zentrum seiner Bahn gleich $h/2\pi$ ist.

Durch Anwendung dieser Annahmen auf Rutherfords Atommodell ist es möglich, den Gesetzen von Balmer und Rydberg gerecht zu werden, welche die Frequenz der verschiedenen Linien in dem Linienspektrum eines Elementes verbinden. Ferner werden Umrisse für eine Theorie des Baues der Atome der Elemente gegeben, sowie der Bildung von Molekeln chemischer Verbindungen; sie steht, wie nachgewiesen wird, in angenäherter Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Der enge Zusammenhang zwischen der vorliegenden Theorie und den neueren Theorien der Strahlung von einem schwarzen Körper und der spezifischen Wärme

liegt zutage. Da ferner bei der gewöhnlichen Elektrodynamik das magnetische Moment, das von einem in einer Kreisbahn rotierenden Elektron herrührt, der Winkelbewegungsgröße proportional ist, so dürfen wir eine enge Beziehung zu der von Weiß ersonnenen Theorie der Magnetonen erwarten. Die Entwicklung einer eingehenden Theorie der Wärmestrahlung und des Magnetismus auf dem Grunde der gegenwärtigen Theorie erfordert jedoch die Einführung zusätzlicher Annahmen über das Verhalten gebundener Elektronen in einem elektromagnetischen Felde. Der Verf. hofft später auf diese Fragen zurückzukommen."
Lp.

A. Heydweiller. Über Größe und Konstitution der Atome. Ann. der Phys. (4) **42**, 1273-1286.

„Ergebnisse: Die Bestimmungen von Atomdurchmessern nach zwei verschiedenen Methoden wurden miteinander verglichen und in einigen Fällen in so guter Übereinstimmung gefunden, daß die dadurch festgelegten Atomdurchmesser 1,663 für H, 2,765 für Cl und 3,185 für Xe in 10^{-8} cm auf 1 bis 2 Proz. sichergestellt gelten können. Auch die früher auf Grund der Bestimmung der Ionenrefraktion noch abgeleiteten Werte dürften ziemlich genau sein.

In andern Fällen (den niederen Gliedern der Edelgasreihe) ergeben die beiden Methoden Verschiedenheiten, die die möglichen Beobachtungsfehler weit übertreffen und die Theorien als verbesserungsbedürftig erscheinen lassen.

Es werden die Folgerungen diskutiert, die sich ergeben aus Lord Kelvins Annahme einer gleichförmigen positiv-elektrischen Raumerfüllung des Atoms mit leicht verschiebbar eingebetteten Elektronen und der Annahme, daß das früher aus den Ionenrefraktionen abgeleitete Elementarvolumen (die Urstere) ein positives elektrisches Elementarquantum enthält. Diese Annahmen erweisen sich als gut vereinbar mit den optischen Bestimmungen sowie mit der Weißschen Magnetonentheorie.

Die Langevinsche Theorie des Diamagnetismus verlangt dagegen zur quantitativen Darstellung der Beobachtungen Elektronenzahlen im Atom von viel höherer und unwahrscheinlicher Größenordnung und stellt auch sonst die Beobachtungen nicht befriedigend dar.

Aus dem Verhältnis der scheinbaren zur wirklichen Raumerfüllung der Metalle im festen Zustand ergibt sich eine bemerkenswerte Gruppierung derselben."
Lp.

J. J. Thomson. On the structure of the atom. Phil. Mag. (6) **26**, 792-799.

Es wird der Versuch gemacht, ein Atommodell zu konstruieren, das die von der Quantentheorie geforderte Eigenschaft der Entfernungsarbeit eines Elektrons $= h\nu$ besitzt. Im Anschluß an frühere Überlegungen sucht der Verf. dies im Prinzip dadurch zu erreichen, daß er für das Atominnere neben isotropen Zentralkräften noch solche einführt, die auf bestimmt gerichtete kegelförmige Raumteile beschränkt sind. Die Eigenschaften eines auf diesen Grundlagen konstruierten Atoms werden dann diskutiert und zur Erklärung einiger photoelektrischen und mit der Entstehung der Röntgenstrahlen zusammenhängenden Fragen verwendet.
Se.

M. Brillouin. Caractères généraux des actions entre molécules. Ann. de chim. et phys. (8) 28, 48-77, 567-577.

„Seit Kirchhoff und Bunsen sind die Physiker nicht mehr in Unwissenheit darüber, daß eine Molekel oder ein Atom eine große Zahl innerer Freiheiten bedingt, und in dieser Hinsicht macht es wenig aus, ob man sie ausschließlich als mechanisch wie ehedem voraussetzt oder hauptsächlich als elektromagnetisch. Von Bedeutung ist die Existenz einer ganzen Klasse von Erscheinungen, die besonders von der Existenz der ganzen Molekel abhängen, ohne daß man sie in Atome oder in Elektronen zerbricht. Mit diesen Erscheinungen will ich mich in einer Reihe von Abhandlungen beschäftigen, in denen die Vorlesungen zusammengefaßt werden sollen, die ich seit mehreren Jahren, vornehmlich seit 1907, im Collège de France gehalten habe.

Wie in den meisten meiner andern Untersuchungen werde ich hier von den allgemeinsten Begriffen ausgehen, welche die bekannten Erscheinungen uns aufdrängen, und ich werde möglichst genau ihre theoretischen Folgen prüfen; gelegentlich werde ich die Analogien mit der Wirklichkeit erwähnen. Wenn diese Analogien sich als durchaus gut erweisen, so darf man an zahlische Vergleichungen denken. Ich werde aber nicht den Versuch machen, Theorie und Experimente durch Beweisgründe jüngster Überlegungen gewaltsam in Einklang zu bringen. Gerade das Entgegengesetzte geschieht vom Gesichtspunkte der meisten Abhandlungen aus der physikalischen Chemie, wo jeder Gesetze aufstellt, zufrieden mit einer mäßigen Übereinstimmung zwischen guten Messungen und den summarischsten theoretischen Einfällen, oder zwischen recht sachgemäßen Theorien und Messungen von unzulänglicher Schärfe. ... Während andere scharfe, versuchliche Beweisstücke anhäufen, habe ich mir die Aufgabe gestellt, zu ergründen, welche Hülfsmittel eine kleine Zahl einfacher Hypothesen zur Erklärung der bekannten Erscheinungen liefern, welche unbekannten Erscheinungen sie uns ahnen lassen, und zwar so, daß immer klar ersichtlich wird, wovon die erhaltenen Resultate abhängen. Dies ermöglicht es, leicht aufzuspüren, wo, wenn nicht wie die anfänglichen Hypothesen überarbeitet werden müssen, um eine bessere Übereinstimmung zwischen ihren Folgen und den Tatsachen zu haben.“

In dem ersten vorliegenden Artikel werden nach einer allgemeinen Einleitung die bisher aufgestellten Hypothesen über die Molekeln und über die gegenseitigen Aktionen der Molekeln erörtert. Der allgemeine Verlauf der molekularen Aktionen wird nach den über sie bekannten Tatsachen durch eine Kurve veranschaulicht, und dann werden mehrere Formeln aufgestellt, die an der Grenze in das Newtonsche Gravitationsgesetz übergehen, so z. B.:

$$(1) \qquad F = -\frac{1}{r^2} Gmm' \, e^{\frac{\alpha}{r}},$$

wo $G = 6{,}7 \,.\, 10^{-8}$, $\alpha > 0$, oder komplizierter:

$$(2) \qquad F = -\frac{1}{r^2} Gmm' \, e^{\frac{a}{r}} \frac{e^{\frac{a}{r}} - e^{\frac{a}{\alpha}}}{1 - e^{\frac{a}{\alpha}}},$$

oder aber:

$$(3) \qquad F = -\frac{Gmm'}{\alpha}\left\{\frac{c}{r^2} - e^{\alpha/(r-b)}\left[\frac{c}{r^2} - \left(1 - \frac{c}{r}\right)\right]\frac{\alpha}{(r-b)^2}\right\}.$$

Für das letzte Gesetz werden bei Anahme von Zahlenwerten der Konstanten Tabellen der Energie mitgeteilt.

Unter Hinweis auf die Verschiedenartigkeit des Baues der Molekeln erklärt der Verf. die Auswertung des Molekularvolumens durch Addition der Atomvolumina für durchaus falsch. „Die Form des neutralen Bereiches und daher auch die Kristallform kann in ziemlich direkter Beziehung zu der Konstitution der Molekel in Valenzen stehen; aber das Molekularvolumen hängt außerdem noch von der Natur der Atome ab.“ Lp.

P. Weiss. Sur le champ moléculaire et une loi d'action en raison inverse de la sixième puissance de la distance. C. R. **157**, 1405-1408.

„Das molekulare Feld ist, wenn es mit λ^{-6} multipliziert wird, eine homogene Funktion der Abstände vom Grade — 6. Wenn man sich die elementare Wirkung einer Molekel auf eine benachbarte Molekel in eine Potenzreihe des Abstandes entwickelt denkt, muß also entweder die sechste Potenz allein vorkommen, oder die andern Potenzen verschwinden bei der auf die Sphäre der molekularen Wirkung erstreckten Summierung. Das so gefundene Wirkungsgesetz verstärkt somit die Gründe, nach denen das molekulare Feld nicht magnetisch ist. Es zeigt zugleich, daß es nicht elektrostatisch sein dürfte. Es wird durch molekulare Wirkungen von einem neuen Schlage und einer noch unbekannten Art erzeugt.“ Lp.

A. Byck. Zur Theorie der elektrischen und chemischen Atomkräfte. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **15**, 524-533 (Vorläufige Mitteilung.); Ann. der Phys. (4) **42**, 1417-1453.

„Wenn man die empirischen Gesetze der Elektronenschwingungen im Atom analog den Keplerschen Gesetzen formuliert und nach Newtons Methode aus ihnen das zugehörige Potential herleitet, so wird man zu der Verallgemeinerung des elastischen Kraftgesetzes für Räume konstanter negativer Krümmung geführt. Dieses verallgemeinerte Kraftgesetz stellt sich als das für das Innere der Materie gültige Gegenbild des im Vakuum herrschenden Newtonschen Gesetzes dar. Die Atome erscheinen dann als Ausnahmegebiete konstanter negativer Krümmung, die Elektronen, der Erfahrung entsprechend hierzu symmetrisch, als solche positiver Krümmung innerhalb des Vakuums der Krümmung Null. Die Zulässigkeit dieser Auffassung wird eingehend begründet. Die absoluten Einheitsstrecken der nichteuklidischen Räume entsprechen den absoluten Dimensionen der Atome und ergeben sich in quantitativer Hinsicht von deren bekannter Größenordnung 10^{-8} cm. Das Atommodell, das nicht willkürlich herausgegriffen ist, sondern zu dem man eindeutig geführt wird, kann als die nichteuklidische Verallgemeinerung des von J. J. Thomson erdachten Modelles angesehen werden.

Anwendungen: 1. Quantentheorie. Es ergibt sich vom Standpunkte der periodischen Zentralkräfte eine Analogie zwischen dem Planckschen Wir-

kungsquantum h und der allgemeinen Gravitationskonstante G. Die Aufnahme und Abgabe von Energie seitens der Atome beim Austausch von Elektronen erfolgt im Grenzfalle nach Quanten. Zwei Größenordnungsbeziehungen zwischen h und dem Elementarquantum der Elektrizität und den Atomdimensionen sowie das Einsteinsche lichtelektrische Gesetz ergeben sich ohne quantenhafte Ansätze.

2. Molekulare Dimensionen. Die Durchmesser der Alkalien, Halogene und verschiedene Schwefel-, Chlor- und Kohlenstoffverbindungen werden zutreffend berechnet.

3. Thermodynamik chemischer Vorgänge. Eine nur elektromagnetische Daten enthaltende Formel für die Dissoziationswärme wird an 5 Metalloiden (Chlor, Brom, Jod, Schwefel, Phosphor) bestätigt.

4. Strukturchemie. Das Kraftgesetz liefert, der Erfahrung entsprechend, Gleichgewichtslagen und bestimmte Struktur für neutrale Atome innerhalb der Kohlenstoffverbindungen und der anorganischen Komplexverbindungen, dagegen keine Gleichgewichtslagen und keine bestimmte Struktur für Elektrolyte. Die abnorm hohe Komplexbildungstendenz des Kohlenstoffs findet ihren theoretischen Ausdruck. Die empirische Regel, wonach die Komplexbildner in den Minimis der Atomvolumenkurve liegen, wird abgeleitet.“ Lp.

A. C. Crehore. On the formation of the molecules of the elements and their compounds with atoms as constituted on the corpuscular-ring theory. Phil. Mag. (6) **26**, 25-84.

Nach J. J. Thomson bestehen die Atome aus Maschen von positiver Elektrisierung, innerhalb deren sich negative Elektronen umwälzen. Die Elektronen nehmen Lagen eines dynamischen Gleichgewichts an zufolge ihrer gegenseitigen Einwirkung aufeinander und auf die positive Elektrizität. Die vorliegende Darstellung geht zunächst darauf aus, eine genauere Einsicht in bezug auf die Atome selbst zu erhalten, dann aber auch darauf, die Weise zu prüfen, wie zwei solcher Atome oder mehrere entweder von derselben Art oder von verschiedenen Arten aufeinander wirken, wenn sie in molekulare Reichweite gebracht werden. Es wird gefunden, daß solche Atome zu endgültigen Lagen stabilen Gleichgewichtes miteinander in festen Abständen gelangen, indem sie so die Molekeln zusammengesetzter Körper bilden. Die diatomischen Molekeln bestehen aus zwei starr in festen Abständen gehaltenen Atomen. Der Grund dafür, daß Kohle sich mit mehr Wasserstoffatomen verbinden kann als Sticktoff, Stickstoff mit mehr als Sauerstoff, Sauerstoff mit mehr als Fluor, tritt klar hervor. Diese und andere Folgerungen werden aus den mechanischen Kräften zwischen sich bewegenden elektrischen Ladungen hergeleitet, die aus der Maxwellschen elektromagnetischen Theorie folgen. Lp.

G. Foex. Les champs moléculaires dans les cristaux et l'énergie au zéro absolu. C. R. **157**, 1145-1148.

Der Verf. bemüht sich, zu zeigen, „daß molekulare Felder, die den kristallinischen Phänomenen übergelagert sind, ausreichen, um den Abweichungen von

dem Curieschen Gesetze bei den niederen Temperaturen Rechnung zu tragen, ohne daß es notwendig ist, die Quanten oder die Energie bei dem absoluten Nullpunkt einzuführen".
Lp.

A. BERTHAUD. Démonstration élémentaire de la loi d'action de masse. C. R. **155**, 343-344.

Für das chemische Gesetz der Massenwirkung wird ein einfacher Beweis gegeben, der auf den Gesetzen von Boyle-Mariotte, von Dalton und von Avogadro beruht. Demnach wäre dieses Gesetz in einem Systeme streng gültig, dessen Bestandteile jenen Gesetzen folgen. Lp.

D. HILBERT. Vorbericht für den von der Kommission der Wolfskehl-Stiftung veranstalteten Zyklus von Vorträgen über die kinetische Natur der Materie. Gött. Nachr. 1913, 137-156; Physik. Zs. **14**, 258-264.

Wir führen nur die Titel der einzelnen Vorträge an, über die im folgenden Bande der F. d. M. nach der Veröffentlichung der gehaltenen Vorträge zu berichten ist.

M. Planck. Die gegenwärtige Bedeutung der Quantenhypothese für die kinetische Gastheorie. 1. Erläuterung und Begrenzung des Themas. 2. Emissionsgesetz der Verdampfung. 3. Zur kinetischen Theorie kondensierter, einatomiger Körper.

P. Debye. Zustandsgleichung und Quantenhypothese.

W. Nernst. Zur Theorie des festen Aggregatzustandes.

M. v. Smoluchowski. Gültigkeitsgrenzen des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie.

A. Sommerfeld. Probleme der freien Weglänge. 1. Methodisches über Einführung und Benutzung der freien Weglänge. 2. Experimentelles über die Abhängigkeit der freien Weglänge von Geschwindigkeit und Druck. 3. Spezifische Wärme der einatomigen Gase (nach W. Lenz).

H. A. Lorentz. Anwendung der kinetischen Theorien auf Elektronenbewegung.
Lp.

C. BENEDICKS. Über die Herleitung von Plancks Energieverteilungsgesetz aus Agglomerationsannahme; einfache Beziehung zwischen Härte und Schwingungszahl. Ann. der Phys. (4) **42**, 133-162.

C. BENEDICKS. Déduction de la loi de Planck de la distribution de l'énergie par l'hypothèse d'agglomération. C. R. **156**, 1526-1529.

Das Ziel dieser Abhandlung wird aus dem folgenden letzten Absatz der „Zusammenfassung" ersichtlich: „Durch diese Auseinandersetzungen, die keinen Anspruch erheben, erschöpfend oder zwingend zu sein, dürfte doch als festgestellt erscheinen, daß wenigstens ein rein physikalischer Ausweg, derjenige der Agglomeration, vorhanden ist, um zum Planckschen Gesetz ohne Zuhülfe-

nahme der Quantenhypothese zu gelangen. Damit der gegen die bisherige Physik streitenden Quantenhypothese fortgesetzte Existenzberechtigung zukommen könne, scheint mir also nunmehr ihren Anhängern die Beweislast zuzufallen, entweder daß die Annahme der Agglomeration überhaupt sinnlos ist, oder aber, daß eine Agglomeration zwar möglich ist, daß es aber ausgeschlossen ist, daß sie durch eine Langevin-Formel bestimmt sei.“ Lp.

O. Sackur. Die universelle Bedeutung des sogenannten elementaren Wirkungsquantums. Ann. der Phys. (4) **40**, 67-86.

In dieser Abhandlung werden die vollständigen Gleichungen für die Energie und Entropie der idealen einatomigen festen Körper und der einatomigen Gase von einem einheitlichen Gesichtspunkt abgeleitet und an der Erfahrung bestätigt. In diesen Gleichungen treten nur die universellen Konstanten N, k und h sowie die individuellen Konstanten ν (Schwingungszahl, für feste Körper) und M (Molekulargewicht, für Gase) auf. Zu ihrer Ableitung erwies es sich im Gegensatz zu der älteren, von Planck begründeten Darstellungsart nicht als notwendig, der Energie oder der Wirkung eine atomistische Struktur beizulegen. Es genügte vielmehr eine schärfere Fassung des physikalischen Wahrscheinlichkeitsbegriffes, und zwar durch die fast selbstverständliche Annahme, daß das Eintreten eines Ereignisses um so wahrscheinlicher wird, je länger man auf dieses Eintreffen wartet, und daß daher ein auch extrem unwahrscheinliches, aber mögliches Ereignis nach unendlich langer Zeit mit endlicher Wahrscheinlichkeit eintritt.

Im Anschluß und in Erweiterung der älteren statistischen Methoden werden die folgenden statistischen Grundhypothesen benutzt: Befinden sich N Elementarteilchen in einem abgeschlossenen Raume bei konstanter Gesamtenergie, so ist die Entropie dieses Systems proportional der Gesamtwahrscheinlichkeit der Energieverteilung auf die Elementarteilchen, also $S \sim \ln W$; die Einzelwahrscheinlichkeit, daß irgendein Teilchen während einer unendlich langen Zeit, wenn auch vorübergehend, die Einzelenergie ε annimmt, ist im statischen Zustand proportional der Funktion $\alpha e^{-\beta\varepsilon}$, α und β sind nur von der Zahl und Art der Elementarteilchen, sowie von dem Volumen V und der Gesamtenergie in E, also von den Systembedingungen abhängig. Schreibt man diese beiden Proportionalitätsbedingungen als Gleichungen: $S = k \ln W$, $w = h\alpha e^{-\beta\varepsilon}$, so hängen die beiden Proportionalitätskonstanten k und h lediglich von dem Maßsystem ab, in welchem man die experimentell bestimmbaren Bedingungen des Systems angibt. Die Zerlegung der Konstante h in die beiden Faktoren $\Delta\varepsilon$ und Δt ist lediglich eine Rechenoperation, die zur Auswertung der Größen α und β erforderlich ist. Lp.

O. Sackur. Die „Chemischen Konstanten“ der zwei- und dreiatomigen Gase. Ann. der Phys. (4) **40**, 87-106.

Bei der Behandlung der zweiatomigen Gase wird von der Hypothese Boltzmanns ausgegangen, daß die zweiatomige Molekel aus zwei starr miteinander verbundenen Atomen besteht, die um die beiden zur Verbindungslinie senk-

rechten Richtungen rotieren können. Die dreiatomigen Molekeln werden vorgestellt als drei starr miteinander verbundene Massenpunkte, die um drei zueinander senkrechte Achsen rotieren können. Es ergibt sich, daß die in einer Tabelle zusammengestellten Werte für die chemische Konstante C sich zu einer erstmaligen angenäherten Berechnung von Dampfdrucken und chemischen Gleichgewichten aus kalorimetrisch bestimmbaren Größen in mehreren Fällen recht gut bewährt haben, und zwar sowohl bei den Molekeln, die aus gleichen Atomen bestehen, wie bei solchen, die aus Atomen ganz verschiedener Masse zusammengesetzt sind. Dies ist besonders bemerkenswert, da die Theorie für die beiden Molekelgattungen sehr verschiedene Entropiewerte geliefert hat, und da zu ihrer Ableitung recht spezielle Annahmen über den inneren Bau der Molekel gemacht werden mußten. Andrerseits ist jedoch die erhaltene Übereinstimmung, wenigstens bei den Gasreaktionen, nicht zu hoch zu bewerten, da sich möglicherweise bei der Berechnung von Gleichgewichten die zur Ableitung der C-Werte gemachten Fehler wieder herausheben können. Die Theorie der mehratomigen Molekeln kann daher noch nicht als abgeschlossen gelten. Lp.

M. Katawama. On the nature of atomic weight. Tôhoku Sc. Rep. 1, 171-200.

Zusammenfassung: Ein Atom besteht aus dem positiv geladenen Kern und aus den ihn begleitenden Elektronen. Die Masse des Kernes bildet den Hauptteil derjenigen des ganzen Atoms. Die Masse des Atomkernes ist die algebraische Summe seiner mechanischen und seiner elektromagnetischen Masse. Folgende Annahme wird über die Verteilung dieser Massen gemacht:

$$\delta = a\,\frac{\ln r}{r^2}, \qquad a = a_0\,\frac{\sin br}{br}.$$

Die Atomgewichte, die mit der um der Einfachheit willen gemachten Voraussetzung eines neutralen Kernes berechnet werden, stimmen mit den versuchlich bestimmten gut überein. Die Bildung von Doppelelementen wird qualitativ erklärt. Für die Dimension des Atomkerns muß eine Grenze bestehen. Wenn diese Grenze an dem dem Atomgewicht 252 entsprechenden Punkte ist, so stimmt die Masse des nur aus elektromagnetischer Masse bestehenden Kernes mit der des versuchlich abgeschätzten Elektrons überein. Die Atomkerne höherer Elemente haben Oberflächen mit größerer spezifischer Ladung. Sie werden deshalb leichter durch äußere elektrische Kraft zerstört. Solche mit positiver Oberfläche müssen die wenigst stabilen sein, wie dies auch aus dem Vorkommen solcher Elemente in der Natur ersichtlich ist. Das Verhältnis des Radius eines Atoms zu dem seines Kernes nimmt ab, wenn der letztere zunimmt, und nähert sich asymptotisch einem konstanten Wert. Dieser Umstand erklärt das allgemeine Verhalten niedrigerer und höherer Elemente, liefert auch ein Mittel, die obere Grenze des Elektronradius zu schätzen. Lp.

K. Hack. Ein Modell zur Erklärung der chemischen Wertigkeit und der periodischen Regelmäßigkeiten der Elemente. Süddeutsche Apoth.-Ztg. 26 u. 27, 5 S. Sonderabzug.

„Theoretischen Erwägungen entsprechend, enthält das nach Art einer Weckeruhr angefertigte Modell eine rechts gewundene, schneckenförmige Feder, deren äußeres Peripherieende durch einen Zeiger angedeutet wird. ... Entsprechend der Anzahl der Elemente sind sechs Umgänge vorhanden, die der Zeiger sämtlich berührt, wenn die Feder vollständig aufgezogen wird. Das Modell markiert einesteils die Entstehung der Elemente durch einen verschiedenartigen Druck auf ein und dieselbe einheitliche Materie; andrerseits gibt der Zeiger bei jedem der 120 Elemente die Richtung an, in welcher die zusammengedrückte Materie nach außen hin wirkt.“ An dem Modell begründet der Verf. seine theoretischen Ansichten. Lp.

A. Piutti. Sopra una rappresentazione degli elementi chimici mediante punti nello spazio ordinario. Rom. Acc. L. Rend. **22**$_1$, 569-575.

An frühere Autoren (B o r c h e r s, C. S c h m i d t) sich anlehnend, trägt der Verf. bei einem räumlichen Koordinatensystem auf die x-Achse das Atomgewicht, auf die y-Achse das äquivalente Volumen, auf die z-Achse die spezifische Wärme eines Elementes auf und erhält so einen Punkt P des Raumes mit den Koordinaten x, y, z. Der Nutzen einer solchen Darstellung wird kurz angedeutet; weitere Ausführungen werden in Aussicht gestellt. Lp.

R. Marcelin. Expression des vitesses de transformation des systèmes physico-chimiques en fonction de l'affinité. C. R. **157**, 1419-1422.

Aus der Formel, die der Verf. in C. R. **151**, 1052-1055 aufgestellt hat (F. d. M **41**, 985, 1910), zieht er jetzt weitere Schlüsse über die Diffusion, Verdampfung, Sublimation und Auflösung. Lp.

M. Bodenstein. Eine Theorie der photochemischen Reaktionsgeschwindigkeit. Verh. Deutsche Phys. Ges. **15**, 690-704.

Der Verf. zeigt, „wie aus der Annahme, daß bei den Lichtreaktionen stets eine Ionisation der Molekel eintritt, und nun sowohl der positive Rest (in primärer Reaktion), wie andere durch das Elektron aktivierte Molekeln (in sekundärer Reaktion) sich umsetzen, ein Schema geschlossen werden kann, das die photochemischen Reaktionsgeschwindigkeiten zwanglos zu beschreiben erlaubt, so mannigfach auf den ersten Blick ihre Gesetze zu sein scheinen“. Lp.

W. Esson. On a law of connexion between two phenomena which influence each other. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 272-273.

Mehrere allgemeine Sätze werden axiomatisch ausgesprochen. Aus ihnen wird auf ein von H a r c o u r t (Lond. Roy. Soc. Trans. (A) **212**, 187-204, 1912) veröffentlichtes Gesetz geschlossen von der Form $k/k_0 = (T/T_0)^m$, wo k und k_0 die Reaktionsgeschwindigkeiten eines chemischen Prozesses bei den absoluten Temperaturen T und T_0 sind, m eine von dem Medium abhängende Konstante. Lp.

R. Dubrisay. Sur les équilibres chimiques en solution. J. de l'Éc. Pol. (2) **17**, 121-145.

Zusammenfassung: „Ich habe gezeigt, daß gemäß den theoretischen Voraussagen das Phasengesetz und das Gesetz der Verschiebung des Gleichgewichts in aller Strenge Anwendung finden auf die wässerige Lösung von Wismutchlorür. Dagegen wird das Gesetz der Massenaktion nur angenähert bestätigt; die beobachteten Abweichungen werden übrigens leicht gedeutet, wenn man 1. die Bildung verwickelter Zusammensetzungen zugesteht, die auch sonst den Ergebnissen der Messungen der Kryoskopie und der Leitfähigkeit gemäß sind; 2. wenn man sich auf die Tatsache stützt, die auch sonst versuchlich festgestellt ist, daß die energetischen Eigenschaften der Lösungen nicht einfach additiv sind. Diese zweite Überlegung hat es mir ermöglicht, durch einfache Addition chemische Gleichgewichtsverschiebungen in einem a priori bestimmten Sinne hervorzurufen." Lp.

I. Masson. The precipitation of salts by the corresponding acids. Edinb. Roy. Soc. Proc. **33**, 64-68.

Bekanntlich sind Salze, wie die Chloride der Alkalimetalle, weniger löslich in Wasser, das die entsprechende Säure enthält, als in Wasser allein, und für gering lösliche Salze in schwach sauren Lösungen hat es sich gezeigt, daß die Abnahme der Löslichkeit quantitativ dem Verlaufe folgt, der aus den einfachen Kegelbegriffen vorhergesagt wird. Bei konzentrierten Lösungen starker Elektrolyten liegen die wirkenden Ursachen jedoch noch im Dunklen, und bezüglich der Tatsachen in solchen Fällen ist wirklich noch viel aufzudecken. Man kann sagen, es gibt zwei Methoden des Forschens über die fraglichen isothermalen Erscheinungen. Die erste, der die Aufmerksamkeit vieler Forscher sich zugewandt hat, besteht in dem Bestimmen der Löslichkeit eines Salzes, das die Säure in veränderten Konzentrationen enthält; sie kann die Löslichkeitsmethode genannt werden. Die zweite sucht die Mindestkonzentration wässeriger Säure festzustellen, die gebraucht werden muß, um Salzfällung zu veranlassen, sobald die Säuren in kleiner Menge zu der gesättigten wässerigen Salzlösung hinzugefügt wird. Diese werden wir als die Fällungsmethode benennen; sie wurde von Gibson und Denison angewandt (Edinb. Roy. Soc. Proc. **30**, 362, 1910). Die Ziele der gegenwärtigen Arbeit sind, 1. die Art nachzuweisen, in der die Ergebnisse der beiden Methoden quantitativ verknüpft und vergleichbar sind, 2. zu ergründen, wieweit die von den Benutzern der beiden verschiedenen Methoden erreichten Ergebnisse in Einklang stehen. Mathematische Forschungen hierüber werden gegeben. J. (Lp.)

A. Competti. Il principio di Nernst nella chimica-fisica. Nuovo Cimento (6) **5**, 302-308.

Eine leicht verständliche und elementare Darstellung nach der Abhandlung von Nernst in Gött. Nachr. 1906, 1-40 (F. d. M. **37**, 941). Lp.

A. WESTGREN. Über die kinetische Energie der Teilchen in kolloiden Lösungen. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. **9**, Nr. 5, 36 S.

Es wird der Einfluß einer Polydispersität eines Soles auf seine Teilchenverteilung bei Sedimentationsgleichgewicht theoretisch untersucht und die Unmöglichkeit einer exponentialen Beziehung der Konzentration zur Höhe bei Polydispersität bewiesen. Die durch die experimentell erhaltenen Ergebnisse bestimmte Avogadrosche Konstante stellt sich als viel zu groß heraus. Der erhaltene Wert scheint mit der Teilchengröße des zur Untersuchung verwendeten Soles zu wachsen. Die Perrinsche Methode zur Bestimmung dieser Konstante scheint daher nicht einwandfrei und der von ihm bestimmte Wert nicht zuverlässig, sondern ein wenig zu groß zu sein. Lp.

M. SMOLUCHOWSKI. Kilka przykładów ruchów Browna odbywających się pod wpływem sił zewnętrznych (Einige Beispiele Brownscher Molekularbewegungen unter Einfluß äußerer Kräfte). 16 S. Krak. Anz. (A) 1913, 418-434.

In der Theorie der Brownschen Molekularbewegung von Einstein und Smoluchowski wurde bis jetzt nur der einfachste Fall analytisch behandelt: das betrachtete Teilchen befand sich laut Voraussetzung im stationären Gleichgewicht innerhalb eines unbegrenzten neutralen Mediums derselben Dichte.

Der Verf. beschäftigt sich jetzt mit zwei speziellen Beispielen Brownscher Molekularbewegungen. Es handelt sich 1. um die Theorie der Bewegung eines Teilchens in einem mit parallelen Wänden begrenzten Gefäß, 2. um die Bewegung eines Teilchens, welches einer elastischen Zentralkraft unterliegt.

Das letzte Beispiel ist theoretisch besonders wertvoll. In sehr klarer Weise demonstriert es die prinzipielle Reversibilität eines scheinbar irreversiblen Vorgangs, wie die Bewegung eines Körpers, welcher dem Einflusse einer elastischen Kraft oder einer Reibung unterliegt. Als Beitrag zu dem bekannten Streit zwischen der kinetischen Theorie und der Thermodynamik erscheint dieses Beispiel besonders aufklärend. S. Lo.

J. ROUX. La charge élémentaire de l'électron. Recherches sur la loi de Stokes. Ann. de Chim. et Phys. (8) **39**, 69-123; Thèse. Paris: Gauthier-Villars (1912).

Zusammenfassung: „Nach einer summarischen und kritischen Darstellung der verschiedenen zur Messung der elementaren Ladung des Elektrons benutzten Methoden (oder der direkt damit zusammenhängenden Größen, wie der Avogadroschen Zahl und der Konstante der molekularen Energie) habe ich untersucht, wie man das Stokessche Gesetz in dem Falle flüssiger Kugeln und in dem Falle sehr kleiner Kugeln verbessern müsse. Ich habe experimentell gezeigt, daß in dem Falle fester Kugeln, deren Radius von der Größenordnung der freien mittleren Bahn der Flüssigkeit ist, angenommen werden muß, daß die

Stöße der Flüssigkeitsmolekeln gegen die Kugel elastisch erfolgen. In dem Falle von flüssigen Kugeln, die sich in einer andern Flüssigkeit bewegen, habe ich gezeigt, daß die an dem Stokesschen Gesetz anzubringende Berichtigung von der Ordnung $^1/_{10}$ ist. Dann habe ich das Millikansche Verfahren auf feste Kugeln angewandt. Und ich habe so als elementare Elektrizitätsladung den Wert $e = 4{,}17.10^{-20}$ U. E. S. gefunden, der ungefähr 15 vom Hundert unter dem von Millikan gegebenen liegt und in vollkommenem Einklang mit dem ist ($4{,}25.10^{-20}$), den die Forschung der Brownschen Bewegung gegeben hat. Der Wert $4{,}2.10^{-20}$, der die Avogadrosche Zahl gleich 69.10^{22} liefert, scheint somit annehmbar zu sein." Lp.

I. Nordlund. Über die Gültigkeit des Stokesschen Gesetzes für die Bewegung von Flüssigkeitströpfchen in Flüssigkeiten. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. **9**, Nr. 13, 18 S.

Aus der die Brownsche Bewegung betreffenden Arbeit geht hervor, daß das Stokessche Gesetz in den durchforschten Fällen gültig ist. Wahrscheinlich ist die Ursache in der Oberflächenspannung zu suchen. „Mit ziemlich großer Sicherheit muß daher das Stokessche Gesetz nicht nur für makroskopische, sondern auch für mikro- und submikroskopische Flüssigkeitskugeln gültig sein. ... Damit ist man auch berechtigt, das Stokessche Gesetz bei der Ableitung der Einsteinschen Formel für die mittleren Verschiebungen der Brownschen Bewegung flüssiger Kugeln anzuwenden." Lp.

E. Madelung. Kinetische Theorie des Gesetzes von Eötvös. Physik. Zs. **14**, 729-731.

Zur kinetischen Ableitung des Gesetzes $\alpha V_0^{2/3} = K(T' - T)$ (α Oberflächenspannung, V_0 Molekularvolumen, T Temperatur, T' eine bestimmte der Flüssigkeit zugehörige, K eine universelle Konstante, etwa gleich 2,12) wendet Verf. den Satz der statistischen Mechanik von der Gleichverteilung der Energie auf die Schwingungen der Oberflächenmoleküle der Flüssigkeit an. Er macht hierbei die Voraussetzung, daß erstens die Molekularkräfte nur bis in die nächste Nachbarschaft reichen, und daß zweitens die Anordnung der Moleküle auch in Flüssigkeiten innerhalb kleiner (wahrscheinlich rasch wechselnder) Bereiche durch Raumgitter darstellbar sind. A. K.

M. Born und R. Courant. Zur Theorie des Eötvösschen Gesetzes. Physik. Zs. **14**, 731-740.

Der Gedanke von Madelung (s. vorst. Ref.), die Anwendung der statistischen Mechanik auf die Schwingungen der Oberflächenmoleküle der Flüssigkeiten, wird hier mathematisch weiter ausgesponnen, indem über diese Schwingungen bestimmte Voraussetzungen gemacht werden, um ein „Spektrum" für diese Schwingungen zu schaffen und dann ähnliche Überlegungen anzuwenden,

wie sie Debye in seiner Theorie der spezifischen Wärmen fester Körper angestellt hat. Die Verf. kommen bei der Ableitung des Eötvösschen Gesetzes hierdurch zu einer wesentlich tieferen Begründung als Madelung. Auch eine Ausdehnung der Theorie auf anomale Substanzen wird versucht. A. K.

L. MANDELSTAM. Über die Rauhigkeit freier Flüssigkeitsoberflächen. Ann. der Phys. (4) **41**, 609-624.

Eine Flüssigkeitsoberfläche, die im idealen Gleichgewicht z. B. eben sein sollte, wird vermöge der unregelmäßigen Wärmebewegung fortdauernd deformiert. Läßt man an einer solchen Fläche einen Lichtstrahl reflektieren, so wird neben einer regelmäßigen Reflexion noch eine diffuse auftreten müssen. Es genügen schon sehr kleine (im Vergleich zur Lichtwellenlänge) Rauhigkeiten, um dieser Zerstreuung eine merkliche Größe zu geben. Bereits M. v. Smoluchowski hat darauf hingewiesen, daß man das Auftreten dieser Erscheinungen auf Grund der statistischen Anschauung zu erwarten hat (F. d. M. **38**, 933, 1907 u. **39**, 973, 1908). Die vorliegende Arbeit behandelt die Frage in einem ersten, theoretischen Teil und einem zweiten, experimentellen Teil.

Die theoretischen Entwicklungen stützen sich auf den Satz von der Äquipartition in der Fassung von Einstein; die hiernach berechneten zeitlichen Mittelwerte kennzeichnen die „Rauhigkeit". Nachdem dann die Reflexion an einer deformierten Fläche im Anschluß an eine Arbeit von Rayleigh behandelt ist, wird endlich die Berechnung der diffusen Reflexion durchgeführt. Die im zweiten Teile beschriebenen Versuche bestätigen das Vorhandensein einer diffusen Reflexion an der Trennungsfläche zweier Flüssigkeiten. Lp.

A. FINZEL. Über die Reflexion scherender Deformationen an der Grenzfläche zweier Flüssigkeiten. Verh. Deutsche Phys. Ges. **15**, 645-657; Diss. Erlangen. 62 S.

Die theoretische Ableitung der Gesetze der Reflexion scherender Deformationen an der Grenzfläche zweier Flüssigkeiten ergibt für den Reflexionskoeffizienten a die Formel

$$a = \frac{\sqrt{\eta_1 \varrho_1} - \sqrt{\eta_2 \varrho_2}}{\sqrt{\eta_1 \varrho_1} + \sqrt{\eta_2 \varrho_2}},$$

wo η_1 und ϱ_1 Reibungskoeffizient und Dichte des oberen Mediums, η_2 und ϱ_2 die des unteren Mediums sind. Nach dieser Formel sind die drei Fälle $a > 0$, $a < 0$, $a = 0$ zu unterscheiden. Diese Fälle sind vom Verf. theoretisch diskutiert und experimentell untersucht worden. Lp.

G. JÄGER. Die kinetische Energie des osmotischen Drucks und der Raoultschen Gesetze. Wien. Ber. **122**, 979-992; Wien. Anz. 1913, 217; Ann. der Phys. (4) **41**, 854-865.

Zur Erklärung des osmotischen Drucks wird vorerst für zwei verdünnte Gase, die sich in einem Gefäß befinden, dessen Wände für eines undurchlässig sind, der Überdruck zwischen innen und außen bestimmt. Das Gas, das die Gefäßwand durchdringen kann, wird komprimiert, und es wird gezeigt, daß sich dadurch der Überdruck nicht ändert. Dieser Fall läßt sich auf Lösungen übertragen. Die Erniedrigung der Dampfspannung von Lösungen wird auf zweierlei Weise kinetisch abgeleitet. Erstens wird gezeigt, daß aus einer Lösung wegen der vorhandenen Molekeln des Gelösten weniger Molekeln in derselben Zeit in den Dampf übertreten können als aus dem reinen Lösungsmittel; deshalb muß eine Erniedrigung des Dampfdrucks erfolgen. Dies folgt auch aus der Anschauungsweise, daß eine Molekel, die aus der Lösung austritt, mehr Arbeit leisten muß, als wenn sie aus dem reinen Lösungsmittel austritt. Bei dem Gefrierpunkt müssen in derselben Zeit von dem festen Körper zu der Flüssigkeit ebensoviele Molekeln wie von der Flüssigkeit zu dem festen Körper übergehen. Lösen wir in der Flüssigkeit einen Körper, so gehen weniger Molekeln zu dem festen Körper. Dies kann durch eine Erniedrigung der Temperatur ausgeglichen werden. Aus der mathematischen Behandlung folgt das von van 't Hoff gefundene Gesetz.

Lp.

W. Gaede. Die Molekularluftpumpe. Ann. der Phys. (4) **41**, 337-380.

Von theoretischem Interesse ist bei dieser auf einem neuen Prinzip beruhenden Luftpumpe, „daß die mechanische Beeinflussung der Molekulargeschwindigkeit nach der kinetischen Gastheorie eine Beeinflussung der Temperatur des Gases bedeutet. Die theoretisch geforderte Temperaturerhöhung konnte bei der Molekularluftpumpe experimentell mittels eines Thermoelementes nachgewiesen werden. Die Erscheinung wird als kinetischer Wärmeeffekt bezeichnet. Die Beobachtung des kinetischen Wärmeeffektes liefert zum erstenmal den Nachweis einer Temperaturänderung, hervorgerufen durch Beeinflussen der Geschwindigkeit der Moleküle mit mechanischen Mitteln und damit eine direkte, experimentelle Bestätigung für die Richtigkeit der Anschauung, daß die Wärme eines Gases in Molekülbewegungen besteht. Der kinetische Wärmeeffekt ist noch von meteorologischem Interesse, indem das Glühen der Sternschnuppen durch einen kinetischen Wärmeeffekt in den oberen, verdünnten atmosphärischen Schichten erklärt wird“.

Für das Jahrbuch kommen natürlich nur die theoretischen Begründungen der Auffassungen des Verf. in Betracht.

Lp.

H. Rudolph. Kurze Mitteilung über neue Beziehungen zwischen verschiedenen Naturkonstanten, die sich aus der hydrodynamischen Äthertheorie ergeben und mit den besten experimentell gefundenen Werten übereinstimmen. Verhdl. Naturf.-Ges. 1912 (Münster) 2_1, 75-78.

H. Rudolph. Die hydrodynamische Äthertheorie. Dokumente zur Freiheit der Wissenschaft und Begleitwort zu meinem Vortrag auf der 84. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Münster

i. W. am 17. September 1912. Koblenz: W. Groos (L. Meinardus), 46 S. gr. 8°.

Der Verf. hat seinen auf der Naturforscher-Versammlung zu Münster i. W. und in den Verhandlungen dieser Gesellschaft abgedruckten Vortrag den Schriftleitern der Annalen der Physik und der Physikalischen Zeitschrift zum Abdruck eingereicht und nach den an ihm gemachten Ausstellungen wiederholt umgearbeitet, aber wegen der in ihm enthaltenen Unklarheiten und Widersprüche zuletzt mit ablehnendem Bescheide zurückerhalten. Hierüber beschwert er sich in der Sonderschrift, die in Koblenz erschienen ist. Diese enthält: 1. Briefwechsel mit den Redaktionen der Annalen der Physik und der Physikalischen Zeitschrift. 2. Abdruck des Vortrags aus den Verhandlungen der Naturforscher-Gesellschaft. 3. Besprechung der Ergebnisse, „um die Nichtigkeit der Ablehnungsvorwände recht deutlich hervortreten zu lassen“. 4. Schlußwort. Lp.

K. Schubert. Über den Fortschritt im Messen und Wägen nach dem metrischen System. Mitt. des k. k. techn. Versuchsamtes 2, 3. Heft, 59-64.

Die Verwendung des Zolls und seiner Unterteilungen bei Schrauben, Röhren, Hölzern, des Jochs, der Pferdestärke, der Seemeile, des Fadens wäre abzuschaffen. Bei Messungen der Temperatur ist zwischen Celsius- und Réaumurgraden, was die Zweckmäßigkeit betrifft, wenig Unterschied. Die Einführung einer dekadischen Zeit- und Winkelteilung wird wegen der großen Schwierigkeiten, die sie mit sich brächte, als unzweckmäßig bezeichnet. Schr.

G. Wenzel. E. Mach-Habarts Grundriß der Naturlehre, für Mädchenlyzeen bearbeitet von Gallus Wenzel. I. Teil: Vorbereitender Lehrgang. II. Teil: Lehrstoff für die V. Klasse. III. Teil: Lehrstoff für die VI. Klasse. Wien: F. Tempsky. 112 S. mit 157 Abbildungen, 119 S. mit 142 Abb., 132 S. mit 159 Abb.

I. Einleitung. Von der Schwere. Grunderscheinungen der Wärme. Grunderscheinungen der Elektrizität. Grunderscheinungen der Mechanik. Von der Bewegung der Körper. Von den Flüssigkeiten. Von den Gasen. Vom Schalle. Vom Lichte.

II. Einleitung. Die Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung der Körper: A. Mechanik fester Körper. B. Die wichtigsten Erscheinungen am Himmel. C. Mechanik flüssiger Körper. D. Mechanik gasförmiger Körper. Die Lehre von der Wärme.

III. Vom Magnetismus. Strömende Elektrizität (Galvanismus). Der Schall. Die Lehre vom Licht. Lp.

C. G. Knott. Physics: an elementary text-book for university classes. London: W. and R. Chambers. VI u. 370 S.

Die erste Auflage dieses Buches erschien 1897. In der vorliegenden ist ein neues Kapitel über die Elektronentheorie und die Relativität hinzugefügt;

außerdem ist das Buch erweitert und durchgeprüft. (Vgl. Nature **92**, 399.)
J. (Lp.)

Weitere Literatur.

H. Bouasse. Cours de physique. Tome I: Cours de mécanique physique. 2e édition, complètement transformée et considérablement augmentée. Paris: Delagrave. 684 S. 8° (1912).

O. D. Chwolson. Traité de physique. Ouvrage traduit sur les éditions russe et allemande par E. Davaux. Avec notes par E. et F. Cosserat. 5 Tomes. Tome I: Introduction, mécanique, méthodes et instruments de mesure. 2e édition, refondue. Tome IV: Fasc. II: Champ magnétique constant. Paris: A. Hermann. 530 S., 730 S. 8°.

O. D. Chwolson. Lehrbuch der Physik. IV. Bd.: Die Lehre von der Elektrizität. 2. Hälfte. 1. Abtlg. Übers. v. H. Pflaum u. A. B. Foehringer. Braunschweig: F. Vieweg u. Sohn. 446 S. gr. 8°.

E. A. Gardiner. First year course in general science: A combined text-book and note book. London: W. Heinemann. VI u. 113 S. [Nature **91**, 502.]

H. M. Goodwin. Elements of the precision of measurements and graphical methods. London: Hill Publishing Co.; New York: McGraw-Hill Book Co. 104 S. [Nature **91**, 579.]

E. Grimsehl. Lehrbuch der Physik f. Realschulen. 2. verb. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner. VII + 290 S. gr. 8°.

P. de Heen. Introduction à l'étude de la physique. La théorie des électrons et la théorie substantialiste. Bruxelles: Hayez. 287 S.

R. A. Houstoun. An introduction to mathematical physics. New York: Longmans. X + 199 S 8°.

J. Lemoine et G. Vincent. Cours élémentaire de physique: Dynamique, thermodynamique, phénomènes périodiques. 10e édition, complètement refondue. Paris: Belin VIII + 485 S 18mo.

H. Ollivier. Cours de physique générale. 3 volumes. Tomes I et II. Paris: A. Hermann. 300 S. 8°. 716 S., 300 S. 8°.

J. H. Poynting and Sir J. J. Thomson. A textbook of physics. I: Properties of matter. 6th edition carefully revised. London: Griffin. 236 S. 8°.

A. Campetti e C. Del Grosso. Sull' equilibrio di coppie di liquidi parzialmente miscibili. Nuovo Cimento (6) **6**, 369-417.

Abdruck aus Torino Mem. (2) **61**, 187-197 (F. d. M. **42**, 859, 1911) und Torino Mem. (2) **64** (1914).
Lp.

W. K. Carr. Matter and some of its dimensions. New York: Harper. 120 S. 16mo.

R. D. Carmichael. On the Brownian movement and the ultimate constitution of matter. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 449.

A. Cotton. Les molécules: leur symétrie et leur structure. Rev. du mois **15**, 5-25.

Delauney. La loi atomique des 24 cubes. Paris: Dunod et Pinat. 8⁰.

C. Drucker. Molekularkinetik und Molarassoziation als physikochemische Grundvorstellungen. Antrittsvorlesung. Leipzig: Akad. Verlagsges. 33 S. 8⁰.

A. Findlay. Osmotic pressure. London: Longmans, Green and Co. VI u. 64 S. 8⁰. [Nature **92**, 262.]

A. H. Gibson. Natural sources of energy. Cambridge: University Press. 140 S. 16mo. (Cambridge Manuals).

G. L. de Haas-Lorentz. Die Brownsche Bewegung und einige verwandte Erscheinungen. Ins Deutsche übersetzt. 52. Bd. v. Die Wissenschaft. Braunschweig: F. Vieweg u. Sohn. VI + 103 S. 8⁰.

G. Jäger. Die Loschmidtsche Zahl. Vortrag. 12. Heft a. Vorträge d. Vereins z. Verbrtg. naturwissenschaftl. Kenntnisse in Wien. 53. Jahrg. Wien: W. Braumüller. 24 S. 8⁰.

J. A. van der Kloes. Physik und Chemie im Mauerfach. Der Betonbau **1**, 129-132.

Auszug aus einem Vortrag, gehalten auf dem XIV. Niederländischen physischen und chemischen Kongreß, 29. März 1913. Schwinden des Materials. Wasserdichtheit. Mauerfraß. Wirkungen der Osmose. Schr.

A. Konrad. Die Natur des Weltäthers und die Ursache der Gravitation. Graz: Styria. 51 S. kl. 8⁰.

O. Lehmann. Die Beweise für die Existenz von Molekülen und die Sichtbarmachung der Molekularstruktur von Kristallen durch Röntgenstrahlen. Karlsruhe: G. Braunsche Hofbuchdruckerei. 58 S. gr. 8⁰.

Ch. Metzger. Die Chemie als mathematisches Problem. Metz: G. Scriba. IV + 108 S. gr. 8⁰.

R. A. Millikan. Unitarian theories in physics. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 278-279.

J. Perrin. Les atomes. Paris: Alcan. XVI + 296 S. 16mo.

M. Radaković. Über die Bedingungen für die Möglichkeit physikalischer Vorgänge. Volkstümliche Vorträge. Leipzig: J. A. Barth. V + 56 S. 8⁰.

F. Rinne. Allgemeine Kristallographie und Mineralogie. Leipzig: B. G. Teubner. (Kultur der Gegenwart.)

R. Schuster. Die moderne theoretische Physik und der Äther. Eine Verteidigung des materiellen Äthers. Karlsruhe: Braun. 44 S.

M. Smoluchowski. Anzahl und Größe der Moleküle und Atome. Scientia **13**, 27-44.

F. Soddy. The periodic law from the standpoint of radiometry. Scientia **13**, 317-338.

Tables annuelles de constantes et données numériques de chimie, de physique et de technologie. Vol. II, 1911. Leipzig: Akadem. Verlagsges. XL + 759 S. Lex.-8⁰.

K. TAMAKI. On symmetrical expressions of relations between the physical quantities in a stationary and a moving system. Kyôto Univ. Mem. **5**, 235-252.

O. WERNER. Der Streit um die Schwerkraft im Erdinnern. Gotha: F. A. Perthes. III + 29 S. 8°.

B. Kapillarität.

J. BOUSSINESQ. Sur l'existence d'une viscosité superficielle, dans la mince couche de transition séparant un liquide d'un autre fluide contigu. C. R. **156**, 983-989; Ann. de Chim. et Phys. (8) **39**, 349-357.

„Die Physiker haben bis jetzt ihre präzisen Beobachtungen der Kapillarität oder der Oberflächenspannungen nur auf Gleichgewichtserscheinungen erstreckt, und deshalb sind sie ohne Zweifel nicht auf den Gedanken gekommen, Zähigkeitskräfte hierbei einzuführen. Diese Kräfte sind bei der Forschung über die Oberflächenschicht einer Flüssigkeit ebenso natürlich wie in der Hydrodynamik der als Masse betrachteten Flüssigkeit."

„Längs jeder Normale zur Schicht gibt es zwei gewisse rechtwinklige (prinzipale) Schnitte, zu deren Seiten die Ausdehnung oder die Zusammenziehung der Blättchen in der Nachbarschaft symmetrisch erfolgen; sie unterliegen also zweien Oberflächenspannungen (auf die Längeneinheit) $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$, die streng normal (oder auch prinzipal) sind, und zwar lineare Funktionen der beiden einzigen verschiedenen Deformationsgeschwindigkeiten, die dann bestehen. In Anbetracht des Verschwindens der zugehörigen Gleitbewegung sind dies die bezüglichen Dilatationsgeschwindigkeiten $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$, die ebenfalls prinzipale heißen, für die nach $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ orientierten materiellen Linien der Schicht; sie bleiben in dem Augenblick senkrecht zueinander. Die Gleichförmigkeit der Konfiguration rings um die Normale bei dem typischen oder elastischen Zustande der Schicht, von dem aus die Abweichungen der Kontextur zählen, welche die Zähigkeitskräfte erzeugen, zieht die bezügliche Gleichheit der analogen Zähigkeitskoeffizienten in $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ nach sich. Nennen wir daher e_1 den Koeffizienten von $\mathfrak{d}'$ in $\mathfrak{F}$ und $2e + e_1$ den von $\mathfrak{d}$, so daß für $\mathfrak{F}$ die Formel $f + e_1(\mathfrak{d} + \mathfrak{d}') + 2e\mathfrak{d}$ gilt, so werden die beiden Hauptflächenspannungen in dem dynamischen Zustande der Übergangsschicht durch die Doppelformel ausgedrückt:

$$(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}') = f + e_1(\mathfrak{d} + \mathfrak{d}') + 2e(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}').$$

Es gibt also zwei Koeffizienten e, e_1 der Oberflächenzähigkeit." Lp.

J. BOUSSINESQ. Application des formules de viscosité superficielle à la surface d'une goutte liquide sphérique, tombant lentement, d'un mouvement devenu uniforme, au sein d'une masse fluide indéfinie en repos, d'un poids spécifique moindre. C. R. **156**, 1035-1040; Ann. de Chim. et Phys. (8) **39**, 357-364.

Die theoretischen Untersuchungen des Verf. sind durch die Dissertation von J. Roux veranlaßt worden (vgl. S. 920 dieses Bandes), der Quecksilbertropfen in Rizinusöl fallen ließ. In der vorliegenden Note werden die theoretischen Überlegungen, über welche vorstehend berichtet ist, auf diesen Fall angewandt. Hier ergibt sich $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}'$,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}' = f + 2(e + e_1)\mathfrak{d} = f + \frac{e}{R}\frac{dG}{d\lambda},$$

wo G die tangentiale Geschwindigkeit am Meridian, R der Kugelradius, λ das Komplement der Breite ist. Auch die Ausdrücke für die in Betracht kommenden Kräfte werden gegeben. Lp.

J. Boussinesq. Vitesse de la chute lente, devenue uniforme, d'une goutte liquide sphérique, dans un fluide visqueux de poids spécifique moindre. C. R. **156**, 1124-1129; Ann. de Phys. et Chim. (8) **29**, 364-371.

Der Verf. wendet bei der mathematischen Behandlung der Aufgabe eine Verallgemeinerung der Methode an, die er 1885 bei der Lösung der Frage über die langsame, ungleichförmige Bewegung einer festen Kugel in einer zähen Flüssigkeit benutzt hatte (F. d. M. **17**, 920, 1885). Er gelangt dabei zu dem Ergebnis: Die konzentrischen sphärischen Schichten an der sichtbaren Oberfläche der Kugel bewahren während der Zeitdauer dt ihre Gesamtform und ihren Radius, aber sie senken sich (s'abaissent) auf ungleiche Weise, und deshalb verteilt sich ihre Materie ebenfalls ungleich von unten nach oben. Bei der Erforschung des von der Flüssigkeit ausgeübten Gesamtdruckes erhielt der Verf. für das Verhältnis des Archimedischen hydrostatischen Auftriebes zu dem dynamischen Stokesschen Widerstande einer festen Kugel den Wert

$$\frac{c + (3\varepsilon_1 + 2\varepsilon)R}{c + (3\varepsilon_1 + 3\varepsilon)R};$$

in diesem Verhältnis wird der Widerstand R durch die Elastizität der Oberflächenschicht und der inneren Flüssigkeit verringert. Es bedeutet hierin: c eine Integrationskonstante, ε die Zähigkeit der äußeren Flüssigkeit, ε_1 die der inneren, R den Tropfenradius. Lp.

J. Boussinesq. Équations de l'équilibre dynamique de la couche superficielle séparant un liquide d'un autre fluide. C. R. **157**, 7-13.

Der Verf. untersucht die Differenzen zwischen dem äußeren und dem inneren Druck für eine beliebige Gestalt der Schicht, jedoch unter der Voraussetzung, daß die beiden Hauptspannungen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ überall längs ihrer beiden Familien der Krümmungslinien gerichtet sind. Dies schließt den allgemeinen Fall einer Drehfläche ein, bei welchem die Symmetrie der Erscheinung für $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$ sowie $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ die Richtungen der Meridiane und der Parallelkreise anweist. Der behandelte Fall umfaßt auch den der Isotropie, bei welchem überall $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}'$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ ist, obschon sie von Punkt zu Punkt sich ändern, endlich auch den Fall, bei welchem man die Zähkräfte vernachlässigt, welches auch die Deformationsgeschwindigkeiten sein mögen; in diesem Falle kommen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ auf ihren elastischen Teil f zurück, die den Physikern geläufige Spannung. Unter diese Fälle gehört auch die Frage der von Savart experimentell untersuchten, sich zusammenziehenden Flüssigkeitsflächen. Lp.

58*

J. Boussinesq. Sur la théorie des nappes liquides rétractiles de Savart. C. R. **157**, 89-94.

„Die in der Nummer VI der letzten Note bewiesenen Formeln der Oberflächenzähigkeit für die freien oder die Übergangsflächen, die Drehflächen um eine Achse sind, finden eine anmutende Anwendung in den zusammenziehbaren Flüsssigkeitsflächen von Savart, die bei der Ausbreitung des vertikalen Strahles auf einer kleinen, horizontalen Kreisplatte entstehen, der unter einer ziemlich schwachen Triebhöhe aus einer horizontalen Kreisöffnung herkommt. Die auf den Formeln der vorangehenden Noten beruhende Rechnung führt zu einer Differentialgleichung, deren Integration in dem allgemeinen Falle sich nicht ermöglichen läßt. Daher wird in der letzten Nummer die Zähigkeit der Flüssigkeit aufgegeben; für eine vollkommene Flüssigkeit entsteht dann die Form der Differentialgleichung, die der Verf. schon 1869 zur Bestimmung der Oberfläche der Flüssigkeit bei dieser Aufgabe gefunden und benutzt hat (C. R. **69**).

Lp.

J. Boussinesq. Démonstration nouvelle de la formule des énergies potentielles de superficie dans les liquides parfaits. C. R. **157**, 171-176.

Hier beschränkt sich der Verf. auf die vollkommenen Flüssigkeiten, bei denen die beiden Hauptspannungen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ in jedem Punkte einer freien oder an eine andere Flüssigkeit anstoßenden Oberflächenschicht auf die konstante elastische Spannung f zurückkommen. Er behandelt nach einem neuen analytischen Verfahren auf einfache Weise die von dieser Spannung oder auf Grund dieser Spannung erzeugte Arbeit bei jeder Verrückung der betrachteten Oberflächenschicht vom Inhalte σ, sowohl wenn sie in sich selbst geschlossen ist, als auch wenn sie einen Rand oder Umring l hat, der sich auf eine feste Wand stützt, von der sie eine mehr oder weniger große Fläche σ_1 überfegt, wo die Flüssigkeit sich ausbreitet.

Lp.

J. Boussinesq. Détermination complète, par ses équations aux dérivées partielles, du problème du lent mouvement régularisé d'une masse liquide pesante, au sein d'une autre masse liquide, indéfinie et en repos, également incompressible. C. R. **157**, 313-318.

In einer früheren Note (C. R. **156**, 1124-1129; Referat S. 915) ist die Aufgabe des gleichförmigen Falles eines kugelförmigen, zähflüssigen Tropfens in einer unbegrenzten, ebenfalls zähen ruhenden Flüssigkeit von geringerem spezifischen Gewicht gelöst; dabei wurde der dünnen Übergangsschicht, welche beide Flüssigkeiten trennt, nicht nur ihre wohlbekannte konstante elastische Spannung f zugeschrieben, sondern auch eine Zähigkeitskraf- proportional der Ausdehnungsgeschwindigkeit der Schicht. Zu diesem Zwecktt wurde gezeigt, wie die aus diesen Hypothesen folgenden Gleichungen bestätige werden, sowohl wenn sie unbestimmt werden, als auch an den Grenzen. Aber beiseite gelassen wurde die Frage, ob dieser Inbegriff von Gleichungen die Lösung derart bestimmt, daß dies die einzige ist, welche Frage gerade durch die Anwesenheit variabler Oberflächenspannungen heikel wird. Indem der Verf. auf diese Frage zurückkommt, stellt er jetzt für jede mögliche, als gegeben ange-

nommene Form des Tropfens die Gleichungen auf und weist nach, daß sie eine einzige Lösung haben. Lp.

A. Ferguson. On the theoretical shape of large bubbles and drops, with other allied problems. Phil. Mag. (6) **25**, 507-520.

1. Es werden Methoden beschrieben, mittels deren Annäherungen an die Umrisse großer Blasen und Tropfen unschwer zu bewirken sind. Diese Annäherungen unterscheiden sich ein wenig in ihren Verbesserungsgliedern von den durch andere Methoden erhaltenen. 2. Es wird eine mechanische oder graphische Integrationsmethode angegeben, die auf Tropfen und Blasen von allen Größen anwendbar ist. 3. Der häufigere Gebrauch der Photographie bei solchen Messungen wird befürwortet. 4. Einige experimentelle Erläuterungen der photographischen Methode und des Gebrauches der erhaltenen Formeln werden besprochen. Lp.

A. Ferguson. On the forces acting on a solid sphere in contact with a liquid surface. Phil. Mag. (6) **26**, 925-934.

Nach einem Rückblick auf die Arbeiten früherer Forscher entwickelt der Verf. eine neue Formel für die fraglichen Kräfte und teilt die Ergebnisse von Versuchen an verschiedenen Flüssigkeiten mit. „Als ein praktisches Mittel zur Bestimmung von Oberflächenspannungen teilt die Methode mit manchen andern der wohlbekannten Methoden den Nachteil, daß sie eine Kenntnis der Kontaktwinkel verlangt. Abgesehen von dieser Beurteilung ist sie aber recht sachgemäß und empfindlich.“ Lp.

G. Jäger. Kapillarität, Verdampfung und Molekelgröße. Wien. Ber. **122**, 969-978; Wien. Anz. 1913, 107.

Es wird gezeigt, daß die Kraft, welche zwei Flüssigkeitsmolekeln aufeinander ausüben, rascher als mit der inversen zweiten Potenz der Entfernung abnehmen muß. Daraus folgt erst die Berechtigung verschiedener Überlegungen, die ohne diese Begründung von andern Physikern gemacht worden sind, wie z. B. die Berechnung der Größe der Molekeln nach W. Thomsons Methode und ähnliches. Lp.

G. Reboul. Phénomènes capillaires dans les gaz: extension de la formule de Laplace au contact solide-gaz. C. R. **156**, 688-691.

G. Reboul. Phénomènes capillaires au contact des solides et des gaz. Journ. de Phys. (5) **3**, 450-457.

In jedem Punkte der Trennungsfläche eines festen Körpers und eines Gases findet eine Verdichtung der Gasatmosphäre statt, die der Krümmung des betrachteten Punktes proportional ist; anders ausgedrückt: in jedem Punkte der Trennungsfläche von Körper und Gas besteht ein Drucküberschuß, der pro-

portional der mittleren Krümmung ist, damit findet man die Laplacesche Formel wieder.
Lp.

D. L. Chapman. A contribution to the theory of electrocapillarity. Phil. Mag. (6) **25**, 475-481.

Unter der Annahme, daß die Ladung auf dem in einen Elektrolyten eintauchenden Metalle sich ganz an seiner Oberfläche befindet, daß mithin keine Potentialdifferenz zwischen der Metalloberfläche und dem Inneren besteht, wird die Potentialverteilung und die elektrische Dichte innerhalb der Lösung und daraus die Kapazität des Kondensators berechnet, den die Doppelschicht bildet. „Was wir zu erfahren wünschen, damit wir die Theorie der Elektrokapillarität durch eine direkte Vergleichung der Versuchswerte der Oberflächenspannung mit den aus der Theorie berechneten zu prüfen vermögen, ist die Größe der Ladung auf dem Doppelschichtkondensator für eine gegebene Potentialdifferenz zwischen der Lösung und dem Metall.“ Die Berechnung der Oberflächenenergie von Quecksilber in Berührung mit einem Elektrolyten wird in dem zweiten Teile der Abhandlung durchgeführt.
Lp.

R. D. Kleeman. On the properties of a liquid connected with its surface tension. Cambr. Phil. Soc. Proc. **17**, 149-159.

R. D. Kleeman. The atomic constants and the properties of substances. Cambr. Phil. Soc. Proc. **17**, 175-179.

Beide Aufsätze hängen eng zusammen. Der erste betrifft die Berechnung der absoluten Menge von Wasserstoff in Beziehungen, welche die Oberflächenspannung mit andern Eigenschaften verbinden, den Einfluß der Krümmung der Flüssigkeitsoberfläche in Verbindung mit dem Radius der Wirkungssphäre einer Molekel, Eigenschaften ebener Flüssigkeitshäutchen und die Polymerisation von Molekeln in einer Substanz.
J. (Lp.)

G. F. C. Searle. Some methods of measuring the surface tension of soap films. Cambr. Phil. Soc. Proc. **17**, 285-299.

Enthält auch eine Skizze der mathematischen Theorie. J. (Lp.)

A. Pizzarello. Contatti fisici fra solidi e liquidi. Liquidi spugna. Suppl. al Period. **16**, 33-35.

C. Elastizität.

R. v. Mises. Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. Gött. Nachr. 1913, 582-592.

Folgende Erfahrungsgrundlagen werden als Voraussetzungen benutzt:

a) Alle festen Körper verhalten sich bei hinreichend kleinen Spannungen wie elastische: es besteht eine eineindeutige Zuordnung zwischen Spannung und Deformation. b) Ist die Elastizitätsgrenze erreicht, so verhält sich der feste Körper wesentlich wie eine zähe, nahezu inkompressible Flüssigkeit. c) Verändert man unter Aufrechterhaltung aller Verhältnisse den absoluten Wert der Geschwindigkeiten, mit denen eine Bewegung vor sich geht, so ändert sich, bei plastisch deformablen Körpern, die Arbeit nicht, die zur Erzielung einer bestimmten Formänderung verbraucht wird. c') Bei plastischen Deformationen bleibt die Spannung stets an der Elastizitätsgrenze. d) In einem Koordinatensystem, das die Haupttangentialspannungen zu Koordinaten hat, erscheint die Elastizitätsgrenze als eine geschlossene, den Nullpunkt einschließende Kurve in der Ebene $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$.

Auf Grund dieser Voraussetzungen gibt der Verf. einen vollständigen Ansatz von Bewegungsgleichungen für plastisch-deformable Körper im Rahmen der Cauchyschen Dynamik. Die Ansätze (I) bis (III) stimmen völlig überein mit den Ansätzen für zähe Flüssigkeiten. Doch hat die Größe k in der letzteren Theorie die Bedeutung der gegebenen Zähigkeitszahl; hier ist sie eine Reaktionsgröße, die sich erst aus der Kenntnis der Bewegung errechnen läßt. Hierzu dient die Aussage, daß die Spannung während der plastischen Deformation an der Elastizitätsgrenze bleibt. Diese Bedingung liefert die Gleichung (IV) für k. Die so aufgestellten Gleichungen (I) bis (IV) sind das vollständige System von Bewegungsgleichungen für plastisch-deformable Körper. Als Randbedingung tritt hinzu die Angabe der Geschwindigkeitskomponenten u, v, w für jeden Oberflächenpunkt. Lp.

B. Kirsch. Über die Grenze der vollkommenen Elastizität und das Hookesche Gesetz. Zs. d. österr. Ing.- u. Arch.-Vereins **65**, 81-83.

Die internationale Regelung, daß die Elastizitätsgrenze bei 0,001% bleibender Dehnung anzunehmen ist (Brüssel 1906), bedarf einer Änderung. Schr.

Alf. Basch. Einige Erwägungen bei der Bestimmung des Elastizitätsmoduls. Technische Blätter **45**, 66-74.

Berücksichtigung aller gemessenen Längenänderungen: Ist λ_i die der Belastung iP entsprechende Verlängerung, so liefert die Methode der kleinsten Quadrate für den Elastizitätsmodul den Wert $\sum_{i=1}^{i=n} i\lambda_i : \sum_{i=1}^{i=n} i^2$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} i\lambda_i : \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Bei Stoffen, die deutliche Abweichungen vom Proportionalitätsgesetz zeigen und keine ausgesprochene Streckgrenze aufweisen, bekommt man zwei verschiedene Elastizitätsmoduln, je nachdem man das wahrscheinlichste Gesetz für den Übergang von der Belastung zur Verlängerung oder umgekehrt sucht. Schr.

J. Le Roux. Recherches sur la géométrie des déformations finies. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **30**, 193-245.

„Diese Abhandlung hat den Zweck, auf die endlichen Deformationen die geometrische Theorie der Torsion und der Biegung der kontinuierlichen Medien auszudehnen, mit der ich mich in einer früheren Arbeit für den Fall der infinitesimalen Deformationen befaßt habe (F. d. M. **42**, 869, 1911). Die schließlichen Ergebnisse sind genau von derselben Form, und die Rechnungen zeigen an manchen Punkten nur unbedeutende Unterschiede. Nachdem ich die auf die Biegung der Fasern und der Platten bezüglichen Formeln aufgestellt hatte, hielt ich es daher für unnütz, die Ermittlung der daraus abzuleitenden geometrischen Eigenschaften wieder aufzunehmen. Ich verweise in betreff dieser Frage auf meine erste Abhandlung. Obgleich ich vornehmlich die weiteren Anwendungen auf die Mechanik im Auge gehabt habe, ist es selbstverständlich, daß diese Theorie einen ausschließlich geometrischen Charakter trägt. Unter gewissen Gesichtspunkten kann man sie als einen Zweig der Geometrie betrachten, die eine große Verwandtschaft mit der Theorie der Krümmung der Kurven und der Oberflächen besitzt.

I. Die Dilatation. II. Differentialelemente zweiter Ordnung. III. Die fundamentalen Kovarianten von der zweiten Ordnung. IV. Biegung der Fasern und der Platten.

Lp.

U. Crudeli. Le ipotesi sugli sforzi interni nei mezzi, ponderabili, isotropi. Rom. Acc. L. Rend. (5) **22**$_2$, 206-209, 287-291.

Mit den üblichen Bezeichnungen, wo $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ gesetzt wird, gelten die Gleichungen:

$$(1) \qquad X_x = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad X_y = Y_x = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

nebst den durch die Zeichenvertauschungen entstehenden, wenn die Existenz von spezifischen Massenmomenten nicht angenommen wird. Sonst treten nach Somigliana an ihre Stelle die folgenden Relationen (F. d. M. **41**, 883, 1910):

$$(2) \quad \begin{cases} X_x = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \; X_y = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \nu\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \\ \qquad Y_x = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \nu\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Abstrakt betrachtet, könnten auch Systeme existieren, die den folgenden Gleichungen unterworfen sind:

$$(3) \quad \begin{cases} X_x = h_{11}^{(11)} \frac{\partial u}{\partial x} + h_{11}^{(12)} \frac{\partial u}{\partial y} + h_{11}^{(13)} \frac{\partial u}{\partial z} + h_{11}^{(21)} \frac{\partial v}{\partial x} + h_{11}^{(22)} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \quad + h_{11}^{(23)} \frac{\partial v}{\partial z} + h_{11}^{(31)} \frac{\partial w}{\partial x} + h_{11}^{(32)} \frac{\partial w}{\partial y} + h_{11}^{(33)} \frac{\partial w}{\partial z}, \dots \end{cases}$$

Der Verf. beweist, daß die Gleichungen (1) und (2) (und zwar (1) im Falle der Abwesenheit von spezifischen Massenelementen) die einzigen Relationen mit isotropen, nur dem Körper und seiner Temperatur eigenen Koeffizienten sind, die als lineare Verbindungen zwischen den Komponenten der inneren spezifischen Kräfte und den in (3) vorkommenden partiellen Ableitungen zulässig sind. Lp.

S. Zaremba. Sur une classe de problèmes mixtes relatifs à l'équation des ondes sphériques. Krak. Anz. (A) 1913, 386-417.

„Die Methode, deren man sich gewöhnlich bedient, um die gemischten Probleme (nach dem Ausdrucke H a d a m a r d s) zu lösen, und die für die Gleichungen mit mehr als zwei unabhängigen Variabeln, abgesehen von einzelnen Ausnahmefällen, die einzige ist, die man kennt, stellt eine sehr wichtige Eigenschaft der Integrale der hyperbolischen Gleichungen nicht in die richtige Beleuchtung, nämlich die folgende Eigenschaft: Der Wert des verlangten Integrals u eines bestimmten Punktes P im Innern des Bereiches (B), in welchem dieses Integral betrachtet wird, hängt nicht von der Gesamtheit der auf die Grenze bezüglichen Daten ab, sondern nur von dem Teile dieser Gesamtheit, der sich auf ein Stück dieser Grenze bezieht, ein mit der Lage des Punktes P in dem Bereiche (B) variables Stück. Verschiedene Umstände und besonders die schon für die Gleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln gewonnenen Ergebnisse eröffnen die Aussicht, daß man jene Eigenschaft der Integrale der hyperbolischen Gleichungen zum Vorschein bringen könnte, wenn man in die Theorie der gemischten Probleme eine Funktion einführte, welche die ‚resolvierende Funktion' heißen möge und welche bei diesen Problemen eine ähnliche Rolle spielt wie die G r e e n sche Funktion bei dem D i r i c h l e t schen Problem und bei den verschiedenen Verallgemeinerungen dieses Problems.

Der Zweck der gegenwärtigen Arbeit ist dieser: eine resolvierende Funktion für eine Klasse gemischter Probleme bekannt zu geben, die sich auf die Gleichung beziehen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

wo a eine reelle Konstante bezeichnet.

Nach dem Vorgange verschiedener Autoren soll diese Gleichung die ‚Gleichung der Kugelwellen' heißen. Augenscheinlich genügt es, eine Vertauschung einer Variable zu vollziehen, die der Vertauschung von t mit at gleichbedeutend ist, um die allgemeine Gleichung der Kugelwellen in die folgende besondere Form überzuführen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

In dieser besonderen Form soll im folgenden die Gleichung der Kugelwellen betrachtet werden. Es möge hinzugefügt werden, daß die darzulegende Methode auf jede Gleichung von der Form

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

anwendbar ist, wie groß auch m ist. Dieselbe Methode ließe sich im Prinzipe sogar auf manche linearen Gleichungen mit variablen Koeffizienten vom hyperbolischen oder parabolischen Typus anwenden.“ Lp.

L. Crussard. Sur la propagation et l'altération des ondes de choc. C. R. 156, 611-613.

„Eine ebene Stoßwelle kann ganz wie eine stetige Welle durch die Entfernung $x = f(w)$ definiert werden, die jede Stirnseite F von der anfänglichen Stirnseite F_0 trennt, jedoch mit dem Unterschiede, daß bei einer gewissen Stirnseite (die F_0 oder davon verschieden sein kann) eine unvermittelte Änderung von w (Stirnseite des Stoßes) stattfinden kann. Die Untersuchung der Art, wie sich beim Fortpflanzen eine so geartete Welle umgestaltet, ist sehr verwickelt; denn 1. die Stirnseite des Stoßes schreitet nicht wie die andern fort; 2. sie verursacht in jedem Augenblicke rückgängige Wellen. Dagegen gehorchen die Wellen, welche mäßige Kompressionen vermitteln, praktisch ganz einfachen Gesetzen, und das Problem kann nach einem in weitem Umfange ausreichenden Näherungsverfahren völlig gelöst werden.“ Von den Hugoniotschen Formeln ausgehend, gibt der Verf. den Gang eines solchen Verfahrens an und kommt dabei zu einigen einfachen Beziehungen. Lp.

H. Lamb. On wave-trains due to a single impulse. Proc. 5. Intern. Math. Congr. 2, 279-285.

Der Verf. lenkt die Aufmerksamkeit auf einige zeichnerische Methoden, durch welche man sich des allgemeinen Charakters des Wellenzuges, der durch einen einzelnen Impuls in einem dispersiven Medium erzeugt wird, vergewissern kann. Der Einfachheit halber werden nur Fälle der eindimensionalen Fortpflanzung betrachtet.

Auf die Frage, ob die dargelegten Methoden irgendwelches Licht auf die Theorie der Erdbebenwellen oder die Deutung der seismometrischen Aufzeichnungen zu werfen vermögen, wird gesagt, sie liefern tatsächlich ein Mittel, in gewissem Umfange besondere Theorien zu prüfen, welche die beobachteten Wirkungen der Dispersion zuschreiben. Lp.

Vito Volterra. Sui fenomeni ereditarii. Rom. Acc. Lincei Rend. (5) 22_1, 529-539.

Wir berichten über diese wichtige Arbeit mit den Ausdrücken des Verf. — „In der zweiten Note dieser Rendiconti, die den Vererbungserscheinungen gewidmet ist (F. d. M. 40, 870, 1909), habe ich das Prinzip des geschlossenen Zyklus in dem Falle der linearen Vererbung aufgestellt. Dies ist jedoch nur ein besonderer Fall der allgemeinen Vererbung. Deshalb entsteht von selbst der Gedanke, das Prinzip außerhalb des Feldes der linearen Vererbung zu verfolgen. Ich erlaube mir hier, das nämliche Prinzip in seiner allgemeineren Form auseinanderzusetzen. Diese Untersuchung führt zum Studium der invarianten Eigenschaften der Funktionen von Linien für spezielle Verschiebungen der Linien selbst. Von dem Gesichtspunkte der Theorie dieser Funktionen aus

bildet sie also einen ersten Schritt in dem allgemeinen Studium ihrer invarianten Eivenschaften. Wenn in dieser Note auch nur der Teil einer derartigen Forschung vertieft wird, der die spezielle Frage des geschlossenen Zyklus betrifft, so ergibt sich doch, daß die hier benutzten Kriterien einer beträchtlichen Ausdehnung fähig sind.

Der grundlegende Begriff der Vererbungserscheinungen beruht darin, daß man den gegenwärtigen Zustand eines Systems als abhängig von seiner ganzen Vorgeschichte ansieht. Beschränkt man sich auf den einfachen Fall, bei dem der gegenwärtige Zustand (zur Zeit $t = x$) eines Parameters z von der ganzen Geschichte eines Parameters y in der vor x liegenden Zeitperiode abhängt, d. h. von allen Werten, die y in der vor x liegenden Zeitperiode angenommen hat, so folgt, wenn man $y = f(t)$ ansetzt, daß z von allen Werten von $f(t)$ für $-\infty < t \leqq x$ abhängt. Wir können daher schreiben:

$$z = F \mid [f(t)]_{-\infty}^{x} \mid.\text{``}$$

Nach einer längeren Auseinandersetzung über die graphische Darstellung heißt es dann: „Betrachten wir y und z als Abszisse und Ordinate eines Punktes der Ebene; wenn wir x sich ändern lassen, so durchläuft der Punkt in dem vorliegenden Falle einen geschlossenen Zyklus mit periodischer Bewegung von der Periode T. Wir können daher diesen Fall durch die Aussage kennzeichnen, daß bei ihm sich die Bedingungen des geschlossenen Zyklus mit der Periode T bestätigen. Wir wollen nun das Theorem beweisen: Wenn die Bedingungen des geschlossenen Zyklus für alle Perioden bestätigt werden, so gilt die Invariabilität der Vererbung, und umgekehrt: wenn die Unveränderlichkeit der Vererbungen gilt, so werden die Bedingungen des geschlossenen Zyklus für alle Perioden bestätigt. Wir können daher schließen: Zufolge des Postulates der Dissipation der Vererbungsaktion sind die Bedingung des geschlossenen Zyklus für jedwede Periode und die Invariabilität der Vererbung äquivalente Bedingungen. Diesem grundlegenden Theorem in der Forschung über Vererbungserscheinungen jedweder Art geben wir den Namen des Prinzipes des geschlossenen Zyklus."

Aus diesem Prinzipe werden mannigfaltige Folgerungen gezogen, die in verschiedenen Theoremen und Korollarien ausgesprochen werden. Lp.

L. Silla. Sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi. Nota I. Rom. Acc. I. Rend. (5) 22_1, 12-18.

Es sei ein isotropes elastisches von einer geschlossenen Oberfläche σ begrenztes Medium gegeben. Der von σ begrenzte endliche Raum sei S, der unendliche (außerhalb σ) S'. Die Normale in den Punkten von σ sei n, gerichtet nach dem Raum S. Von der Oberfläche σ wird angenommen, sie habe in jedem ihrer Punkte eine bestimmte Berührungsebene, die sich bei einer stetigen Änderung des Berührungspunktes ebenfalls stetig ändert; 2. es existiere eine solche feste positive Zahl a, daß, unter $\widehat{nn'}$ den Winkel verstanden, den die positiven Richtungen der Normalen n, n' in zwei beliebigen Punkten p, p' von σ bilden, und unter r' den Vektor pp', die Beziehung besteht $\widehat{nn'} < a\,r'$. Unter diesen Voraussetzungen beweist der Verf., daß immer eine unendliche Reihe von Deformationen des betrachteten Mediums existiert, „fundamentale Deformationen" genannt, die ausschließlich von der gegebenen Oberfläche σ und von den Iso-

tropiekonstanten des elastischen Mediums abhängen und so beschaffen sind, daß eine beliebige Deformation dieses Mediums immer der Überlagerung einer endlichen oder unendlichen Anzahl fundamentaler Deformationen gleich ist. Damit ist eine Ausdehnung der bekannten Entwicklung einer harmonischen Funktion in Poincaré sche Fundamentalfunktionen gewonnen. Lp.

L. Silla. Sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi. Nota II. Rom. Acc. L. Rend. (5) 22_1, 216-222.

Das Resultat des vorstehend angezeigten Artikels kann so ausgesprochen werden: Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Systems einfacher elastischer Belegungen, die in den Punkten einer gegebenen geschlossenen Oberfläche σ mit drei endlichen und stetigen, auf σ beliebig gegebenen Funktionen $u(\alpha,\beta)$, $v(\alpha,\beta)$, $w(\alpha,\beta)$ zusammenfallen, besteht darin, daß die elastischen Pseudodoppelbelegungen, welche mit den Dichten u, v, w konstruiert werden, sich in äquivalente einfache elastische Belegungen transformieren lassen, gleichgültig, ob in dem endlichen Gebiete S oder in dem unendlichen Gebiete S'.

In der vorliegenden Note wird untersucht, welches die notwendigen und hinreichenden Bedingungen sind, damit die erwähnte Transformation ausführbar ist, wird also die Aufgabe gelöst, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu finden, denen die gegebenen Funktionen genügen müssen, damit das erste Fundamentalproblem der Elastizitätslehre mittels einfacher elastischer Belegungen lösbar sei.

L. Silla. Sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi. Nota III. Rom. Acc. L. Rend. (5) 22_2, 282-286.

In dieser Note wird die Lösung des in den beiden vorangehenden Artikeln behandelten Problems vervollständigt. Es wird bewiesen, daß die Deformationen, welche in den Punkten eines isotropen elastischen Körpers S durch die willkürlich auf der Oberfläche σ des Körpers gegebenen Verrückungen veranlaßt werden, immer aufgefaßt werden können als herrührend von der Überlagerung einer endlichen oder unendlichen Zahl elementarer Deformationen, die nur von dem geometrischen Charakter der Oberfläche σ und von den Isotropiekonstanten des betrachteten Körpers abhängen. Lp.

J. R. Gwyther. The specification of the elements of stress. Part II. A simplification of the specifications given in Part I. (Vol. LVI, No. X.) Manchester Soc. Mem. and Proc. 57, Nr. 5, 4 S.

Vgl. das Referat über den ersten Teil der Arbeit F. d. M. 43, 929, 1912. Außer einigen Vereinfachungen von Formeln aus dem ersten Teile wird die Frage der Allgemeinheit der gefundenen Lösung erörtert und dabei die Behauptung zurückgenommen, daß die früher von G. B. Airy gegebene Lösung weniger allgemein sei. Im übrigen „scheint die Lösung ganz allgemein zu sein,

obgleich die sechs willkürlichen Funktionen nach der Form, in der sie sich darbieten, so gruppiert werden können, daß sie auf drei zurückzuführen sind".
Lp.

A. M. Molinari. Problemi di equilibrio elastico relativo al parallelepipedo rettangolo e alla piastra isotropa. Batt. G. 51 [(4) 3], 315-334.

In der Abhandlung „Sopra alcuni diversi casi d'integrazione della $\Delta^2 = 0$ nel parallelepipedo rettangolo e nella piastra isotropa" (Referat S. 428 dieses Bandes) hat der Verf. einige Begriffe entwickelt, vermöge deren eine leichte Behandlung und Durchführung bis zu Schlußformeln bei solchen Fällen möglich wird, die theoretisch und praktisch wichtig sind und sich auf die Deformationen eines elastischen Parallelepipeds und einer elastischen Platte beziehen. Dies wird an einer Reihe einzelner Aufgaben gezeigt.
Lp.

U. Cisotti. Le deformazioni ellissoidiche di una sfera. Batt. G. 51 [(4) 3], 124-126.

„Ein sphärischer Körper geht bekanntlich in die ellipsoidische Form über (oder behält im besonderen die sphärische Gestalt), sobald er einer homogenen Deformation unterworfen wird. Umgekehrt kann man nicht sagen, daß die Eigenschaft, eine Kugel in ein Ellipsoid umzugestalten, nur den homogenen Deformationen zukommt." Der Verf. zeigt: „Die charakteristische Bedingung für die ellipsoidischen Deformationen eines sphärischen Körpers besteht darin, daß die normalen Verrückungen auf der Kugeloberfläche Polynome zweiten Grades in den kartesischen Koordinaten der Punkte sind, wobei die tangentialen Verrückungen im übrigen beliebig sein dürfen."
Lp.

U. Cisotti. Sulle deformazioni isostatiche a reticolato cartesiano. Ven. Ist. Atti 72, 391-404.

Mit Hülfe der St. Venantschen Kompatibilitätsgleichungen der Deformation werden diejenigen Spannungszustände, bei denen die Hauptspannungstrajektorien in 3 Flächenscharen liegen, untersucht und wird gefunden, daß die Verschiebungen sowohl, als die Volumenkräfte durch die Differenzen dreier willkürlichen Funktionen je zweier Koordinaten dargestellt werden können. Rr.

S. Fuchs. Hauptspannungstrajektorien bei der Berührung einer Kugel mit einer Platte. Physik. Zs. 14, 1282-1285.

Die Differentialgleichungen der Hauptspannungstrajektorien werden für den Fall der Berührung zweier elastisch-isotropen Kugeln nach den von Hertz-Huber stammenden Formeln ausgerechnet (vgl. F. d. M. 35, 814, 1904), und ihre approximative Integration wird durchgeführt. Für den Fall der Berührung einer Kugel mit einer Platte werden Hauptspannungstrajektorien graphisch ausgewertet; hierbei zeigt sich, daß das Hertzsche Spannungsbild mit den von ihm

angegebenen Formeln nur teilweise übereinstimmt. Das neu gefundene Trajektorienbild, in dem sich die Linien der einen Schar nur mit den Linien der andern Schar kreuzen, hat die Existenz von außerordentlichen Punkten, auf die das Hertzsche Bild hinzuweisen schien, nicht erwiesen. Lp.

N. Raubal. Beitrag zur Ermittlung der Druckspannungen in Querschnitten unter Ausschluß von Zugspannungen. Österr. Wochenschrift f. d. öff. Baudienst **19**, 269-271.

Ermittlung der maximalen Druckbeanspruchungen in Querschnitten, die durch eine in der Symmetrieachse exzentrisch angreifende äußere Kraft beansprucht werden. Schr.

F. Willheim und A. Leon. Über die Verteilung von Spannungen im Innern von elastischen Körpern. Österr. Wochenschrift f. d. öff. Baudienst **19**, 334-338, 358-361.

Betrachtungen über den Spannungszustand in elastischen Körpern, wenn äußere Kräfte in bestimmter Verteilung auf die Oberfläche kugel- und zylinderförmiger Höhlungen angreifen. I. Kreisrundes Loch in einem unendlich ausgedehnten Blech. II. Kugelförmiger Hohlraum. III. Zylindrische Röhren. IV. und V. Lokale Inhomogeneitäten. Schr.

H. Lorenz. Näherungslösungen von Problemen der Elastizitätstheorie. Physik. Zs. **14**, 71-74.

„Die Elastizitätstheorie liefert für die Verschiebungen ξ, η, ζ eines Körperpunktes unter dem Einflusse der Spannungen drei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren strenge Integration bis jetzt nur in vereinzelten Fällen gelungen ist. Es liegt daher nahe, Näherungslösungen nach dem Vorgange von W. Ritz einfach aus einer Reihe von Funktionen der Koordinaten $F_1, F_2, \ldots, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Psi_1, \Psi_2, \ldots,$ welche die Grenzbedingungen des Problems für sich erfüllen, nach dem Schema:

$$\xi = a_1 F_1 + a_2 F_2 + \cdots, \eta = b_1 \Phi_1 + b_2 \Phi_2 + \cdots, \zeta = c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2 + \cdots$$

zu bilden, worin die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots$ vorläufig statisch unbestimmte Größen darstellen. Berechnet man mit diesen Ausdrücken zunächst die Arbeiten L_i der inneren und L_a der äußeren Kräfte, so liefert deren Übereinstimmung $L_i = L_a$ eine Bedingungsgleichung zwischen den Koeffizienten a, b, c." Das zur Bestimmung dieser Koeffizienten dienende Verfahren, bei dem der Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit benutzt wird, erläutert der Verf. durch die Betrachtung eines einseitig horizontal eingespannten Balkens, der am freien Ende eine Last Q trägt. Er hofft dadurch die Unklarheit beseitigt zu haben, die über das Wesen und die Begründung des Verfahrens noch vielfach herrscht (vgl. das folgende Referat). Lp.

Th. v. Karmán. Näherungslösungen von Problemen der Elastizitätstheorie. Bemerkungen zu dem gleichlautenden Artikel von H. Lorenz. Physik. Zs. 14, 253-254.

H. Lorenz. Erwiderung. Physik. Zs. 14, 254.

„Lorenz geht von folgendem Minimalprinzip aus: I. Unter allen Deformationszuständen, für welche die Arbeit der inneren Kräfte (Formänderungsarbeit) L_i gleich ist der Arbeit der äußeren Kräfte L_a, ist der beim elastischen Gleichgewicht eintretende Deformationszustand dadurch ausgezeichnet, daß ihm der kleinste Wert der Formänderungsarbeit zukommt. — Aus diesem Prinzip wird folgender Satz abgeleitet: II. Die Differenz der inneren und der doppelten äußeren Arbeit hat im Falle des elastischen Gleichgewichts einen ausgezeichneten Wert. — Ich behaupte nun: 1. daß der Satz II den (nach Lorenz) Ritz für einen speziellen Fall durch Variationsbetrachtungen gewonnen hat, und der nun als Folgerung der Castiglianoschen Sätze erscheinen soll, identisch ist mit dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie, angewendet auf den Fall eines elastischen Systems, das dem Hookeschen Gesetze gehorcht; 2. daß aus II rückwärts tatsächlich ein ähnlicher Satz wie das Prinzip I folgt, wobei allerdings bei stabilem Gleichgewicht der „kleinste Wert der Formänderungsarbeit“ durch den „größten Wert“ zu ersetzen ist.“

Lorenz findet in den vorstehenden Bemerkungen von Th. von Karmán keinen Widerspruch gegen seine Ausführungen, wenn man von der für die Anwendung irrelevanten Vorzeichenfrage des Maximums oder Minimums absieht. Lp.

Th. Pöschl. Über das Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit. Physik. Zs. 14, 410-412.

Nach dem vorstehend angezeigten Aufsatze von H. Lorenz ist das Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit (1) $L_i =$ Min. in Verbindung mit der Gleichheit der inneren Arbeit L_i und der äußeren Arbeit L_a : (2) $L_i = L_a$ als Nebenbedingung äquivalent mit der Forderung, die auftretenden Deformations- und Spannungsgrößen so zu bestimmen, daß sie die Bedingung erfüllen (3) $L_i - 2\,L_a =$ Min. Die beiden angegebenen Formen des Prinzips der kleinsten Formänderungsarbeit erweisen sich als in gewissem Sinne analog den beiden in der Dynamik bekannten Prinzipien von Euler und Hamilton. Die Gleichung (2) vertritt die Energiegleichung. Der Verf. liefert hier einen direkten Beweis für die Identität beider Formen des Prinzips, indem er sich der Einfachheit halber auf eine Dimension beschränkt. Lp.

G. Albenga. Sulla deformazione degli anelli circolari elastici soggetti a forze distribuite lungo il contorno. Rom. Acc. L. Rend. (5) 22_1, 412-416.

Wenn man in der Gleichung $L_i - 2\,L_a =$ Extremwert (vgl. das vorstehende Referat) die äußeren Kräfte explizit erscheinen läßt nebst einigen einfachen Funktionen der Verrückungen der Punkte des Körpers, so ist es möglich, mittels naheliegender Transformationen zu Differentialgleichungen der elastischen Linie

zu gelangen, die sich zu einer verhältnismäßig bequemen Integration eignen. So kann man, wenn die Deformation klein genug ist, damit das Prinzip von der kleinsten Arbeit gültig bleibt, aus jener Gleichung die Deformation eines homogenen Kreisringes von konstanter und im Vergleich mit dem Radius kleiner Dicke finden, der von Kräften beansprucht wird, die längs des Umfanges verteilt sind, eine Aufgabe, die wegen ihrer praktischen Bedeutung jüngst wieder von Guidi und Colonnetti behandelt ist (F. d. M. 43, 931 u. 943, 1912).
Lp.

G. Albenga. Su di alcune applicazioni di serie trigonometriche alla determinazione di linee elastiche. Ven. Ist. Atti 72, 1183-1189.

Die Differentialgleichung der elastischen Linie für kleine Durchbiegungen wird durch eine trigonometrische Reihe integriert, und zwar sowohl bei Querbelastung allein, als auch bei gleichzeitiger Längsbelastung und elastischer Unterlage, indem die Querbelastung zunächst durch eine trigonometrische Reihe dargestellt wird. Die Konvergenz des Verfahrens scheint im allgemeinen gut zu sein.
Rr.

G. Albenga. La inflessione laterale delle palafitte di fondazione. Torino Atti 48, 569-575.

Für einen längsbelasteten, im Erdreich steckenden Pfahl wird die Knicklast bestimmt unter Voraussetzung einer bestimmten elastischen seitlichen Nachgiebigkeit des Bodens, und zwar mit Hülfe der Integration der elastischen Linie durch eine Sinusreihe bei speziellen Grenzbedingungen.
Rr.

C. Guidi. Sulle deformazioni dei tubi di grande diametro per condotte d'acqua. Torino Atti 48, 521-533.

Nachrechnung eines Rohres von 100 cm Radius und 2 cm oder 1 cm Wandstärke, welches durch inneren hydrostatischen Druck belastet und am Boden unterstützt ist nach der Theorie des elastischen Ringes.

Es ergeben sich wesentliche Unterschiede bei den beiden Wandstärken, so zwar, daß bei der Berechnung des dünneren Rohres die kreisrunde Form nicht mehr vorausgesetzt werden darf.
Rr.

C. Guidi. Sul calcolo statico dei serbatoi cilindrici in beton armato. Torino Atti 48, 287-296.

Die Berechnung eisenbewehrter, durch axialsymmetrischen radialen Druck belasteter zylindrischer Behälter wird zurückgeführt auf die Berechnung der biegungsfesten Vertikalstreifen auf den Eisenringen als elastischen Stützen.
Rr.

S. Yokota. Stress distribution in riveted plates under the forces transmitted through rivets. Tôkyô Math. Ges. (2) 7, 88-95.

„Lord Kelvin baute seine „Deep Water Ship-Waves“ aus zweidimensionalen „Canal Ship-Waves“ auf. Im Verfolg einer ähnlichen Schlußweise habe ich eine Lösung der Spannungsverteilung in einer vernieteten Platte unter einer durch eine Nietstelle übertragenen Kraft erhalten. Die ermittelte Lösung schließt die folgenden Annahmen ein: I. Die Reibung zwischen den Platten ist vernachlässigt. II. Die Ebene der betrachteten Platte ist unendlich ausgedehnt. III. Die durch eine Nietstelle übertragene Kraft ist ein einfacher Druck, der in der Ebene der Platte wirkt.“ Die formelreiche Rechnung ist zum Referate nicht geeignet. Lp.

G. Colonnetti. Sulla teoria degli archi. Atti di Torino **48**, 849-853.

Bei der vor kurzem erfolgten Vorlegung einer neuen Form des Reziprozitätsprinzips (Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{21}_1$, 393-398; F. d. M. **43**, 930, 1912) habe ich die Möglichkeit betont, in jedem Falle die Untersuchung der Charakteristiken der auf einen gegebenen Querschnitt eines beliebigen elastischen Systemes bezüglichen Beanspruchung (oder der Reaktion einer seiner gegebenen Verbindungen), die von einer beliebigen Art der Belastung hervorgerufen wird, auf das fast immer einfachere Problem der Zergliederung der Konfigurationsänderungen zurückzuführen, die in dem System eintreten würden, wenn man bei ideeller Vornahme eines Schnittes in Korrespondenz zu jenem Querschnitte (oder in Anlehnung an jene Verbindung) eine geeignete Verrückung der einen Schnittfläche gegen die andere bewirken könnte durch das Anbringen zweier gleichen und entgegengesetzten Kräfte an jenen Flächen. Es schien mir nicht ohne Interesse zu sein, auf den Gegenstand zurückzugreifen, um die Leichtigkeit hervorzuheben, mit der solche fiktiven Beanspruchungen in den besonderen Einzelfällen erforscht werden können zufolge einer charakteristischen Eigenschaft der Elastizitätsellipse, einer Eigenschaft, die hier dargelegt werden soll unter Bezugnahme auf das klassische Problem des ebenen elastischen Bogens, der an beiden Enden fest eingeklemmt ist. Lp.

G. Colonnetti. Sulla teoria dei sistemi reticolari triplamente iperstatici. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{22}_2$, 145-150.

In der Note „Sulla teoria degli archi“ (Referat vorstehend) hat der Verf. eine mögliche Ausdehnung der Theorie der terminalen Elastizitätsellipse angedeutet in Anwendung auf die Untersuchung der an den Enden eingespannten Bogenträger. In dem gegenwärtigen Artikel wird in möglichster Kürze, aber in allgemeiner Weise gezeigt, wie vermöge der Betrachtung gewisser Relativbewegungen, die denen ganz analog sind, von welchen in jener Note beständig Gebrauch gemacht ist, die von Culmann ersonnene Methode bei der Untersuchung der statischen Bedingungen jedes beliebigen elastischen Systems, das drei überschüssige Verbindungsbedingungen enthält, mit Vorteil eingeführt werden kann. Lp.

R. Mayer. Über Elastizität und Stabilität des geschlossenen und offenen Kreisbogens. Zs. f. Math. u. Phys. **61**, 246-320.

Diese Untersuchungen über die Formänderung, Beanspruchung und Stabilität kreisförmiger Stäbe haben die Aufstellung gebrauchsfertiger Gleichungen für häufig vorkommende und gewissermaßen typische Belastungen zum Ziele. Die unmittelbare technische Anwendbarkeit der Ergebnisse, wie sie angestrebt war, ließ sich schwerlich anders erreichen als durch eine Darstellung, die bei der Behandlung der einzelnen Probleme mehr in die Breite ging, als dies vom rein wissenschaftlichen Standpunkt aus geboten wäre. Eine weitere Folge, die durch den vorgegebenen Zweck bedingt wurde, war die Durchführung der Untersuchungen als Annäherungsrechnungen im Sinne der Theorie des elastischen Drahtes. Hierdurch wurden die verhältnismäßig einfachen Rechnungsergebnisse, von denen der Konstrukteur gern Gebrauch machen wird, erzielt und für eine große Zahl von praktisch vorkommenden Belastungsarten eine Möglichkeit gefunden, durch den Gebrauch einer Tabelle bisher recht zeitraubende Rechnungen nicht allein stark zu vereinfachen, sondern auch durch bequeme Ermittlung der ganzen Deformationslinie zu vervollständigen.

Den Näherungsrechnungen ist ganz wesentlich die Voraussetzung zugrunde gelegt, daß gegenüber den Formänderungen, die ein elastischer Draht durch die in irgendeinem Querschnitte stattfindende Beugung oder den dort herrschenden Druck erfährt, die durch Schiebung zweier Nachbarquerschnitte und durch Längenänderung des elastischen Elementes entstehenden Formänderungen zu vernachlässigen seien. Diese Voraussetzung ist um so eher berechtigt, je mehr die radiale Dicke des Drahtes gegenüber dem Krümmungsradius ϱ der Zentrallinie verschwindet, und je kleiner die Deformation selbst ist. Weiter wird verlangt, daß eine Überschreitung der Elastizitätsgrenze an jeder Stelle des Drahtes infolge der Beanspruchung ausgeschlossen sei. Für den Fall der Beanspruchung des Kreisringes durch Kräfte, welche in der Ebene seiner Zentrallinie wirken, wird schließlich noch vorausgesetzt, der Ring besitze solche Abmessungen, daß keine räumliche Deformation seiner Zentrallinie eintritt.

I. Die elastische Linie des kreisförmigen Stabes bei kleinen Biegungsdeformationen in der Kreisebene. II. Die regelmäßige Beanspruchung des geschlossenen Kreisringes durch Kräfte in der Ringebene. III. Beanspruchung des geschlossenen Ringes durch stetig verteilte Kräfte in der Ringebene. IV. Der kreisförmige Bogenträger. V. Einige besondere Beanspruchungen des geschlossenen Kreisringes bei ebener und räumlicher Formänderung. VI. Die Stabilität des kreisförmigen Stabes unter Wirkung eines konstanten Normaldruckes. Lp.

E. Meissner. Das Elastizitätsproblem für dünne Schalen von Ringflächen, Kugel- oder Kegelform. Physik. Zs. **14**, 343-349.

E. Meissner. Über das Elastizitätsproblem einer dünnen Schale von Kugel-, Kegel- oder Ringflächenform. Zs. f. Math. u. Phys. **61**, 434-436.

Die elastische Theorie dünner Schalen, die nach einer Rotationsfläche gewölbt und axial symmetrisch belastet sind, verlangt die Integration einer totalen Differentialgleichung vierter Ordnung, die schon in einfachen Fällen verwickelte Struktur hat. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß eine Reduktion auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung eintritt, wenn die Krümmung des Flächenmeridians konstant ist, also im Falle der Kugel-, Kegel- und Ringfläche. Zur Integration dieser Gleichung und damit zur Festigkeitsberechnung solcher

Schalen werden geeignete Methoden entwickelt. Dies ist für die Technik von Bedeutung, da in ihr Kolben und Böden von dieser Form häufig verwendet werden. Auch die Theorie des Kugelgewölbes wird dadurch erledigt. Ausführlich werden nur die einfacheren Fälle der Kugel- und Kegelschale erörtert; auf die Ringfläche will der Verf. später zurückkommen. — Der zweite Artikel ist ein Auszug aus dem ersten und gibt nur die Resultate. Lp.

R. V. SOUTHWELL. On the general theory of elastic stability. Lond. Phil. Trans. (A) **213**, 187-244; Chem. News **107**, 80-81.

Die Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich mit den allgemeinen Prinzipien, welche in der mathematischen Untersuchung von Problemen der elastischen Stabilität maßgebend sind. Die Punkte von besonderem Interesse hierbei sind: 1. Die Fassung allgemeiner Gleichungen, vermöge deren Probleme der elastischen Stabilität mit derselben Genauigkeit untersucht werden können wie die gewöhnlichen Probleme der mathematischen Elastizitätslehre. 2. Eine Erörterung der Folgen der kleinen Ungenauigkeiten, denen man notwendig in der Praxis begegnet. Betont wird die Wichtigkeit ihrer Beachtung bei der Anwendung der Resultate der Theorie auf das praktische Zeichnen. 3. Die Grundlagen für eine Theorie der Instabilität in Fällen, wenn der Instabilität der Eintritt elastischen Zusammenbruches des behandelten Materials vorangeht. Die praktische Wichtigkeit einer solchen Theorie wird dargetan.

Außerdem werden zum Zwecke der Erläuterung zwei Fälle von einiger Wichtigkeit betrachtet, nämlich der Fall der Kesselröhren (vgl. Love, Lehrbuch der Elastizität, S. 637) und der hohlen Streben.

Inhaltsverzeichnis der Hauptarbeit: Einleitung und Übersicht über die Abhandlung. I. Gleichungen des neutralen Gleichgewichts in rechtwinkligen Koordinaten, Ableitungsmethode. Beispiel in rechtwinkligen Koordinaten. Stabilität einer dünnen Platte unter Kantendruck. II. Gleichungen des neutralen Gleichgewichts in Zylinderkoordinaten. Ableitung der Gleichungen. Beispiele in Zylinderkoordinaten. Stabilität von Kesselröhren und röhrenförmigen Streben. Lösung für ein Siederohr ohne Enddruck. Vergleichung mit Versuchsergebnissen. Gültigkeit der Forschung nach der Theorie dünner Schalen. Vergleichung mit vorhandenen Formeln. Die „kritische Länge". Lösung für eine röhrenförmige Strebe. Spezialfall. Gültigkeit der Forschung nach der Theorie dünner Schalen. Allgemeiner Fall. Vergleichung mit vorhandenen Formeln. Stabilität von Röhren unter gleichmäßigem End- und Oberflächendruck. III. Allgemeine Theorie der Instabilität in Materialien von begrenzter Stärke. Der praktische Wert einer Theorie der Instabilität. Stabilität kurzer Streben. Notwendigkeit weiterer Untersuchung. Schluß. Lp.

R. V. SOUTHWELL. On the collapse of tubes by external pressure. Phil. Mag. (6) **25**, 687-698.

Mit dieser Aufgabe haben sich früher beschäftigt G. H. Bryan (Cambr. Proc. **6**, 287-243; F. d. M. **20**, 1063, 1888) und A. B. Basset (Phil. Mag. (5) **34**, 221-233; F. d. M. **24**, 962, 1892). „Ich habe jüngst das Problem nach

einer Methode angefaßt, die ich für exakt halte, und die nicht die Theorie dünner Schalen einbegreift (Referat vorstehend). Meine Ergebnisse zeigen, daß die Bryansche Formel als erste Annäherung korrekt ist, selbst wenn beide Oberflächen der Röhren einem Drucke ausgesetzt sind, indem die Druckdifferenz das einzige Kriterium des Zusammenbruches ist. In dem Lichte dieser Schlußfolgerung scheinen die Bassetschen Bemerkungen eine weitere Prüfung zu erfordern; denn die Theorie dünner Schalen ist offenbar eher imstande, eine befriedigende Formel für den Zusammenbruch von Kesselröhren zu geben, als man danach meinen sollte. Ich werde im folgenden die Änderungen in der Methode angeben, die meines Erachtens es ermöglichen, die von Basset bemerkten Schwierigkeiten zu umgehen, und werde zeigen, wie die so hergeleitete Formel Bryans derart erweitert werden kann, daß sie Abschätzungen über den Einfluß von „Bruchringen" auf die Stärke von Röhren ergibt." Die erhaltenen Formeln werden am Schlusse graphisch erläutert. Lp.

R. V. Southwell. On the collapse of tubes by external pressure. II. Phil. Mag. (6) **26**, 502-511.

In dem vorstehend angezeigten ersten Teile der Arbeit hat sich der Verf. mit den Wirkungen kreisförmiger Enden auf den Widerstand von Röhren gegen den Zusammenbruch durch äußeren Druck beschäftigt, und bei der vollständigeren Erörterung desselben Problems in Phil. Trans. London (A) **213**, 187-244 (Referat vor dem vorigen) hat er gezeigt, daß die Ergebnisse durch den Versuch eine gute Stütze erhalten, sofern es sich um die relative Stärke langer und kurzer Röhren handelt. Die theoretische Formel ist jedoch als eine Grundlage für praktische Zwecke nicht befriedigend; die Resultate sorgfältiger Versuche haben nämlich gezeigt, daß sie den Widerstand wirklicher Röhren gegen den Zusammenbruch oft um ein Beträchtliches zu hoch angibt. In der gegenwärtigen Abhandlung wird untersucht, ob diesen Abweichungen Rechnung getragen werden kann. Zu diesem Zwecke wird die Eulersche Formel modifiziert, und die neue Formel erweist sich als geeignet zur Wiedergabe der Versuchsresultate, wodurch der Verf. deshalb seiner Theorie, wie er meint, eine starke Stütze verschafft hat. Lp.

D. Pawlow. Beitrag zur Erklärung der Knickungserscheinungen. Österr. polytechn. Zs. **10**, 113-117, 186.

Ausbiegung ist nur dann möglich, wenn eine Exzentrizität vorhanden ist. Gegenseitige Beeinflussung von Exzentrizitäten. Schr.

Fr. Engesser. Über die Bestimmung der Knickfestigkeit gegliederter Stäbe. Zs. d. österr. Ing.- u. Arch.-Vereins **65**, 769-772.

Die Knickkraft $P = \frac{l^2}{8\delta}$, l Länge, δ Durchbiegung. Beispiele. Schr.

S. Ono. On the elongation of indiarubber. Tôkyô Math. Ges. (2) **7**, 36-43.

Chéneveau und Heim haben (C. R. **152**, 320-322, 1911) die Ausdehnung des Kautschuks durch die Formel $y = kx + a \sin^2 bx$ dargestellt, wo x die Belastung ist und k, a, b Konstanten bedeuten. Der Verf. setzt λ gleich dem Verhältnis der Länge zu der im natürlichen Zustand, β gleich dem Verhältnis der Breite zu der in dem natürlichen Zustand, S_0 gleich der Spannung, bezogen auf die Einheitsfläche im natürlichen Zustand, und leitet theoretisch die Formel ab $S_0 = A\lambda\left\{1 - \frac{2}{\lambda+3}\right\}$, verbessert sie aber, um Übereinstimmung mit der Beobachtung zu erhalten, durch Hinzufügung des Faktors $e^{h(p-\lambda)^2}$, wo A, h, p Konstanten sind.
Lp.

Mesnager. Sur un paradoxe des plaques uniformément chargées. C. R. **156**, 209-210.

Man betrachte eine Kreisplatte von derselben Dicke und aus demselben Stoffe, die auf einem Kreise ruht, der dem Quadrate einschreibbar ist. Dann folgt aus den Formeln in den theoretischen Werken über Elastizitätstheorie, daß man zu dem Pfeile der quadratischen Platte 17 Prozent hinzufügen muß, um den Pfeil der der quadratischen Platte eingeschriebenen Kreisplatte zu erhalten. Die Note soll diese Erscheinung erklären.
Lp.

S. D. Carothers. Plane strain in a wedge, with applications to masonry dams. Edinb. Roy. Soc. Proc. **33**, 292-306.

Man hat bewiesen (A. E. H. Love, Elasticity, 2nd edition 201; J. H. Michell, Lond. Math. Soc. Lond. **31**, 100; F. d. M. **30**, 720, 1899), daß in dem Falle ebener Deformation die Spannungen in einem Körper aus einer einzigen Spannungsfunktion χ erhältlich sind, die der Gleichung genügt:

$$(1) \qquad \nabla_1^4 \chi = 0,$$

wo $\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Lösungen der Gleichung (1) werden hier angewandt, um die Spannungen in einem unendlich langen, keilförmigen Zylinder zu erhalten, auf den irgendeiner ganzzahligen Potenz des Abstandes von dem Winkel proportionale, zu den ebenen Flächen normale Kräfte wirken, die im übrigen längs der Länge des Zylinders an allen entsprechenden Punkten dieselben sind. Die an der gekrümmten Grenze innerhalb des Winkels als bestehend vorausgesetzten Bedingungen werden als gleichartig mit denen angenommen, die an Punkten näher am Winkel vorhanden sind. Der Fall eines Dammes, der seine freie Kante in der Wasserfläche hat und dem Wasserdruck einseitig unterliegt, wird ziemlich eingehend behandelt; eine Lösung für einen abgestumpften, dem Wasserdruck zum Teil unterworfenen Keil wird ebenfalls gegeben.
J. (Lp.)

E. E. v. Posch. Die Druckverteilung in Mauern. Der Betonbau **1**, 58-89, 104-107.

Abnahme der spezifischen Pressung, hervorgerufen durch eine Last an der Oberfläche, mit der Tiefe. Verteilungswinkel, das ist der Winkel, unter dem die Lastverteilungsflächen mit der Tiefe wachsen. Ergebnisse: Die Gesetzmäßigkeit der Druckverteilung ist von der Materialverteilung unabhängig; die Druckverteilung erfolgt nach einer Wellenlinie; die Eigengewichtsspannungen in Horizontalschnitten sind konstant; der Druckverteilungswinkel nimmt mit der Tiefe ab; er beträgt 30° in der Tiefe 1 m; die Druckverteilungskurve verläuft für eine lose Folge von Einzellasten steiler als für eine zusammenhängende Belastung oder eine Einzellast (Lastkante). Schr.

C. Parvopassu. Intorno alle linee d'influenza relative alle travi elastiche. Ven. Ist. Atti **72**, 573-601.

Inhomogene elastische Stäbe werden durch Einführung eines ideellen Querschnittschwerpunktes, ideellen Querschnitts und ideellen Elastizitätsmoduls auf homogene zurückgeführt. Der Begriff der Einflußlinien wird verallgemeinert, und es werden Längs- und Quereinflußlinien eingeführt. Diese werden unter sich und mit den Einflußlinien der Momentenbelastung durch einfache Beziehungen auseinander abgeleitet. Rr.

A. F. Jorini. Momenti normali nelle travi continue articolate iperstatiche. Lomb. Ist. Rend. (2) **46**, 499-504.

Bequeme Formulierung der Clapeyronschen Gleichungen für statisch unbestimmte kontinuierliche Träger mit Zwischengelenken. Rr.

A. Francke. Drehungsstützflächen. Zs. f. Math. u. Phys. **62**, 162-182.

Nach Wiedergabe der bekannten Lösungen für das Gleichgewicht einer biegsamen Rotationsschale mit symmetrischer, vertikaler Oberflächenbelastung bei beliebiger Meridianlinie folgen Erörterungen über die für dieses Gleichgewicht angeblich notwendige Wandstärke oder Elastizität, welchen Referent nicht folgen kann. Rr.

H. Blasius. Träger kleinster Durchbiegung und Stäbe größter Knickfestigkeit bei gegebenem Materialverbrauch. Zs. f. Math. u. Phys. **62**, 182-197.

Die Arbeit enthält die Behandlung einer Anzahl einzelner Aufgaben, unter Hinweis auf schon vorhandene Lösungen, nach teilweise oder ganz neuen, verbesserten Methoden. Zuerst wird für den Träger gleichen Widerstandes eine Integralgleichung nebst ihrer Lösung gegeben. Dann folgt die Ermittlung des Trägers kleinster Durchbiegung bei gegebenem Materialaufwande, die Berechnung von Durchbiegung und Materialaufwand, die Erörterung einer Minimumregel nebst der Auflösung der Minimumbedingung.

Für die Frage der Knickfestigkeit wird von der Eulerschen Formel ausgegangen und ein Verfahren bei veränderlichem Querschnitt aufgestellt,

für das die Minimumbedingung entwickelt wird. Das Verfahren wird auf die Fälle eines kreisförmigen Querschnittes, eines rechteckigen Querschnittes von gleicher Breite und veränderlicher Höhe sowie gleicher Höhe und veränderlicher Breite angewandt, wobei an Zahlenbeispielen die Vorteile des Verfahrens sich augenfällig herausstellen. Zuletzt werden andere Fälle kurz gestreift, die unter eine leicht zu behandelnde Differentialgleichung zweiter Ordnung fallen. Lp.

K. Federhofer. Berechnung des senkrecht zu seiner Ebene belasteten Bogenträgers. Zs. f. Math. u. Phys. **62**, 40-63.

Aus den räumlichen Gleichgewichtsbedingungen und den Dehnungsverschiebungsgleichungen des Stabes mit kreisförmiger Mittellinie wird eine Differentialgleichung sechster Ordnung für die Verschiebung in Funktion des Zentriwinkels aufgestellt. Bei der Integration besteht die hauptsächliche Unbequemlichkeit in der Bestimmung der Konstanten, insbesondere bei konzentrierten Lasten. Die Rechnungen zeigen, wie der elastische Widerstand sich aus Biegung und Torsion zusammensetzt. Rr.

Hertwig. Die Berechnung der Gewölbe nach der Elastizitätstheorie. Der Betonbau **1**, 153-156, 173-176; **2**, 17-19.

§ 1. Aufstellung der Gleichungen für die Einflußlinien. § 2. Ermittlung geschlossener Formeln für ruhende Belastung. Schr.

S. Schwätzer. Der beiderseits eingespannte elastische Bogenträger als räumliches System betrachtet, mit besonderer Rücksichtnahme auf die praktisch-statische Berechnung der gewölbten Brücken und der Balkenträger. Österr. Wochenschrift f. d. öff. Baudienst **19**, 214-219, 235-239.

Der beiderseits eingespannte Bogenträger ist bekanntlich sechsfach statisch unbestimmt. Bisher sind die Fälle: Lotrechte Lasten in der Ebene durch die Bogenachse (Gewölbe) und: Lasten senkrecht zu dieser Ebene, in der Schwerachse (Balkenträger), die beide dreifach unbestimmt sind, behandelt worden. Den allgemeinen Fall haben Engesser und Schachenmeier in Angriff genommen. Hier knüpft der Verf. an, gibt eine neue Herleitung der Formeln, ferner Näherungsformeln und bespricht den Einfluß horizontaler Querbelastungen (Winddruck u. dgl.). Schr.

R. Schönhöfer. Bestimmung der Abmessungen von Bogen- und Wölbtragwerken unmittelbar aus den Ergebnissen der statischen Untersuchung. Der Betonbau **1**, 9-12.

Das Verfahren, die Bogen an Stellen, an denen die zulässigen Spannungen überschritten werden, zu verstärken, an Stellen, wo sie nicht erreicht werden,

zu schwächen, ist falsch. Es wird gezeigt, wie man ohne Wiederholung der statischen Untersuchung die Abänderungen so treffen kann, daß das Spannungsbild gleichmäßig beeinflußt wird.
Schr.

A. Gut. Zur Theorie der Drucklíniengewölbe. Zs. d. österr. Ing.- u. Archit.-Vereins **65**, 646-651.

„. . . Die Kräftekurve ist ganz allgemein eine Ellipse, und zwar gibt der zu einer Tangente der Gewölblinie parallel gezogene Halbmesser der Ellipse die Größe der Spannung daselbst an.“ Weitere Diskussion.
Schr.

Zd. Barant. Allgemeine Berechnung des Trägers mit Halbschrägen. Österr. Wochenschrift f. d. öff. Baudienst **19**, 257-260.

Ein Fachwerkträger mit einem festen und einem verschiebbaren Stützpunkte, der in jedem Fach zwei Halbschrägen besitzt, ist statisch bestimmt, wenn die Halbschrägen von der Mitte gegen die Enden zusammenlaufen. Bei der Berechnung wird lotrechte Belastung vorausgesetzt.
Schr.

Ed. Ceceple. Knickversuche mit einer Strebe des eingestürzten Hamburger Gasbehälters. Österr. Wochenschrift f. d. öff. Baudienst. **19**, 527-528.

Die Versuchsergebnisse wurden mit den Angaben der Knickformeln von Euler, Tetmajer, Krohn und Müller-Breslau verglichen.
Schr.

M. R. v. Thullie. Die dritte Phase der gebogenen Eisenbetonträger. Zs. d. österr. Ing.- u. Archit.-Vereins **65**, 785-788.

Nach Überschreitung der Fließgrenze tritt ein neuer Gleichgewichtszustand ein, in dem die Eiseneinlage sich beträchtlich verlängert, ohne daß die Eisenspannung wesentlich steigt. Dafür muß sich die Lage der neutralen Achse sowie auch die Betondruckspannung ändern. Berechnung der Spannungen im Bruchstadium.
Schr.

M. R. v. Thullie. Berechnung der umschnürten Säulen aus Eisenbeton. Österr. Wochenschr. f. d. öff. Baudienst **19**, 665-669.

Ergebnisse umfangreicher Versuchsreihen zur Vergleichung der verschiedenen Berechnungsformeln.
Schr.

M. R. v. Thullie. Die Dimensionierung der längsbewehrten Eisenbetonsäulen. Der Betonbau **1**, 2-4, 32-35, 57-61.

Vergleich dreier Berechnungsformeln auf Grund der bisher veröffentlichten Versuchsergebnisse. Schr.

G. Weisser. Beitrag zur Untersuchung exzentrisch beanspruchter Eisenbetonquerschnitte beliebiger Armierung. Technische Blätter **45**, 138-155.

Ableitung der Grundformel in Anlehnung an Melau, Handbuch für Eisenbetonbau I, 392. Beispiele. Schr.

K. Skibinsky. Theoretische Untersuchung der Schienenstoßverbindung. Österr. Wochenschr. f. d. öff. Baudienst **19**, 178-185, 199-205, 458-459.

Ergänzung der vom Verf. veröffentlichten Studien über Schienenstoßverbindungen in theoretischer Beziehung; Ableitung von Formeln für die praktische Verwendung. Schr.

St. Timoschenko. Zur Frage nach der Wirkung eines Stoßes auf einen Balken. Zs. f. Math. u. Phys. **62**, 198-209.

Im ersten Paragraphen werden die älteren Annäherungsformeln besprochen. Die genauere Untersuchung des transversalen Stoßes auf einen prismatischen Balken mit gestützten Enden geschieht im zweiten Paragraphen; die Lösung beruht auf einer Überlegung, die Hertz gelegentlich seiner Untersuchung über den Zusammenstoß von Kugeln ausgesprochen hat. Die stoßende Last wird dabei in Kugelgestalt angenommen. Die Durchbiegung an der Stoßstelle wird nach einer Formel dargestellt, die der Verf. in derselben Zeitschrift **59**, 163, gegeben hat (F. d. M. **42**, 886, 1911). Nach dem Hertzschen Vorschlage wird diese statische Deformation in denjenigen Teilen des Körpers, die in unmittelbarer Nähe der Stoßstelle liegen, mit den allgemeinen Gleichungen für die Bewegung der übrigen Teile des Körpers verbunden. Die erhaltenen Formeln werden numerisch ausgewertet, wobei in § 3 ein Balken von gegebenen Dimensionen zugrunde gelegt wird. Die Ergebnisse sind in zwei Tabellen zusammengestellt. „Durch Berücksichtigung der lokalen Deformationen bei der Berührung von stoßender Last und Balken kann man mit Hülfe des obigen Näherungsverfahrens 1. in jedem einzelnen Falle den Verlauf der Balkendurchbiegung und des Druckes feststellen, 2. die Zeit berechnen, während welcher der Balken und die Last sich berühren. 3. Falls die lokalen Deformationen an der Stoßstelle nicht elastisch sind, können alle Größen, die den Stoßvorgang kennzeichnen, durch die Näherungsrechnung gefunden werden.“ Lp.

P. F. Ward. The transverse vibrations of a rod of varying cross section. Phil. Mag. (6) **25**, 85-106.

Die Abhandlung enthält eine Ausdehnung einiger von Kirchhoff abgeleiteten Ergebnisse in seiner Arbeit: „Über die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt“ (F. d. M. **11**, 714, 1879). Es wird

angenommen, daß die Querschnitte klein sind, ihre Schwerpunkte in einer Geraden liegen und ihre Hauptachsen in denselben Richtungen. Ein solcher Stab kann kleine Schwingungen parallel zu jeder dieser beiden Richtungen ausführen. Der Querschnitt wird ferner als rechteckig vorausgesetzt.

Nachdem die Differentialgleichung aufgestellt ist, wird sie durch eine spezielle Annahme bezüglich des Gesetzes der Querschnittsänderung vereinfacht. Dann wird sie in Gliedern mit Besselschen Funktionen gelöst vermöge eines von Kirchhoff in dem Falle benutzten Kunstgriffes, wenn der Stab die Form eines sehr spitzwinkligen Keiles oder Kegels hat. Das dünne Ende des Stabes wird als frei angenommen; die Lösung wird für die Fälle ermittelt, wenn das andere Ende eingeklemmt, frei oder gestützt ist. Die niederen Schwingungsarten werden dann in dem Falle des Keiles und Kegels erforscht. Wie Kirchhoff gefunden hat, kann die Schwingungsamplitude nahe am dünnen Ende des Stabes verhältnismäßig sehr groß werden. Es besteht eine angenäherte Beziehung zwischen den Lagen der Knoten, den Punkten größten Ausschlages sowie den Inflexionspunkten und den Wurzeln gewisser Bessel scher Funktionen; die Annäherung ist um so enger, je höher die Schwingungsart und je näher die fraglichen Punkte dem dünnen Ende des Stabes sind.

In einem Anhange befindet sich die Erörterung einiger Fälle der Wellenbewegung in einem Kanal von veränderlichem Querschnitt, die mittels der Besselschen Funktionen leicht lösbar sind. Lp.

R. Ortvay. Über die Abzählung der Eigenschwingungen fester Körper. Ann. der Phys. (4) **42**, 745-760.

Debye hat (Ann. d. Phys. (4) **39**, 789-839; F. d. M. **43**, 1037, 1912) das akustische Spektrum der isotropen Körper bestimmt, indem er von den Eigenschwingungen einer Kugel bei kräftefreier Oberfläche ausging. Weil aber die Durchführung der Rechnung bei der Kugel weitgehende mathematische Hülfsmittel erfordert, ist es wünschenswert, einen einfacheren Weg zu haben, der zu der Verteilung der Eigenfunktionen führt. Einen solchen Weg hat Sommerfeld in einer Vorlesung angegeben, wo er das elastische Problem eines isotropen Würfels bei gemischten Grenzbedingungen behandelte, nach welchen die normalen Verrückungen und tangentialen Spannungen verschwinden. Das elastische Problem des Würfels bei ungemischten Grenzbedingungen, d. h. bei festgehaltener oder freier Oberfläche, ist bis jetzt nicht gelöst, auch nicht in elementaren Funktionen lösbar. Man könnte die von Sommerfeld benutzten Grenzbedingungen dadurch realisiert denken, daß man den elastischen Würfel durch eine fest anschließende, starre Würfelform begrenzt denkt, so daß zwischen den beiden Flächen keine Reibung stattfindet. Dies ist der Fall I des Verf. In Anlehnung hieran hat er gefunden, daß das Problem auch lösbar wird, wenn man umgekehrt an der Oberfläche die normalen Spannungen und die tangentialen Verrückungen verschwinden läßt (Fall II).

Resultate: 1. Es wird eine einfache Methode zur Bestimmung des akustischen Spektrums isotroper Körper gegeben bei Zugrundelegung sogenannter gemischter Grenzbedingungen. 2. Durch Anwendung derselben Methode wird die Formel von Debye, nach welcher die Anzahl der Eigenschwingungen mit der dritten Potenz der Frequenz zunimmt, auf Kristalle bis zum rhombischen System einschließlich ausgedehnt. Lp.

J. R. Airey. The vibrations of cylinders and cylindrical shells. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **20**, 289-294.

Die Schwingungsperioden elastischer Kugeln und Kugelschalen werden durch die Auflösung von Gleichungen bestimmt, welche Besselsche und Neumannsche Funktionen der Ordnung $n + \frac{1}{2}$ enthalten; diese lassen sich durch Sinus- und Kosinusfunktionen ausdrücken. Die radialen Schwingungen von Zylindern und Zylinderschalen werden andrerseits gefunden, indem man Gleichungen löst, in denen Besselsche und Neumannsche Funktionen nullter und erster Ordnung vorkommen. Die Wurzeln dieser Gleichungen können, wie der Verf. zeigt, berechnet werden, indem man von den asymptotischen Reihen für diese Funktionen Gebrauch macht. Lp.

W. Mantel. Wenteling om eene buigzame as. Nieuw Archief (2) **10**, 315-319.

Berechnung der hauptsächlichsten Oszillationen eines Körpers, der an einer massenlosen elastischen Welle befestigt ist, während diese eine konstante Rotationsgeschwindigkeit besitzt. Lp.

M. Leblanc. Production de grandes vitesses angulaires. Journ. de Phys. (5) **3**, 282-291, 365-379.

Eine theoretische Untersuchung über die Schwingungen, die in einer schnell rotierenden Welle entstehen und ihre Festigkeit gefährden können. Lp.

A. Mallock. A simple method of finding the approximate period of stable systems. Lond. Roy. Soc. Proc. (A) **88**, 333-335.

„Fast in jedem praktisch vorkommenden Falle kann ein festes Gefüge, insofern seine elastischen Verrückungen zu betrachten sind, durch ein gleichwertiges Pendel ersetzt werden, d. h. ein Pendel, welches dieselbe Periode hat wie die besondere unter Beobachtung stehende Schwingungsweise, und eine wirkende Masse gleich dem Teile der Masse des Gefüges, welcher der Schwingung unterliegt, aber dort konzentriert, wo für den vorliegenden Zweck der Punkt ist, den man Schwingungsmittelpunkt nennen kann. Der Satz, von welchem die einfache oben erwähnte Bestimmung der Periode abhängt, lautet: Es sei l die Länge des gleichwertigen Pendels, σ die Steifheit des Gefüges, so daß die Kraft, welche erforderlich ist, um eine am Schwingungsmittelpunkt gemessene Verrückung x hervorzubringen, σx ist. Nun werde x_1 so genommen, daß $\sigma x_1 = W$ gleich dem Gewichte des Gefüges ist. Die Periode τ wird durch jede der beiden Gleichungen gegeben: $\tau = 2\pi\sqrt{l/g}$ oder $\tau = 2\pi\sqrt{(W/g\sigma)}$. Hieraus folgt $l/g = M/\sigma$, und da $\sigma = Mg/x$, $M/\sigma = x_1/g$, so ist $x_1 = l$. Dieser Sachverhalt paßt genau auf alle Fälle, bei denen die Masse an einer Stelle konzentriert ist, oder bei denen das Gefüge ohne Deformation oder Rotation sich bewegt, die Masse also im Massenmittelpunkt angenommen werden kann.“ Es folgen Beispiele zur Erläuterung. Lp.

J. B. Ritchie. On a fuller test of the law of torsional oscillation. Edinb. Roy. Soc. Proc. **33**, 177-193.

In Edinb. Roy. Soc. Proc. **31**, 424 (F. d. M. **42**, 884, 1911) hat Ritchie die empirische Gleichung $y^n(x+a)=b$ von Peddie benutzt. Hier erhält und gebraucht er die weitere Näherung:

$$y^n[\log y + k(x+a)] = b.$$

J. (Lp.)

W. Peddie. On the deviation of the torsional oscillations of metallic wires from isochronism. Edinb. Roy. Soc. Proc. **33**, 225-242.

Die Arbeit setzt die früheren Untersuchungen des Verf. aus den Jahren 1894 und 1898 über den Gegenstand fort und hängt mit den neuesten Versuchen von Ritchie eng zusammen (F. d. M. **42**, 884, 1911). „Da die ehedem gebrauchte Beobachtungsmethode nicht viel mehr als qualitative Resultate ergab und zur Bestimmung des wirklichen Schwingungsgesetzes auf allen Stufen ganz ungeeignet war, wurde eine andere Methode in der Arbeit angewandt. Eine Beschreibung der Methode und des Apparates wird zuerst gegeben, und dann werden mit Hülfe von Kurven die in den Fällen von drei verschiedenen Materialien erhaltenen Versuchsergebnisse veranschaulicht; ferner wird die Natur ihrer Abweichung von denen, die für die einfache harmonische Bewegung charakteristisch sind, klargelegt. Schließlich wird eine theoretische Erörterung über eine molekulare Anordnung gegeben, unter der die Gesetze der Torsionsschwingung vorgestellt werden können.

Am Schlusse wird folgende Übersicht gegeben: 1. Die Schwingungen eines zähen Drahtes, wie die „Setzung" (set) zeigt, sind einfache harmonische Schwingungen in bezug auf die Setzung während der ganzen Folge der Hineinbewegung und eines beträchtlichen Teiles der Herausbewegung. In dem übrigen Teile der Herausbewegung ist die Abweichung von der einfachen harmonischen Lage groß. 2. Die Periode der Hineinbewegung nach der Null ist entschieden größer als die der Herausbewegung aus ihr. 3. Eine theoretische Ableitung dieser Ergebnisse und des Energieverlustes während einer Schwingung kann auf die Annahme gegründet werden, daß der Verlust von dem Zerfall molekularer Gruppen (die endlich kristallinisch sein können) herrührt. 4. Ein plötzlicher Wechsel in den Schwingungsparametern, wenn die abnehmenden Maxima durch eine bestimmte Größe schreiten, ist durch das Vorhandensein eines vorherrschenden Typus von Gruppen erklärbar, die zu zerfallen aufhören, wenn die abnehmende Deformation einen bestimmten Wert erreicht. Die bekannten eigenartigen Temperatur- und Spannungseffekte sind als abhängig von wohlbekannten Bedingungen von Strukturänderungen erklärbar.

Lp.

M. Moulin. Sur la loi de déformation du spiral plat des chronomètres. C. R. **156**, 1518-1521.

M. Moulin. Sur les courbes terminales du spiral droit. C. R. **156**, 1833-1836.

M. Moulin. Sur les courbes terminales des spiraux. Influence des termes du second ordre. C. R. **157**, 446-448.

Der Verf. leitet theoretisch eine Anzahl von Formeln für die Spiralfedern der Taschenuhren ab, die genauere Ergebnisse liefern als die von früheren Forschern (Großmann, Phillips), und ist in der Lage, manche empirischen Regeln der Uhrmacher zu bestätigen. Lp.

J. ANDRADE. Loi de similitude des ressorts circulaires. C. R. **157**, 327-329.

Das vom Verf. abgeleitete Ähnlichkeitsgesetz ermöglicht es, ein Seechronometer anzufertigen, dessen Gangstörungen verschiedener Arten einzeln und ohne Probieren beseitigt werden können. Lp.

V. CRÉMIEU. Effets de la flexion aux points d'attache du fil d'une balance de torsion. C. R. **156**, 617-620.

Zweck der gegenwärtigen Note ist die Ergänzung und Vervollständigung der Bemerkungen, die der Verf. in C. R. **148**, 1161 ff. (1909) über den Gegenstand summarisch gemacht hat (vgl. F. d. M. **41**, 872, 1910). Die gefundenen Beziehungen dürften von Wert sein für die Konstruktion von Seismographen, Dynamometern und Kleinwagen. Lp.

O. EGGERT. Theorie und Anwendung der Drehwage von Eötvös. Zs. f. Vermessw. **42**, 474-483, 505-517.

Die Formen der Drehwage. Bestimmung der Konstanten. Beispiel einer Messung mit der Drehwage. Ermittlung der Krümmung der Niveauflächen. Bestimmung der Lotabweichungen. Bestimmung von Schwerkraftdifferenzen.

Die Angaben beschäftigen sich lediglich mit den geodätischen Ergebnissen der Drehwagenmessungen. „In jedem Falle ist anzunehmen, daß die Drehwage in Zukunft eine wichtige Rolle in der geodätischen und geophysikalischen Forschung spielen wird." Lp.

M. RÉTHY. Über die Anstrengungslinien der Metalle. Ungar. Ber. **27**, 22-44.

Die bisherigen Erklärungsversuche dieser Erscheinungen beruhen auf dem Gleichgewichte der vorausgesetzten Kräfte und können nur das Auftreten einer ausgezeichneten Richtung, aber nicht das Zustandekommen unterschiedener Linienscharen, geschweige denn solcher von überraschender Regelmäßigkeit erklären. Nach Ansicht des Verf. kann diese Erscheinung nur durch vibrierende und nachher gleitende Bewegung der Materie erklärt werden; wir haben es mit einer Interferenz von Wellenbewegungen zu tun, wie H. Osmond bemerkt hat.

Der Verf. veröffentlicht einen Versuch zur mathematischen Beschreibung der Erscheinungen in den Grundzügen, der auf den folgenden Voraussetzungen beruht. Bei der Ableitung der Differentialgleichungen der Bewegung der Materie werden ebene Bewegungen angenommen und allgemein zwei Begriffe einge-

führt: der einer eigenartigen Polarisation der Materie und der einer Gesellung von Druckkräftepaaren zu den Druckkräften. Die Materie scheide sich nämlich bei großer Anstrengung überall und auf homogene Weise in Teile, die „relative“ Bewegungen ausführen und aufeinander nicht nur Druckkräfte, sondern auch Druckpaare ausüben. Bei kleinen Kräften sei bloß die Bewegung des Grundstoffes maßgebend, bei großer Anstrengung der Materie dagegen erleide ein Teil von ihr eine stufige Polarisation von der beschriebenen Art, und die Umsetzung dieser in Wellen gelagerten Bewegungsenergie in andere Energieformen bewirke bei Schwächung der Stabilität das Auftreten der von H. Hartmann beobachteten Anstrengungslinien.

Die mathematische Verarbeitung dieser Voraussetzungen zur Erklärung der Anstrengungslinien der Metalle kann hier nicht näher beschrieben werden. Zuerst werden die allgemeinen Gleichungen aufgestellt, und dann werden sie auf besondere Fälle angewandt: gleichmäßiger Zug eines Metallstreifens, Anstrengungslinien bei Durchlöcherung und Zerschneidung von Metallplatten, das Problem des Ringsektors in spezieller Fassung, Beziehung zwischen Druck und Dilatation, Problem des vollen Ringes. Lp.

A. Lechner. Theorie der Rollreibung. Wien. Ber. **122**, 2069-2098.

Theoretische Untersuchungen über die wälzende Reibung liegen nur sehr spärlich vor. Der Grund dürfte in dem Umstande zu suchen sein, daß bei Bewegungsvorgängen die rollende Reibung gegenüber der gleitenden einfach vernachlässigt wird. Reynolds hat durch seine Versuche einige Aufklärung über das Wesen des Rollwiderstandes gegeben. (1876; Papers **1**, 110-133); aber bis zu einer quantitativen Behandlung sind seine Untersuchungen nicht gediehen. Die vorliegende Abhandlung bezweckt, eine Theorie der Rollreibung auf Grund der Elastizitätstheorie zu geben. Die Betrachtungen gehen auf die Hertzsche Theorie für die Berührung zweier Kugeln und zweier Zylinder zurück. Der Verf. „versucht, das Problem, da es sich nur um die Ermittlung der Druckfläche handelt, durch direkte Integration der Differentialgleichungen in Angriff zu nehmen. Der willkürliche Ansatz der Funktion Π bei Hertz wird dadurch umgangen.“

Zusammenfassung: 1. Eine zylinderförmige Walze erfährt bei ihrer Rollbewegung auf einer Ebene, welche leichter deformierbar ist als die Walze, ein ihrer Drehung entgegengesetztes Moment. 2. Dieses Moment der Rollreibung ist ausdrückbar durch $M = \zeta P$, wobei P der Normaldruck, ζ aber eine Größe ist, die vom Radius der Walze und dem Drucke p pro Längeneinheit und vom Material abhängig ist, derart, daß $\zeta = \eta\sqrt{rp}$. 3. Das Moment der Rollreibung ist kinetisch äquivalent einer im Mittelpunkte der Walze parallel zur Ebene angreifenden Einzelkraft von der Größe $\mathfrak{R} = \eta\frac{\sqrt{rp}}{r}P$. 4. Die aufgestellten Gleichungen stehen im Einklang mit den Experimenten anderer Autoren und sind geeignet, den Unterschied in den Resultaten von Reynolds und Dupuis erheblich zu vermindern.“

Interessant ist auch die Behandlung der Friktionsrollen. Lp.

A. Meyer-Jaccoud. Théorie sur les mouvements qui résultent d'une attraction proportionnelle à la distance et produite par un centre supposé fixe. 33 S. Montreux, Imprimerie A. Leyvraz (S. A.), 1911.

Der Titel entspricht nicht dem Inhalt. Es handelt sich um Versuche an elastischen Körpern (Dynamometern, Spiralfedern), aus denen der Verf. neue Gesetze herleiten will, die den bisher anerkannten widersprechen. Die Beschreibung der Versuche, der keine Abbildung der Versuchsgegenstände oder der dabei gebrauchten Apparate beigegeben ist, bewegt sich in so unbestimmten Ausdrücken, und auch die beigefügten theoretischen Betrachtungen entbehren in einem solchen Grade der mathematischen Präzision, daß es dem Referenten unmöglich gewesen ist, zum Verständnis des vom Verf. erstrebten Zieles zu gelangen.

Die Titel der Abschnitte sind: I. Vorwort. II. Erstes experimentelles Gesetz über die Dynamometer mit statischen, den Gewichten proportionalen Verlängerungen. III. Allgemeine experimentelle Formeln. IV. Allgemeine Bemerkungen über die Tafeln I und II, nebst diesen Tafeln. V. Theorie, gegründet auf die vorangegangenen experimentellen Daten.

In dem zum Bericht übersandten Exemplare sind viele Stellen vom Verf. gestrichen. Lp.

J. Dougall. The method of permanent and transient modes of equilibrium in the theory of thin elastic bodies. Proc. 5. Intern. Math. Congr. 2, 328-340.

Auszug aus der großen Arbeit. „An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic plate (Edinb. R. S. Trans. **41**, 129-228; F. d. M. **35**, 812, 1904). Die Körper, für die der Verf. Lösungen durchgeführt hat oder noch zu ermitteln bemüht ist, sind die Platte, der Kreiszylinder, die Kugelschale und der Kreiskegel. In dem vorliegenden Aufsatz handelt es sich nur um die isotrope Platte und den Kreiszylinder. Lp.

Weitere Literatur.

E. S. Andrews. Further problems in the theory and design of structures. An advanced textbook. London: Chapman & Hall. 244 S. 8°.

K. Becker. Die Waffentechnik in ihren Beziehungen zur Physik und Mathematik. Leipzig: B. G. Teubner. (Kap. V in Technik des Kriegswesens.)

Duquesnay. Résistance des matériaux. 4e édition. Paris: Gauthier-Villars. 164 S. 8°.

H. T. Eddy. The theory of the flexure and strength of rectangular flat plates applied to reinforced concrete floor slabs. Minneapolis: Rogers. VII + 104 S. 8°.

M. Fischer. Statik und Festigkeitslehre. 2. Bd.: Berechnung von statisch bestimmten Fachwerkkonstruktionen. 3. verm. Aufl. Berlin: H. Meußner. XI + 671 S. Lex. 8°.

R. Garnier. Sur les simplifications du potentiel élastique dues à la symétrie cristalline. S. M. F. Bull. **41**, 228-234.

Referat in Abschnitt X, Kap. 5, S. 882.

W. Hauber. Festigkeitslehre. 3. Neudruck. Sammlung Göschen, Bd. 288. Berlin: G. J. Göschen, 127 S. kl. 8°.

H. Hencky. Über den Spannungszustand in rechteckigen ebenen Platten bei gleichmäßig verteilter und bei konzentrierter Belastung. Diss. Darmstadt. 94 S. 8°.

E. Laura. Sopra le vibrazioni armoniche smorzate di un corpo immerso in un fluido. Nuovo Cimento (6) **6**, 59-72.

Abdruck aus Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{21}_2$, 756-761, 811-815 (F. d. M. **43**, 951, 1912).

S. Löschner. Beitrag zur Theorie der Balkenbrücken als räumliche Gebilde. Diss. Aachen.

H. Lorenz. Angenäherte Berechnung rechteckiger Platten. Zs. d. Ver. deutscher Ing. **57**, 623-624.

H. F. Moore. The strength of I-beams in flexure. London: Chapman & Hall. 8°.

H. Müller-Breslau. Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen. 4. verm. u. verb. Aufl. Leipzig: A. Kröner, VIII + 470 S. gr. 8°.

Pietzsch u. Pohl. Die Statik des Hoch- und Tiefbautechnikers. 2 Teile. 1. Teil: Festigkeitslehre, bearb. v. Pietzsch. 2. Teil: Größere Konstruktionen und Eisenbeton. Essen: G. D. Baedecker, VIII + 137 S., VIII + 147 S. gr. 8°.

D. B. Steinmann. Suspension bridges and cantilevers, their economic proportions and limiting spans. 2nd edition, revised. New York: Van Nostrand. IX + VII + 185 S. 24mo.

M. S. Timochenko. Sur la stabilité des systèmes élastiques. Paris: Dumas. 174 S. 8° (Ann. des ponts et chaussées).

P. O. G. Usborne. The design of simple steel bridges. New York: Van Nostrand. VII + 396 S. 8°.

M. B. Wells. Steel bridge designing. Chicago: M. C. Clark. VII + 200 S. 8°.

F. Wittenbauer. Aufgaben aus der technischen Mechanik. II. Bd. Festigkeitslehre. 591 Aufgaben nebst Lösungen und eine Formelsammlung. 2. verb. Aufl. Berlin: J. Springer. VIII + 185 S. 8°.

D. Akustik.

A. Kalähne. Grundzüge der mathematisch-physikalischen Akustik. II. Teil. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. 225 S. 8°. Mit 57 Fig. (Sammlung Jahnke $\mathbf{11}_2$.)

Vgl. die Anzeige des ersten Teils F. d. M. **41**, 910, 1910. Der zweite Teil enthält die Theorie der Schwingungen elastischer Körper, die ja den eigent-

lichen Gegenstand der Akustik bilden. Die Darstellung der behandelten Gegenstände ist so ausführlich gehalten, „daß sie ein vollständiges Bild der Behandlung dieser und ähnlicher Probleme und eine Anleitung und Grundlage zum selbständigen Studium akustischer Probleme in größeren Werken und Originalabhandlungen zu bieten vermag. Aus diesem Grunde ist auch der einleitende Abschnitt aus der Elastizitätslehre hinzugenommen worden.“ Dagegen ist fortgelassen der Abschnitt über Kombinationstöne (verwiesen auf Waetzmann, „Die Resonanztheorie des Hörens.“ Braunschweig, 1912), ebenso die Theorie der Schwingungen von Stäben mit veränderlichem Querschnitt und die Theorie der Resonatoren.

Inhalt: I. Grundlagen der Elastizitätstheorie. Kap. 1. Kinematik der elastischen Körper. Kap. 2. Dynamik der elastischen Körper. Kräfte, Bewegungsgleichungen und Elastizitätskonstanten.

II. Elementare Theorie der von einer einzigen Koordinate abhängigen Schwingungen und Wellen in kontinuierlichen Medien. Eindimensionale Probleme. Kap. 3. Eigenschwingungen vom Typus der Saitenschwingungen bei festen Körpern. Kap. 4. Eigenschwingungen zylindrischer und konischer Gassäulen (Pfeifen). Ebene und kugelförmige Wellen. Kap. 5. Transversal- oder Biegungsschwingungen von Stäben.

III. Theorie der von zwei Raumkoordinaten abhängigen Schwingungen. Eigenschwingungen von Membranen und Platten. Kap. 6. Eigenschwingungen von Membranen. Kap. 7. Eigenschwingungen von Platten. IV. Vervollkommnete Theorie für offene gasgefüllte Hohlräume. Kap. 8. Helmholtzsche Theorie der offenen Pfeifen und kubischen Resonatoren.

Es ist erfreulich, daß durch ein so vortreffliches Werk wie das nun abgeschlossene die Daseinsberechtigung der Akustik, die von autoritativer Seite bestritten worden ist, kräftig erwiesen wird, und daß dem Studenten ein für einen erschwingbaren Preis zu erhaltendes Lehrbuch von dem Werte des vorliegenden zu Gebote steht. Man vergleiche die höchst anerkennende Besprechung von E. Waetzmann im Archiv der Math. u. Phys. (3) **23**, 273-274. Lp.

J. R. Wilton. On plane waves of sound. Phil. Mag. (6) **26**, 440-452.

„Die genaue Gleichung für ebene Schallwellen führt zu einem Ergebnis, das nicht über eine gewisse Zeit hinaus gültig sein kann zufolge der Tatsache, daß die Bewegung unstetig wird. . . . Die Arbeit wurde in der Absicht unternommen, zu entdecken, wann die Unstetigkeit in einem beliebigen gegebenen Falle einsetzt, falls die anfängliche Verrückung und Geschwindigkeit willkürlich vorgegeben sind. Gelegentlich wird gezeigt, daß die übliche angenäherte Lösung, bei der die Verrückung als eine kleine Größe betrachtet wird, deren Quadrat vernachlässigbar ist, sich nicht von der Wirklichkeit weit entfernt, bis die Bewegung die Stufe erreicht, bei der sie unstetig wird.“ Lp.

M. Brillouin. Propagation du son dans un fluide hétérogène non absorbant. C. R. **157**, 1135-1138.

Ableitung des für solche Medien geltenden Satzes: In einer zu den Wellen normalen Röhre vom Querschnitt dS bleibt das Produkt $\frac{\Omega^2}{\Omega_\varphi} U\,dS$ erhalten (Ω Geschwindigkeit des Schalls, Ω_φ die der Phase, U die potentielle Energie); der Fluß der potentiellen Energie UdS bleibt nicht erhalten. „Diese Eigenschaft gilt streng, welches auch die verwickelte Art des Mediums und der Welle ist; sie umfaßt den doppelten Einfluß der Diffraktion und der Abwandlungen durch unendlich kleine Reflexionen längs des getrübten Mediums. Die mittlere potentielle Energie U ist im allgemeinen verschieden von der mittleren kinetischen Energie.“ Lp.

ARIÈS. Remarques sur une forme de la vitesse de propagation du son dans un fluide homogène. C. R. **157**, 110-111.

P. DUHEM. Sur la formule de la vitesse. C. R. **157**, 269.

ARIÈS. Sur la formule de la vitesse du son. C. R. **157**, 386.

P. DUHEM. Sur la vitesse du son. C. R. **157**, 426-427.

In der ersten Note drückt der Verf. die Schallgeschwindigkeit ω durch vier verschiedene Formeln aus, von denen die vierte die Form hat:

$$(4) \qquad \omega = \sqrt{m \frac{p}{\varrho} \frac{\alpha_v}{\alpha_p}}.$$

In ihr ist $m = C_p/C_v^3$, p der Druck, ϱ die Dichte, α_p und α_v sind die beiden Ausdehnungskoeffizienten bei konstantem Druck und konstantem Volumen. Diese Formel „paßt für die homogenen, tropfbaren oder gasförmigen Flüssigkeiten in Dampf- oder in Gasform und enthält nur noch die von der Erfahrung gelieferten Konstanten“. Über diese Wertschätzung entspinnt sich dann ein Streit zwischen Duhem und dem Verf. Lp.

L. CRUSSARD. Sur la déformation des ondes dans les gaz et sur les interférences finies. C. R. **156**, 447-450.

Aus den Grundgleichungen für die vollkommenen Gase leitet der Verf. die Sätze ab: 1. Eine Welle mit anfänglich gleichförmiger Staffelung e bewahrt diesen Charakter; die Front versteift sich nach der Gleichung $e = e_0 - \beta t$ bis zur Epoche $t = e_0/\beta$, wo alle Fronten sich gleichzeitig vereinigen. 2. In allgemeiner Weise gibt die stetige Welle früher oder später Anlaß zu einer Stoßwelle. Dieser Umstand tritt ein, wenn zwei Nachbarfronten F und F' sich vereinigen, d. h. wenn e verschwindet. In ähnlicher Art werden zwei auf Interferenzen sich beziehende Sätze ausgesprochen, die sich in gleicher Kürze nicht wiedergeben lassen. Lp.

É. BOREL. Sur la théorie des résonateurs et la discontinuité des solutions de certains systèmes différentiels. Annali di Mat. (3) **21**, 225-232.

Inhaltlich übereinstimmend mit dem Vortrage „Quelques remarques sur la théorie des résonateurs" des Verf. (F. d. M. 43, 820, 1912). „Gehen solche Betrachtungen nur rein abstrakte Gleichungen an, oder treffen sie auch ein wirkliches Problem? Das ist schwer zu entscheiden bei unserer Unkenntnis der Mechanismen, mittels deren ein elementarer Resonator Energie aussenden oder verschlucken kann: Läßt man als eine Erfahrungstatsache die absolute Unveränderlichkeit der Eigenperioden der elementaren Resonatoren zu, so dürfen wir aus den gewonnenen Ergebnissen schließen, daß die Absorption der Energie nicht der Zeit proportional sein kann während einer über eine Periode hinausgehenden Dauer, wie schwach auch der Proportionalitätskoeffizient sein mag." Lp.

E. H. Barton. Range and sharpness of resonance under sustained forcing and their variation with pitch. Phil. Mag. (6) **26**, 111-143.

Zusammenfassung: „1. In dem Falle von Schwingungen, die unter fortdauernder harmonischer Kräfteeinwirkung ausgeführt werden, ist theoretisch und experimentell nachgewiesen worden, daß die Schärfe der Resonanz direkt der Frequenz der Schwingungen, die hervorgerufen werden sollen, proportional ist, vorausgesetzt, daß der Dämpfungskoeffizient konstant ist. 2. Diese Beziehungen lassen sich auf alle erzwungenen Schwingungen anwenden, welche die obigen Bedingungen erfüllen, seien sie mechanisch, akustisch oder elektrisch. 3. Dieses Prinzip gibt uns eine wertvolle Anleitung für die beste Anordnung mancher Versuche über erzwungene Schwingungen, sowohl solche von bloß qualitativer Art zur Erläuterung von Vorlesungen, als auch solche von streng quantitativem Charakter für Laboratoriumsbestimmungen. 4. In dem Falle von Blechinstrumenten ist das Schwanken der Resonanzbreite mit der Höhe besonders zu beachten. Es dient zur Aufhellung der anscheinend anormalen Erzeugung eines tiefen Tones bei gewissen Instrumenten, indem dabei der Grundton in die aufwärts ausgebreitete Resonanz einbegriffen wird. Die Resonanzbreite dieser Tiefe umfaßt tatsächlich diese beiden Töne und alles, was dazwischen liegt. Verschiedene andere Punkte in der Theorie und Praxis der Blechinstrumente werden auch noch durch die hier dargelegte Theorie aufgeklärt. 5. Die stark gedämpften elektrischen Schwingungen, die gewöhnlich auf Flemings Zymometer vorkommen, liegen außerhalb des Bereiches der einfachen, hier entwickelten Theorie für die Erscheinungen dauernder Kräfteeinwirkung. Es ist jedoch zu erwarten, daß die einfache Theorie auf alle Fälle anwendbar ist, bei denen der Zwang 1. durch Wechselwirkungen von Sinusform oder 2. durch fortdauernde elektrische Wellen des Poulsenschen oder eines andern Systems drahtloser Telegraphie ausgeübt wird." Lp.

E. Waetzmann. Neuere Untersuchungen zur Resonanztheorie des Hörens. Arch. der Math. u. Phys. (3) **21**, 136-143.

Dieses Referat, ein kurzer Auszug aus des Verf. Dissertation „Resonanztheorie des Hörens" (1912) soll „an der Hand einiger Beispiele zeigen, welche Vorteile die Annahme verschieden starker Dämpfung der einzelnen Ohrresona-

toren gewährt, und wie reich an physikalischen Problemen die physikalische Akustik noch ist". Lp.

Cl. Schaefer und E. Juretzka. Theorie der Kombinationstöne an Saiten und Membranen. Ann. der Phys. (4) **41**, 581-592.

Während man bisher in Verfolgung des Vorganges von Helmholtz eine Erweiterung seiner Theorie der Kombinationstöne durch schärfere Ausbildung der Theorie der Schwingungen eines Massenpunktes versucht hat, haben neuere Arbeiten gezeigt, daß die Verhältnisse bei schwingenden Saiten und Membranen anders liegen als bei einem schwingenden Punkte. „Es tritt daher erneut an die Theorie die Aufgabe heran, die Theorie der Kombinationstöne auf elastische Körper, also in erster Linie auf Saiten und Membranen zu erweitern." Die Untersuchung über schwingende Saiten führt die Verf. zu dem Resultat: „Durch Einführung eines quadratischen Dämpfungsgliedes gelingt es, zu zeigen, daß eine schwingende Saite Kombinationstöne enthält; die Amplitudenverhältnisse der Kombinationstöne verhalten sich rücksichtlich der Amplituden der Primärtöne genau ebenso wie bei einem schwingenden Massenpunkt. Erst in diesem Resultat liegt eine nachträgliche Rechtfertigung der bisherigen vereinfachten Behandlung des Problems. Was die relative Intensität der Kombinationstöne zueinander angeht, so hängt sie in der Hauptsache von dem Abstand der Kombinationstöne von den benachbarten Eigentönen der Saite ab, ist also im allgemeinen viel komplizierter als bei den Schwingungen eines „Massenpunktes", dem ja nur eine Eigenschwingung zukommt." Nach der darauf folgenden Behandlung der Schwingungen einer quadratischen Membran wird aus den erhaltenen Ergebnissen der Schluß gezogen, man müsse bei zukünftigen Untersuchungen über Kombinationstöne an Membranen zunächst die Eigenschaften der Membran untersuchen (Dämpfungsverhältnisse, Eigenschwingungen im Bereich der in Betracht kommenden Töne). Lp.

H. Lichte. Über die Schallintensität des tönenden Lichtbogens. Ann. der Phys. (4) **42**, 843-869.

1. „Die von Rihl gemachten Untersuchungen über die Abhängigkeit der Schallintensität von der Bogenlänge, von der Wechselstromstärke und Gleichstromstärke werden auf den Frequenzbereich 220-846 Perioden ausgedehnt und bestätigt. Die Schallintensität des tönenden Lichtbogens ist proportional dem Quadrat der Bogenlänge, ferner dem Quadrat der Wechselstromstärke. Bei konstanter Bogenlänge und konstanter Wechselstromstärke ist die Schallintensität proportional der Gleichspannung am Lichtbogen. 2. Die Abhängigkeit der Schallintensität von dem Kohledurchmesser erreicht bei einer bestimmten Kohlendicke ein Minimum. Die Lage des Minimums ist abhängig von der Stromstärke. 3. Die Abhängigkeit der Schallintensität von der Frequenz des übergelagerten Wechselstromes ist für Frequenzen bis etwa 500 Perioden quadratisch. Für höhere Frequenzen tritt infolge des Einflusses der Hysteresis ein Glied hinzu, das proportional ist der vierten Potenz der Frequenz. Lp.

S. Oppenheim. Zur Analyse von Abklingungskurven. Physik. Zs. **14**, 220-232.

Es handelt sich darum, aus einer empirisch gegebenen Kurve, wenn diese theoretisch von der Form

$$y(t) = u_1 e^{a_1 t} + u_2 e^{a_2 t} + u_3 e^{a_3 t} + \dots$$

sein soll, die unbekannten Konstanten abzuleiten. Verf. teilt unter Hinblick auf eine von F. Aigner und L. Flamm veröffentlichte Methode (F.d.M. **43**, 678 u. 1014, 1912) eine andere Methode mit, welche auf einer geschickten Benutzung von linearen Differenzengleichungen beruht. Dieselbe wird an einer dreigliedrigen Abklingungskurve durchgeführt. A. K.

D. C. Miller. The graphical recording of sound waves; effect of free periods of the recording apparatus. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 245-249.

Beschreibung und Theorie eines von dem Verf. ersonnenen Apparates, des „Phonodeiks", zum graphischen Aufzeichnen von Schallwellen, nebst Beigabe aufgezeichneter Schallkurven. „In dem Phonodeik wird der Schall durch ein konisches Horn auf ein Diaphragma konzentriert, und die Bewegungen dieses letzteren werden photographisch aufgenommen oder auf einen Schirm geworfen." Lp.

Weitere Literatur.

Fr. Kaňka. Über ein akustisch-dynamisches Prinzip. Casopis **42**, 431-453, 567-569. (Böhmisch).

R. G. D. Richardson. A solution of the Rayleigh minimum problem in the theory of sound. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 67.

A. Vaucher. Théorie mathématique de l'échelle musicale. Paris: Gauthier-Villars. 68 S. 8°.

Kapitel 2.

Optik.

A. Theoretische Optik.

R. W. Wood. Optique physique. Ouvrage traduit de l'anglais d'après la deuxième édition. Tome I. Optique ondulatoire. Tome II. Étude des radiations. Paris: Gauthier-Villars. VIII + 433 u. V + 477 S. 8°.

Der erste, von Vigneron besorgte Band des ausgezeichneten Werkes von Wood umfaßt neben Ausführungen allgemeinen Charakters über Wellentheorie und Ausbreitung des Lichtes ausführliche Kapitel über Brechung, Dis-

persion, Interferenz und Beugung, an die sich solche über Polarisation, Kristalloptik und endlich eine kurze Zusammenfassung der Anwendung auf Meteorologie anschließen. Der zweite, von Labrouste bearbeitete Band enthält im Anschluß an den mehr geometrisch-optischen Inhalt des ersten die eigentliche physikalische Optik, die Theorie der Reflexion und Brechung, der Dispersion, der magneto- und elektrooptischen Phänomene, ferner die Fluoreszenz, Phosphoreszenz und Resonanzerscheinungen, die Strahlungstheorie und die Optik bewegter Medien und ein instruktives Kapitel über die Natur des weißen Lichtes. Die ganze Art der Darstellung, die weder einseitig vom Standpunkt des Experimentators, noch von dem des Theoretikers ausgeht, sondern in origineller, echt physikalischer Weise an die Probleme herangeht, macht die nicht immer leichte Lektüre anregend und genußreich. Se.

R. W. Wood. Researches in physical optics, with special reference to the radiation of electrons. Part I. New York: Columbia University Press. VII u. 134 S.

Eine Sammlung der anmutendsten und schönsten Entdeckungen von Wood. (Vgl. Nature **92**, 340.) J. (Lp.)

Sir J. Larmor. On the dynamics of radiation. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 197-216.

T. Levi-Civita. Sir S. Larmor's mechanical model of the pressure of radiation. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 217-220.

Die Abhandlung von Larmor wurde als Referat über den Gegenstand vorgetragen; der Artikel von Levi-Civita, der als Brief an Larmor später diesem eingeschickt wurde, ist dem Abdrucke des Referates als Anhang zugefügt.

An dem Schlusse der Einleitung, die den Grundgedanken und ihrer geschichtlichen Entwicklung gewidmet ist, sagt Larmor: „Wir halten uns für verpflichtet, hier daran zu erinnern, daß ganz ähnliche Beziehungen in glänzender Weise als das Ergebnis eines tastenden Verfahrens der Anpassung einer analytischen Theorie an optische Erscheinungen von MacCullagh schon 1838 aufgestellt sind als ein Entwurf, der wesentlich die ganze Grundlage der physikalischen Optik füllte, besonders aber, daß von ihm in dem folgenden Jahre ihre Form beleuchtet und ihre Ersichtlichkeit dadurch vergewissert wurde, daß er zeigte, sie fügten sich in den Lagrangeschen Algorithmus der „kleinsten Wirkung", der somit in der Physik schon erkannt wurde als der verallgemeinerte knappe Ausdruck und das Kennzeichen der einem dynamischen System eigenartigen Beziehungen. Die Analysis schritt auf der Grundlage des umfassenderen Gebietes von Angaben fort, welche die Forschung über die optischen Erscheinungen in Kristallen lieferte, und demgemäß wurde das Ergebnis erreicht in der verallgemeinerten, für äolotropische Medien passenden Form. Aber MacCullagh konnte nicht ein Modell von der dynamischen Schrittfolge seiner analytischen Gleichungen entwerfen auf den Richtlinien der Eigenschaften der gewöhnlichen materiellen Körper, eine Aufgabe, deren Unbilligkeit wir jetzt

in weiten Grenzen erkannt haben, wenngleich sie zu jener Zeit alle Probleme der physikalischen Deutung beherrschte."

Die einzelnen Teile, in denen die mathematischen Fassungen und Formeln nicht fehlen, sind betitelt: Führung elektrischer Strahlung durch Drähte. Allgemeine Theorie des von Wellen ausgeübten Druckes. Die innerlich mit der Strahlung vergesellschaftete Bewegungsgröße. Abgrenzung der Analogie mit einer gespannten Saite. Bewegungsgröße in fortgeführten Ätherfeldern. Reibungswiderstand eines strahlenden Körpers gegen die Bewegung. Verallgemeinerung zur Zwangskraft in einem beliebigen fortgeführten System.

Der Nachtrag von Levi-Civita soll in einer allgemeineren Anschauung die Larmorsche Vorstellung darstellen, die zu einem mechanischen Modell des Wellendruckes führt. Lp.

W. Wien. Vorlesungen über neuere Probleme der theoretischen Physik (gehalten an der Columbia-Universität in New York im April 1913). Leipzig: B. G. Teubner. IV + 76 S. 8⁰.

Der Verf. hat in dem vorliegenden Heft seine in Amerika gehaltenen Vorträge zusammengestellt. Die Themen Strahlungstheorie und Theorie der spezifischen Wärme, elektrische Leitung in Metallen, Einsteinsche Schwankungen, Theorie der Röntgenstrahlen, lichtelektrische Wirkung und Lichtemission der Kanalstrahlen, beziehen sich in der Hauptsache „auf alle Fragen, die durch die Strahlungstheorie und die aus ihr hervorgegangene Quantentheorie gestellt sind", und werden teils in referierender, teils in neuer, origineller Weise behandelt. Die Art der Behandlung setzt jedoch, wie dies in der komplizierten Natur der Probleme begründet ist, eine zum Teil recht weitgehende Vertrautheit mit dem Stoffe voraus, wenn man zu einer genußreichen Lektüre kommen will. Se.

Éd. Guillaume. La vitesse de la lumière et le principe de Carnot. C. R. **157**, 1138-1140; Arch. sc. phys. et nat. (4) **36**, 401-404.

Der Verf. will zeigen, daß man auf Grund der Emissionstheorie von Ritz bei der Ableitung des Carnotschen Prinzips zu Widersprüchen kommt. Dieselben Schwierigkeiten treten auf, wenn man die Annahme von Ritz in dem Sinne erweitert, daß man die Lichtgeschwindigkeit allgemein als Funktion der Geschwindigkeit der Lichtquelle ansetzt. Se.

W. de Sitter. Een bewijs voor de onveranderlijkheid van den snelheid van het licht. Amst. Ak. Versl. **21**, 1188-1189.

W. de Sitter. Ein astronomischer Beweis für die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Physik. Zs. **14**, 429.

E. Freundlich. Zur Frage der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Physik. Zs. **14**, 835-838.

De Sitter sucht in der Tatsache, daß bei dem Umlauf der Doppelsterne keine Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, wenn

dieselben bei ihrem Umlaufe sich vom Beobachter entfernten oder sich ihm näherten, beobachtet worden ist, einen Beweis für die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit entgegen der Ansicht von Ritz zu erblicken, da die Unterschiede so groß sein müßten, um der Beobachtung zugänglich zu sein. Freundlich macht gegen die Argumente de Sitters unter anderem den sehr begründeten Einwurf, daß man ja gar nichts über die Superposition der Lichtgeschwindigkeit mit der Geschwindigkeit einer sich bewegenden Lichtquelle weiß; die einfache Addition anzunehmen, ist sicherlich im allgemeinen nicht gestattet; im übrigen machen auch die Beobachtungen zur Prüfung dieser schwierigen Fragen große Schwierigkeiten. A. K.

W. de Sitter. Over de onveranderlijkheid van de snelheid van het licht. Amst. Ak. Versl. **22**, 425-427; Physik Zs. 14, 1267.

Eine Vervollständigung der früher vom Verf. mitgeteilten Überlegungen über Beobachtungen an spektroskopischen Doppelsternen zur Herbeiführung einer Entscheidung zwischen den einzelnen Lichttheorien. Hieran anschließend, geht der Verf. auf Arbeiten von Schmidt und Freundlich ein, die sich kritisch mit seiner ersten Mitteilung beschäftigt haben. Se.

K. Försterling. Lichtfortpflanzung in inhomogenen Medien (Theorie der Lippmannschen Farbenphotographie). Physik. Zs. **14**, 265-270.

Die Theorie wird unter zwei speziellen Voraussetzungen durchgeführt: 1. Die Dielektrizitätskonstante ε soll nur Funktion einer Koordinate (z) sein, die Wellennormale soll parallel der z-Achse liegen, und die Welle soll rein transversal sein; ε soll für $z = \pm\infty$ als konstant betrachtet werden dürfen, also nur innerhalb endlicher Grenzen $z_1 < z < z_2$ variieren. 2. Ferner sollen nur solche Fälle zugelassen werden, in denen die Lichtgeschwindigkeit sich zwar beliebig rasch mit z ändert, die gesamte Änderung aber nur kleine Beträge erreicht. Die Betrachtungen werden auf die Lippmannsche Farbenphotographie angewandt; hier wird bekanntlich die lichtempfindliche Platte von der Glasseite aus belichtet, während sich an der Schichtseite ein Quecksilberspiegel befindet. Die hierbei entstehenden Wellen erzeugen in der lichtempfindlichen Schicht periodische Schwärzungen. Die nächstliegende Annahme ist, daß die an jeder Stelle abgelagerte Silbermenge proportional der dort herrschenden elektrischen Energie wird, und daß die Änderung der Dielektrizitätskonstante proportional eben dieser Silbermenge ist. Die unter den genannten Annahmen dargelegte Theorie findet sich dann durch die Erfahrung bestätigt. A. K.

G. H. Livens. On magneto-optical relativity. Phil. Mag. (6) **26**, 362-366.

Wie schon in früheren Artikeln, so wird auch hier vom Verf. eine Modifikation der von ihm sonst anerkannten elektromagnetischen Lichttheorie von Drude behandelt. Lp.

P. Debije. Zur Theorie der anomalen Dispersion im Gebiete der langwelligen elektrischen Strahlung. Verh. Deutsche Phys. Ges. **15**, 777-793.

Die Kurve, die den Brechungsexponenten als Funktion der Schwingungszahl darstellt, weist bei manchen Stoffen, wie z. B. Wasser und Alkohol, manche Eigentümlichkeiten auf. Sie zeigt nämlich a) im Mittel eine stetige Abnahme des Brechungsexponenten mit zunehmender Schwingungszahl von einem recht hohen, der statischen Dielektrizitätskonstante entsprechenden Wert bis zu einem nicht viel von 1 verschiedenen Werte, welcher der Größenordnung nach mit dem optischen Brechungsindex übereinstimmen dürfte. Darüber aber lagern sich b) sekundäre Maxima, die, wie es scheint, für den Verlauf der Absorptionskurve erst an zweiter Stelle verantwortlich gemacht werden können. Insbesondere scheint die charakteristische, unter a) genannte Dispersion stets bei den Substanzen aufzutreten, bei denen aus der Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante auf die Existenz von festen, unveränderlichen, elektrischen Momenten im Innern des Moleküls geschlossen werden muß. In der vorliegenden Abhandlung wird gezeigt, wie die unter a) aufgeführte Eigentümlichkeit unter Zugrundelegung jener Momentenhypothese erklärt werden kann. Am Schluß bemerkt der Verf.: „Wenn auch das Resultat der obigen Überlegungen in quantitativer Hinsicht Verbesserungen bedarf, so glauben wir doch die wesentlichen Eigenschaften der anomalen Dispersion und Absorption im elektrischen Spektrum, sowohl was ihren Verlauf, wie auch ihre Temperaturabhängigkeit betrifft, durch Zugrundelegung der Hypothese der konstanten Momente einer allem Anscheine nach berechtigten theoretischen Bearbeitung fähig gemacht zu haben.“ Lp.

D. A. Goldhammer. Dispersion und Absorption des Lichtes in ruhenden isotropen Körpern. Theorie und ihre Folgerungen. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. VI u. 144 S. 8°. (Math.-phys. Schr. Hrsg. v. E. Jahnke, Nr. 16.)

Eine sehr empfehlenswerte Übersicht über die Theorie der Dispersion und Absorption in Form einer Weiterbildung der einschlägigen Arbeiten von M. Planck. Die theoretischen Ergebnisse werden stets geprüft und veranschaulicht an einem reichen Beobachtungsmaterial. Es liegt in der Natur der Sache, daß die Ausführungen teilweise recht verwickelt ausfallen mußten; deshalb dürfte das Buch wohl kaum zur Einführung in das behandelte Gebiet zweckdienlich sein, sondern ist mehr dem mit dem Stoff bereits Vertrauten zur weiteren Orientierung und Anregung zu empfehlen. Se.

L. Décombe. Sur la viscosité de l'atome. C. R. **156**, 1598-1601; Journ. de Phys. (5) **3**, 869-881.

Der Verf. versucht, auf mechanischer Grundlage eine Deutung der mit der Geschwindigkeit proportionalen Reibungsglieder in den bekannten Grundgleichungen für die Schwingung eines Elektrons im Atom (Dispersions- und Absorptionstheorie usw.) zu geben. Der Weg ist prinzipiell ein ähnlicher wie der, den Lorentz bei der Ableitung der „Stoßdämpfung“ seinerzeit einge-

schlagen hat, und schließt sich eng an eine frühere Arbeit des Verf. über Zerstreuung der Energie an (F. d. M. **43**, 812, 1912). Se.

F. Reiche. Über die Emission, Absorption und Intensitätsverteilung von Spektrallinien. Verh. Deutsche Phys. Ges. **15**, 3-21.

1. Für die Intensitätsverteilung E_0 einer schmalen Spektrallinie wird bei unendlich dünner Schicht eine Formel abgeleitet, die eine zum Schwerpunkt der Linie symmetrische Verteilung ergibt. Die wesentlichen Parameter dieser Kurve sind die Dämpfung $1/v_0$ und die mittlere Geschwindigkeit der Emissionszentren $\bar{q}$. 2. Wesentlich für die spezielle Form der Intensitätsverteilung ist ein Parameter b, der der Dämpfung direkt, der Zentrengeschwindigkeit umgekehrt proportional ist. Ist b groß, dann gilt die Dispersionsverteilung; ist b klein, dann gilt (in nicht zu großen Abständen von der Linienmitte) die Rayleighsche Verteilung. 3. Beim Leuchten der Metalldämpfe in Flammen ist die Stoßdämpfung in weiten Grenzen nur von der Zahl der Flammengasmolekeln für die Volumeneinheit abhängig. Bei elektrisch erregten Gasen im Geißlerrohr ist die Dämpfung dem Druck proportional. 4. Bei unendlich dünnen Schichten und Dispersionsverteilung ist die Halbweite in erster Näherung ein zweigliedriger Ausdruck, dessen erstes Glied dem Druck direkt, dessen zweites Glied dem Druck verkehrt proportional ist. Die Abhängigkeit von der Temperatur ist kompliziert. Herrscht Rayleighs Verteilung, so ist die Halbweite in erster Näherung eine lineare Funktion des Druckes, deren erstes, vom Druck unabhängiges Glied der Wurzel aus der absoluten Temperatur proportional ist. 5. Bei unendlich dünnen Schichten ist die Form der Intensitätsverteilung für Emissions- und Absorptionslinien identisch. Dasselbe gilt für endliche Schichten. 6. Hat E_0 Dispersionsverteilung, so verbreitern sich die Linien bei endlichen Schichten beträchtlich, wenn das Produkt aus Zentrendichte $\mathfrak{N}$ und Schichtlänge l wächst. Hat E_0 Rayleighsche Verteilung, so ist diese Verbreiterung nur gering. 7. Das Verhältnis von Emissions- und Absorptionsvermögen E/A innerhalb einer schmalen, einfachen Spektrallinie ist eine konstante, von Dämpfung und Schichtdicke unabhängige Größe. 8. Ist die Linienstrahlung eine Temperaturstrahlung, wie sie wohl bei Metalldämpfen in der Bunsenflamme der Fall ist, so führt der Wert von E/A auf das Plancksche Strahlungsgesetz. Lp.

A. W. Conway. An electromagnetic hypothesis as to the origin of series spectra. Phil. Mag. (6) **26**, 1010-1017.

Um die in der Erklärung der Serienspektren bei Benutzung der klassischen Elektrodynamik auftretenden Schwierigkeiten zu umgehen, nimmt der Verf. in bekannter Weise erstens die Wirkung magnetischer Kräfte auf die im Atom kreisenden Elektronen an, zweitens aber soll sein Atommodell die Fähigkeit innerer elastischer Schwingungen in derselben Weise etwa wie eine elastische Kugel besitzen. Durch die Kombination dieser beiden Annahmen mit der weiteren, daß ein Elektron nur dann eine ungestörte harmonische Schwingung aussenden kann, wenn seine Bahn auf einer der bei den elastischen Schwingungen sich ausbildenden Knotenflächen (Fläche mit der Amplitude Null) liegt,

ergibt sich ein Frequenzgesetz für die Strahlung des Atoms von der Form der gebräuchlichen Serienformeln. Se.

D. Hilbert. Bemerkungen zur Begründung der elementaren Strahlungstheorie. Gött. Nachr. 1913, 409-416.

An frühere Untersuchungen anschließend (F. d. M. **43**, 969, 1055 u. 1062), stellt der Verf. hier die wichtigsten Gesichtspunkte zusammen, die „nunmehr für die Begründung der elementaren Strahlungstheorie nach der axiomatischen Methode erforderlich erscheinen". Zu den Axiomen, die in den Definitionen der drei Größen: Lichtgeschwindigkeit q, Absorptionskoeffizient α und Emissionskoeffizient η bereits enthalten sind, kommen noch zwei weitere Axiome über den Ausgleich der Gesamtenergie und der Energie jeder einzelnen Farbe, ferner drei Axiome, die von der physikalischen Natur der drei Koeffizienten q, α, η, der Strahlungsdichte und von der Existenz gewisser Verschiedenheiten der Stoffe handeln. Dann wird gezeigt, welche dieser Axiome oder welche Kombinationen dieser Axiome zur Begründung hinreichend sind oder nicht. Se.

E. Pringsheim. Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn D. Hilbert: „Begründung der elementaren Strahlungstheorie". Physik. Zs. **14**, 589-591.

D. Hilbert. Bemerkungen zur Begründung der elementaren Strahlungstheorie. Physik. Zs. **14**, 592-595.

E. Pringsheim. Über Herrn Hilberts axiomatische Darstellung der elementaren Strahlungstheorie. Physik. Zs. **14**, 846-850.

Hilbert hat zum ersten Male die Theorie der linearen Integralgleichungen dazu benutzt, um die Kirchhoffschen Gesetze bezüglich des Gleichgewichtes zwischen Absorption und Emission abzuleiten. (F d. M. **43**, 969 u. 1062, 1912). Die ursprüngliche Absicht, „aus den elementaren, wohldefinierten Begriffen der Emission und der Absorption die Kirchhoffschen Sätze theoretisch zu beweisen", aus dem schönen Enthusiasmus des Forschers geboren, welcher hier eine überraschende, besonders schöne Anwendungsmöglichkeit der mathematischen Theorie erkannte, war natürlich nicht zu erfüllen, ohne daß stillschweigend gewisse fundamentale naturphilosophische Voraussetzungen hinzugenommen wurden, und dies hat die teilweise etwas scharfe, aber gewiß berechtigte und für die Klärung der Theorie nützliche Kritik Pringsheims hervorgerufen. Bei seiner ersten Beweisführung hatte sich Hilbert auf monochromatische Strahlung beschränkt; die Ableitung für diesen Spezialfall könne nicht als Beweis der Kirchhoffschen Sätze gelten. Hilbert hat später das Postulat hinzugefügt, daß die Strahlungsenergien für jede einzelne Farbe im Gleichgewicht sein sollen; es wird ferner vorausgesetzt, daß keinerlei Dispersion und keinerlei Reflexionen stattfinden; für die benutzten Formeln werde auch die Stetigkeit der Größen q (Lichtgeschwindigkeit), η (Emissionskoeffizient), α (Absorptionskoeffizient) vorausgesetzt, während doch gerade in vielen Fällen mit der sprunghaften Änderung dieser Größen beim Durchgange

durch Grenzflächen von Körpern mit physikalisch verschiedener Beschaffenheit zu rechnen ist. In seiner Erwiderung hat Hilbert die hinzuzunehmenden Voraussetzungen in der Form von 5 Axiomen ausgesprochen, die allerdings nicht sämtlich gleichzeitig für die Hilbertsche Ableitung notwendig sind. Es würde hier zu weit führen, diese Axiome selbst und die Pringsheimsche Kritik der axiomatischen Darstellung Hilberts weiter auszuführen; wenn auch die Pringsheimsche Kritik zusammenfassend sagt, daß weder der Versuch einer axiomatischen Darstellung, noch die beiden Versuche einer strengen Herleitung des Kirchhoffschen Gesetzes zu einem brauchbaren Ergebnis geführt haben, hat doch zweifellos die von Hilbert durchgeführte Untersuchung mit Hülfe der Theorie der linearen Integralgleichungen eine weittragende Bedeutung, die erst einmal in das richtige Licht treten wird, wenn die Vorgänge der Emission und Absorption eine einheitliche, mechanische Auffassung zulassen werden. Die heutigen Ideen über Strahlungen sind noch so unfertig, die Darstellung der zurzeit herrschenden Theorien ist selbst bei den hervorragendsten Autoren dieses Gebietes so wenig zufriedenstellend (da im allgemeinen auf jeder Seite stillschweigend neue Hypothesen eingeführt werden), daß dagegen die Hilbertsche Darstellung als ein großer Fortschritt zu bezeichnen ist.

A. K.

C. V. L. Charlier. Das Strahlungsgesetz. Zweite Mitteilung. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. **9**, Nr. 11, 12 S.

Die auf die allgemeine Theorie der Frequenzfunktion gegründete Untersuchung (vgl. F. d. M. **43**, 968, 1912) der Strahlungsformel wird fortgesetzt, und zwar wird versucht, die im ersten Teil erhaltenen Resultate nunmehr an den Ergebnissen der experimentellen Arbeiten zu prüfen. Eine (aus Mangel an geeignetem Material nur) vorläufige Überarbeitung ergibt gute Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie. Bemerkt sei noch, daß zu Anfang der Arbeit auf einen in der ersten Mitteilung untergelaufenen Fehler hingewiesen und in dieser später verbessert wird.

Se.

E. Laura. Sulla formola di Kirchhoff per la propagazione delle onde. Torino Atti **48**, 557-563; Nuovo Cimento (6) **6**, 73-80.

Es handelt sich um den Kirchhoffschen Ausdruck für das Huygenssche Prinzip. In früheren Beweisen (Gutzmer, Beltrami. F. d. M. **26**, 940, 1895) wird angenommen, daß die Vibrationsbewegung zu einer unendlich weit zurückliegenden Zeit begonnen habe. Eine andere Auffassung findet sich bei A. E. H. Love (F. d. M. **35**, 820-821, 1904). Der Verf. zeigt, wie man von dem funktionentheoretischen Standpunkt aus mit der Deutung von x, y, z, t als Koordinaten eines vierdimensionalen Raumes zu der Kirchhoffschen Formel gelangt.

Lp.

J. H. Jeans. Bericht über den Stand der Strahlungstheorie. Physik. Zs. **14**, 1297-1302.

Über die Tagung der British Association in Birmingham berichtet P. P. Ewald in der Physik. Zs. und hebt hier im besonderen ein zusammenfassendes Referat von J. H. Jeans über den Stand der Strahlungstheorie hervor, in welchem wohl alle wesentlichen Ergebnisse der modernen Strahlungstheorien in ausgezeichneter Prägnanz zum Ausdruck kommen. Von besonderem Interesse ist die in dankenswerter Weise hier mitveröffentlichte Diskussion, an welcher sich außer H. A. Lorentz und Jeans auch A. E. Love, J. J. Thomson, J. Larmor, N. Bohr, E. Pringsheim beteiligt haben.

A. K.

W. T. Natanson. Zasady teoryi promieniowania (Prinzipien der Strahlungstheorie). Prace mat.-fiz. **24**, 1-88.

Die Monographie soll zur Einführung des Studierenden in das Gebiet der Strahlungslehre dienen und entspricht demnach einem systematisch geordneten Spezialkolleg. Dabei enthält sie aber auch eine Kritik der Grundbegriffe und der Voraussetzungen moderner Strahlungstheorien und bringt in dieser Hinsicht interessante eigene Beiträge des Verf. Im I. Abschnitte werden die grundlegenden Begriffe der stationären Temperaturstrahlung, der Strahlungsintensität, Strahlungsdichte, des Emissions- und Absorptionsvermögens, der Begriff der schwarzen Strahlung sowie das Kirchhoffsche Gesetz ausführlich erörtert. Der II. Abschnitt umfaßt die Thermodynamik der Strahlung im Vakuum, die Gesetze von Boltzmann, Stefan nnd Wien. Im III. Abschnitte wird das Plancksche elektrodynamische Strahlungsproblem diskutiert und die Hauptgleichung $U_n = \frac{8\pi}{\lambda^4} E_n$ abgeleitet. Dabei wird auch auf die Rayleighsche und Jeanssche Interpretation des Problems kurz hingedeutet. Als besonders erwähnenswert mögen die Abschnitte IV und V hervorgehoben werden. Abschnitt IV ist dem Prinzip der Äquipartition und dem Rayleighschen Gesetz gewidmet. Im V. Abschnitt werden die der Planckschen Theorie zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen behandelt und analysiert. Der Verf. erörtert ausführlich die möglichen Arten der Energieverteilung von n Energieelementen (Quanten) auf N Energierezipienten (Atome) und kommt zu dem Schluß, daß der Wert für die Wahrscheinlichkeit der Verteilung verschieden ist, je nachdem wir voraussetzen, daß wir sowohl die Atome wie auch die Energiequanten individuell wiederzuerkennen vermögen, oder uns mit dem Ansatze begnügen, daß die Atome wohl zu individualisieren, die Quanten aber voneinander nicht zu unterscheiden sind.

Im ersten Falle hat die Wahrscheinlichkeit den Wert

$$P' = \frac{n!\, N! \quad v}{N^n \prod\limits_{i=0}^{i=p} N_i! \prod\limits_{i=0}^{i=p} (i!)^{N_i}},$$

während im zweiten

$$P = \frac{N!}{\prod\limits_{i=0}^{i=p} N_i!}$$

ist. Es ist bemerkenswert, daß die Boltzmannsche Beziehung zwischen der Wahrscheinlichkeit einer Energieverteilung im System und seiner Entropie nur im zweiten Falle gilt. Auf diesen Fall bezieht sich auch die Plancksche Theorie. Der Verf. führt weiterhin aus, daß man bei der Energieverteilung mit zwei entgegengesetzten Grenzfällen zu tun hat. Es kann sich darum handeln, einen großen Vorrat von Quanten unter eine verhältnismäßig kleine Schar von Rezipienten zu verteilen; die letzten werden dann reichlich mit Energie versehen. Es kann aber auch der Fall eintreten, wo nicht alle Rezipienten an der Verteilung teilnehmen, weil ein verhältnismäßig spärlicher Energievorrat unter eine große Anzahl von Atomen verteilt wird. Der Verfasser zeigt, daß der erste Fall zu dem Maxwellschen $\left(\frac{n}{N} = kT\right)$, der zweite zu dem Planckschen Verteilungsgesetze $\left(\frac{n}{N} = \frac{1}{\varepsilon^{h\nu/kT} - 1}\right)$ führt. Die Abhandlung schließt mit einem kurzen Hinweis auf die experimentelle Bestätigung des Planckschen Gesetzes und mit einer Bemerkung über die Einsteinsche Theorie ab. Die oben erwähnten eigenen Beiträge des Verf. wurden schon früher im Krakauer Anzeiger (A) 1911, 134-148 und 1912, 95-103 (F. d. M. **42**, 911 u. **43**, 1037) und zum Teil in der Physikalischen Zeitschrift veröffentlicht.

S. Lo.

E. Bauer. Recherches sur le rayonnement. Ann. de Chim. et Phys. (8) **29**, 5-69, 244-298, 372-454.

Wir berichten über diese große Abhandlung, die eine Übersicht über die Theorie der Strahlung gibt, die einzelnen Theorien gegeneinander abwägt und dann auch eigene theoretische Entwicklungen nebst ihren versuchlichen Bestätigungen bringt, mit den folgenden Stellen der Einleitung.

„Das Problem der Strahlung zerfällt in zwei unterschiedliche Fragen. Die vorliegende Abhandlung umfaßt zwei Teile, von denen jeder einer der Ansichten des Problems entspricht. Der erste ist der Strahlung des schwarzen Körpers gewidmet, der zweite der Emission und der Absorption der Flammen und der glühenden Gase.

Ich werde zuerst versuchen, kurz die Bestrebungen zusammenzustellen und zu erörtern, die darauf abzielten, a priori die Funktion der Temperatur und der Wellenlänge zu bestimmen, deren Existenz Kirchhoff bewiesen hat, und die theoretischen Ergebnisse mit dem Versuch in Einklang zu bringen. Die Arbeiten von Lord Rayleigh, Lorentz, Jeans, Sir J. J. Thomson, Einstein und besonders Max Planck haben uns, wie dies ersichtlich werden wird, auf den Weg zu einer Lösung hingeführt. Allein die Frage bleibt darum doch immerhin eine der dunkelsten und gerade deshalb der wichtigsten der gegenwärtigen Physik.

Der zweite Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit Versuchen über die Strahlung der Flammen Meine Untersuchungen haben bewiesen, daß das Kirchhoffsche Gesetz auf alle Strahlen und Banden Anwendung findet, die ich durchforscht habe, und die eine große Ausdehnung des Flammspektrums vom Violett bis zum äußersten Unterrot ($\lambda = 24\mu$) umfassen. Im Widerspruch zu

den Theorien Pringsheims und anderer Physiker scheinen also die Effekte der Lumineszenz nur eine vernachlässigbare Rolle zu spielen in den Erscheinungen der Emission und Absorption durch die Flamme und die glühenden Metalldämpfe. Eine direkte Erörterung wird übrigens nach meiner Ansicht zeigen, daß die Theorie der Lumineszenz mit den Versuchen Pringsheims selbst in Widerspruch steht.

Aber da, wo starke chemische Reaktionen entstehen im Innern der explosiven Wellen, wie die, welche den blauen Kegel des Bunsenschen Brenners bildet, werden Phänomene der Lumineszenz erzeugt, die recht schwierig zur Anschauung zu bringen sind, wenn die Endtemperatur der Gase sehr hoch ist; denn sie werden in ihrer Reinheit teilweise verdeckt durch die Temperaturwirkung. Ihre Existenz ist jedoch unzweifelhaft, und ich bin dazu gelangt, ihre Bedeutung direkt auszuwerten." Lp.

E. Bauer. Sur la loi du rayonnement noir et la théorie des quanta. Remarques sur un travail de M. J. de Boissoudy. Journ. de Phys. (5) **3**, 641-649.

J. de Boissoudy. Sur la loi du rayonnement noir. Réponse à M. E. Bauer. Journ. de Phys. (5) **3**, 649-651.

Der Verf. des ersten Aufsatzes weist darauf hin, daß die von Boissoudy (C. R. **156**, 1364-1366; Ref. S. 961) vorgenommene Art der Energieverteilung zwischen den Resonatoren nicht den wahrscheinlichsten Zustand (entsprechend dem Maximum der Entropie) darstellt, daß also seine Hypothese nicht nur mit der klassischen Mechanik und Elektrodynamik, sondern auch mit den Prinzipien der Statistik unvereinbar sei. Daran schließen sich noch einige kritische Bemerkungen zur Theorie der spezifischen Wärme und der Hinweis auf eine bereits 1909 von Bauer und Moulin gegebene empirische Formel, die sich mit der von Boissoudy abgeleiteten deckt.

J. de Boissoudy sucht dagegen nachzuweisen, daß die gegen seine Annahmen von Bauer gemachten Einwendungen nicht stichhaltig sind. Se.

M. Planck. Über das Gleichgewicht zwischen Oszillatoren, freien Elektronen und strahlender Wärme. Berl. Ber. 1913, 350-363.

Es wird das thermodynamische Gleichgewicht betrachtet, das sich in einem von elementaren, Wärmestrahlung aussendenden und absorbierenden Oszillatoren erfüllten Raume herausbildet, wenn die Oszillatoren bei jeder Emission auch ein freies Elektron abschleudern. Unter Zugrundelegung bestimmter elementarer Wirkungsgesetze ergeben sich für die Oszillatoren und für die Wärmestrahlung die bekannten Formeln der Quantenhypothese, für die freien Elektronen das Maxwellsche Gesetz der Verteilungsgeschwindigkeit und für das Dissoziationsgleichgewicht zwischen Oszillatoren und freien Elektronen das bekannte thermodynamische Massenwirkungsgesetz. Lp.

S. B. McLaren. The theory of radiation. Phil. Mag. (6) **25**, 43-56; Nature **92**, 165, 233.

Der Verf. versucht, die Ergebnisse der experimentellen Strahlungsforschung mit der Annahme der Existenz des Äthers zu vereinigen, und schlägt zu diesem Zweck den Weg vor, die klassische Mechanik, speziell das Prinzip der kleinsten Wirkung, fallen zu lassen. Er kommt so zu einer Strahlungsformel, die für lange Wellen sich der Rayleighschen nähert, für kurze der Wienschen.
Se.

M. Brillouin. Sur la théorie du rayonnement noir. C. R. **156**, 124-126, 301-304.

Eine der Grundannahmen in Poincarés Arbeit über die Quanten ist die, daß alle Resonatoren streng monochromatisch sind. Der Verf. untersucht, was sich ergibt, wenn man diese Annahme fallen läßt. Die Überlegungen werden an einem einfachen Resonatormodell skizziert, dessen Frequenz eine Funktion der Energie ist.
Se.

P. J. Helwig. Zur Planckschen Strahlungsformel. Zs. f. Math. u. Phys. **62**, 156-162.

Unter Zugrundelegung gewisser Annahmen über die Atome, welche die Existenz innerer Freiheitsgrade voraussetzen, versucht der Verf., ohne quantentheoretische Betrachtung zu einer Herleitung der Strahlungsformel und zu den Formeln für die Atomwärme und die Atomenergie zu gelangen. Se.

H. L. Callendar. Note on radiation and specific heat. Phil. Mag. (6) **26**, 787-791.

Versuch, eine Strahlungsformel (Isochromaten und Isothermen), die mit der Erfahrung in Übereinstimmung ist, auf anderem Wege als dem bekannten abzuleiten. Die Ableitung ohne Zuhülfenahme der Quanten stützt sich im wesentlichen auf die Annahme einer vollständigen Analogie zwischen der Hohlraumstrahlung und einem idealen Gas.
Se.

M. Wolfke. Zur Quantentheorie. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **15**, 1123-1129, 1215-1218.

Der Verf. versucht auf Grund der Annahme, daß die Lichtenergie nicht nur bei ihrer Emission und Absorption, sondern auch im freien Raum einen diskontinuierlichen Charakter habe, eine Ableitung des Planckschen Strahlungsgesetzes. Die genannte Annahme der selbständigen Existenz von Lichtatomen gibt in Verbindung mit einigen axiomatischen Festsetzungen über deren Eigenschaften zunächst eine einfache Beziehung zwischen der Energie und Frequenz eines Lichtatoms, aus der dann unter Zuhülfenahme statistischer Betrachtungen eine Gleichung für die Entropie als Funktion der Strahlungsdichte und der Frequenz folgt; in bekannter Weise folgt aus dieser weiter das Strahlungsgesetz.

Die zweite Mitteilung gibt zur Ergänzung der in der ersten entwickelten Anschauungen eine Ableitung des Maxwellschen Ausdruckes für den

Strahlungsdruck, dann eine Verbesserung der Ableitung des Verteilungsgesetzes und endlich Zahlenwerte für die in diese Theorie eingehenden Konstanten.
Se.

J. ISHIWARA. Beiträge zur Theorie der Lichtquanten. Tôhoku Sc. Rep. **1**, 67-104 (1912).

Der Grundgedanke der hier gegebenen Überlegungen, der in der weitestgehenden Weise durchgeführt wird (stationäre Strahlung im freien Raum, Strahlung in festen Körpern, allgemeine elektromagnetische und optische Erscheinungen), ist die Einführung des „Strahlungsmoleküls". Der Verf. denkt sich die Strahlungsenergie aus diskreten Quanten ε (den Strahlungsmolekülen) derart zusammengesetzt, daß ε eine Funktion der Frequenz ν ist, eine bestimmte Energie und Bewegungsgröße hat, sich mit der Geschwindigkeit c im Raum fortbewegt und endlich sich nach den Gesetzen des Zufalles mit andern derartigen Quanten (die zu demselben ν gehören) zu Komplexen assoziieren und wieder dissoziieren kann.
Se.

J. DE BOISSOUDY. Sur la loi du rayonnement noir et la théorie des quanta. C. R. **156**, 765-768.

J. DE BOISSOUDY. Sur la constante de la loi du rayonnement. C. R. **156**, 1364-1366.

J. DE BOISSOUDY. Sur une nouvelle forme de la loi du rayonnement noir et l'hypothèse des quanta. Journ. de Phys. (5) **3**, 385-396.

Im Anschluß an die bekannte tiefgehende Untersuchung Poincarés über die Notwendigkeit der Quantenhypothese zur Ableitung des Strahlungsgesetzes untersucht der Verf. in der ersten Note die Folgerungen, welche sich bei gewissen Abwandlungen der von Poincaré zugrunde gelegten oder als notwendig erkannten Hypothesen ergeben. In der zweiten Note wird für die Konstante des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes ein Ausdruck hergeleitet, der nur bekannte universelle Konstanten enthält, und eine Vergleichung mit den versuchlich gefundenen Werten vorgenommen. Die Übereinstimmung ist eine sehr gute mit den von Féry und Drecq angegebenen Werten; dagegen ergibt sich eine erhebliche Abweichung von den Werten von Planck (theoretisch) und von Kurlbaum. Der Inhalt des dritteu Artikels deckt sich mit dem der beiden Noten der C. R. und gibt das Gesagte ausführlicher wieder.
Se.

J. DE BOISSOUDY. Sur l'équilibre d'un gaz en état de dissociation binaire. C. R. **156**, 61-64.

Durch thermodynamische Überlegungen gewinnt der Verf. die Formel:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{v(1-x^2)} = MT^3\, e^{-\varkappa/RT}$$

(x Dissoziationsgrad, v Volumen, M eine Konstante, $\varkappa$ Dissoziationswärme). Mit

Hülfe einer in einer früheren Veröffentlichung ausgesprochenen Hypothese wird auf Grund kinetischer Betrachtungen die Formel erhalten:

$$(2) \qquad \frac{x^2}{v_* T^3} = \frac{k}{\theta}(1-x)e^{-x/RT},$$

wo k eine Konstante, θ die mittlere Zeit ist, während der die Rotationsgeschwindigkeit der Molekeln sich nicht ändert. Die Gleichung (2) fällt mit (1) zusammen, wenn θ konstant ist. „Nun würde aber θ proportional dem Volumen sich ändern, wenn die Rotationen durch die Stöße bestimmt würden. Die Dissoziationsgeschwindigkeit hinge also auch von dem Volumen ab oder von der Konzentration, was der Erfahrung widerspricht. Wir werden also dazu geführt, die Dauer θ als charakteristisch für jede Substanz anzusehen und die molekulare Rotation als eine Folge der Lichtstrahlung." Lp.

M. La Rosa. Sopra una esperienza di confronto fra la teoria della relatività e le correzioni meccaniche sulla emissione della luce. Nuovo Cimento (6) **5**, 47-49.

Der Verf. setzt nochmals den von ihm im Vorjahre gemachten Vorschlag auseinander (F. d. M. **43**, 789, 1912), weil Tolman diesen in seinem Aufsatz „Some emission theories of light" (F. d. M. **43**, 973, 1912), in welchem ähnliche Gedanken ausgesprochen sind, nicht erwähnt hat. Lp.

P. Ehrenfest. Een mechanisch theorema van Boltzmann en zijne betrekking tot de quanttheorie. Amst. Ak. Versl. **22**, 586-593.

Bei der rein thermodynamischen Ableitung des Wienschen Gesetzes spielt die Änderung der Frequenz und der Energie einer reversibel und adiabatisch in einem vollständig reflektierenden Raume komprimierten Strahlung eine wesentliche Rolle. Der Verf. erörtert die Frage, ob eine ähnliche Beziehung bei Systemen von Oszillatoren bestehe, die nicht rein harmonisch schwingen, und wenn dies der Fall ist, wie man diese Beziehung dann heuristisch weiter verwerten könne. Die erste Frage ist allgemein bejahend zu beantworten; auf die zweite kann der Verf. zunächst nur an einem besonderen Beispiel Auskunft geben. Se.

A. Korn. Neue mechanische Vorstellungen über die schwarze Strahlung und eine sich aus denselben ergebende Modifikation des Planckschen Verteilungsgesetzes. Physik. Zs. **14**, 632-633.

Eine einfache Geschwindigkeitsschwankung, bei welcher eine Geschwindigkeitskomponente u zur Zeit $t = -\infty, 0, +\infty$ die Werte $-a\sqrt{T}, 0, +a\sqrt{T}$ annimmt, ist dargestellt durch die Formel

$$u = a\sqrt{T}\left\{\frac{1+e^{-\frac{4\pi}{\beta}tT}}{1-e^{-\frac{4\pi}{\beta}tT}} - \frac{\beta}{2\pi}\frac{1}{tT}\right\} \quad (\beta \text{ beliebige positive Zahl}).$$

Die zweite Ableitung nach der Zeit, auf welche es bei Strahlungen ankommt, läßt sich in der Form

$$\int_0^\infty \frac{A\nu^2}{\sqrt{T}\left(e^{\frac{\beta\nu}{2T}}-1\right)} \sin \nu t \, d\nu$$

darstellen, wo A eine Konstante ist. Denken wir uns die schwarze Strahlung durch solche Schwankungen veranlaßt, so erhalten wir eine monochromatische Schwingungsenergie proportional mit

$$\frac{\nu^4}{T\left(e^{\frac{\beta\nu}{2T}}-1\right)^2},$$

während dieselbe bei Planck

$$\frac{\nu^3}{e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1}$$

ist. Das sich so ergebende Verteilungsgesetz genügt, wie das Gesetz von Planck, allen Erfahrungstatsachen. A. K.

A. Marx. Die Theorie der Akkumulation der Energie bei intermittierender Belichtung und die Grundlage des Gesetzes der schwarzen Strahlung. Ann. der Phys. (4) **41**, 161-190.

Der negative Ausfall von Versuchen, die mit sehr schwacher Lichtenergie eine Akkumulationszeit mittels intermittierender Belichtung bis zur Dauer von 10^{-7} sec messen wollen, und das Auftreten eines lichtelektrischen Effektes bei 10^{-8} Erg/cm² sec ist bei Annahme isotroper Lichtverteilung mit der Grundgleichung der Elektronentheorie und mit Plancks Strahlungsgesetz nicht im Einklang. Zur Erklärung können angenommen werden: I. Konzentrationsstellen unter Aufrechterhaltung der Grundgleichung der Elektronentheorie, II. Fortlassen des Dämpfungsgliedes der Grundgleichung; dann werden die Konzentrationsstellen entbehrlich. Die Erörterung von I. zeigt, daß dann im transversal schwingenden Lichtstrahl das Volumen der Konzentrationsstellen gleich dem Wirkungsvolumen des schwingenden Elektrons ist, die Grundgleichung der Elektronentheorie nicht aufrechterhalten werden kann, ohne mit den lichtelektrischen Erscheinungen in Widerspruch zu geraten. Es liegt die Möglichkeit nahe, die eingeführten Konzentrationsstellen nach der alten Wellentheorie als Ausnahmeamplituden zu deuten, andererseits die Möglichkeit, sie im Sinne Einsteins als Lichtquanten zu deuten. Es besteht keine Möglichkeit für die Erklärung der Versuche, wenn man das Dämpfungsglied unter Beibehaltung isotroper Lichtverteilung lediglich verringert. Nur bei völligem Fortlassen dieses Gliedes bleibt man im Einklang mit den experimentellen Ergebnissen, falls man isotropes Licht beibehalten will. Das völlige Fortlassen entspricht der von Planck zur Begründung des Gesetzes der schwarzen Strahlung eingeführten Annahme. Die sich hierbei ergebenden Schwierigkeiten sind so beträchtlich, daß diese Annahme gegen die der Konzentrationsstellen unter

Beibehaltung des Dämpfungsgliedes keine Vorzüge haben dürfte. Das Weglassen des Dämpfungsgliedes stößt bei den Erscheinungen der Röntgenstrahlen auf noch größere Schwierigkeiten als bei den lichtelektrischen. Die Annahme von Konzentrationsstellen in den Lichtwellen, deren Volumen gleich dem Wirkungsvolumen des schwingenden Elektrons ist, ergibt bei Berücksichtigung der Akkumulationszeit die Möglichkeit, die Ionisation der Gase in Abhängigkeit von der Wellenlänge des Lichtes zu erklären. Lp.

E. Pringsheim. Zur Theorie der Lumineszenz. Physik. Zs. **14**, 129-131.

Die schwingungsfähigen Gebilde, wie sie in der modernen Strahlungstheorie z. B. für die Erklärung der Aussendung eines Spektrums angenommen werden, wie sie in der Dispersionstheorie vorausgesetzt werden, haben einen ganz ähnlichen Charakter wie die Resonatoren in der Planckschen Theorie der Temperaturstrahlung. Es ist daher anzunehmen, daß bei der Lumineszenz und der schwarzen Strahlung ein gewisser Parallelismus gefunden werden muß. Dies gilt natürlich nur für solche Lumineszenzvorgänge, bei denen Emissions- und Absorptionsvermögen von der Strahlungsdichte unabhängig sind, z. B. nicht für die Erscheinungen der Fluoreszenz und der Phosphoreszenz. A. K.

O. Wiener. Anschauliche Ableitung und Erweiterung des Greenschen Satzes und daraus unmittelbar fließende Kirchhoffsche Fassung des Huygens-Fresnelschen Prinzips. Leipz. Ber. **65**, 123-130.

Kirchhoff ging vom Greenschen Satz aus, führte aber eine Hülfsfunktion in seine Betrachtung ein, die in dem Endergebnis verschwand. Die dadurch bekundete Weitläufigkeit der Ableitung war die Veranlassung für eine ganze Reihe von Forschern, jene Hülfsfunktion entbehrlich zu machen, insbesondere einen möglichst nahen Anschluß an den Greenschen Satz zu gewinnen. Die wichtigsten Schritte hierbei haben wohl Gutzmer und Beltrami getan (F. d. M. **26**, 940, 1895), während es Larmor (F. d. M. **34**, 878, 1903) darum zu tun war, dem Ergebnis eine möglichste Anschaulichkeit zu verleihen. Die Ausführungen Wieners dienen dem Zwecke, der ganzen Ableitung von vornherein eine physikalische Anschauung unterzuschieben, und sind in Anbetracht der großen Bedeutung des Kirchhoffschen Satzes nicht überflüssig. Während aber die Früheren von dem Greenschen Satze als etwas Bekanntem ausgingen, wird hier zunächst versucht, diesem Satze eine ähnliche Anschaulichkeit zu verleihen, wie sie dem Gaußschen Satze von dem Kraftfluß zukommt. Sodann erfährt dieser Satz eine kleine Erweiterung, die es ermöglicht, den Kirchhoffschen Satz ohne Zwischenrechnung daraus zu gewinnen. Lp.

B. Caldonazzo. Traiettorie dei raggi luminosi e dei punti materiali nel campo gravitazionale. Nuovo Cimento (6) **5**, 267-300.

In der neuen Gravitationstheorie werden die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes von Grund aus gewandelt, so daß die Bahn des Punktes im allgemeinen von der Art der Änderung der Lichtgeschwindigkeit abhängt, wodurch jene Bahn mit der des Lichtstrahls verknüpft wird. In der vorliegenden Abhandlung werden die Beziehungen ermittelt, die zwischen jenen Bahnen bestehen in dem allgemeinen Fall eines beliebigen masselosen statischen Feldes, in welchem also c eine beliebige Funktion der Koordinaten ist.

In § 1 wird auf die Form zurückgegangen, welche die Gleichungen des Lichtstrahles zufolge des Fermatschen Prinzips annehmen. Durch Vergleichung dieser Gleichungen mit denen der Bahn des materiellen Punktes in der neuen Theorie wird ein interessantes Ergebnis gewonnen: Die von einem und demselben Punkte in einer gegebenen Richtung ausgehenden Bahnen eines Massenpunktes bilden eine Kurvenschar, die als Grenzkurve den Lichtstrahl besitzt, der von demselben Punkte und in derselben Richtung ausgeht. Mit andern Worten: Wenn die Geschwindigkeit eines Massenpunktes die des Lichtes erreicht, so fällt seine Bahn mit dem Lichtstrahle zusammen (§ 2). In dem Falle eines Feldes, dessen äquipotentiale Flächenparallele (horizontale) Ebenen sind, wird die Lichtgeschwindigkeit ein Maximum, wo der Strahl horizontal ist; folglich erreichen der Lichtstrahl und der Massenpunkt, die horizontal und in demselben Augenblick von demselben Punkte ausgehen, Punkte derselben Horizontale gleichzeitig, und die Horizontalprojektionen der Bewegung verhalten sich wie die Anfangsgeschwindigkeiten (§ 3). Daraus folgt, daß, wenn die Bahn des Lichtstrahls gegeben ist, die des Massenpunktes bestimmt werden kann.

Ist nun c einer positiven Potenz der Höhe z proportional, so hat das Licht in dem höchsten Punkte der Bahn die größte Geschwindigkeit und kommt normal auf der Horizontalebene an; außerdem beschreiben zwei beliebige Strahlen immer ähnliche Bahnen; somit sind auch die Bahnen zweier Massenpunkte ähnlich, die in den Punkten, wo sie horizontal gehen, Geschwindigkeiten haben, die denen des Lichtes in denselben Punkten proportional sind (§ 5).

I. Für $c = \sqrt{z}$ (Abraham) beschreibt der Strahl eine gewöhnliche Zykloide, der Massenpunkt eine Fermatsche Zykloide. II. Für $c = z$ (Einstein) beschreibt der Strahl einen Kreis, der Massenpunkt eine Ellipse. III. Für $c = z^2$ (Einstein und Abraham) beschreibt der Strahl eine elastische Kurve, der Massenpunkt eine affine Kurve zur elastischen. Die sowohl von dem Strahl, als auch von dem Massenpunkte gebrauchte Zeit, um von dem Punkte, wo sie sich horizontal bewegen, bis zu dem Punkte zu gelangen, wo $c = 0$, ist endlich und der Höhe proportional in dem ersten Fall, unendlich in den beiden anderen.

Der Fall des Kreises, der schon von A. Garbasso untersucht war (Archiv für Optik **1**, 250, 1908), ist, abgesehen von dem der geradlinigen Fortpflanzung, der einzige, bei dem die Wellenflächen Kugeln sind, mit dem Unterschiede, daß sie nun exzentrische Kugeln sind. (Weil eben die Wellenflächen Kugeln sind, konnte Einstein für diesen Fall sein Äquivalenzprinzip zulassen.)

Die für solche Fälle erhaltenen Resultate, bei denen das Feld ebene und parallele äquipotentiale Oberflächen besitzt, insbesondere für die drei speziellen Fälle, haben ihr Interesse lediglich auf der theoretischen Seite für die Gravitationstheorie, da in dem betrachteten Felde die Lichtgeschwindigkeit auf einer gewissen Ebene verschwinden müßte, sind aber auch für die gewöhnliche Optik

nicht zu übersehen, da ja optische Medien betrachtet werden, in denen der Brechungsindex mit dem Abstande von einer gegebenen Ebene variiert. Lp.

L. Brillouin. Propagation d'un signal lumineux dans un milieu dispersif. C. R. **157**, 914-916.

Der Verf. knüpft an die Abhandlung von Sommerfeld in der Weber-Festschrift an (F. d. M. **43**, 964, 1912) und führt die Lösung des Problems auf die Auswertung eines bestimmten Integrals zurück. Aus ihm ergeben sich „Vorläufer" des Signals und das Hauptsignal. „Die Vorläufer werden im allgemeinen unmerkbar sein, und tatsächlich wird die Ankunft des Signals nur beobachtbar sein, wenn die Amplitude der vibratorischen Bewegung beträchtlich ist. Der Durchgang des Pols über den Integrationsweg liefert eine scharfe (willkürliche) Definition der Ankunft des Signals. Die so definierte Signalgeschwindigkeit verschmilzt mit der Gruppengeschwindigkeit für alle Signale, deren Periode einer normalen Dispersion entspricht. Die Werte der beiden Geschwindigkeiten trennen sich im Gebiete der anomalen Zerstreuung. Die Signalgeschwindigkeit bleibt stets unterhalb der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, gleich ihr für die Periode mit dem Index 1." Lp.

D. N. Mallik. Fermat's law. Phil. Mag. (6) **26**, 144-158.

„Fermats Gesetz der schnellsten Fortpflanzung des Lichtes ist $\delta/dt = 0$, wo t die Zeit der Fortpflanzung ist und δ das Operationszeichen der Variationsrechnung. Da nun in der Wellentheorie der Brechungsindex μ der Fortpflanzungsgeschwindigkeit umgekehrt proportional ist, so ist die obige Formel offenbar die nämliche wie $\delta/\mu\, ds = 0$, eine Gleichung, die bekanntlich analytisch eine vollständige kinematische Feststellung aller optischen Phänomene in sich schließt." Die nähere Ausführung dieses Gedankens ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes, der über die Gesetze der einfachen und der Doppelbrechung hinweg bis zur elektrodynamischen Lichttheorie führt. Lp.

G. Dimmer. Zur Theorie des Photoplanimeters von Cornu. Wien. Ber. **122**, 913-932.

Die Grundformeln für den Gebrauch zur Ermittlung der Schwingungsrichtung und des Polarisationsbetrages werden entwickelt. Die Cornuschen Korrektionsformeln, die ebenfalls dargestellt werden, ergänzt der Verf. für mehrere Fälle. Gleiche Überlegungen werden auf das Polarisationsphotometer von Martens in dem zweiten Teile der Arbeit angewendet. Lp.

G. Szivessy. Zur Theorie des Babinet-Soleilschen Halbschattenkompensators. Ann. der Phys. (4) **42**, 555-568.

In den Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **15**, 201, 1913 hat der Verf. ein solches Instrument beschrieben, das eine zehnmal größere

Genauigkeit der Einstellung besitzt als der gewöhnliche Kompensator nach Babinet-Soleil. Die Empfindlichkeit der Halbschattenvorrichtung wird bei diesem neuen Instrument reguliert, und dadurch kann die einer Lichtquelle beliebiger Farbe und Intensität entsprechende maximale Empfindlichkeit hergestellt werden. Der vorliegende Aufsatz liefert einige Angaben über die genauere Theorie des Instrumentes. Lp.

A. G. Rossi. Alcune trasformazioni delle formole su la riflessione e la polarizzazione ed alcune esperienze sulla pressione della luce. Torino Atti **48**, 297-343; Nuovo Cimento (6) **6**, 111-143, 145-163.

Für das Jahrbuch kommt nur der erste, theoretische Teil der Abhandlung in Betracht. Über die in ihm bewirkte Transformation der Formeln für Reflexion und Polarisation äußert sich der Verf. so: „Wenn man statt des Verhältnisses der Sinus das Verhältnis der Tangenten des Einfalls- und des Brechungswinkels einführt, so hat man eine offenbar nicht mehr konstante Größe wie den gewöhnlichen Brechungsindex, sondern eine wachsende oder abnehmende Funktion der Inzidenz, je nachdem der Index größer oder kleiner als 1 ist. Diese Größe hat jedoch eine recht beachtenswerte physikalische Bedeutung, weil sie den Faktor darstellt, mit dem man das Quadrat der gebrochenen Größe multiplizieren muß, um die Intensität zu erhalten. Ich habe daher gedacht, es sei angezeigt, sie in einem Symbol X auszusondern und sie gelegentlich als unabhängige Veränderliche zu betrachten statt der Inzidenz. Die Einführung dieses Symbols (oder eines andern analogen, wie $z = X/n$) in die Fresnel-Maxwellschen Formeln führt sie, wie sich zeigen wird, in bemerkenswert homogene Formeln über." Die Wiedergabe der Formeln eignet sich nicht für ein Referat. Lp.

F. Schwers. Ancora su una formula per l'indice di rifrazione dei miscugli binarii. — Risposta a una critica del sig A. Mazzucchelli. Rom. Acc. L. Rend. **22**$_1$, 447-452.

Zurückweisung der von Mazzucchelli im Vorjahre geübten Kritik an der bezüglichen Arbeit des Verf. (F. d. M. **43**, 859, 1912). Lp.

B. Söderborg. Eine Untersuchung bezüglich des Zusammenhanges zwischen Absorption, Dispersion und Fluoreszenz des Lichtes. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. **9**, Nr. 7, 58 S.; Ann. der Phys. (4) **41**, 381-402.

Eine Experimentalarbeit zur Prüfung der theoretisch von früheren Forschern erhaltenen Dispersionsformeln. Lp.

L. P. Wheeler. The dispersion of metals. Phil. Mag. (6) **25**, 661-679.

Die Arbeit vergleicht die bekannten Messungsergebnisse für Silber, Kupfer, Gold, Nickel und Kobalt mit den theoretisch hergeleiteten Dispersionsformeln, die zweckmäßige Umgestaltungen erfahren.

„Aus einer Vergleichung der Daten mit den Dispersionsformeln, die von der Elektronentheorie geliefert werden, folgt: a) Die Anzahl freier Elektronen ist nicht eine Konstante, sondern nimmt zu mit der Häufigkeit der durch die einfallende Strahlung erregten Ströme, langsam und gleichmäßig im Infrarot, schneller in den Bereichen, wo die Metalle durchscheinender sind. Die Erklärung dieser Erscheinung ist so verwickelt mit dem Mechanismus metallischer Absorption im allgemeinen, daß ihre völlig befriedigende Aufklärung zurzeit unmöglich scheint. b) Die Dispersion der sogenannten dielektrischen Konstante für diese Metalle kann bestimmt werden. Lp.

J. Koch. Über die Dispersion gasförmiger Körper im ultravioletten Spektrum. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. 8, Nr. 20, 25 S.

Der Hauptinhalt der Arbeit ist experimentell. Doch sind theoretische Überlegungen zugrunde gelegt. Wir führen aus den Schlußsätzen nur die folgenden an: „Bei der Aufstellung der hierher gehörigen Differentialgleichungen hat man keine Rücksicht auf eine gegenseitige Beeinflussung der schwingenden Systeme genommen. Es ist hier ein Versuch gemacht, durch Einführung gekoppelter Elektronen die Drudesche elektrische Deutung der chemischen Valenz aufrechtzuerhalten, ohne den gewöhnlichen Wert $1,77 . 10^7$ der spezifischen Ladung der Elektronen aufzugeben zu brauchen.“ Lp.

A. Ferguson. On certain small corrections in a Newton's rings system. Phil. Mag. (6) **25**, 501-506.

Messungen Newtonscher Farbenringe, die bei schief einfallendem Lichte elliptisch erscheinen, können eine genaue und leichte Methode zur Bestimmung des Einfallswinkels liefern. Dieser Gedanke wird theoretisch näher untersucht. Lp.

H. M. Macdonald. The diffraction of light by an opaque prism. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 430-432.

Die Diffraktion des Lichtes durch ein undurchsichtiges Prisma ist von W. H. Jackson erörtert worden (F. d. M. **35**, 843, 1904). Er verglich ein vollständig leitendes Prisma mit einem vollständig absorbierenden Prisma. Die Lösung für das letztere ist die gewöhnliche; sie wird unter der Annahme erhalten, daß die elektrischen und magnetischen Kräfte über dem Teil der Oberfläche des absorbierenden Körpers verschwinden, der im Schatten ist, und daß die elektrischen und magnetischen Kräfte außerhalb des Schattens über der Oberfläche dieselben Werte haben wie in der einfallenden Welle. Die Annahme vernachlässigt den Übergangs- (creeping) Effekt an dem Rande des Schattens. Zweck der Note ist, die genaue Lösung für ein vollkommen absorbierendes Prisma zu erhalten. Lp.

A. Wiegrefe. Die Beugung ebener Lichtwellen bei beliebiger Lage der

Einfallsebene gegenüber der beugenden Kante. Ann. der Phys. (4) **42**, 1241-1256.

In der Arbeit ist auf Grund neuer strenger Lösungen der Wellengleichung, die bei Anwendung derselben Methode noch für weitere Beugungsprobleme wichtig sein werden (z. B. für die Viertelebene), der Einfluß behandelt, den die Einführung der beliebig unsymmetrischen Lage der Einfallsebene ebener Wellen auf eine Reihe von Beugungsproblemen mit einer beugenden Kante ausübt. Im Anschluß daran sind noch zahlreiche Fälle betrachtet, in denen die strenge Theorie von Sommerfeld wegen der unendlichen Leitfähigkeit der unendlich großen Schirme oder auch schon allein wegen der unendlichen Ausdehnung der Schirme keine Beugungserscheinungen trotz der Anwesenheit der beugenden Kante liefert. Lp.

M. Wolfke. Über die Abbildung eines Gitters außerhalb der Einstellebene. Ann. der Phys. (4) **40**, 194-200.

Der Verf. führt die Untersuchung auf Grund der allgemeinen Abbildungsgleichungen, die er früher aufgestellt hat (F. d. M. **43**, 985, 1912), um dadurch die Richtigkeit dieser Gleichungen zu prüfen. Er beschränkt sich auf ein undurchlässiges Gitter und auf symmetrische Aperturdiaphragmen. Zur Beleuchtung wird paralleles Licht angewendet, weil bei dieser Beleuchtung die Unterschiede von der Abbeschen Theorie am deutlichsten hervortreten. In dem allgemeinen Falle, wenn mehrere Hauptmaxima zur Wirkung gelangen, bestätigt das Experiment vollständig die entwickelte Theorie. Es zeigt sich nämlich, daß auch bei paralleler Beleuchtung das Abbild durch die Verschiebung des Gitters stark beeinflußt wird, was die Abbesche Theorie nicht voraussieht. Lp.

Lord Rayleigh. On the passage of waves through fine slits in thin opaque screens. Lond. Roy. Soc. Proc. (A) **89**, 194-219.

In einer früheren Abhandlung (F. d. M. **38**, 745, 1897) hat der Verf. Lösungen gegeben, die auf den Durchgang von Licht durch sehr enge Spalten in unendlich dünnen, vollständig undurchsichtigen Schirmen anwendbar sind, für die beiden Fälle, bei denen die Polarisation entweder parallel oder senkrecht zu dem Spalte ist. Jetzt dehnt er die Rechnung auf Spalte aus, deren Breite mit der Wellenlänge λ vergleichbar ist. Der Gegenstand hat ein praktisches Interesse im Zusammenhang mit Beobachtungen über den Zeeman-Effekt. Lp.

G. H. Livens. On rotational optical activity of solutions. Phil. Mag. (6) **25**, 817-826.

Der Zweck der gegenwärtigen Mitteilung ist der Nachweis, daß eine einfache Modifikation der Drudeschen Theorie, die auf fast unangreifbaren theoretischen Betrachtungen beruht, eine recht gute Erklärung aller bekannten Versuchsergebnisse liefert. Lp.

H. Pettersson. Zur Theorie der Molekularstöße. Physik. Zs. **14**, 109-112.

Es wird angenommen, daß die Abhängigkeit des Schwingungszustandes eines Resonators in einer gewissen Abhängigkeit von der Zeit nach dem Zusammenstoß ist, und über diese Abhängigkeit werden einige einfache Annahmen gemacht. Bei diesen Annahmen läßt sich zeigen, in welcher Weise die beobachtete Emission und Absorption eines Körpers von der Kollisionshäufigkeit in demselben abhängen muß. Einige neuerdings von Ångström, E. v. Bahr und Wood entdeckte Phänomene auf dem Gebiete der Absorption und Sekundärstrahlung von Gasen erhalten durch diese Untersuchungen eine einfache Erklärung. A. K.

Cl. Schaefer. Bemerkung über die Dämpfung der Serienspektrallinien. Ann. der Phys. (4) **41**, 866-870.

Nachtrag zu früheren Abhandlungen des Verf. (F. d. M. **40**, 906 u. 907, 1909). Als interessantes Ergebnis ist hervorzuheben, daß alle Linien einer Spektrallinie gleich stark gedämpft werden. Lp.

Fr. Croze. Les classifications des spectres d'après leur structure et leurs variations magnétiques. Journ. de Phys. (5) **3**, 882-900, 962-970.

Aus der Besprechung der in den letzten Jahren gemachten Beobachtungen ergeben sich einige allgemeine Bemerkungen über die möglichen Klassen der Spektren. „Es erhellt aus dieser Darlegung, daß das beste Kennzeichen, über das wir im Augenblick verfügen, um die Klassifizierung der Spektren vorzunehmen, in der Einwirkung des magnetischen Feldes liegt." Lp.

W. Voigt. Über die Intensitätsverteilung innerhalb einer Spektrallinie. Physik. Zs. **41**, 377-381.

In einer früheren Abhandlung über diesen Gegenstand (F. d. M. **43**, 979, 1912) hat der Verf. angenommen, daß die Breite einer Spektrallinie im wesentlichen durch zwei Ursachen erzeugt ist, durch die Stöße zwischen den schwingenden Elekronen und infolge des Dopplereffektes. Er erhält durch seine Rechnungen eine etwas allgemeinere Formel für das Produkt aus Brechungs- und Absorptionsindex als die im allgemeinen angenommenen Dispersionstheorien, und nur in besonderen Grenzfällen geht seine Formel in die übliche über. Durch Vergleichung mit neueren Experimentaluntersuchungen zeigt er, daß seine neue Formel die Erfahrungen besser darstellt. A. K.

W. Voigt. Einige Bemerkungen über das Verhalten von Spektrallinien mit Trabanten im Magnetfeld. Ann. der Phys. (4) **42**, 815-824.

Angeregt durch einige im Göttinger Institut ausgeführte Beobachtungen, hat sich der Verf. mit den Liniensystemen beschäftigt, die als „Hauptlinien mit Trabanten" bezeichnet werden; bei ihnen übertrifft die Stärke der einen Linie weit diejenigen der übrigen, ohne daß aber die Beteiligung einer größeren Anzahl von Elektronen an ihr in dem Zeeman-Effekt zum Ausdruck kommt. In dem vorliegenden Aufsatz wird gezeigt, wie die Koppelungstheorie derartige Fälle auffassen läßt, und wie aus dieser Auffassung merkwürdige und wiederholt beobachtete Formen des Zeeman-Effektes sich unmittelbar erklären. Man hat sich bei Linien mit Trabanten in dem einfachsten Falle, daß beide nach Triplets aufspalten, eine größere Zahl gleichartiger, aber untereinander magnetisch nicht gekoppelter Elektronen für die Hauptlinien mit einer kleineren Zahl oder auch mit nur einem Elektron für jeden Trabanten gekoppelt zu denken. Damit ist sofort das allgemeine Schema für die Behandlung derartiger Fälle festgestellt. Lp.

W. Voigt. Über elektrische und magnetische Doppelbrechung. IV. Gött. Nachr. 1913, 215-220.

Über die drei ersten Teile dieser Arbeit vergleiche man F. d. M. **43**, 1027, 1912. Der Verf. wendet seine in den vorangehenden Teilen berechneten Formeln für den inversen Zeeman-Effekt auf sehr starke Felder an, um eine Vergleichung seiner Ergebnisse mit denen von A. Sommerfeld in Ann. der Phys. (4) **40**, 748 (Referat umstehend) zu ermöglichen. Mittels einer ähnlichen Erörterung wie im dritten Teil der Arbeit ergibt sich, daß das ohne Magnetfeld vorhandene (enge) Triplet von Absorptionslinien in starken Feldern sich in ein normales Zeeman-Triplet aus verbreiterten Linien verwandelt, ein Resultat, das Sommerfeld für den direkten Zeeman-Effekt abgeleitet hatte. Das zugrunde gelegte Elektronenmodell hält der Verf. wegen der sich ergebenden Linienverbreitung nicht für geeignet zur Erklärung der Beobachtungen von Paschen und Back, die Sommerfeld zu seinen Untersuchungen Anlaß gegeben hatten, und die aus der Koppelungstheorie des Verf. in sehr vollkommener Weise folgen. Lp.

P. P. Ewald. Dispersion and double-refraction of electrons in rectangular grouping (crystals). Proc. 5. Intern. Math.-Kongr. **5**, 241-244.

Man kann die äolotropischen Eigenschaften eines Kristalls entweder den äolotropischen Eigenschaften jeder einzelnen seiner Molekeln beilegen (Langevin), oder man kann voraussetzen, die letzten den Kristall bildenden Bestandteile seien isotropisch, und die Äolotropie beruhe auf der Anordnung dieser Teilchen zu regelmäßigen Raumgruppen (Bravais, Sohncke, Schoenflies). „Diese letztere Theorie trägt allen möglichen Symmetrieklassen in Kristallen Rechnung, und alle qualitativen Schlüsse aus dieser Theorie scheinen die Richtigkeit des Grundgedankens zu zeigen. Es scheint deshalb anmutend, zu erfahren, bis zu welcher Ausdehnung die Doppelbrechung als Folgerung aus der Anordnung isotropischer Molekeln betrachtet werden kann. Es kommt so, daß die Umgrenzung des Problems zu einer schärferen Behandlung von Fragen führt, die in der allgemeinen Brechungstheorie in

durchsichtigen Körpern auftreten.“ Wir führen die Ableitung einer Dispersionsformel an, die in dem Falle einer kubischen Anordnung die genaue Formel von Planck-Lorentz liefert, und unter einer anderen Annahme die von T. H. Havelock stammende invariante Beziehung. Lp.

W. Voigt. Über die anormalen Zeeman-Effekte der Wasserstofflinien. Ann. der Phys. (4) **40**, 368-380.

A. Sommerfeld. Der Zeeman-Effekt eines anisotrop gebundenen Elektrons und die Beobachtungen von Paschen-Back. Ann. der Phys. (4) **40**, 748-774.

W. Voigt. Weiteres zum Ausbau der Koppelungstheorie der Zeeman-Effekte. Ann. der Phys. (4) **41**, 403-440.

W. Voigt. Die anormalen Zeeman-Effekte der Spektrallinien vom D-Typus. Ann. der Phys. (4) **42**, 210-230.

Diese Arbeiten sind entstanden, um die merkwürdigen „schönen und einfachen Ergebnisse“ theoretisch abzuleiten, die F. Paschen und E. Back in der Veröffentlichung „Normale und anomale Zeeman-Effekte“ (Ann. der Phys. (4) 39, 897-932, 1912) über ihre experimentellen Resultate bekannt gemacht haben. Statt eines Referates über die eingeschlagenen Wege geben wir aus der dritten Arbeit folgende Sätze der Einleitung:

„In einer früheren Notiz (Nr. 1 der Arbeiten) habe ich gezeigt, daß aus den von mir zur Ableitung der komplexen Zeeman-Effekte einzelner Linien benutzten Grundformeln sich in den einfachsten Fällen von Koppelungen verschiedener Linien unter Umständen Erscheinungen ergeben, die mit den Beobachtungen an den Wasserstofflinien durchaus übereinstimmen. Ich habe nach diesem Ergebnis die Überzeugung ausgesprochen, daß dieselben Grundlagen auch zur Darstellung der Erscheinungen an den D-Duplets ausreichen würden; aber ich habe wegen der Komplikation des Problems und wegen der voraussichtlichen Willkürlichkeiten, welche bei ihm die große Zahl der wirksamen Freiheitsgrade bedingen möchte, die Behandlung des Problems nicht versucht. Indessen habe ich mich doch dem Eindruck nicht verschließen können, daß die H-Duplets für eine entscheidende Prüfung der Theorie aus dem Grunde weniger günstig sind, weil die Zeeman-Effekte der einzelnen Linie nicht zweifellos feststehen. Ich habe mich demgemäß neuestens der Behandlung der D-Duplets, bei denen dieser Mangel nicht vorliegt, und bei denen zugleich die Art der Einwirkung stärkster Felder auf den Zeeman-Effekt zweifellos aufgeklärt ist, zugewendet, und die genaue Untersuchung hat hier überraschenderweise bei allen Komplikationen der Rechnung prinzipiell doch einfache Verhältnisse und eine völlige Wiedergabe der bisherigen Beobachtungen durch die Theorie ergeben, so daß das Resultat als eine Stütze der Koppelungshypothese bezeichnet werden darf.

Seit meiner ersten Notiz hat Sommerfeld versucht, von einer ganz andern Vorstellung ausgehend, das Eintreten eines normalen Triplets bei Serienduplets und -triplets in starken Feldern zu erklären. Ich glaube nicht, daß

der Versuch bisher als geglückt bezeichnet werden kann; das Sommerfeldsche Modell, das ich schon früher erwähnt (Magneto- und Elektrooptik. F. d. M. **39**, 877, 1908) und kürzlich zu andern Zwecken auch behandelt habe (Über elektrische und magnetische Doppelbrechung. F. d. M. **43**, 1027, 1912), gibt nämlich für die einzelnen Konstituenten der Duplets und Triplets nicht die beobachteten magnetischen Zerlegungen. Dasselbe führt nur drei Freiheitsgrade und nur normale (Lorentzsche) Feldwirkungen ein; da ist es nicht zu verwundern, daß schließlich normale Triplets resultieren. Bei den D-Duplets handelt es sich aber, wie unten erörtert wird, um 12 Freiheitsgrade und anormale Feldwirkungen; unter solchen Umständen in starken Feldern normale Triplets zu erklären, ist eine beträchtlich schwierigere Frage.

Der Nachweis, daß alle Serienduplets und -triplets jene normalen Zeeman-Triplets liefern, ist übrigens noch nicht erbracht: die bisherigen Wahrnehmungen an dem O-Tripel ($\lambda = 3947$ $A - E$) scheinen mir z. B. ein solches Verhalten nicht zu erweisen. Während hier die p-Komponenten sich zu einer merklich scharfen Linie zusammenziehen, überdecken die s-Komponenten auch bei den stärksten bisher zugänglichen Feldern auf jeder Seite derselben noch einen größeren Raum als das anfängliche Triplet.

Es wird sich übrigens bei den nachstehenden theoretischen Erörterungen zeigen, wie auch die Theorie es keineswegs wahrscheinlich macht, daß jedes System gekoppelter Linien in starken Feldern zu einem normalen Triplet wird."

Aus dem Schluß der letzten Arbeit möge der Satz hier Platz finden: „Die zu höherer Annäherung fortgeführte Untersuchung ergibt das allgemeine Resultat, daß einige in meiner letzten Arbeit formulierte Ergebnisse eine gewisse Ergänzung verlangen." Lp.

K. Körner. Über die Ritzsche Theorie des Zeeman-Effektes. Diss. Berlin. 54 S. 8⁰.

K. Körner. Die Ritzsche Theorie des normalen Zeeman-Effektes. Verh. Deutsche Phys. Ges. **15**, 69-74.

„Die Ritzsche Theorie des normalen Zeeman-Effektes führt dann und nur dann zu keinen Widersprüchen mit der Erfahrung, wenn man für ω (Winkelgeschwindigkeit, mit der die Achse des Oszillators einen Kreiskegelmantel beschreibt) den Wert $-e\, H/2mc$ einführt (e Ladung, m Masse des Elektrons, H Magnetfeld). Sowie ω merklich hiervon abweicht, treten die von Voigt geäußerten Bedenken in Kraft. Damit wird auch die Cottonsche Theorie hinfällig, die, soweit sie überhaupt etwas Sicheres hierüber aussagen kann, $\omega = \pm\, eH/mc$ liefert." Lp.

P. Zeeman. Researches in magneto-optics. With special reference to the magnetic resolution of spectrum lines. London: Macmillan and Co., Ltd. (Macmillan's Science Monographs.) XVI u. 219 S.

Zeeman gibt eine Übersicht über unsere Kenntnisse in dem von ihm 1896 eröffneten und von ihm und anderen gepflegten Gebiete der Physik. Vgl. Nature **92**, 313-315. J. (Lp.)

P. Debije und A. Sommerfeld. Theorie des lichtelektrischen Effektes vom Standpunkte des Wirkungsquantums. Ann. der Phys. (4) **41**, 873-930.

„Um unsere Auffassung in vorläufiger Form zu charakterisieren, stellen wir sie den beiden bisher ausgebildeten Anschauungen von der Natur des lichtelektrischen Effektes gegenüber: der Vorstellung einer auf Resonanzwirkung beruhenden Auslösung der Elektronen durch die auffallende Strahlung, bei der die Elektronenenergie vor dem Auffallen der Strahlung bereits im Atom vorhanden ist (Lenard), und der Lichtquantenhypothese, bei der die Elektronenenergie der wirkenden Strahlung entstammt (Einstein).“

„Dem ersteren Standpunkt entsprechend betrachten auch wir einen Resonanzvorgang, bei dem das Elektron durch die elektrischen Kräfte der auffallenden Welle in Bewegung gesetzt wird, unter denselben einfachen Bedingungen, die sich in der Dispersionstheorie berührt haben. Dabei bestimmen wir aber die Dauer dieses Resonanzvorganges, die Akkumulationszeit τ, aus der Hypothese des Wirkungsquantums; sie wird um so länger ausfallen, je kleiner die auffallende Intensität ist. Hierdurch wird die Anhäufung einer Energiemenge ermöglicht, die unabhängig ist von der Intensität des Lichtes und von seiner Wirkungsdauer und die Größenordnung der beobachteten lichtelektrischen Energie hat. Wir brauchen also nicht auf die Energie des Atoms zurückzugreifen, sondern sehen als Quelle der lichtelektrischen Energie die primäre Strahlung an. In dieser Hinsicht nähern wir uns also dem zweiten der genannten Standpunkte, ohne deshalb nötig zu haben, über die Struktur der Strahlung neue Voraussetzungen zu machen. Auch sonst stimmen unsere Resultate wesentlich mit denen der Lichtquantenhypothese überein.“

Nach der Wiedergabe dieser der Einleitung der Abhandlung entnommenen Stelle müssen wir uns auf die Wiedergabe der Disposition dieser umfangreichen Abhandlung beschränken. § 1. Einleitung und Allgemeines. I. Monochromatisches Licht. § 2. Vollkommene Resonanz zwischen auffallender Welle und Eigenschwingung. § 3. Unvollständige Resonanz. § 4. Die Kurven der Wirkung und der kinetischen Energie. § 5. Ergänzungen und Modifikationen. § 6. Einfluß der Dämpfung. II. Natürliches Licht. § 7. Allgemeiner Ausdruck für die durch natürliches Licht erzeugte lichtelektrische Energie und die zugehörige Akkumulationszeit. § 8. Schwankungen der Energie und der Akkumulationszeit. § 9. Nachträgliche Berechnung zweier Integrale. § 10. Zusammenfassende und kritische Bemerkungen zu der vorgetragenen Theorie. Vergleich mit der Erfahrung.

Aus § 10, S. 923: „Die Haupteigenschaft unseres analytischen Mechanismus ist diese: Das Atom ist ein in sich abgeschlossenes System, das aus den umgebenden Feldern mittels eines resonierenden Elektrons Energie aufspeichern kann. Wann diese Abgeschlossenheit durchbrochen wird und aus dem Atominnern Energie nach außen abgegeben wird, bestimmt die Konstante h. Die physikalische Bedeutung von h wäre hiernach die, daß h bestimmt, wann eine quasielastische Bindung gesprengt oder ein Ventil am Atom geöffnet wird. Von der eventuellen Strahlungsdämpfung abgesehen, geschieht vermöge dieser Ventilwirkung die Energieabgabe diskontinuierlich und quantenhaft.“ Lp.

P. Debije. Über den Einfluß der Wärmebewegung auf die Interferenzerscheinungen bei Röntgenstrahlen. Verh. Deutsche Phys. Ges. **15**, 678-689.

Für einen einfachen Spezialfall, der so gewählt ist, daß die charakteristischen Eigentümlichkeiten des wirklich vorliegenden Falles der Hauptsache nach zum Ausdruck kommen können, wird gezeigt, daß 1. die Wärmebewegung keinen Einfluß hat auf die Schärfe der Interferenzmaxima, und daß 2. ihr Einfluß auf die Intensität die Auffindung von Strahlung mit einer Wellenlänge wesentlich $< 10^{-9}$ cm bei mittlerer Temperatur verhindert, auch wenn dieselbe mit merklicher Intensität in der primären Strahlung enthalten ist. Lp.

P. Debije. Über die Intensitätsverteilung in den mit Röntgenstrahlen erzeugten Interferenzbildern. Verh. Deutsche Phys. Ges. **15**, 738-752.

Schon Laue hatte bemerkt, es sei denkbar, daß die Wärmebewegung zur Erklärung herangezogen werden müsse. „Indem ich die Überlegungen der vorigen Mitteilung auf einen dreidimensionalen wirklichen Kristall übertrage, möchte ich zeigen, daß der letztere Standpunkt der richtige ist. Die Theorie ergibt für den Richtungseffekt auf Grund der Wärmebewegung eine einfache Formel, welche die Eigentümlichkeiten der Beobachtungsresultate durchaus zu erklären imstande ist. Darüber hinaus liefert sie eine neue, auf Intensitätsmessungen gegründete Methode zur Bestimmung der Wellenlänge, wenn man die Wärmebewegung als bekannt ansieht. Oder man kann umgekehrt z. B. die Intensitätsmessungen benutzen, um die Stärke der Wärmebewegung zu bestimmen und insbesondere die Frage nach der Nullpunktsenergie zu lösen.“ Lp.

P. Debije. Spektrale Zerlegung der Röntgenstrahlung mittels Reflexion und Wärmebewegung. Verh. Deutsche Phys. Ges. **15**, 857-875.

Während die vorstehend angezeigten Arbeiten durch die Lauesche Beugung veranlaßt waren, ist die vorliegende durch die von Bragg entdeckte Erscheinung der Reflexion von Röntgenstrahlen an Kristallflächen angeregt, die von Moseley und Darwin dazu benutzt wurde, die spektrale Intensitätsverteilung in einem Röntgenstrahlenbündel eingehend zu untersuchen. „Das Resultat ist nach der vorhergehenden Note über Röntgenstrahlen eigentlich vorauszusehen; denn zwischen der Laueschen Beugung und der Braggschen Reflexion besteht durchaus kein prinzipieller Unterschied. In dem einen wie in dem andern Falle kommen Intensitätsmaxima zustande in denjenigen Richtungen, in denen die sekundäre Strahlung einzelner Atome sich verstärken kann wegen der gegenseitigen, aus der Optik geläufigen Phasenbeziehungen. Der rein praktische Unterschied liegt in der verschiedenen Art der Anregung der beiden Fälle, der wesentlich nur geometrische Unterschiede in der Verteilung der Interferenzintensität bedingt.“ ... „Trotz der Mängel

dürften die abgeleiteten Formeln das Wesentliche der beobachteten Erscheinungen beschreiben.“ Lp.

J. Herweg. Über die Beugungserscheinungen der Röntgenstrahlen am Gips. Physik. Zs. **14**, 417-420.

Der Gips zeigt zwei ausgezeichnete Richtungen, in denen er außerordentlich einfache Beugungsbilder liefert, die sich auch rechnerisch gut deuten lassen und mehrere Schlüsse auf den molekularen Aufbau und Wellenlänge der Beugungsbilder zulassen. Es sind die Richtungen des „seidigen“ und des „muschligen“ Bruches. Läßt man unter einem flachen Winkel, etwa 10 Grad, ein feines Röntgenstrahlenbündel in der Ebene einer dieser ausgezeichneten Richtungen auf eine dünne Gipsplatte fallen, so erhält man Beugungsbilder (zur Hälfte reflektiert, zur Hälfte durchgehend), die auf einem Kreise liegen. Es läßt sich der Schluß ziehen, daß die Moleküle des Gipskristalls nach den beiden erwähnten Spaltrichtungen in geraden Linien angeordnet sind, nur daß man nicht, wie beim gewöhnlichen Strichgitter, nur eine Schicht von Strichen hat, sondern eine große Anzahl hintereinander, welche Veranlassung zu Interferenzen geben.

A. K.

P. P. Ewald. Zur Theorie der Interferenzen der Röntgenstrahlen in Kristallen. Physik. Zs. **14**, 465-472.

Es werden schwingungsfähige Dipole angenommen, welche den Kristall in Gestalt eines Raumgitters erfüllen. Dieselben werden durch Vorbeistreichen von Wellen zu Schwingungen angeregt, welche sich nach der Zeit in periodische Glieder auflösen lassen. Unter dieser Annahme werden Rechnungen über die bei dem Durchgange von Röntgenstrahlen durch Kristalle auftretenden Schwingungserscheinungen angestellt. Die Endformeln stimmen im wesentlichen mit den Laueschen Formeln überein.

A. K.

G. Wulff. Über die Kristallröntgenogramme. Physik. Zs. **14**, 217-220.

Verf. schließt sich im wesentlichen der Laueschen Theorie an, nach welcher die von den primären Röntgenstrahlen getroffenen Kristallmoleküle zu Schwingungszentren werden und die von ihnen ausgesandten Wellen untereinander interferieren. Zwischen den Kegeln der maximalen Helligkeit zeichnen sich diejenigen aus, welche dem Gangunterschiede Null entsprechen. Die Achsen dieser „Nullkegel“ sind Punktreihen des Raumgitters, welche in einer „Netzebene“ liegen. Alle Kegel haben außer dem primären Strahle noch eine gemeinschaftliche Erzeugende, die das Hauptmaximum bildet. Dieses Hauptmaximum ist zugleich das Helligkeitsmaximum der Netzebene. Da dieses Maximum durch Zusammensetzung einer ganzen Schar Maxima gebildet wird, die den einzelnen in der Netzebene gelegenen Punktreihen entsprechen, so übertrifft seine Helligkeit bei weitem die Helligkeit der einzelnen Komponenten. Es liegt nahe, vorauszusetzen, daß auf den Photogrammen nur dieses Maximum sichtbar wird, so daß die Punkte der Kristallröntgenogramme die Nullmaxima der Netzebenen des Raumgitters vorstellen. Bei Ausarbeitung dieses Grundgedankens

kommt man auch zu dem Resultat, daß die Erscheinungen wesentlich von der Lage des Kristalls gegen den einfallenden primären Strahl abhängen, und daß also jeder Lage des Kristalls eine besondere Interferenzfigur und ein besonderes Kristallröntgenogramm entsprechen kann. A. K.

G. Wulff und N. Upsenski. Über die Interferenz der Röntgenstrahlen. Physik. Zs. **14**, 785-787.

Die von Wulff (vgl. vorstehendes Referat) ausgearbeiteten Vorstellungen über die Kristallröntgenogramme werden durch Versuche gestützt, indem das Verhalten der den Kristall verlassenden Maxima bei dem Auftreffen auf einen zweiten Kristall studiert wird. A. K.

L. S. Ornstein. Zur Frage der Interferenz von Röntgenstrahlen. Physik. Zs. **14**, 941-947.

Entwicklung der Theorie auf Grundlage der Braggschen Vorstellung, die Einwände von Wulff gegen dieselbe werden als nicht stichhaltig erklärt. A. K.

M. Laue. Kritische Bemerkungen zu den Deutungen der Photogramme von Friedrich und Knipping. Physik. Zs. **14**, 421-423.

Gegenüber der Annahme des Verf., nach welcher die für die Auffassung über die Natur der Röntgenstrahlen fundamentale Bedeutung besitzenden Photogramme durch Interferenzen der schwingungsartig zu denkenden Röntgenstrahlen infolge der gitterartigen Struktur der Kristalle zu erklären sind, haben sich noch zwei andere Annahmen geltend gemacht; die eine rührt von Stark her, der die Korpuskulartheorie der Röntgenstrahlen vertritt und sich denkt, daß die Korpuskeln in gewissen Richtungen, den Kristallschächten, am leichtesten zwischen den Kristallatomen hindurchkommen; jedem Kristallschacht solle dann ein Intensitätsmaximum auf der photographischen Platte entsprechen. Die zweite abweichende Auffassung ist die der beiden Bragg, welche annehmen, daß die Helligkeitsmaxima durch Spiegelung an gewissen Ebenen entstehen, deren Lage durch das Raumgitter bedingt ist. Verf. unterzieht beide Annahmen einer Kritik und kann in keiner der bisherigen Veröffentlichungen ein ernstes Argument gegen die Interferenzauffassung erblicken. A. K.

M. v. Laue. Zur Optik der Raumgitter. Physik. Zs. **14**, 1040-1041.

L. S. Ornstein. Zur Optik der Raumgitter. Physik. Zs. **14**, 1229-1231.

M. v. Laue. Zur Optik der Raumgitter. II. Physik. Zs. **14**, 1286-1287.

Die von Ornstein gegen die Interferenztheorie und für die Reflexionstheorie vorgebrachten Argumente erkennt v. Laue nicht an; seine etwas

scharfe Polemik ruft eine Replik Ornsteins hervor, auf welche v. Laue in seiner zweiten Notiz antwortet. A. K.

M. v. Laue. Röntgenstrahleninterferenzen. Physik. Zs. **14**, 1075-1079.

In diesem auf der 85. Naturforscherversammlung in Wien gehaltenen Vortrage gibt der Verf. eine anschauliche Darstellung der Überlegungen, welche zu der wichtigen Entdeckung der Kristallröntgenogramme durch v. Laue, Friedrich und Knipping führten. Er führt zugleich die Grundzüge der Theorie auf Grundlage der Interferenzannahme durch, mit einem Ausblick auf das, was uns diese Erscheinungen für die Theorie der Kristalle und die Auffassung des Wesens der Röntgenstrahlen bieten können. A. K.

G. Zemplén. Schwingungszahl der Röntgenstrahlen und Quantenhypothese. Physik. Zs. **14**, 423-424.

Verf. deutet einige Einwände an, welche sich aus den Beugungserscheinungen bei dem Auftreffen von Röntgenstrahlen auf Kristalle gegen die Quantenhypothese ergeben, an; er will diese Einwände aber durchaus nicht als entscheidend ansehen und erwähnt einige Versuche zur Hebung der Schwierigkeit. A. K.

W. Seitz. Bemerkung zu der Arbeit von G. Zemplén: Schwingungszahl der Röntgenstrahlen und Quantenhypothese. Physik. Zs. **14**, 659-660.

Verf. bemerkt zu der Überlegung von Zemplén (vgl. vorstehendes Referat), daß die von Zemplén hervorgehobene Schwierigkeit leicht beseitigt wird, wenn man den Wirkungsgrad der Kathodenstrahlen bei Erzeugung von Röntgenstrahlen größer als $^1/_{100}$ annimmt, nicht, wie Zemplén aus Versuchen von Carter geschlossen hat, von der Ordnung $^1/_{1000}$. A. K.

W. L. Bragg. The diffraction of short electromagnetic waves by a crystal. Cambr. Phil. Soc. Proc. **17**, 43-57.

Laues Erklärung der von ihm selbst und von andern beobachteten Erscheinungen an den Röntgenstrahlen befriedigen nicht. Bragg schlägt für die Bildung des Interferenzmusters eine neue Erklärung vor, die den beobachteten Erscheinungen völlig gerecht wird. J. (Lp.)

Ch. Fabry et H. Buisson. Sur les étalons de longueur d'onde. Journ. de Phys. (5) **3**, 613-622.

Bericht über die in den letzten Jahren ausgeführten Messungen und ihre Bedeutung für die Kenntnis des Spektrums. Lp.

E. Perucca. Analisi di vibrazioni luminose debolmente ellittiche e descrizione di un nuovo apparecchio a penombra. Torino Atti **48**, 201-221; Nuovo Cimento (6) **5**, 351-380.

Unter den verschiedenen Methoden zur Analyse einer schwach elliptischen Lichtschwingung befindet sich die recht genaue und sicherlich sehr bequeme, die Brace angegeben hat in dem Aufsatz „A half shade elliptical polariser and compensator" (Phys. Rev. **18**, 70, 1904 u. **19**, 28, 1904). Nach dieser Methode mißt man das Azimut ψ der größeren Achse und das Verhältnis φ der kleineren Achse zur größeren der Ellipse. Die Analyse der Schwingung ist dann vollständig und ist unter dieser Form beispielsweise sehr bequem bei der Untersuchung des zirkularen Dichroismus. Der Verf. liefert eine Studie über den Braceschen Kompensator (Messung von φ) und schickt voraus eine Studie über den Halbschattenpolarisator von Lippich, der zur Messung von φ benutzt wird. Lp.

E. Perucca. Sull' analizzatore ellittico di Bravais-Zakrzewski. Nuovo Cimento (6) **6**, 179-193.

Bei der von Zakrzewski getroffenen Anordnung kommt es nicht vor, daß der Kompensator genau $\frac{1}{4}\lambda$ ist. Die Formeln für diesen Fall sind ganz einfach und können von der Ordnung des Kompensators unabhängig gemacht werden. Lp.

R. Ladenburg und E. Reiche. Über selektive Absorption. Ann. der Phys. (4) **42**, 181-209.

Zusammenfassung: I. Es werden zwei verschiedene Arten selektiver Absorption definiert: die Gesamtabsorption schlechthin, wenn die Lichtquelle ein schmaler Streifen aus einem kontinuierlichen Spektrum ist; die Linienabsorption, wenn als Lichtquelle eine Spektrallinie dient, die von einem Körper emittiert wird, der mit dem absorbierenden identisch ist. Beide Arten von Absorption können unter Voraussetzung der Gültigkeit der Drudeschen Dispersionstheorie und der aus ihr abgeleiteten Absorptionstheorie berechnet werden. II. Die Gesamtenergie schlechthin ergibt sich auf diese Weise der Breite des ausgeschnittenen Spektralstreifens umgekehrt proportional; bei geringer Zahl der absorbierenden Zentren ist sie ferner dieser Zahl proportional und von der Dämpfung unabhängig; bei großer Zahl der Zentren dagegen ist sie (in erster Näherung) der Wurzel aus dieser Anzahl und der Wurzel aus der Dämpfung proportional. Die gleiche Abhängigkeit von der Zentrendichte und der Dämpfung zeigt die Gesamthelligkeit einer Spektrallinie, falls Proportionalität von Emissions- und Absorptionsvermögen vorausgesetzt wird. III. Für die Linienabsorption ergibt sich unter derselben Voraussetzung das bemerkenswerte Resultat, daß sie in erster Näherung bei wachsender Zahl der absorbierenden Zentren dem universalen Grenzwert $2 - \sqrt{2}$, also etwa 60%, zustrebt. Infolgedessen nähert sich das Verhältnis der Helligkeit zweier hintereinander gestellten identischen Schichten eines selektiv emittierenden und absorbierenden Körpers zur Helligkeit der einfachen Schicht mit wachsender Zahl der absorbierenden

Zentren dem Grenzwert $\sqrt{2}$. IV. Die Messungen Gouys an gefärbten Flammen bestätigen die vorangehenden Resultate der Nr. II in bemerkenswerter Weise. Die aufgestellten Integralgesetze bilden somit einen Prüfstein für die möglichen Formen der Absorptionskurve und der Emissionskurve. Die Rayleighsche Intensitätsverteilung, die zu einem andern Integralgesetz für die Linienabsorption führt, stellt demnach die Erscheinungen leuchtender Metalldämpfe und Flammen höchst wahrscheinlich nicht dar. Lp.

G. H. Livens. Über die Veränderlichkeit von Absorptionsspektren. I. Physik. Zs. **14**, 841-844; II. 1050-1052.

Verf. hat sich sehr eingehend mit einer Ausarbeitung der Dispersionstheorie beschäftigt, welche auf der Drude-Lorentzschen Elektronentheorie beruht und für jedes Elektron in den zu betrachtenden Medien eine elastische Kraft proportional der Verschiebung und eine Reibungskraft proportional der Ableitung der Verschiebung nach der Zeit annimmt. (Vgl. F. d. M. **43**, 980, 1912.) In der I. Abhandlung werden die wesentlichsten Formeln abgeleitet, die etwas allgemeiner sind als frühere Näherungsformeln; in der II. Abhandlung wird die Theorie an einigen Anwendungen erprobt, welche sich auf die Veränderung der Absorptionsspektren durch besondere Einflüsse beziehen, z. B. Veränderung der Konzentration einer gelösten Substanz in einer zu untersuchenden Lösung. A. K.

D. A. Goldhammer. Ein neues Verfahren für die Spektral- und Polarisationsphotometrie der photographisch wirksamen Strahlen. Physik. Zs. **14**, 388-394.

Eine Kombination des König-Martensschen Spektralphotometers mit einem Babinetschen Kompensator. Die Theorie des Verfahrens wird ausführlich gegeben. Wenn die Messung nach vorheriger photographischer Reproduktion der sich ergebenden Interferenzstreifen erfolgt, ist die Methode gerade für die photographisch wirksamen Strahlen besonders geeignet. A. K.

St. Rybar. Über die experimentelle Bestimmung der absoluten Phasenänderungen des total reflektierten Lichtes. Ann. der Phys. (4) **42**, 1171-1195.

Der Verf. beschreibt seine Vorversuche, die infolge störender Einflüsse die quantitative Messung nicht zuließen, und geht dann auf die endgültige und einwandfreie experimentelle Anordnung über; mittels ihrer ist es ihm gelungen, die absoluten Phasenänderungen sowohl der parallelen als auch der senkrechten Vektorkomponenten bei totaler Reflexion in voller Klarheit darzustellen. Hierauf läßt er die elementare Theorie der experimentellen Methode, die Zusammenstellung der qualitativen Resultate und endlich den Vergleich der Fresnelschen Theorie mit den Experimenten folgen. Lp.

L. V. King. On the scattering and absorption of light in gaseous media, with applications to the intensity of sky radiation. Lond. Roy. Soc. Trans. (A) **212**, 375-433; Proc. **88**, 83-89.

1. Über die Zerstreuung paralleler Strahlung durch Molekeln und kleine Teilchen. 2. Über die allgemeine Integralgleichung für die zerstreute Strahlung. 3. Anwendung auf die Strahlung und Absorption in der irdischen Atmosphäre. 4. Über die angenäherte Lösung von Integralgleichungen. 5. Über die Lösung der Integralgleichung für die Himmelsstrahlung. 6. Noten über die Polarisation der Himmelsstrahlung. 7. Analyse und Beobachtungen, betreffend die Abschwächung der Sonnenstrahlung durch die Erdatmosphäre. 8. Über die Intensität der Himmelsstrahlung nach ihrer Berechnung aus den mittleren Koeffizienten der Schwächung auf dem Berge Wilson und Washington. 9. Zusammenfassung. 10. Zahlentafeln und Diagramme. Lp.

A. Tian. Sur la relation entre l'énergie lumineuse et l'action photochimique. C. R. **156**, 1601-1604.

A. Tian. Détermination de l'ordre d'une réaction photochimique. C. R. **156**, 1758-1761.

Die Bestimmung der Reaktionsgeschwindigkeit als Funktion der Verdünnung wird bei photochemischen Vorgängen dadurch erschwert, daß die Lichtabsorption und damit auch die Absorption der reagierendena Moleküle sich mit der Konzentration ändert. Die Ordnung photochemischer Reaktionen scheint also von der Konzentration abzuhängen; daraus würde folgen, daß ihre Bestimmung unmöglich ist. Der Verf. zeigt, daß es gleichwohl in den meisten Fällen möglich ist, sie zu bestimmen. Lp.

A. Partzsch und W. Hallwachs. Über das Reflexionsvermögen dünner Metallschichten sowie longitudinale Wirkung und Eindringungstiefe bei der Lichtelektrizität. Ann. der Phys. (4) **41**, 247-272.

Die neuesten lichtelektrischen Arbeiten haben bei den Versuchen und den aus ihnen gezogenen Schlußfolgerungen nicht berücksichtigt, daß die in der Metallschicht absorbierten Lichtmengen, wenn das Licht von hinten kommt, bereits nach der Theorie der Metallreflexion größer sind, als wenn es von vorn kommt, so daß von diesem Standpunkt aus das Ergebnis jener Versuche dem Sinne nach vorhergesagt wird. Solche Überlegungen gelten aber nur für dicke Schichten. Für dünne Schichten, wie sie bei den lichtelektrischen Versuchen angewendet worden waren, mußte die Theorie erst ausgearbeitet werden. Die von Rumpelt auf Anregung des einen der beiden Verf. durchgeführte Bearbeitung wird in dem gegenwärtigen Aufsatze, dessen Hauptgewicht nicht auf der versuchlichen Seite liegt, in etwas anderer Form wiedergegeben. Die experimentellen „Ergebnisse sind im Einklang mit der Theorie der Metallreflexion und bilden eine gute Bestätigung derselben für zwei vermutlich noch nicht experimentell untersuchte Sonderfälle, bei denen

sie zeigen, daß die an dicken Schichten gewonnenen optischen Konstanten auch für sehr dünne Schichten im wesentlichen gültig bleiben.“ Lp.

E. Warburg. Über den Energieumsatz bei photochemischen Vorgängen in Gasen. III. Photochemische Desozonisierung. Berl. Ber. 1913, 644 bis 659.

Die beiden vorangehenden Teile dieser auf theoretischen Überlegungen beruhenden, sonst aber experimentellen Arbeit sind in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie der Wissenschaften 1911, 746-754 und 1912, 216-225 erschienen. Die vorliegende Mitteilung beschäftigt sich mit der spezifischen photochemischen Wirkung bei der Desozonisierung durch Strahlung bestimmter Wellenlängen. Auf der Grundlage des photochemischen Äquivalentgesetzes von Einstein (F. d. M. **43**, 970, 1912) ist es möglich gewesen, in einfachen Fällen hier zu einer Trennung zwischen primärer und sekundärer photochemischer Wirkung zu gelangen. „Zusammenfassend kann man sagen, daß nur für verdünnte Ozonlösungen, deren Gesamtdruck ungefähr eine Atmosphäre betrug, die sekundären Reaktionen sich ermitteln ließen, und daß das Verhalten solcher Lösungen eine neue Bestätigung des Einsteinschen Äquivalentgesetzes geliefert hat.“ Lp.

Weitere Literatur.

O. M. Corbino. The double refraction produced by the distortions of elastic bodies according to Volterra's theory. Nature **90**, 540-541.

W. E. Cross. Elementary physical optics. Oxford: Clarendon Press, 312 S. [Nature **91**, 501-502].

A. Eucken. Die Theorie der Strahlung und der Quanten. Verhandlungen auf einer von E. Solvay einberufenen Zusammenkunft (30. Oktober bis 3. November 1911). Mit einem Anhang über die Entwicklung der Quantentheorie vom Herbst 1911 bis zum Sommer 1913. In deutscher Sprache herausgegeben von A. E. Halle a. S.: Wilhem Knapp.

F. Reiche. Die Quantentheorie. (Dargestellt im Anschluß an den Verhandlungsbericht des Solvay-Kongresses in Brüssel 1911.) Die Naturwissenschaften **1**, 549-558, 568-572.

M. Born. Die Theorie der Wärmestrahlung und die Quantentheorie. Die Naturwissenschaften **1**, 499-504.

P. Ehrenfest. Zur Krise der Lichtäther-Hypothese. Rede, gehalten beim Antritt des Lehramts an der Reichsuniversität zu Leiden. Berlin: Julius Springer. 23 S. 8°.

L. Föppl. Stabile Anordnungen von Elektronen im Atom. Proc. 5. Intern. Math-Kongr. **2**, 188-191.

Auszug aus der Göttinger Dissertation (F. d. M. **43**, 1000, 1912).

D. Hilbert. Begründung der elementaren Strahlungstheorie. Deutsche Math.-Ver. **22**, 1-20. (F. d. M. **43**, 969 u. 1062, 1912.)

B. A. KEEN and A. W. PORTER. On the diffraction of light by particles comparable with the wave-length. Lond. Roy. Soc. Proc. (A) **89**, 370-376.

J. KOCH. Über die Dispersion des Lichtes in gasförmigen Körpern innerhalb des ultravioletten Spektrums. 2. Mittlg. Berlin: R. Friedländer u. Sohn, 11 S. 8⁰.

P. LEBEDEW. Die Druckkräfte des Lichtes. Zwei Abhandlungen. Herausgegeben von P. Lasareff. Leipzig: Wilhelm Engelmann. 58 S. 8⁰ mit 25 Fig. u. 1 Bild (Ostwalds Klassiker Nr. 188).

Abdruck aus Ann. der Phys. (4) **6**, 1901 u. **32**, 1910.

M. MILANKOWITSCH. Zur Theorie des Michelsonschen Versuchs. Agram Akad. **190**, 65-70.

W. NATANSON. Die Grundlagen der Strahlungstheorie. Prace mat.-fiz. **24**, 1-88.

Zusammenhängendes Referat über die dynamischen und elektromagnetischen Grundlagen der Strahlungstheorie. Lp.

J. R. MILNE. The scattering of light. Edinb. Roy. Soc. Proc. **33**, 264-281.

Enthält sowohl experimentelle als auch mathematische Untersuchungen. J. (Lp.)

E. PRINGSHEIM. Temperaturstrahlung und Lumineszenz. Scientia **13**, 174-189.

J. PROUDMAN. Note on the pressure of radiation on a small reflecting sphere. Monthly Notices **73**, 535-539.

M. P. RUDZKI. Essai d'application du principe de Fermat aux milieux anisotropes. Krak. Anz. (A) 1913, 241-253.

B. Geometrische Optik.

H. A. LORENTZ. Sur un théorème général de l'optique. Annali di Mat. (3) **20**, 185-192.

„Im Verlaufe seiner Untersuchungen über die Theorie der optischen Instrumente (Sur la théorie des lunettes. Oeuvres **4**, 535-555, 1778 u. Mémoire sur une loi générale d'optique; **5**, 701-710, 1805) ist Lagrange dazu gelangt, ein grundlegendes Theorem aufzustellen, das allen Physikern wohlbekannt ist. Zahlreiche neuere Überlegungen über den Gang der Lichtstrahlen in einem beliebigen Medium sind mit seinem Ergebnisse innig verknüpft, und so ist es vielleicht bei dieser Gelegenheit angebracht, darauf hinzuweisen, wie diese Betrachtungen auf den allgemeinen Fall der doppelbrechenden Körper ausgedehnt werden können.“ Diese Erweiterung wird in folgender Fassung gewonnen: „Es seien P_1 und P_2 zwei willkürlich gewählte Punkte, $P_1 P_2$ der von dem ersten zum zweiten gehende Lichtstrahl, $P_1 N_1$ die Wellennormale und u_1 die Wellengeschwindigkeit, wie sie am Ausgangspunkte dieses Strahles sind, wo $P_1 N_1$ in der Ausbreitungsrichtung gezogen ist. Man bezeichne ebenso durch $P_2 N_2$ und u_2 die Wellennormale und Wellengeschwindigkeit für den Ausgangspunkt P_2 des umgekehrten Lichtstrahls $P_2 P_1$. Endlich seien V_1 und V_2 zwei beliebige, durch $P_1 N_1$ und $P_2 N_2$ gehende Ebenen, $P_1 X_1$ und $P_2 X_2$

zwei in diesen Ebenen gelegene Achsen, die erstere senkrecht zu $P_1 N_1$, die zweite zu $P_2 N_2$. Nimmt man nun auf der ersten Achse einen Punkt Q_1 unendlich nahe bei P_1 an ($P_1 Q_1 = h_1$), auf der zweiten einen Punkt Q_2 unendlich nahe bei $P_2(P_2 Q_2 = h_2)$, so kann man die Strahlen betrachten, von denen der eine von P_1 nach Q_2, der andere von P_2 nach Q_1 geht, sowie die Wellennormalen $P_1 N'_1$ und $P_2 N'_2$, die den ersten Elementen dieser Strahlen eigen sind. Im allgemeinen werden diese Normalen aus den Ebenen V_1 und V_2 heraustreten. Wenn man sie auf V_1 und V_2 projiziert und den unendlich kleinen Winkel, den die Projektion von $P_1 N'_1$ auf V_1 mit $P_1 N_1$ bildet, durch ψ_1 bezeichnet, den entsprechenden Winkel bei P_2 durch ψ_2, so haben die beiden Ausdrücke in der Gleichung $\frac{\psi_2}{u_2 h_1} = \frac{\psi_1}{u_1 h_2}$ dieselbe Größe und dasselbe algebraische Zeichen. Was die Zeichen anlangt, so sind diese bestimmt bei h_1 und h_2 durch die Wahl der positiven Richtungen $P_1 X_1$ und $P_2 X_2$, bei ψ_1 und ψ_2 dadurch, daß die Drehungen von $P_1 N_1$ nach $P_1 X_1$ und von $P_2 N_2$ nach $P_2 X_2$ als positiv betrachtet werden.“ Von jener Formel ausgehend, findet der Verf. leicht wohlbekannte Sätze. Lp.

U. Bordoni. Una definizione quantitativa della „nitidezza“ delle immagini reali. Rom. Acc. L. Rend. $\mathbf{22}_1$, 81-85.

Der Verf. schlägt eine mathematisch einfach gefaßte Definition für die Helligkeit des reellen Bildes eines Objektes in einem Punkte vor, durch die es möglich wird, diese Größe in jedem Punkte auszudrücken. Lp.

R. Boulouch. I. Relations homographiques dans les systèmes de dioptres sphériques centrés. II. Points stigmatiques singuliers. C. R. **157**, 846-848.

Im ersten Teile seiner Mitteilung zeigt der Verf., daß die Beziehung, die er zwischen den Achsenwinkeln, den Brechungskoeffizienten und den Abständen herleitet, gültig für ein System zentrierter Linsen:

$$\frac{du'}{n \cdot t \cdot du} - \frac{du}{n' \cdot t' \cdot du'} = \tau,$$

sich ebensowohl von einer früher mitgeteilten Gleichung herleiten läßt wie auf Grund des Fermatschen Theorems.

Der zweite Teil stellt eine Anwendung dieser Formel dar. Pz.

R. Boulouch. Classification des points stigmatiques d'un système de dioptres sphériques centrés; leurs critères. II. Points ordinaires. Bordeaux Proc.-Verb. 1912/13, 38-43.

In der vorliegenden Untersuchung beschäftigt sich der Verf. mit der Einteilung der verschiedenen Arten der punktförmigen Abbildung und stellt vier verschiedene Fälle zusammen. Pz.

R. Boulouch. Systèmes de dioptres sphériques centrés; stigmatisme ordinaire et aplanétisme. C. R. **157**, 1072-1074.

Die Arbeit enthält die verschiedenen Bedingungen, unter denen die gewöhnliche punktförmige Abbildung stattfindet und Aplanatismus herrscht. Pz.

H. Violette. L'aberration centrale dans les lentilles complexes. Relation entre l'aberration centrale et l'astigmatisme aux bords du champ. Journ. de Phys. (5) **3**, 46-54.

„Die Werke über geometrische Optik behandeln im allgemeinen Aberrationen der Linsen nur in verhältnismäßig einfachen Fällen, und oft ist es nicht leicht, das Verfahren in ihnen ausfindig zu machen, das zur Erleichterung der Untersuchungen des Optikers anzuwenden ist. Das hier beschriebene Verfahren, das auf das Beispiel einer aus drei Gläsern bestehenden Linse, also auf einen ziemlich verwickelten Fall angewandt wird, liefert gleichzeitig das Mittel, die Krümmungen zu berechnen, um eine bestimmte zentrale Aberration zu erhalten, als auch das andere, unmittelbar den Astigmatismus der Bilder an den Rändern des Feldes kennen zu lernen." Lp.

L. Dunoyer. Sur l'aberration de sphéricité dans les objectifs. Journ. de Phys. (5) **3**, 468-486.

Für französische Leser werden die bezüglichen Methoden von Abbe dargestellt und an Beispielen erläutert. Lp.

E. Wallon. La théorie et la pratique dans la correction des objectifs photographiques d'après les recherches de M. W. Zschokke. Journ. de Phys. (5) **3**, 805-827.

Der Verf. setzt in diesem Vortrage vor der französischen Physikalischen Gesellschaft die Theorie auseinander, die Zschokke in dem Vortrage vor der Photographischen Gesellschaft 1912 entwickelt hat: „Die neuen Reproduktionsobjektive der Optischen Anstalt von C. P. Goerz", in welchem auch die für die Praxis sich ergebenden Folgerungen gezogen wurden. Zum Teil gibt der Franzose eine Übersetzung, zieht aber auch einen andern Aufsatz von Zschokke herbei: „Homogenität des optischen Glases" (Zs. f. Instr. Kunde 1909) und macht gelegentlich eigene Bemerkungen. Lp.

P. Fatou. Sur les conditions d'aplanétisme pour un système optique quelconque. S. M. F. C. R. 1913, 37.

Es handelt sich darum, auf elementare Weise die von verschiedenen Forschern (H. Bruns, M. Thiesen) gemachten Ausdehnungen der unter dem Namen der Sinusbedingung oder der Abbeschen Bedingung in der geo-

metrischen Optik bekannten Bedingung zu beweisen. Der Verf. stützt sich auf das Fermatsche Prinzip des optischen Weges. Lp.

E. Everling. Beobachtung und Theorie der durch Reflexion erzeugten Lichtsäulen. Physik. Zs. **14**, 1156-1157.

Das Spiegelbild einer Lichtquelle auf bewegtem Wasser, rauhem Eis und dergleichen ist ein wenig in der Richtung senkrecht zur Einfallsebene, aber sehr stark in der Einfallsebene vergrößert. Derartige Erscheinungen sind besonders häufig im Freiballon beobachtet worden. Die Erklärung ergibt sich, wenn man rauhe Oberflächen als eine Vielheit von ebenen Spiegelflächen mit Normalen verschiedener Richtung betrachtet, und wird hier kurz theoretisch durchgeführt Der Grundgedanke der Erklärung wurde schon 1840 von J. G. Galle angegeben. A. K.

W. Hillers. Bemerkung über die Abhängigkeit der dreifachen Luftspiegelung nach Vince von der Temperaturverteilung. Physik. Zs. **14**, 719-723.

Luftspiegelungen sind im allgemeinen durch besondere Temperaturverteilungen zu erklären. Für den einfachen Fall, daß der Erdboden oder eine Wand als Grundfläche anzunehmen ist und die Niveauflächen der Temperaturverteilung als der Grenzfläche parallele Ebenen betrachtet werden können, hat Tait einen ersten Ansatz für die Behandlung des Problems gegeben, doch reicht der Ansatz z. B. zur Erklärung der dreifachen Spiegelung nicht aus, wie sie durch Vince bekannt geworden und erst kürzlich vom Verf. photographisch aufgenommen werden konnte. Verf. behandelt den Ansatz

$$t = \frac{t_0(1 + e^{-a\alpha})}{1 + e^{a(x-\alpha)}},$$

in dem x der Abstand von der Grenzfläche, t_0, a, α Konstanten sind, und zeigt, wie man mit Hülfe desselben der beobachteten Erscheinung gerecht werden kann. A. K.

G. F. C. Searle. Experiments illustrating flare spots in photography. Cambr. Phil. Soc. Proc. **17**, 205-219.

In dieser Abhandlung wird das Prinzip der Mindestzeit dazu verwendet, die Brennweite einer dünnen Linse zu finden, und dann werden die Methoden auf die Lösung der andern betrachteten Probleme übertragen. J. (Lp.)

Weitere Literatur.

The proceedings of the optical convention 1912 held at South Kensington, June 19 to 26, 1912. London University of London Press; Hodden and Stoughton VII u. 359 S. [Nature **91**, 591, 592].

H. Ambronn und H. Siedentopf. Zur Theorie der mikroskopischen Bilderzeugung nach A b b e. Leipzig: S. Hirzel. 25 S.

A. Gleichen. Grundriß der photographischen Optik auf physiologischer Grundlage mit elementar-mathematischer Begründung. Nikolassee bei Berlin.: Admin. d. Fachzeitschr. „Der Mechaniker". 151 S 8°.

F. Koláček. Einfacher Beweis und Verallgemeinerung des A b b e schen Sinussatzes und eine Anwendung desselben auf ein mineralogisches Mikroskop. Rozpravy **22**, Nr. 39, 30 S. (Böhmisch.)

G. Ovio. L'immagine ciclopica nello specchio piano. Modena Mem. (3) **10**, XXVIII-XXIX.

M. v. Rohr. Richtlinien in der Entwicklung, Erkenntnis und Wertung der optischen Instrumente. Die Naturwissenschaften **4**, 417-427, 445-450.

M. v. Rohr. Die modernen Brillengläser und ihre Stellung in der technischen Optik Die Naturwissenschaften **1**, 1032-1037, 1058-1064, 1079-1084.

W. Rottsieper. Über den Ort des sogenannten virtuellen Bildes. Unterrichtsbl. f. Math. **19**, 55-56.

H. S. Uhler. On the deviation produced by prisms. Amer. J. of Sc. (4) **35**, 389-423.

Kapitel 3.

Elektrizität und Magnetismus.

Reports of the Comittee on Electrical Standards appointed by the British Association for the Advancement of Science. A record of the history of „Absolute Units" and of Lord K e l v i n 's work in connexion with these. Reprinted by permission of the Council. Cambridge: University Press. XXIV + 784 S. With 10 plates and 46 text figures.

Der ursprüngliche Ausschuß für Einheitsmaße des elektrischen Widerstandes wurde auf die Anregung von W. T h o m s o n (Lord K e l v i n) 1861 eingesetzt; er bestand aus A. W i l l i a m s o n, C. W h e a t s t o n e, W. T h o m s o n, W. H. M i l l e r, A. M a t t h i e s s e n, and F. J e n k i n. Die Hauptaufgabe des Ausschusses bestand zunächs darin, die passendste Widerstandseinheit zu bestimmen, in zweiter Stelle, die beste Form und den besten Stoff für das jene Einheit darstellende Normalmaß ausfindig zu machen. Von 1862 bis 1870 wurde viel schätzbare Arbeit von dem Ausschuß geleistet, der inzwischen durch die Zuwahl von Sir C. B r i g h t, J. C l e r k M a x w e l l, C. W. S i e m e n s, B a l f o u r S t e w a r t, C. F. V a r l e y, G. C. F o s t e r, C l a r k, D. F o r b e s, C. H o c k i n, J. P. J o u l e und E s s e l b a c h verstärkt wurde. Unter Erweiterung der Behandlung der elektrischen Grundeinheiten betrachtete der Ausschuß auch die Gegenstände der Platinathermometer, der Wärmeeinheiten, der magnetischen Einheiten, allgemein der physikalischen Konstanten. Während der letzten Jahre seines Bestehens förderte der Ausschuß die internationale Gleichförmigkeit in den Normalmaßen; zu diesem Zwecke wurden viele Versuche in der Nationalen Physikalischen Arbeitsstätte unternommen. Die durch die Lodoner Konferenz von 1908 beschlossene

Einsetzung eines wissenschaftlichen Fünfzehnerausschusses zur Leitung der mit der Aufbewahrung der elektrischen Normalmaße zusammenhängenden Arbeit befreite den Ausschuß von dem bedeutendsten Teil seiner Verantwortlichkeit. Die Hauptziele, für die er eingesetzt wurde, waren erledigt. In allen Hauptländern der Welt waren dieselben Einheiten für den Widerstand, den Strom und die elektromotorische Kraft angenommen. Somit waren die gebräuchlichen Normalmaße wirklich gleichartig. (Vgl. Nature **92**, 91.) J. (Lp.)

A. Boltzmann. Die elektrischen Maße und Einheiten in historisch-kritischer Erörterung ihres Definitionswertes und der sie repräsentierenden internationalen Normale. Mitt. des k. k. tech. Versuchsamtes **2**, 3. Heft, 24-38, 4. Heft, 49-72.

Ausführlicher Bericht, mit der Aufstellung des metrischen Systems beginnend. Die letzte Konferenz, die sich mit den elektrischen Einheiten befaßt hat, war die zu London im Jahre 1908. Schr.

C. W. C. Barlow. Mathematical physics. Vol. I. Electricity and magnetism. London: W. B. Clive. (University Tutorial Press. VIII u. 312 S.)

Das Buch befaßt sich ausschließlich mit der mathematischen Ansicht des Gegenstandes der Physik und verlangt dabei einen Beginn mit nur ganz elementaren Kenntnissen in der Mathematik. „Befriedigende Kenntnisse in der Physik müssen die der Mathematik umfassen. Jedes gute Lehrbuch muß deshalb viele Zahlenbeispiele enthalten.“ Das vorliegende Buch, das zur Ergänzung eines üblichen Leitfadens dienen soll, behandelt ausschließlich das mathematische Gesicht des Gegenstandes, obschon vieles in ihm schlicht rechnerisch ist. Dabei wird es als rätlich erachtet, nicht über die Anfänge der Differential- und Integralrechnung hinauszugehen. Eine besondere Eigenheit ist eine elementare mathematische Erörterung der elektrischen Entladung in Vakuumröhren und der Radioaktivität. Das Buch scheint seinen Zweck zu erfüllen. (Vgl. Nature **92**, 631.) J. (Lp.)

N. R. Campbell. Modern electrical theory. Second Edition. Cambridge: University Press. XII + 400 S. 8°. (Cambridge Physical Series.)

N. R. Campbell. Moderne Elektrizitätslehre. Übersetzt von U. Meyer. Dresden und Leipzig: Th. Steinkopf. XI + 423 S. gr. 8°.

Obgleich dem Namen nach eine zweite Auflage, ist das Buch tatsächlich ein neues Werk. Die großen, in den letzten sechs Jahren bewirkten Wechsel unserer Kenntnisse in der Strahlungslehre haben es nötig gemacht, solche Teile der ersten Ausgabe, die jetzt den zweiten Abschnitt bilden, völlig umzuschreiben. Das Relativitätsprinzip und die Arbeiten von Stark über den Atombau haben den dritten Teil ganz umgestaltet. Der erste Teil ist umgearbeitet. J. (Lp.)

F. A. Tarleton. An introduction to the mathematical theory of attraction. Vol. II. London: Longmans, Green and Co. XI + 207 S.

Die erste Ausgabe dieses Buches ist 1898 erschienen. Die Kapitel sind fortlaufend mit denen des ersten Bandes beziffert. Kapitel VIII enthält Erörterungen über Kugelfunktionen und ellipsoidische harmonische Funktionen. Im Kapitel IX wird in bekannter Weise die elementarere Theorie des permanenten und des induzierten Magnetismus nebst einem kurzen Abriß der allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus entwickelt. Die Kapitel X, XI, XII erstrecken sich auf die elektrischen Ströme, die Dielektrik und die elektromagnetische Lichttheorie. (Vgl. Nature 92, 657-658.) J. (Lp.)

J. Hollingworth. A physical interpretation of the Bessel function of zero order. Phil. Mag. (6) 26, 427-440.

Von der schon öfter gemachten Überlegung ausgehend, daß verschiedene physikalische Fragen auf gleiche mathematische Lösungen führen, zeigt der Verf., wie mehrere Probleme der Physik auf die Differentialgleichung für die Besselsche Funktion I_0 zurückkommen. Behandelt wird die Ausbreitung einer elektrischen Störung in einem isotropen Medium, nach verschiedenen Methoden, in Anwendung auf besondere Fälle. Lp.

P. Noaillon. Déduction des équations de Maxwell de la théorie de l'électricité de De Heen. Belg. Bull. Sc. 1913, 792-809.

Mittels der vektoriellen Definitionen der Intensität des elektrischen und des magnetischen Feldes in einem Punkte und von vier der Theorie von De-Heen entlehnten Hypothesen findet der Verf. die Maxwellschen Gleichungen wieder auf. Die elektromechanischen Wirkungen auf die Materie rühren einzig von Wirkungen her, die auf Ionen ausgeübt werden, welche sich in diesen materiellen Körpern eingeschlossen befinden. Mn. (Lp.)

E. Lohr. Zu G. Jaumanns elektromagnetischer Theorie für bewegte Medien. Wien. Ber. 122, 1487-1530.

Um sowohl den Michelsonschen Versuch, wie auch die Aberration zu erklären, bedarf die Jaumannsche Theorie des Prinzipes der wechselnden Grenzschalen, das sich allgemein so aussprechen läßt: Die Theorie liefert nur die Differentialgleichungen; um aus ihnen eine spezielle Erscheinung voraussagen zu können, muß außer den Anfangs- und Randwerten auch noch das jeweilige Bezugssystem vorgegeben werden.

Der Verf. versucht, die Theorie so umzugestalten, daß dieses bedenkliche Prinzip vermieden, gleichzeitig aber auch alle Schwierigkeiten ausgeschieden werden, in welche die Jaumannsche Theorie in der Elektrodynamik dadurch gerät, daß sie den Einfluß der Bewegung auf elektromagnetische Vorgänge ausschließlich in der Definition des Mediums sucht. Der Versuch gelingt durch Anschluß der weit umfassenderen Jaumannschen Gleichungen an die speziellen elektromagnetischen Theorien von H. Hertz und von E. Cohn.

Im wesentlichen bewirken zwei Änderungen den Anschluß: Erstens werden in den eigentlichen elektromagnetischen Gleichungen Jaumanns lokale Fluxionen durch totale ersetzt; dies gibt den Anschluß an Hertz. Zweitens wird noch der Hamiltonsche Operator ∇ in den elektromagnetischen und stofflichen Derivationen durch einen erweiterten Operator $\nabla' = \nabla + \frac{1}{c_0^2}\frac{d}{dt}(\mathfrak{v})$ ersetzt; dies gibt den Anschluß an Cohn.

Die so gewonnene neue Form der Theorie steht ohne Verwendung wechselnder Grenzschalen mit allen einschlägigen Erfahrungen in Übereinstimmung. Sie umfaßt die ganze Elektrodynamik, einschließlich Wilsonschen Versuch, Röntgen-Strom und Eichenwaldschen Versuch, erklärt überdies, wie die ursprüngliche Form, Reibungs- und Piezoelektrisierung und beherrscht das ganze Gebiet der Strahlungsschwingungen, Aberration, Dopplereffekt, Fizeausche Mitführung des Lichtes, natürlich unter Mitberücksichtigung der Dispersion, Kathoden- und Kanalstrahlen usw. Wenn der Verf. trotz dieser Erfolge die neue Form der Theorie nur neben und nicht über die ursprüngliche Form stellt, so ist dafür die bestechende Natürlichkeit und Durchsichtigkeit der letzteren maßgebend, die von der neuen Form nicht annähernd erreicht wird.

Das letzte Kapitel erörtert schließlich einen zurzeit nicht restlos durchführbaren Ansatz, der den Vorteil hätte, die Einführung einer der Cohnschen Theorie eigentümlichen Ortszeit im wesentlichen zu vermeiden. Lp.

E. Henschke. Über eine Form des Prinzips der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik des Relativitätsprinzips. Ann. der Phys. (4) **40**, 887-934.

Verf. versucht, die elektromagnetischen Grundgleichungen sowie einen neuen, dem Relativitätsprinzip entsprechenden Ausdruck für die ponderomotorischen Kräfte aus einem Variationsprinzip herzuleiten. Für den Fall des Vakuums ist es nun gelungen, Prinzipe aufzustellen, welche einerseits die elektrodynamischen Grundgleichungen einschließlich der Divergenzbedingungen liefern, andrerseits die Ausdrücke für die ponderomotorischen Kräfte ergeben, die außer der aus einem Spannungstensor abgeleiteten Kraft noch die elektromagnetische Trägheitskraft enthalten. (Bei der Aufstellung des Prinzips wird die vierdimensionale Vektoranalysis verwendet.) Im dritten Teil der Arbeit wird versucht, die für das Vakuum erhaltenen Resultate auf den Fall der ponderablen Körper auszudehnen. Dabei wird als Wirkungsgröße ein aus der für das Vakuum benutzten Wirkungsgröße durch Verallgemeinerung erhaltener Ausdruck angenommen. Hieraus ergeben sich die Minkowskischen Grundgleichungen für ponderable Körper ohne große Schwierigkeiten. Dagegen kann der Ausdruck, der mit dieser Form der Wirkungsgröße für die ponderomotorische Kraft aus dem dynamischen Prinzip hervorgeht, nicht aufrechterhalten werden. Sa.

J. Ishiwara. Über das Prinzip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik bewegter ponderabler Körper. Ann. der Phys. (4) **42**, 986-1000.

Dem Verf. scheint der Grund für die Unzulänglichkeit der von Henschke (Referat vorstehend) für ponderable Körper erhaltenen Resultate nicht in einer unzureichenden Verallgemeinerung der Wirkungsgröße zu liegen, sondern in erster Linie darin, daß die Variation der Wirkungsgröße nicht richtig ausgeführt ist. Er beweist nun, daß die Annahme einer Form der Wirkungsgröße, wie sie in der ersten Fassung Henschkes vorliegt, den schon früher von ihm aufgestellten Ausdruck für die ponderomotorischen Kräfte ergibt. Sa.

R. Grammel. Zur relativtheoretischen Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. der Phys. (4) **41**, 570-580.

Bei den Versuchen, den Ausdruck der elektrodynamischen Kraft und des Energiesatzes im leeren Raum auf die bewegte Materie zu übertragen, sind Minkowski und Abraham zu verschiedenen Ansätzen gelangt. Verf. sucht nun die Ansätze zu bestimmen, die fünf Forderungen (Relativitätsprinzip, Welttensor im Fall der Ruhe symmetrisch usw.) erfüllen, und findet mit Benutzung der vierdimensionalen Vektorsymbolik, daß drei Ansätze diesen Forderungen genügen. Der erste ist mit dem von Abraham identisch, der zweite stimmt bis auf ein Zusatzglied mit Minkowskis Ansatz überein, der dritte ist mit den beiden ersten durch eine lineare Gleichung verbunden. Würde noch als sechste Forderung hinzugefügt, daß der zugehörige Welttensor für jeden Bewegungszustand symmetrisch sein soll, so wäre nur noch der Abrahamsche Ansatz möglich. Sa.

R. Marcolongo. Su alcune questioni relative alle trasformazioni di Lorentz in elettrodinamica. Rom. Acc. L. Rend. $\mathbf{22}_2$, 349-354, 402-408.

Die Transformationen der elektrischen und magnetischen Kraft und Erregung, der Lorentzschen elektromagnetischen Kraft und der Minkowskischen elektrischen und magnetischen Ruhkraft werden mit Hülfe der Methoden der vektoriellen Homographie behandelt. Sa.

A. Korn. Das Elektron als pulsierendes Teilchen mit konstantem Pulsationsquantum. Physik. Zs. **47**, 1109-1112; Verh. Deutsche Phys. Ges. **15**, 924-928.

Die pulsierenden Teilchen, welche Elektronen darstellen, sollen der Bedingung genügen, daß die Energie der Pulsationsschwingung für jedes Elektron konstant ist. Bei Hinzufügung dieser Bedingung ergibt sich für die Wechselwirkung der Elektronen die Umkehrung des Bjerknesschen Wechselwirkungsgesetzes zwischen pulsierenden Teilchen. Das Bjerknessche Gesetz soll für gravitierende Teilchen gelten, die ebenfalls als pulsierende Teilchen aufgefaßt werden. Diese Überlegungen haben den Verf. allgemein zu der Annahme geführt, daß materielle Teilchen der Veränderung des ihnen einmal zugeteilten Schwingungszustandes einen um so größeren Widerstand entgegensetzen, je kleiner die Schwingungsdauer der Schwingungen ist. Bei den in der Mechanik vorkommenden Schwingungen sind die durch dieses Prinzip „der

Erhaltung der Individualität" hervorgebrachten Abweichungen von den klassischen Resultaten zu vernachlässigen, sie sind aber von Einfluß bei Schwingungen von so kleiner Schwingungsdauer, wie sie für die mechanische Erklärung der elektromagnetischen Erscheinungen anzunehmen sind. A. K.

M. Siegbahn. Die elektrische Energieströmung. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. **8**, Nr. 31, 21 S.; **9**, Nr. 1, 10 S.

Um die Richtung und Stärke der elektrischen Energieströmung zu finden, verfährt man im allgemeinen so, daß man aus den Maxwellschen Gleichungen das elektromagnetische Feld bestimmt, d. h. die elektrische und magnetische Feldstärke ($\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$) als Funktion von Ort und Zeit angibt. Nach Poynting ist dann die elektrische Energieströmung ($\mathfrak{S}$) senkrecht zu $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, und zwar so gerichtet, daß eine Drehung von $\mathfrak{E}$ nach $\mathfrak{H}$ in der Richtung $\mathfrak{S}$ eine rechtsgängige Schraube gibt. Die Größe von $\mathfrak{S}$ ist proportional dem Flächeninhalt des von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ gebildeten Parallelogramms. Eine exakte Durchführung dieser Berechnung des Energiestromes ist nur in speziellen Fällen möglich; dagegen stellt sich eine qualitative Untersuchung der Energieströmung ziemlich einfach und gewährt gleichzeitig einen guten Einblick in den Mechanismus der elektrischen Strömung. Hierbei wird zuerst die ungefähre Richtung von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ mit Hülfe der Gleichungen:

$$\int \mathfrak{H}_{\mathfrak{s}}\, d\mathfrak{s} = \frac{4\pi\varrho}{c}\mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \quad \int \mathfrak{E}_{\mathfrak{s}}\, d\mathfrak{s} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$$

festgestellt. Da aber die Strömung nur im Isolator untersucht werden soll, vereinfacht sich jenes System zu

$$\int \mathfrak{H}_{\mathfrak{s}}\, d\mathfrak{s} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \quad \int \mathfrak{E}_{\mathfrak{s}}\, d\mathfrak{s} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$$

wegen $\varrho = 0$. Hierbei ist zu bemerken, daß $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ auf der rechten Seite den gesamten Kraftfluß (elektrischen und magnetischen) durch den für $\mathfrak{H}_{\mathfrak{s}}$ und $\mathfrak{E}_{\mathfrak{s}}$ gewählten Integrationsweg bedeuten. Nachdem die Richtungen von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ festgelegt sind, kann die Richtung von $\mathfrak{S}$ direkt angegeben werden: senkrecht zu $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$.

§ 1. Die Energieströmung bei ebenen Wellen. § 2. Die Energieströmung und die Maxwellschen Spannungen. § 3. Die Wirkung eines statischen elektrischen oder magnetischen Feldes auf den Energiestrom. § 4. Die Wirkung zweier Energieströme aufeinander. § 5. Die Energieströmung in einem Doppelleiter. § 6. Energieströmungen bei Schwingungskreisen. A. Der einfache Schwingungskreis. B. Gekoppelte Schwingungskreise. § 7. Ausgleichsvorgänge. A. Stromschluß und Stromöffnung bei einer Selbstinduktion. B. Gegenseitige Induktion. § 8. Die Energieströmungen vom Gesichtspunkte der Relativitätstheorie. Lp.

H. Bateman. Corpuscular radiation. Phil. Mag. (6) **26**, 579-585.

In der mathematischen Theorie des Elektromagnetismus wird gewohnheitsmäßig die Hypothese angenommen, daß ein elektromagnetisches, in der

Natur vorkommendes Feld dadurch erhalten werden kann, daß man eine Anzahl elektromagnetischer Felder übereinander lagert, deren jedes eine einzige reelle Punktsingularität hat, die sich durch den Äther mit einer geringeren Geschwindigkeit als das Licht bewegt. Implizit wird dabei vorausgesetzt, daß elektromagnetische Felder mit andern Typen von Singularitäten nicht existieren. Der Verf. beschreibt aber einen solchen andern Typus und gibt seine Theorie, die auf eine neue Art der Maxwellschen Gleichungen führt. Lp.

F. Richarz. Maxwells Prinzip der Einheit aller elektrischen Erscheinungen und damit zusammenhängende, von mir veranlaßte neuere Versuche. Die Naturwissenschaften **1**, 4-7.

In der Hauptsache ein Bericht über den Gedankengang, der den Verf. veranlaßt hat, die Inauguraldissertation von K. Henrich anzuregen: „Nachweis der ponderomotorisch-elektromagnetischen Wirkung der Induktion" (F. d. M. **41**, 962, 1910), und über die von Henrich erzielten Ergebnisse. Durch sie ist der lange gesuchte experimentelle Nachweis erbracht für die elektrostatisch-ponderomotorische Wirkung der Induktion, deren Existenz aus Maxwells Prinzip der Einheit der elektrischen Kräfte vorausgesagt worden war. Lp.

Lord Rayleigh. The correction of the length of terminated rods in electrical problems. Phil. Mag. (6) **25**, 1-9.

In einem kurzen Artikel: On the electrical vibrations associated with thin terminated conducting rods (F. d. M. **35**, 894, 1904) hat der Verf. zu zeigen versucht, daß die Differenz zwischen der halben Wellenlänge der tiefsten Schwingung und der Länge l des Stabes von gleichförmigem Querschnitt allmählich verschwindet, wenn der Querschnitt unbeschränkt verkleinert wird, im Gegensatze zu der Theorie von Macdonald, die $\lambda = 2{,}55\, l$ ergibt. Unter dem Eindruck, daß die damalige Begründung nicht als bündig betrachtet ist, nimmt er jetzt einen Anlauf, die Frage strenger zu behandeln; „allein die den Weg versperrenden Schwierigkeiten sind fürchterlich, und dies ist nicht überraschend angesichts der Unstetigkeiten an den Rändern, wo die platten Enden die Zylinderfläche treffen".

Ein Endergebnis der mathematischen Behandlung wird gewonnen: „In jedem Falle verschwindet die Berichtigung δl zu der Länge des Stabes in dem elektrostatischen Problem, wenn der Radius des Stabes unbegrenzt verringert wird, ein Schluß, den ich auf das Schwingungsproblem ausdehne, das in dem früheren Teil dieser Abhandlung näher betrachtet ist." Lp.

C. G. Darwin. On some orbits of an electron. Phil. Mag. (6) **25**, 201-210.

„Nach der Rutherfordschen Theorie ist ein Atom aus Elektronen und aus einem Kern von positiver Elektrizität zusammengesetzt, der sie neutralisiert. Der Kern befindet sich im Zentrum des Atoms, trägt nahezu die ganze Masse und hat seine Ladung innerhalb eines ganz kleinen Bereiches verdichtet.

Die vorliegende Abhandlung beschäftig sich mit der Bahn eines β-Teilchens, wenn es an einen solchen Kern kommt. Wegen seiner hohen Geschwindigkeit hat ein β-Teilchen eine scheinbare Masse, die merklich größer ist als die eines langsam laufenden Elektrons, und während des Laufes vermehrt die anziehende Kraft des Kerns sie noch erheblich. Die Veränderlichkeit der Masse wandelt den Charakter der Bahn gänzlich um mit dem Ergebnis, daß sie in manchen Fällen eine Spirale wird, die richtig in das Zentrum ausläuft. Die Zahlenrechnung zeigt, daß diese Fälle ganz häufig vorkommen müssen. Der physikalische Grund ist so einzusehen: Wegen der vergrößerten Masse bewegt sich das Teilchen in der Nähe des Kerns langsamer als dann, wenn seine Masse konstant wäre. Dies gibt der anziehenden Kraft mehr Zeit, um in ihr die Wirkung auszuüben, und die Analyse zeigt, daß in manchen Fällen das Teilchen nicht zu entschlüpfen vermag." Lp.

J. Kroo. Zur statistischen Elektronentheorie der Dielektrizität und des Magnetismus. Ann. der Phys. (4) **42**, 1354-1396.

Verf. versucht, das Problem der elektronentheoretischen Erklärung magnetischer und dielektrischer Erregung im statischen Felde mit statistisch-mechanischen Prinzipien zu behandeln, und zwar unter der Annahme der Ergodenhypothese und der Quasistationaritätshypothese.

Der Fall quasielastisch schwingender Polarisationselektroden führt zur Lorentzschen Formel für die Dielektrizitätskonstante. Die Benutzung einer speziellen Molekülstruktur liefert eine Beziehung zwischen Dielektrizitätskonstante und Temperatur, die mit der Erfahrung mindestens für gewisse Temperaturintervalle übereinzustimmen scheint. Im Gebiete des Magnetismus ergibt sich, daß stets Diamagnetismus zustande kommt, unabhängig von der Form und Ladungsverteilung der Moleküle. Sa.

P. Lenard. Über Elektrizitätsleistung durch freie Elektronen und Träger. Ann. der Phys. (4) **40**, 393-437; **41**, 53-98.

Der Zweck der Arbeit ist, die in bezug auf die Elektronenbewegungen vorhandenen Möglichkeiten quantitativ zu behandeln und auf ihre Folgen hin zu untersuchen, um sie exakt mit der Erfahrung vergleichen zu können. Die Entwicklungen beziehen sich in der Hautpsache auf den gasförmigen Aggregatzustand; doch scheint die Anwendung auf feste Metalle und auch auf andere Fälle nicht fernliegend.

In dem ersten Teil werden die Gleichungen entwickelt, welche die verschiedenen, bei elektrischen Wanderungen möglich erscheinenden Fälle zu berechnen erlauben. Dabei kommen auch die benutzten Erfahrungen zur Sprache, besonders Absorption und Reflexion von Kathodenstrahlen betreffend, und deren Beziehungen zu der Frage nach den Fernkräften zwischen Elektronen und Molekeln. Dadurch, daß Grenzen für die ungeordnete Geschwindigkeit der freien Elektronen sich ergeben, wird die Anwendung der Gleichungen auf die Bunsenflamme, den bestuntersuchten Fall von Elektrizitätsleitung durch freie Elektronen, möglich.

In der Fortsetzung werden die gewonnenen Gleichungen systematisch auf spezielle Fälle der Elektrizitätsleitung angewandt. Die Untersuchung der Energieverhältnisse der dabei gefundenen Elektronenbewegungen zeigt, daß die quasielastischen Stöße der Gastheorie, welche man gewöhnlich auch auf das Zusammenwirken von Molekeln mit Elektronen angewandt hat, eines Ersatzes bedürfen durch andere Austauschmittel der Energie, wofür die Energiequanten der Strahlung sich geeignet zeigen. Metallflammen, positive Strahlen und feste Metalle werden soweit betrachtet, als es im Zusammenhange mit den neu gewonnenen Anschauungen unmittelbar sich ergibt.

Als Hauptresultat der Arbeit sieht der Verf. die mitgeteilten Gleichungen an als ein Mittel zum weiteren Eindringen in den Mechanismus der Elektronenbewegungen und die mit Hülfe dieser Gleichungen aus der bereits vorhandenen Erfahrung schon gewonnene Einsicht in diesen Mechanismus. Lp.

K. F. Herzfeld. Zur Elektronentheorie der Metalle. Ann. der Phys. (4) **41**, 27-52.

Verf. geht von der Annahme aus, daß für den Transport von Elektrizität und Wärme in gut leitenden Metallen nur freie Elektronen in Betracht kommen. Ferner benutzt er die aus den allgemeinen Gleichungen der Gasdiffusion abgeleiteten Formeln der Elektronentheorie, ohne aber über die Temperaturabhängigkeit der einzelnen Größen etwas vorauszusetzen. Diese Temperaturabhängigkeit soll aus den Messungen berechnet werden. Es wird nun gezeigt, daß sich für gut leitende Metalle das Verhältnis $\varkappa/\sigma T$ gut durch die Formel:

$$\frac{\varkappa}{\sigma T} = 0{,}072\,44 \cdot 4N^2 \frac{dE}{dT} \cdot \frac{E}{T}$$

darstellen läßt, wenn man $E = \frac{1}{2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/\varkappa T} - 1}$ setzt. Weiter wird aus E und σ das Produkt $n \cdot \lambda$ abgeleitet und aus dem Thomson-Effekt die Temperaturabhängigkeit von n berechnet. Endlich wird die Temperaturabhängigkeit von λ berechnet und gezeigt, daß die Formel von Lindemann sie nicht darstellt. Sa.

K. Pichelmayer. Induktionsgesetz und Elektronentheorie. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 462-466.

Zusammenfassung: „Die bekannten mathematischen Formulierungen des Induktionsgesetzes sind alle in allen Fällen prinzipiell anwendbar, wenn auch nicht immer gleich praktisch. Die Elektronentheorie stützt die „Schnitttheorie", die eine physikalische Mehrbestimmung über die rein mathematische Berechnung hinaus vorstellt. Die Notwendigkeit des „Schneidens" führt zur Bestätigung der allgemein gebräuchlichen Vorstellungen über die induzierte elektromotorische Kraft, die in bestimmten Leiterteilen induziert wird. Die magnetischen „Kraftlinien" sind physikalische Wirklichkeiten, wenn auch vielleicht nur Bewegungszustände, wie Wasserwellen, und können sich dementsprechend

auch bewegen wie diese. Die Einführung dieser letzteren Hypothese gestattet eine besonders einheitliche Auffassung des Induktionsgesetzes. Schr.

W. Wien. Zur Theorie der elektrischen Leitung in Metallen. Berl. Ber. 1913, 184-200.

Verf. bringt die Theorie der elektrischen Leitfähigkeit der Metalle mit der Quantentheorie in Verbindung. Da er für seine Theorie die Vorstellung aus der Elektronentheorie übernimmt, daß die Elektrizitätsleitung in Metallen durch Elektronen geschieht, so behält er die Drudesche Gleichung: $\sigma = \frac{1}{2mu} \cdot e^2 N L$ bei. Hierbei macht er aber die Annahme, daß weder die mittlere Geschwindigkeit u, noch die Anzahl N der Elektronen in 1 ccm, sondern nur die freie Weglänge L von der Temperatur abhängen soll. Die Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit σ von der Temperatur rührt mithin nur daher, daß die freie Weglänge von der Temperatur abhängt. Damit ferner die freie Weglänge nicht von der Verteilung der Quanten abhängig ist, wird angenommen, daß die Zahl der Zusammenstöße dem Quadrat der Amplitude proportional ist. Bei sehr hohen und sehr niedrigen Temperaturen ergeben sich für den Widerstand dann bzw. die Formeln: $W_T = C\frac{k\nu_m}{h} T$ und $W_T = C\left(\frac{kT}{h}\right)^2 \frac{\pi^2}{6}$, wo h das Wirkungsquantum, k die Entropiekonstante, $\nu_m = \sqrt[3]{2\frac{N}{T}}$, N die Anzahl der Atome in der Volumeneinheit, F eine von den elastischen Eigenschaften des Körpers abhängige Funktion ist. Die graphischen Darstellungen von $\frac{W_T}{W_{273}}$ für Platin, Silber, Gold und Blei zeigen, daß die Formel den Gang der Abhängigkeit von der Temperatur im ganzen richtig wiedergibt. Sa.

W. H. Keesom. Over de theorie der vrije electronen in metalen. Amst. Ak. Versl. **22**, 108-117.

Verf. überträgt die Betrachtungen einer früheren Mitteilung über die Anwendung der Quantentheorie auf die Zustandsgleichung eines idealen einatomigen Gases auf die Theorie der freien Elektronen in Metallen und zeigt, daß die Quantentheorie mehrere Schwierigkeiten, die der Äquipartitionstheorie anhaften, verschwinden läßt. Da diese Mitteilung nur einen orientierenden Charakter tragen soll, beschränkt sich Verf. nach einigen allgemeinen Betrachtungen auf die Behandlung der Thermokraft, an die sich der Peltier-Effekt und der Thomson-Effekt anschließen. Sa.

H. R. Hassé. The equations of the theory of electrons transformed relative to a system in accelerated motion. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 181-206.

Verf. bestimmt die Form der Transformation der elektrodynamischen Grundgleichungen für eine bestimmte Klasse von beschleunigten Bewegungen, und zwar soll der Weg des Mittelpunktes des Elektrons immer ein Kegelschnitt sein, der weder Ellipse, noch Kreis sein kann. Die Anwendungen beschränken sich aber auf den Fall der quasistationären Bewegung. Was die Art der Behandlung betrifft, so wird nicht die Aufgabe behandelt, wie sich ein Elektron unter der Wirkung einer gegebenen Kraft bewegt, sondern die Bewegung ist von vornherein durch die Transformation gegeben, und es werden dann die Kräfte berechnet. Sa.

J. McWhan. On the electron theory of thermo-electricity. Edinb. Roy. Soc. Proc. **33**, 169-176.

Die Theorie des Verf. ist im Wesen mit den Kelvinschen Normalgleichungen vereinbar, wenn kleine, auf die irreversible Natur des Wärmeflusses längs der Leiter sich beziehende Abweichungen ausgenommen werden; diese Betrachtung ist in der Kelvinschen Behandlung versäumt. Ob die gegenwärtige Theorie mehr lehrt bezüglich der wirklichen, in der Wirksamkeit eines Thermopaares liegenden Vorgänge, ist eine andere Frage. Sie zeigt das positive Bestehen von, wenn auch nur kleinen, Potentialdifferenzen an, die einzig von dem ungleichen Erwärmen von Leitern herrühren. J. (Lp.)

A. Guillet et Aubert. Expression directe des fonctions électrosphériques; formation d'équations différentielles vérifiées par ces fonctions. C. R. **157**, 367-370.

Als elektrosphärische Funktionen P werden definiert die Koeffizienten der Potenzreihen nach z bei der Funktion

$$F(x, a, b, z) = (1 + zx + a^2 z^2)[1 - (x^2 - a^2 - b^2)z^2 + a^2 b^2 z^4]^{-1}.$$

Durch Vertauschen von a und b ergeben sich die Funktionen Q. Es wird angegeben, wie man geometrisch und wie rekurrierend die einzelnen P und Q berechnen kann. Ferner werden Differentialgleichungen für die P angegeben. Zum Schluß wird das Bestehen interessanter arithmetischer Eigenschaften von aus den Koeffizienten der Polynome P gebildeten Dreiecken angedeutet. Zö.

A. Guillet et M. Aubert. Calcul des caractéristiques du condensateur à armatures sphériques extérieures à l'aide des fonctions électrosphériques. Journ. de Phys. (5) **3**, 713-724.

Die Verf. zeigen, daß die meisten bisher bekannten Ergebnisse über Kugelkondensatoren direkt und unter einer Form erhältlich sind, die sich zuweilen zu einer mathematischen Diskussion eignet. Dies geschieht mittels einer Art von Funktionen, die von selbst bei dem Verfahren sich einstellen, und die als elektrische Kugelfunktionen benannt werden. Von den beiden mit P und Q bezeichneten Polynomen sind die P die Koeffizienten der Potenzen von z in der durch Division erhaltenen Entwicklung von:

$$\frac{1+zx+a^2z^2}{1-(x^2-a^2-b^2)z^2+a^2b^2z^4};$$

die Polynome Q entstehen nach Vertauschung von a und (vgl. das vorangehende Referat). Lp.

H. Conrad. Über die Natur des Volta-Effekts. Wien. Ber. **122**, 35-43.

An einem Plattenkondensator, bestehend aus einer Zink- und einer Kupferplatte, wird die Abhängigkeit des Volta-Effekts von dem Abstand der Platten untersucht. Es wird gezeigt, daß eine Erklärung für die beobachtete Änderung des Volta-Effekts mit dem Abstand nur auf Grund der chemischen Theorie möglich ist. Lp.

E. Becker. Über Drehfelderscheinungen im elektrostatischen Wechselfeld. Wien. Ber. **122**, 515-534. (1 Tafel.)

Es wird zunächst experimentell nachgewiesen, daß der Drehungssinn des Drehfeldes, das durch Einbringen von verlängerten Rotationsellipsoiden in ein homogenes elektrostatisches Wechselfeld erhalten wird, im Gegensatze zu früheren Behauptungen nicht vom Durchmesser der eingebrachten Körper abhängt, und dies wird dann potentialtheoretisch bewiesen. Abweichende Ergebnisse sind nur durch die Unterlage der eingeführten Körper hervorgerufen. Zö.

S. Ratnowsky. Experimenteller Nachweis der Existenz fertiger elektrischer Dipole in flüssigen Dielektriken. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **15**, 497-516.

Debije hat (F. d. M. **43**, 1002, 1912) die Annahme gemacht, daß im Innern der Isolatoren nicht allein elastisch gebundene Elektronen, sondern auch fertige Dipole von konstantem elektrischen Moment vorhanden sind. Vor der Beschreibung des experimentellen Nachweises dieser Existenz skizziert der Verf. in Kürze die Debijesche Theorie, weil die angezogene Debijesche kurze Notiz nicht alles enthält, worauf nachher Bezug genommen wird, und weil aus der Debijeschen Theorie Schlüsse gezogen werden, welche die Grundlage der Versuche bilden. Lp.

L. Flamm. Die Messung radioaktiver Substanzen im Schutzringplattenkondensator. Physik. Zs. **14**, 1122-1125.

Der Schutzringkondensator gibt für homogene Schichten α strahlender Substanz genau die gleiche Sättigungsstromdichte wie der unendlich ausgedehnte Parallelplattenkondensator, der für die theoretische Behandlung am leichtesten ist. Von dem Verf. wurde gemeinsam mit H. Mache der Schutzringplattenkondensator für radioaktive Messungvn ausgebildet, worüber hier berichtet wird. A. K.

H. ROHMANN. Drehspulgalvanometer mit vergrößerter Empfindlichkeit. Physik. Zs. **14**, 203-209.

Die Empfindlichkeit eines Drehspulgalvanometers ist abhängig von der Windungsfläche der Spule, von ihrer Richtkraft und der Stärke des magnetischen Feldes; im allgemeinen ist man mit der Empfindlichkeit noch nicht zu den äußersten Grenzen gegangen, weil bei der Vergrößerung der Empfindlichkeit auch die Dämpfung in schädlicher Weise vergrößert wird. Verf. beschreibt zwei Verfahren, welche gestatten, eine erhebliche Steigerung der Empfindlichkeit durch Anwendung sehr hoher Feldstärken zu erzielen, unter Vermeidung der Nachteile der Dämpfung. Die mathematischen Ausführungen hierzu verdienen Beachtung. A. K.

T. J. I'A. BROMWICH. A note on the ballistic galvanometer. Phil. Mag. (6) **26**, 186-190.

Anstatt einer ungenauen Formel, die angeblich von Maxwell herrühren soll, aber vom Verf. nicht in den Schriften Maxwells gefunden ist, berechnet der Verf. einen berichtigten Ausdruck. Lp.

K. HAUBNER. Über die Näherungsformel der Maxwellschen Brückenmethode für Kapazitätsmessung. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 1044-1045.

An Stelle der genauen Formel für die gesuchte Kapazität

$$C = \frac{\left(1 - \frac{w_3}{(w_1 + w_3 + w_g)(w_3 + w_4 + w_b)}\right) \cdot \frac{w_3}{n w_1 w_4}}{\left(1 + \frac{w_3 w_g}{w_4(w_1 + w_3 + w_g)}\right)\left(1 - \frac{w_3 w_b}{w_1(w_3 + w_4 + w_b)}\right)},$$

worin w_1, w_3, w_4 die bekannten Widerstände, w_g und w_b die Widerstände des Galvanometers und der Batterie bedeuten, wird gewöhnlich die Näherungsformel $C = \frac{w_3}{n w_1 w_4}$ verwendet. Der Beweis für die Berechtigung dieses Verfahrens, wie er sonst gegeben wird, ist unzureichend; hier wird ein stichhaltiger Beweis gegeben und zugleich die Annäherung (qualitativ) abgeschätzt. Schr.

G. HOFFMANN. Über ein Elektrometer hoher Empfindlichkeit. Ann. der Phys. (4) **42**, 1196-1220.

Verf. gibt eine Theorie des von ihm früher (Physik. Zs. **13**, 480 u. 1029, 1912) beschriebenen Elektrometers. „Sie erweist sich als nützlich zur Festlegung der Eigenschaften bestimmter benutzter Formen des Nadelsystems und gibt Anhaltspunkte für ihre weitere Ausgestaltung.“ Sa.

J. R. MILNE and H. LEVY. The error caused by „lag“ in a recording instrument: An experimental study. Edinb. Roy. Soc. Proc. **33**, 103-116.

Alle Apparate, die eine schnell schwankende Größe registrieren sollen, leiden unter den Wirkungen der Verzögerung. Die vorliegende Abhandlung enthält einen Bericht über eine Reihe von Versuchen, die in der Absicht unternommen wurden, die Ausdehnung des Fehlers zu ermitteln und zu erkunden, wie er möglichst klein zu machen sei, ferner eine Erörterung der mathematischen Theorie. Das Auffallendste der versuchlichen Ergebnisse ist die Tatsache, daß der Apparatfehler immer positiv ist. d. h. wenn der Strom schwankt, verzeichnet der Apparat einen zu großen Fluß. J. (Lp.)

M. Siegbahn. Hochfrequenzgeneratoren für Meßzwecke. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. 8, Nr. 30, 7 S.

Der Verf. teilt die theoretischen Überlegungen mit, die ihn bei dem Entwurfe zum Bau einer neuen Maschine und bei der Ausführung dieses Entwurfes geleitet haben. Lp.

Br. Glatzel. Methoden zur Erzeugung von Hochfrequenzenergie. Leipzig: Hachmeister u. Thal. „Helios" 1913. 60 S.

Kurzer Auszug aus einem Vortrag über die physikalischen Grundlagen der Hochfrequenztechnik an der Hand von Experimenten. Eingehender werden beschrieben zwei Arten von statischen Periodentransformatoren, von denen die eine auf der starken Sättigung des Transformatoreisens durch übergelagerten Gleichstrom, die andere auf der Quermagnetisierung des Transformatoreisens beruht. Zö.

J. Lissner. Einige Beispiele zur Theorie der Wechselstrom-Kollektormaschinen. Eektrotechnik und Maschinenbau **31**, 589-594, 611-616.

„Ich werde im folgenden, meine Untersuchungsmethode (Elektrotechnik und Maschinenbau **29**, 1911, Heft 22) beibehaltend, mit Hülfe derselben einige Beispiele zur Theorie der Wechselstrom-Kollektormaschinen etwas eingehender rechnerisch sowie, soweit dies tunlich ist, an der Hand von Vektordiagrammen behandeln." Schr.

Leop. Klein. Der Kappsche Faktor für Wechselströme allgemeiner Kurvenform. (Aus der Dissertation.) Elektrotechnik und Maschinenbau **11**, 201-206. Berichtigung dazu S. 484.

Der Kappsche Faktor ist die Zahl $\varkappa$ in $E = \varkappa \Phi_p \sim \cdot S \cdot 10^{-8}$, der Formel für die effektive elektromotorische Kraft der allgemeinen Wechselstrommaschine (Φ_p Maximum der Kraftlinienzahl. $\sim$ Periodenzahl, S Zahl der Ankerstäbe). Er wird im Anschluß an Pichelmayer näher diskutiert. Schr.

M. Kroll. Graphische Darstellung der Wechselstromleistung. Zentralblatt f. d. gewerbl. Unterrichtswesen in Österreich **31**, 419-423.

Die Leistungksurve ist eine Sinuslinie, die um so höher liegt, je weniger induktive Belastung vorhanden ist, und, wenn diese gänzlich fehlt, die Achse von oben berührt. Schr.

G. Mattausch. Rotierende Umformer. Der Elektrotechniker **32**, 206-207, 220-221.

I. Verhältnis der elektromotorischen Kräfte. II. Veränderungen des Verhältnisses der elektromotorischen Kräfte. III. Armaturstrom und Armaturerwärmung des Umformers. IV. Ankerrückwirkung des Umformers. Schr.

H. Frohman. Verfahren zur Berechnung elektrischer Leitungsnetze. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 823-827.

„Die Ströme in einem Knotenpunkt, in dem eine beliebige elektromotorische Kraft gedacht wird, sind in Summe demjenigen Gesamtstrom gleich, welchen das Erhöhen oder das Reduzieren dieser elektromotorischen Kraft auf die tatsächliche Knotenpunktspannung in diesem Knotenpunkt hervorruft.“ Ist das im Knotenpunkt eingesetzte Potential dem der Speisepunkte gleich, so tritt folgende Regel dafür ein:

„Die durch den Spannungsverlust in einem Knotenpunkt hervorgerufenen Ströme sind in Summe demjenigen Gesamtstrom gleich, welcher vom Knotenpunkt wegfließen würde, wenn letzterer Speisepunkt wäre.“ Schr.

E. Besser. Ein neuer Rechenschieber zur raschen Berechnung und Veranschlagung elektrischer Leitungen. Der Elektrotechniker **32**, 142-143. Hierzu Berichtigung S. 162.

Der Rechenscheiber wird von Nestler in Lahr erzeugt, er heißt „System Besser“; das wesentliche Neue daran ist die Verwendung gegenläufiger Teilungen. Schr.

K. Fuchs. Hülfsapparat zur Berechnung elektrischer Leitungsnetze. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 1115-1118.

Der Apparat ist derselbe wie in der Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen **10**, 1912, 325-329 (F. d. M. **43**, 151, 1912). Schr.

H. Grünholz. Beitrag zur Mastenberechnung bei Verwendung von Hängeisolatoren. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 576-580.

„Ein schrittweises Verfolgen der Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Isolatoren kann ... hier leicht zum Ziele führen. Für einen Isolator werden die angreifenden Kräfte angenommen und so lange variiert, bis die sich ergebende Kräfteverteilung den äußeren Bedingungen genügt.“ Schr.

F. NIETHAMMER. Ermittlung der Luftspalt-Ampèrewindungen. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 390-393.

Man kann entweder den Luftspalt beibehalten und den Luftquerschnitt auf den richtigen Wert reduzieren oder umgekehrt. Mehrere Beispiele werden nach beiden Methoden durchgerechnet. Schr.

G. P. MARKOVITSCH. Über die Berechnung der Betriebskapazität und des Stromabfalls bei Hochspannungs-Drehstromfreileitungen. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 529-535, 554-560, 616-623.

„Wir werden im nachstehenden für die Berechnung der Kapazität die in der Praxis allgemein verbreiteten Methoden anwenden und auf Grund dieser eine Reihe neuer Vektordiagramme vorführen, welche uns erlauben werden, graphisch und analytisch die Kapazität unsymmetrisch angeordneter Drehstromleiter zu bestimmen und für den Stromabfall längs solcher Drehstromleiter eine neue Gleichung aufzustellen. Wir werden ferner den Beweis erbringen, daß alle in der Praxis angewandten Methoden für Berechnung der Kapazität von Drehstromleitern zu einem und demselben Resultate führen und identisch sind." Schr.

E. GRÜNEISEN. Über den Einfluß von Temperatur und Druck auf den elektrischen Widerstand der Metalle. Verh. Deutsche Phys. Ges. **15**, 186-200.

Als das wichtigste Ergebnis dieser Untersuchung ist folgendes hervorzuheben: Der elektrische Widerstand eines reinen Metalles wächst in tiefer Temperatur proportional einer universellen Funktion von $T/\beta\nu_m$, wo ν_m durch die Atomwärme bestimmt ist, β die aus der Planckschen Strahlungstheorie bekannte Konstante h/k ist. Als solche Funktion genügt, wie sich empirisch zeigt, das Produkt aus Atomwärme und absoluter Temperatur, während die von Wien berechnete Funktion für den Widerstand nicht ausreicht. Gleichwohl wird die Wiensche Annahme, daß die Zahl der Zusammenstöße zwischen Elektronen und Atomen oder die reziproke Weglänge proportional dem Quadrat der Atomamplituden sei, dadurch gestützt, daß sich auf ihrem Grunde der Einfluß des hydrostatischen Druckes auf den elektrischen Widerstand reiner Metalle dem Vorzeichen und der Größenordnung nach richtig berechnen läßt. Die für diesen Druckeffekt abgeleitete Formel scheint auch für solche Legierungen gültig zu bleiben, die der Matthießenschen Regel folgen. Lp.

J. I'A. BROMWICH. Some theorems relating to the resistance of compound conductions. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 235-240.

In dem Aufsatze werden einige der bekannten Sätze für ein System linearer Leiter so erweitert, daß sie Fälle körperlicher Leiter umfassen und auch Fälle, bei denen körperliche und lineare Leiter in dem System vorhanden sind. Lp.

R. Swyngedauw. Sur l'intégration de l'équation donnant la distribution de la densité du courant alternatif dans les conducteurs cylindriques. C. R **157**, 397-400.

Ableitung des allgemeinsten Ausdruckes für die Stromdichte im Innern eines wechselstromdurchflossenen zylindrischen Leiters durch ein sehr einfaches, sukzessives Annäherungsverfahren. Es ergibt sich die bekannte Lösung in Form einer Besselschen Reihe. Zö.

W. O. Schumann. Über die Verteilung des Wechselstroms in unendlich ausgedehnten Platten. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 635-640, 659-665.

„Zusammenfassung: Es wird die Verteilung des elektrischen Wechselstromes in unendlich ausgedehnten Platten für verschiedene Anordnungen untersucht und der effektive Widerstand und zum Teil auch die innere „Selbstinduktion" bestimmt. Zum Schluß wird geschätzt, inwiefern die erhaltenen Resultate auf Kupferschienen endlichen Querschnitts übertragen werden können." Schr.

W. F. G. Swann. A case of anomalous conduction by a solid dielectric. Phil. Mag. (6) **26**, 678-693.

Zusammenfassung: 1. Experimente, um klare Einsicht zu gewinnen in die Strompotentialkurve für einen sehr guten Isolator (Paraffinwachs), werden beschrieben; das Verfahren von einem neuen Schlage ist ausgedacht, um die von den benutzten hohen Potentialen herrührenden Schwierigkeiten zu vermeiden und um jede Abweichung von dem Ohmschen Gesetz hervorspringen zu lassen. 2. Die Theorie und die Fehlerwahrscheinlichkeiten infolge eines Abgehens von den idealen Bedingungen der einfachen Theorie werden allseitig erwogen, und es wird gezeigt, daß der einzige wahrscheinliche Weg, den erhaltenen Ergebnissen gerecht zu werden, in der Annahme einer solchen Abweichung von dem Ohmschen Gesetz besteht, die einem Anwachsen der Leitfähigkeit mit dem Felde entspricht. 3. Die Gründe für das Abweisen jeder Erklärung der Erscheinung als Folge des Aufweichens werden erörtert, und die Möglichkeit ihrer Erklärung als Ergebnis eines Anwachsens in der Ionisation, herrührend vom Felde, wird geprüft und als unhaltbar gefunden. Lp.

K. F. Herzfeld. Zur Elektrochemie äußerst verdünnter Lösungen, insbesondere radioaktiver Stoffe. Physik. Zs. **14**, 29-32.

Die interessanten Versuche von Hevesy, der bei dem Eintauchen einer Metallplatte in eine Lösung eines ihrer Salze, bei gleichzeitigem Vorhandensein einer Mischung zweier radioaktiven Substanzen in bestimmtem Verhältnis, zu dem Resultate kam, daß das Mengenverhältnis der abgeschiedenen Substanzen nur vom Potential (Metall-Metallsalzlösung), nicht von den absoluten Mengen abhängt, können durch die Formel von Nernst nicht gedeutet werden; die Notiz beschäftigt sich mit einer Modifikation der Nernstschen Formel, welche dem Resultate von Hevesy gerecht wird. A. K.

S. R. Milner. The effect of interionic forces on the osmotic pressure of electrolytes. Phil. Mag. (6) **25**, 742-751.

In der vorjährigen Abhandlung des Verf. „The virial of a mixture of ions" (F. d. M. **43**, 1000, 1912) wurde gezeigt, daß eine vollständig dissoziierte Mischung von Ionen ein endliches Virial besitzt, und sein angenäherter Wert wurde nach einem möglichst strengen mathematischen Verfahren berechnet. Bei der Anwendung auf Lösungen folgt, daß der osmotische Druck der Ionen eines Elektrolyten von dem eines vollkommenen Gases in berechenbarer Weise sich unterscheidet. In der vorliegenden Abhandlung wird die Virialberechnung dazu verwendet, den theoretischen osmotischen Druck zu bestimmen und damit die Erniedrigung des Gefrierpunktes bei verschiedenen Konzentrationen eines angenommenen, vollständig dissoziierten binären Elektrolyten. Die Vergleichung mit den experimentellen Ergebnissen führt zu weiteren Schlüssen.
Lp.

H. J. van der Bijl. Über langsame Ionen in flüssigen Dielektriken. Verhdl. Deutsche Phys Ges. **15**, 102-108.

Teils theoretische, teils experimentelle Untersuchungen, wie sich die Ionen in sehr zähflüssigen Medien (wie z. B. Vaselinöl) in bezug auf Beweglichkeiten und Größe verhalten.
Lp.

R. T. Beatty. On the energy required to ionize an atom. Phil. Mag. (6) **26**, 183-186.

Berechnung der Arbeit, die bei der Abtrennung eines Elektrons von einem Atom und seiner Entfernung ins Unendliche zu leisten ist.
Lp.

N. Campbell. A special case of gaseous conduction. Phil. Mag. (6) **26**, 912-924.

Für das Jahrbuch kommt nur der erste, kürzere Teil der Arbeit in Betracht. In ihm wird eine Theorie der Leitung in einem ionisierten Gas skizziert, die auf solche versuchlichen Bedingungen paßt, bei denen die Wirkungen der Wiedervereinigung der Ionen unabschätzbar sind im Vergleich zu denen ihrer Diffusion. Es wird dargelegt, daß, wenn solche Bedingungen verwirklicht werden könnten, die Form der Sättigungskurve des ionisierten Gases von nichts weiter abhängen würde als von der Temperatur des Gases.
Lp.

G. Jaffé. Zur Theorie der Ionisation in Kolonnen. Ann. der Phys. (4) **42**, 303-344.

1. „Es wird eine Formel für die räumlichen und zeitlichen Änderungen der Ionisationsdichte in einer Kolonne aufgestellt, unter Berücksichtigung der Diffusion und Wiedervereinigung. Die sich aus der Theorie ergebenden Werte für den Diffusionsverlust in verschiedenen Gasen und Flüssigkeiten sind in Übereinstimmung mit der Erfahrung. 2. Es werden Formeln aufgestellt für die

Vorgänge in einer Kolonne im elektrischen Felde, unter Berücksichtigung der Diffusion und Wiedervereinigung, bei beliebiger Richtung des Feldes gegen die Kolonne. Die sich aus der Theorie ergebenden Sättigungskurven (Charakteristiken) sind in Übereinstimmung mit der Erfahrung a) für Gase unter normalem Druck bei Ionisation mit α-Strahlen, b) für Gase bei hohen Drucken bei Ionisation mit β-Strahlen, c) für Hexan bei Ionisation mit α- oder β-Strahlen. 2. Die aus den Formeln sich ergebende Abhängigkeit der Sättigungskurven: von der Richtung des elektrischen Feldes, vom Druck, von der linearen Ionisationsdichte und der Temperatur ist in quantitativer Übereinstimmung mit den vorliegenden Beobachtungen. 4. Der Durchmesser einer von α-Strahlen erzeugten Kolonne erweist sich in verschiedenen Medien als proportional dem Bereich der α-Strahlen. Es ist danach möglich, die Sättigungskurve für beliebige gasförmige oder flüssige Medien vorauszuberechnen.“ Lp.

R. D. Kleeman. The unstable nature of the ion in a gas. Cambr. Phil. Soc. Proc. **17**, 263-279.

Die Ionen bei einem im thermodynamischen Gleichgewicht befindlichen Gase müssen in jedem Augenblick aus freien Ionen und aus Haufen von verschiedenen Verkettungen bestehen. (Cambr. Phil. Soc. Proc. **16**, 285-298; F. d. M. **42**, 940, 1912.) Zur Erlangung einiger Einsicht in die Natur der Ionen auf dem Wege des Versuches wurde die Ionisierung beim Zusammenstoß zwischen einer Gaze und einer Platte untersucht, wobei die Ionen außerhalb des Raumes zwischen Gaze und Platte in einem flachen Felde gebildet wurden, das die Ionen durch die Gaze zog. Einige der elementaren Ionen wurden so befähigt, Haufen zu bilden, bevor sie durch das starke Feld beansprucht wurden, das weitere Ionen durch Zusammenstoß erzeugte. J. (Lp.)

A. Szarvassi. Zur Elektrodynamik der Bogen- und Funkenentladung. Verh. Deutsche Phys. Ges. **15**, 941-945.

Verf. gibt eine Theorie eines Stromkreises, in welchem eine Funkenstrecke eingeschaltet ist, in Weiterführung der früheren schönen Arbeiten von H. Th. Simon; als „Charakteristik“ der Funkenstrecke wählt er das Verhältnis von Stromstärke zur Elektrodenspannung. Für diese Charakteristik und die Temperaturen der Anode und Kathode stellt er drei lineare Differentialgleichungen auf, welche er als die dynamische Charakteristik der Entladungsstrecke bezeichnet. Einige Beispiele werden durchgeführt (vgl. das folgende Referat). A. K.

A. Szarvassi. Elektrodynamische Theorie der Lichtbogen- und Funkenentladung. Ann. der Phys. (4) **42**, 1031-1053.

Verf. versucht im Anschluß an eine Arbeit von Simon (Physik. Zs. **6**, 296; F. d. M. **36**, 941, 1905) eine elektrodynamische Theorie der Bogen- und Funkenentladung in Form eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen

zu geben. „Von den in dieser Arbeit mitgeteilten Folgerungen der Theorie seien die folgenden als neu hervorgehoben: Eine Gesetzmäßigkeit der Strom- und Spannungskurve von Wechselstromlichtbogen; die Bestimmung des exakten Kriteriums für das Entstehen von Lichtbogenschwingungen erster Art; die Berechnung der Periode derselben.“ Sa.

A. Szarvassi. Zur Elektrodynamik der Bogen- und Funkenentladung. (Vortrag, gehalten bei der 85. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Wien.) Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 864-866.

1. Sowohl in der Strom-, wie in der Spannungskurve des Wechselstrom-Lichtbogens fehlen die ungeradzahligen Oberschwingungen. 2. Ein an sich labiler Gleichstrom-Lichtbogenkreis kann durch Parallelschaltung einer Kapazität stabilisiert werden. 3. Jeder Funke wirkt im Grunde als Löschfunke. Schr.

J. Kraus. Über die Bedingungen, unter welchen ein Lichtbogen überhaupt nicht entstehen kann. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 717-720, 744-748.

Außer der schon bekannten Möglichkeit einer zu geringen Spannung kann auch durch einen zu großen Widerstand das Auftreten eines Lichtbogens verhindert werden. Das Ergebnis ist für die Konstruktion der Stromkontakte, die durch die Lichtbogen langsam zerstört werden, wichtig. Schr.

H. L. Cooke and O. W. Richardson. The absorption of heat produced by the emission of ions from hot bodies. Phil. Mag. (6) **25**, 624-643.

Die ihrem Ziele nach experimentelle Arbeit enthält auch eine längere mathematisch entwickelte Theorie des durchgeführten Messungsverfahrens. Lp.

W. Wilson. Versuch einer Anwendung der Quantenhypothese auf die elektrische Entladung von heißen Körpern. Ann. der Phys. (4) **42**, 1154-1162.

1. Versuch zu einer Theorie der elektrischen Entladung von heißen Körpern, deren Grundlage in der Planckschen Quantenhypothese liegt. Die abgeleitete Formel stellt die experimentellen Ergebnisse mindestens ebensogut dar wie die bisher gebrauchte Formel von Richardson. 2. Die Theorie bringt das Phänomen der elektrischen Ladung von heißen Körpern in Zusammenhang mit andern Phänomenen, z. B. der durch Bestrahlung mit Röntgenstrahlen und mit ultraviolettem Lichte verursachten Entladungen, die bisher als wesentlich verschieden von dem Phänomen der Entladung von heißen Körpern angesehen worden sind. Lp.

B. Davis. Eine Theorie der Stoßionisation und die Form der Funktion $\alpha/p = f(X/p)$. Ann. der Phys. (4) 42, 807-814.

„Es ist bislang kein Versuch gemacht worden, die Form dieser Funktion auf Grund theoretischer Erwägungen zu entwickeln. Ich möchte nur nachweisen, daß sich diese Funktion mit Leichtigkeit durch eine Erweiterung einer Theorie der Stoßionisation ausdrücken läßt, die ich vor einigen Jahren entwickelt habe“ (Phys. Rev. Jan. 1907). Die endgültige Form der Gleichung ist:

$$\frac{\alpha}{p} = \frac{1}{76\,L}\left[e^{-\frac{v}{76\,L}\frac{p}{x}} + \frac{v}{76\,L}\,Ei\left(\frac{-v}{76\,L}\frac{p}{x}\right)\right].$$

Lp.

N. Bohr. On the theory of the decrease of velocity of moving electrified particles on passing through matter. Phil. Mag. (6) 25, 10-31.

In dieser Abhandlung wird die Theorie der Geschwindigkeitsabnahme in der Bewegung elektrischer Teilchen beim Durchgang durch Materie in einer solchen Form gegeben, daß der Abfall an Geschwindigkeit von der Frequenz der Schwingung der Elektronen in den Atomen des absorbierenden Materials abhängt. Die Absorption der α-Strahlen in den leichtesten Elementen kann aus der Kenntnis bezüglich der Anzahl und der Frequenzen der Elektronen in den Atomen berechnet werden, und die Werte stehen in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung. Bei Elementen von höchstem Atomgewicht müssen die Anzahl und die Frequenzen der Elektronen gemäß der Theorie von der zu erwartenden Größenordnung angenommen werden, um die Absorption der α-Strahlen zu erklären.

Die Theorie kann Aufschluß geben über die Form der Beziehungen zwischen der Geschwindigkeit der Strahlen und der Dicke der durchlaufenen Materie, die durch Versuche mit Kathoden- und mit β-Strahlen gefunden sind. Die absolute Übereinstimmung hinsichtlich der Größe der in die fraglichen Beziehungen eingehenden Konstanten ist sehr gut für die geschwindesten β-Strahlen, aber nicht so gut für langsamere β-Strahlen; dieser Umstand kann vielleicht den sehr schwierigen experimentellen Bedingungen für diese letzteren Strahlen zur Last fallen. Bei Annahme der Rutherfordschen Theorie über das Gefüge der Atome scheint man aus der Absorption der α-Strahlen mit großer Sicherheit schließen zu dürfen, daß ein Wasserstoffatom nur ein Elektron außerhalb der positiv geladenen Kerne enthält, und daß ein Heliumatom nur zwei Elektronen außerhalb des Kerns enthält. Lp.

E. v. Schweidler. Über die α-Strahlung dicker Schichten. Physik. Zs. 14, 505-507.

Gegeben sei eine unendlich ausgedehnte planparallele Platte beliebiger Dicke h, in der ein α-strahlender Stoff gleichmäßig verteilt sei. Unter gewissen, annähernd erfüllten Voraussetzungen wird die Zahl der austretenden α-Teilchen und die durch dieselbe erzeugte Ionisierung berechnet. A. K.

L. Flamm. Zur α-Strahlung dicker Schichten. Physik. Zs. **14**, 812-815.

Verf. zeigt, wie man den Ansatz E. v. Schweidlers (vgl. vorstehendes Referat) über die Ionisation oberhalb dicker Schichten α-strahlender Substanz exakt integrieren und vermittelst einfacher experimenteller Hülfsbestimmungen rechnerisch verwerten kann. A. K.

D. L. Webster. The theory of the scattering of Röntgen-radiation. Phil. Mag. (6) **25**, 234-241.

Theoretisches zu den bezüglichen Artikeln von Crowther (F. d. M. **42**, 959, 1911 und **43**, 101, 1916). „Der Zweck der gegenwärtigen Abhandlung ist: die ursprüngliche Formel zu überprüfen ohne die Voraussetzung, daß jedes Elektron Energie genau so zerstreut, wie wenn es allein wäre, und zu zeigen, wie die Verstärkung der Strahlung von einem Elektron durch die von einem andern die „Überschußstrahlung" erzeugen kann, die Crowther beobachtet hat." Lp.

M. Laue. Die dreizählig-symmetrischen Röntgenstrahlaufnahmen an regulären Kristallen. Ann. der Phys. (4) **42**, 397-414, 1592.

Von den Photogrammen von Friedrich und Knipping, welche die Interferenzerscheinungen der Röntgenstrahlen an Kristallen darstellen, war bisher nur das vierzählig-symmetrische quantitativ mit der Theorie verglichen worden. Es erscheint nun nicht unwichtig, daß sich aus der in der vorliegenden Abhandlung gegebenen Durchrechnung des dreizählig-symmetrischen Photogrammes J derselben Forscher ein sehr schwerwiegender Grund gegen die Annahme einer einzigen Wellenlänge ableiten läßt. Die Durchrechnung des Photogrammes beruht auf der Auffassung des regulären holoedrischen Raumgitters als einer Art von hexagonalem hemiedrischen Raumgitter mit bestimmtem Verhältnis der beiden Achsen. Es ist das ein rein mathematischer Kunstgriff zwecks Vereinfachung der Rechnung, der auf das Resultat keinen Einfluß hat; er nötigt aber, die Theorie der Röntgenstrahleninterferenzen für ein hexagonales Raumgitter zu entwickeln. Lp.

M. Laue und F. Tank. Die Gestalt der Interferenzpunkte bei den Röntgenstrahlinterferenzen. Ann. der Phys. (4) **41**, 1003-1013.

Es handelt sich um gewisse Erscheinungen, die bei Interferenzaufnahmen an Röntgenstrahlen beobachtet sind, speziell um einen Einfluß der Entfernung Antikathode—Kristall oder um einen Einfluß der Krümmung der Strahlen. Die hier durchgeführte theoretische Untersuchung führt zu Ergebnissen, die in völligem Einklange mit den früheren Beobachtungen stehen und auch durch solche bestätigt werden, die nachträglich zu ihrer Prüfung angestellt sind. Lp.

M. v. LAUE. Über den Temperatureinfluß bei den Interferenzerscheinungen an Röntgenstrahlen. Ann. der Phys. (4) **42**, 1561-1571.

„Der große Fortschritt, den Debijes Arbeiten über den Einfluß der Wärmebewegung der Theorie der Röntgenstrahleninterferenzen gebracht haben, veranlaßt uns, auf zwei schon früher in dieser Zeitschrift behandelte Fragen zurückzukommen, und zwar sollen in Hinblick auf den Temperatureinfluß erweitert werden einmal die Theorie der Fleckenform, sodann die Betrachtungen über den Einfluß hemiedrischer Strukturen. Da die in beiden Fällen vorkommenden Rechnungen ganz nach dem von Debije gebrauchten Schema verlaufen, so können wir uns in allen schon dort erörterten Punkten kurz fassen.“
Lp.

R. WHIDDINGTON. Note on the absorption of cathode rays by metallic sheets. Cambr. Phil. Soc. Proc. **17**, 280-281.

Das von Lenard, Seitz und andern für die Absorption der Kathodenstrahlen aufgestellte exponentiale Gesetz erweist sich als keineswegs allgemein anwendbar. Die Versuche werden fortgesetzt. J. (Lp.)

Sir J. J. THOMSON. Rays of positive electricity; their application to chemical analysis. London: Longmans, Green and Co. VII u. 132 S.

Thomson gibt einen Bericht über seine im Jahre 1906 begonnenen Versuche über „positive Strahlen“, Goldsteins „Kanalstrahlen“. (Vgl. Nature **92**, 549-550, 1914.) „Rays of positive electricity“. Lond. Roy. Soc. Proc. (A) **89**, 1-20. J. (Lp.)

F. G. SWANN. The pulse theory of *X* rays, γ rays, and photoelectric rays, and the asymmetric emission of β rays. Phil. Mag. (6) **25**, 534-557.

Wenn ein Bündel von X-Strahlen oder ultravioletten Strahlen auf eine dünne Metallschicht fällt, so sind die Werte für die Zahl und die Geschwindigkeit der erzeugten β-Strahlen bekanntlich größer für die Austrittsstrahlen als für die Eintrittsstrahlen. Die Erklärung dieser Tatsache auf Grund der Wellentheorie wird allgemein als von so ernsten Schwierigkeiten begleitet angesehen, daß ein Verzicht auf die „Pulstheorie“ zugunsten einer Korpuskulartheorie notwendig wird. Praktisch stützen dieselben Beweisgründe, welche die Korpuskulartheorie für die X-Strahlen stützen, sie auch für das ultraviolette Licht; verlassen wir also die Wellentheorie für die einen, so sind wir gezwungen, sie auch für die anderen aufzugeben. In der vorliegenden Abhandlung hat der Verf. zu zeigen versucht, bis zu welcher Ausdehnung der Mangel an Symmetrie bei der Ausstoßung der β-Strahlen mit der Pulstheorie in Einklang zu bringen ist; ferner werden auch manche andern, die Eigenschaften der X-Strahlen betreffenden Punkte erörtert. Lp.

P. Weiss. Sur la théorie cinétique du paramagnétisme des cristaux. C. R. **156**, 1674-1676.

P. Weiss. L'aimantation des cristaux et l'hypothèse du champ moléculaire. C. R. **156**, 1836-1837.

Verf. geht von der Annahme aus, daß jeder Orientierung der Molekularmagnete des Kristallgitters eine bestimmte potentielle Energie entspricht, und es wird nun hierauf eine ähnliche Überlegung angewendet, wie sie Langevin zur Theorie des Paramagnetismus der Gase geführt hat. Die Berechnung der molekularen Magnetisierung zeigt, daß der Magnetisierungskoeffizient nicht umgekehrt proportional der absoluten Temperatur, sondern eine kompliziertere Funktion derselben ist. Ferner ergibt sich, daß das Mittel der nach drei aufeinander senkrechten Richtungen beobachteten Magnetisierungskoeffizienten dem Curieschen Gesetz gehorcht.

In der zweiten Arbeit wird die Überlegung auf den Fall der ferromagnetischen Kristalle ausgedehnt. Es wird hier noch eine zweite Art von potentieller Energie hinzugenommen, die von der gegenseitigen Orientierung der Magnete abhängt. Sa.

Z. Thullie. Die molekularen Felder und ihre Bedeutung in der Theorie des Magnetismus und der Optik. Prace mat.-fiz. **24**, 315-335. (Polnisch.)

Es ist eine zusammenfassende Darstellung der Theorien von Langevin-Weiss, die der Theorie von Gans entgegengestellt und mit ihr verglichen werden (I. Teil). Im II. Teile berichtet der Verf. über die Ritzsche Theorie des Emissionsmechanismus der Linienspektren, erwähnt die von Voigt gegen diese Theorie gemachten Einwände, hebt aber (ganz allgemein) ihre weitere Entwicklungsmöglichkeit hervor. S. L.

A. E. Oxley. The variation of magnetic susceptibility with temperature. Part II: On aqueous solutions. Cambr. Phil. Soc. Proc. **17**, 65-89.

Fortsetzung der Untersuchungen in Cambr. Phil. Soc. Proc. **16** (F. d. M. **43**, 1017 u. 1018, 1912). Die allgemeine Theorie wird in mathematischer Fassung gegeben. J. (Lp.)

A. E. Oxley. The influence of molecular constitution and temperature on magnetic susceptibility. Preliminary Note. Cambr. Phil. Soc. Proc. **17**, 282-283.

Ein vorläufiger Bericht über weitere Versuche, angestellt zu dem Zwecke, die Wirkung der Anwesenheit molekularer Komplexe auf die Suszeptibilität zu prüfen. J. (Lp.)

W. H. Keesom. Over de magnetisatie van ferromagnetische lichamen in verband met de aanname eener nulpuntsenergie. Amst. Ak. Versl. **22**, 476-489, 490-499.

Verf. entwickelt einen Ausdruck für die molekulare Rotationsenergie in einem System frei rotierender Molekeln als Funktion der Temperatur. Das erhaltene Resultat wird in die Theorien von Langevin und Weiss eingeführt und der Einfluß eines richtenden Feldes (Magnetfeldes) auf die Rotationsenergie bestimmt. Der Vergleich mit den experimentellen Bestimmungen an Magnetit und Nickel zeigt, daß sich verschiedene Versuchsergebnisse auf diese Weise sehr befriedigend darstellen lassen.

Im zweiten Teile wird die Anwendung der Quantentheorie unter Einführung der Nullpunktsenergie besonders auf den erregt-ferromagnetischen Zustand behandelt. Sa.

G. Vallauri. Zur Weissschen Theorie der Hysteresis der ferromagnetischen Substanzen. Physik. Zs. **14**, 118-120.

Die Rechnungen, welche J. Kunz (F. d. M. **43**, 1015, 1912) angestellt hat, um die Weisssche Theorie des Ferromagnetismus (F. d. M. **38**, 901, 1907) an der Hysteresisschleife des Eisens zu prüfen, haben größere Abweichungen zwischen Theorie und Erfahrung gegeben; der Arbeit von Kunz wird in der Arbeit des Verf. ein Fehler vorgeworfen, bei dessen Vermeidung sich eine wesentlich bessere Übereinstimmung ergibt. A. K.

G. Vallauri. Su l'applicazione della teoria del Weiss al calcolo del lavoro di isteresi nelle sostanze ferromagnetiche. Nuovo Cimento (6) **5**, 41-46.

Verf. leitet aus der Weissschen Theorie des Ferromagnetismus die theoretischen Gleichungen für die Hysteresisschleife ab und vergleicht nach deren Integration die theoretische Hysteresisarbeit mit der experimentellen. Zugleich weist er darauf hin, daß sich in der Arbeit von Kunz (Physik. Zs. **13**, 591-594; F. d. M. **43**, 1015, 1912) über denselben Gegenstand ein Fehler befindet. Sa.

K. Zickler. Zur magnetischen Untersuchung von Eisenblechen. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 737-740, 759-763. Berichtigung S. 840.

„Zusammenfassung: Es wird gezeigt, wie bei Eisenblechen mit Hülfe der Maximalpermeabilität oder des spezifischen elektrischen Widerstandes durch einfache Beziehungen die bei der Wechselstrommagnetisierung auftretenden Hysterese- und Wechselstromverluste und aus diesen die gesamten Eisenverluste mit einer für technische Zwecke genügenden Genauigkeit gefunden werden können. ... Experimentelle Bestimmung ...“ Schr.

F. Goltze. Zur magnetischen Untersuchung von Eisenblechen. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 1037-1038.

K. Zickler. Zur magnetischen Untersuchung von Eisenblechen. Ebenda, 1054.

„Zusammenfassung: Es werden einige Resultate mitgeteilt, die mit der von Zickler (s. den vorigen Bericht) angegebenen Methode zur Prüfung von Eisenblech erhalten werden. Die Zicklersche Methode wird mit der wattmetrischen in Vergleich gestellt.“

Polemik gegen die Folgerungen aus dieser Vergleichung. Schr.

H. du Bois. Zur Erzeugung starker und gleichförmiger magnetischer Dauerfelder. Verhdl. Deutsche Physik. Ges. **15**, 292-304.

Zunächst wird das magnetische Feld angegeben für Polarmaturen verschiedener Form, sowohl Rotationskörper, wie auch zylindrische oder prismatische Gebilde. Außer der Intensität spielt bei den neueren Präzisionsmethoden die Topographie des Feldes, insdesondere seine größere oder geringere Gleichförmigkeit, eine immer wichtigere Rolle. Für die Anziehung oder Abstoßung kommt es hauptsächlich auf die ersten Derivierten des Feldes nach den Koordinaten an, so z. B. bei den Gradientmethoden und auch bei Extraktionsmagneten, wie sie in der operativen Ophthalmologie und für Erzscheider verwendet werden. Die mitgeteilten theoretischen Ergebnisse können demnach sowohl magnetotechnisch, als auch in der Laboratoriumspraxis mancherlei Anwendung finden. Lp.

H. du Bois. Die Entmagnetisierungsfaktoren elliptischer Zylinder. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **15**, 305-306.

Hergeleitet aus den bekannten Entmagnetisierungsfaktoren für das dreiachsige Ellipsoid. Lp.

A. Guillet. Formules utilisées dans la détermination des coefficients d'aimantation. Journ. de Phys. (5) **3**, 324-333.

Auf die Bitte eines Chemikers, der nur über Kenntnisse in der elementaren Mathematik verfügt, leitet der Verf. auf möglichst einfache Weise diejenigen Formeln ab, die gegenwärtig bei der Bestimmung der magnetischen Suszeptibilität der Körper benutzt werden. Lp.

G. Lignana. Sulla misura del lavoro d'isteresi magnetica. Torino Atti **48**, 221-235.

Es wird eine neue, schnellere Methode angegeben, um die durch die magnetische Hysteresis verloren gehende Energie mit Hülfe eines ballistischen Galvanometers zu bestimmen. Sa.

H. Zahn. Über die elektronentheoretische Auffassung der thermomagnetischen Effekte. Physik. Zs. **14**, 926-928.

Die Erklärung der thermomagnetischen Effekte bietet auf Grundlage der Elektronentheorie noch manche Schwierigkeiten. Einige derselben werden von

dem Verf. dadurch zu heben versucht, daß er, einem Vorschlage von Lorentz entsprechend, das Verhalten der neutralen Elektrizität, d. h. der Vereinigung einer positiven und einer negativen Ladung, für die Erklärung der Effekte nutzbar machen will. Schreibt man den gebundenen Elektronen, die jedes feste Metall neben den freien Leitungselektronen besitzen soll, Kreisschwingungen um positiv geladene Zentren zu, so mögen die Rotationen zur Hälfte in dem einen, zur Hälfte in dem entgegengesetzten Sinne erfolgen. Die magnetischen Effekte auf diese rotierenden Elektronen sind für den Zeeman-Effekt heranzuziehen. Für die hier vorliegenden Zwecke wird ein Effekt zu studieren sein, der auftritt, wenn man zwei in entgegengesetzter Richtung rotierende Elektronen betrachtet, für welche Temperatur- oder Potentialgefälle vorhanden sind. A. K.

J. OTASHIRO. Number of free electrons in non-magnetic metals. Tokyo Math. Ges. (2) **7**, 118-123.

Ausgehend vom Hall-Effekt, bestimmt Verf. die Anzahl der freien Elektronen in 1 ccm eines nicht magnetischen Metalls auf ungefähr 10^{22} bis 10^{23}. Sa.

W. RIETZ. Über die Kapazität von Spulen. Ann. der Phys. (4) **41**, 543-569. (Auszug aus einer Dissertation.)

1. Die Kapazität einlagig gewickelter unifilarer Spulen ist außerordentlich gering. Die von Drude angegebene Formel zur Berechnung ist mit Erfolg anzuwenden. 2. Die Intensitätsspulen erreichen mit der zweiten Windung ihre Maximalkapazität. Nimmt die Anzahl der Lagen weiter zu, so nimmt die Kapazität sogar etwas ab. 3. Nach einer einfachen Formel kann man die Kapazität zweilagiger Spiralen in einfacher Weise vorausberechnen. 4. Mit der Länge der Spule besteht nur eine angenäherte Proportionalität für die Kapazität. Je größer die Lagenzahl ist, um so besser scheint die Proportionalität zu sein. 5. Bei mehrlagigen Spulen gleicher Selbstinduktion, aber verschiedener Form besitzt die Hochkantspule die kleinste Kapazität; die kleinste Kapazität besitzt die einlagige Spule. 6. Die Thomson-Kirchhoffsche Formel zur Berechnung der Selbstinduktion kann bei Verwendung kleiner Kondensatorkapazitäten in einem Schwingungskreise zu erheblichen Rechenfehlern führen. Hier gilt die erweiterte Formel, in der C die Kondensatorkapazität, K die Spulenkapazität bedeutet: $T = 2\pi\sqrt{L(C+K)}$. Lp.

J. KERN. Induktion von schwingenden Zylindern. Ann. der Phys. (4) **42**, 460-484.

Für die Bewegung eines um seine Achse in einem konstanten Magnetfelde schwingenden Zylinders wird die Formel $\varphi = e^{-(D_{\mathfrak{H}} + D_{\mathfrak{L}})t} \sin(\nu t)$ abgeleitet, worin $D_{\mathfrak{H}}$ die durch das Feld, $D_{\mathfrak{L}}$ die durch den Luftwiderstand hervorgerufene Dämpfung mißt. Dabei ist $D_{\mathfrak{H}} = \frac{1}{4}\frac{\sigma}{\delta}\cdot\frac{\mathfrak{H}^2}{c^2}\cdot C\left(\frac{h}{a}\right)$ (a Radius, $2h$ Höhe, δ Dichte,

σ Leitfähigkeit des Zylinders, $\mathfrak{H}$ Feldstärke). Die Dämpfung ist also bei gleichem Material und gleichen äußeren Bedingungen eine bloße Gestaltsfunktion.

Die Dämpfung kann auch zur Untersuchung der Leitfähigkeit als Funktion irgendeiner andern Größe, z. B. der Temperatur, benutzt werden. Sa.

K. W. Wagner. Zur Theorie der unvollkommenen Dielektrika. Ann. der Phys. (4) **40**, 817-855.

K. W. Wagner. Zur Theorie der unvollkommenen Dielektrika. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **15**, 45-46.

Als Hauptquelle der Energieverluste im wirklichen Dielektrikum kommt die dielektrische Nachwirkung in Betracht. Verf. teilt für den Verlauf dieser dielektrischen Nachwirkung ein Gesetz mit, das dem für die elastische Nachwirkung von Wiechert gefundenen ähnlich ist. „Aus diesem Verteilungsgesetz wird der Verlauf des Nachbildungs- oder Rückstandsstromes ermittelt. Es wird das Gesetz abgeleitet, nach dem die Kapazität und die Energieverluste beim Wechselstrom von der Frequenz abhängen. Es wird der Einfluß der Temperatur auf die dielektrischen Nachwirkungserscheinungen erörtert.“ Der Vergleich mit der Erfahrung zeigt, daß die Theorie das dielektrische Verhalten fester Körper in befriedigender Weise darstellt. Sa.

J. Stock. Über die durch Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten hervorgerufenen elektromotorischen Potentialdifferenzen. Krakau Anz. (A) 1913, 131-144.

Zusammenfassung: 1. Es wurden zum ersten Male quantitative Untersuchungen über die von Dorn entdeckte Erscheinung angestellt, nämlich die Entstehung eines elektrischen Feldes infolge Herabsinkens fester Körper in einer Flüssigkeit. 2. Es wird gezeigt, daß die von Smoluchowski aufgestellte und vom Verf. weiter entwickelte Theorie dieser Erscheinung im Einklang mit den experimentell gefundenen Resultaten steht. 3. Auf Grund der Messungen und der Theorie wird der Potentialsprung der elektrischen Doppelschicht und ihre Dicke im Einklang mit dem in einer früheren Arbeit gefundenen Werte bestimmt (F. d. M. **43**, 1006, 1912). Lp.

W. Arkadiew. Eine Theorie des elektromagnetischen Feldes in den ferromagnetischen Metallen. Physik. Zs. **14**, 928-934.

Verf. versucht den Ausbau einer Theorie der elektromagnetischen Vorgänge in ferromagnetischen Metallen (in schwachen Feldern); nach dem Schema der gewöhnlichen elektromagnetischen Dispersionstheorie ausgeführt, erscheint ihm die Theorie für eine Erklärung der Erfahrungstatsachen geeignet. Die Theorie liefert die Werte der Eigenperioden, den Durchmesser der Elementarmagnete, sowie der magnetischen Leitfähigkeit und der inneren Reibung der betreffenden Substanzen. Die dabei vorgeschlagene Einführung einer neuen physikalischen Größe, der magnetischen Leitfähigkeit, kann als eine Verwirklichung der alten Bestrebungen angesehen werden, die Maxwellschen Gleichungen in eine

wirklich symmetrische Form zu bringen. Die Theorie wird mit der Theorie von Weiss verglichen, und einige Resultate werden an der Hand von neueren Messungen geprüft. A. K.

G. R. OLSHAUSEN. Absolute Formeln für die Anziehung koaxialer Solenoide. Ann. der Phys. (4) **41**, 273-288.

Ausgehend von dem von Cohen gefundenen Ausdruck für die gegenseitige Induktion zweier koaxialen Solenoide, leitet Verf. Formeln ab, durch die die Anziehung zweier gleichachsigen Solenoide, die je ein Einheitsstrom durchfließt, für alle Fälle genau berechnet werden kann. Die Formeln werden am Schlusse durch ein Beispiel erläutert. Sa.

C. W. OSEEN. Über die elektromagnetischen Schwingungen an einem dünnen Ankerring. Physik. Zs. **14**, 1222-1226.

Die bisherigen Rechnungen haben sich auf die Schwingungen bei Voraussetzung eines vollkommen leitenden Ringes bezogen. Von Lindman ist bemerkt worden, daß die unter dieser Voraussetzung abgeleiteten Resultate nicht mehr zutreffen, wenn es sich um einen eisernen Ring handelt, also auch die Magnetisierbarkeit des Eisens zu berücksichtigen ist. Verf. gibt hier eine angenäherte Theorie der elektromagnetischen Eigenschwingungen eines dünnen Ringes mit Berücksichtigung der endlichen Leitfähigkeit und der magnetischen Permeabilität. Ein wesentliches Ergebnis der Rechnungen ist folgendes: Während man im allgemeinen bei der Berechnung der elektromagnetischen Schwingungen für einen dünnen Ring von der endlichen Leitfähigkeit absehen kann, so ist dies bei einem eisernen Ring wegen der hohen Permeabilität des Eisens nicht der Fall. Der Einfluß der endlichen Leitfähigkeit ist bei konstanter Dicke um so größer, je größer der Radius des Ringes ist. A. K.

J. LARMOR. The electromagnetic force on a moving charge in relation to the energy of the field. Lond. M. S. Proc. (2) **13**, 50-56.

Verf. sucht in einem besonderen Falle die Grundannahme, daß ein sich mit der Geschwindigkeit v in einem magnetischen Felde H bewegendes Elektron e der elektromagnetischen Kraft $e[vH]$ unterworfen ist, mit dem aus den Maxwellschen Grundgleichungen folgenden Ampèreschen Gesetz in Verbindung zu bringen oder aus demselben abzuleiten. Sa.

F. MASSARDI. Potenziale elettromagnetico di una carica puntuale mobile. Nuovo Cimento (6) **5**, 255-266.

Für den Fall einer ungleichförmigen Kreisbewegung berechnet Verf. für das skalare elektromagnetische Potential und für das elektromagnetische Vektorpotential Ausdrücke, die von der Latenzzeit unabhängig sind, unter der An-

nahme, daß die Geschwindigkeit der Ladung mit ihren Ableitungen stetig und in bezug auf die Lichtgeschwindigkeit genügend klein sei. Sa.

E. Mathy. Induction de deux courants circulaires parallèles coaxiaux. Journ. de Phys. (5) **3**, 970-974.

Nachdem der Verf. in einer vorangehenden Note (F. d. M. **43**, 1019, 1912) einen Fehler verbessert hat, der sich in seiner älteren Arbeit über den Gegenstand befindet (F. d. M. **32**, 856, 1901), ist er durch die Behandlung derselben Aufgabe von Nagaoka (F. d. M. **42**, 945, 1911) angeregt worden, die ganze Lösung nochmals durchzugehen und sie nun in ihrer ganzen Allgemeingültigkeit zu veröffentlichen; die von Nagaoka gebrauchten Reihenentwicklungen lassen sich nämlich in manchen Fällen nicht mehr anwenden. Lp.

T. J. I'a Bromwich. The mutual induction of two circular coaxial currents. Quart. J. **44**, 381-384.

Es werden zwei Reihen abgeleitet für den Koeffizienten der wechselseitigen Induktion zweier koaxialen Kreisströme. Sa.

J. G. Leathem. On the force exerted on a magnetic particle by a varying electric field. Lond. Roy. Soc. Proc. (A) **89**, 31-35.

Die Resultante der Kräfte, die das Feld von der magnetischen Intensität $H(\alpha, \beta, \gamma)$ und der Ätherverschiebung $D(f, g, h)$ auf die elektrische Ladung eines magnetischen Teilchens ausübt, ist

$$F = \left(m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z}\right) H + 4\pi [m, D].$$

Diskussion des zweiten Gliedes. Lp.

P. Schiemann. Energieumwandlung bei der Ankerbewegung der Elektromagnete und der permanenten Magnete. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 11-14.

„... Hier wird einmal in einer einem möglichst großen Kreise von Ingenieuren verständlichen Weise ..., von der Energie ausgehend, die Ankeranziehung der Magnete behandelt." Anschließend auf S. 400: F. Emde, „Permanente Magnete" und P. Schiemann, „Erwiderung". Schr.

A. Kalähne. Einwellige gekoppelte Schwingungssysteme. Ann. der Phys. (4) **42**, 1001-1030.

Zur Berechnung der Frequenzen solcher Systeme hat man die sogenannte Säkulargleichung („charakteristische" oder „determinierende" Gleichung) zu

lösen, eine algebraische Gleichung vom Grade 2α, wenn α die Anzahl der Freiheitsgrade des ganzen Systems ist. Bei dem als Beispiel angeführten System mit zwei Freiheitsgraden ist dies eine Gleichung vom vierten Grade. Dieser einfachste Fall des gekoppelten Systems wird weiterhin allein betrachtet. Nur in besonderen Fällen tritt eine Erniedrigung des Grades der Gleichung ein. Es läßt sich ganz einfach nachweisen, daß auch physikalisch brauchbare Fälle dafür in Betracht kommen; deshalb ist in der vorliegenden Arbeit versucht worden, möglichst allgemein für ein aus zwei Teilsystemen gekoppeltes System mit zwei Freiheitsgraden die Frage zu beantworten, unter welchen Umständen solche Fälle eintreten, und welche Folgen sich daran knüpfen.

Die Arbeit zerfällt in drei Teile: I. Einen mathematischen Teil, in dem die Bedingungen der drei Sonderfälle bei einer biquadratischen Gleichung (mehrfache Wurzeln, komplexe Wurzeln mit gleichen reellen Teilen oder mit gleichen imaginären Teilen) rein mathematisch behandelt werden. II. Einen allgemeinen physikalischen Teil, in dem die verschiedenen Arten der Koppelung nach denselben Gesichtspunkten untersucht und die dabei geltenden Beziehungen zwischen Frequenz, Dämpfung und Koppelung aufgestellt werden. III. Einen speziellen physikalischen Teil, in dem die abgeleiteten Sätze auf einzelne besondere Schwingunssysteme angewandt werden. Lp.

W. Weiler. Verkürzung der Erregungszeit von Spulen mit hoher Selbstinduktion. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 441-443.

Die Mittel hierzu sind: Vorschaltwiderstand, Erregermaschine mit Gegenkompoundierung, Erregersatz mit abfallender Drehzahl, Entladung einer Drosselspule, gegenkompoundierte Erregermaschine und Drosselspule parallel zur Magnetwirkung, Spannungserhöhung durch einen Transformator. Schr.

R. Edler. Studien über Drosselspulen. Versuchsergebnisse und Anhaltspunkte für die Vorausberechnung. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 800-805, 827-830. Diskussion hierzu ebenda 904, 1107-1108.

Zusammenfassung: Es werden aus den Versuchsergebnissen einer Drosselspule ... jene Schlußfolgerungen gezogen (besonders bezüglich des Einflusses des Luftspaltes), welche eine Vorausberechnung derartiger Drosselspulen ermöglichen. Nach Aufstellung der Berechnungsformeln und des Berechnungsganges wird die ausführliche Berechnung eines Beispiels durchgeführt und dabei auch auf jene Umstände hingewiesen, welche bei der Wahl der Eiseninduktion eine Rolle spielen.“ Schr.

F. Kiebitz. Die vollständige Lösung der Differentialgleichungen zweier magnetisch gekoppelter, konstant gedämpfter elektrischer Schwingungskreise. Ann. der Phys. (4) **40**, 138-156.

„Das allgemeine Integral einer homogenen linearen Differentialgleichung vierten Grades wird dargestellt durch algebraische Funktionen ihrer Koeffizienten und einer kubischen Resolvente.

Die Anwendung auf die Differentialgleichungen eines Gebildes von zwei magnetisch gekoppelten Schwingungskreisen gestattet, nach Auflösung einer kubischen Gleichung die Eigenschaften der Schwingungen im gekoppelten Gebilde auf algebraischem Wege durch die Eigenschaften der Einzelkreise darzustellen (allgemeines Koppelungsgesetz).

Im besonderen werden die Frequenzen, Amplituden, Phasen und Dämpfungen der Koppelungsschwingungen berechnet.

Die kubische Resolvente läßt sich für den Fall verschwindend kleiner Dämpfung streng berechnen. Für diesen Fall wird die Berechnung der Koppelungsschwingungen auch für nicht abgestimmte Systeme streng durchgeführt."

Zö.

E. Taege. Strom und Stromeffekt im Resonanzkreise bei der Annahme geradlinigen Amplitudenabfalls im Primärsystem. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **15**, 753-772.

Die Arbeit beschäftigt sich mit dem folgenden Fall: Mit einem Primärsystem, in dem der Abfall der Stromamplitude geradlinig erfolgt, ist ein Sekundärsystem mit normalen Dämpfungsverhältnissen extrem lose gekoppelt. Untersucht wird: 1. Der Verlauf der Schwingungen im Sekundärsystem, besonders im Falle der Resonanz. 2. Der Stromeffekt im Sekundärsystem bei Resonanz. 3. Beide Untersuchungen werden auch auf den Fall ausgedehnt, daß die Schwingung im Primärsystem abreißt.

Lp.

Th. R. Lyle. On an exact mechanical analogy to the coupled circuits used in wireless telegraphy, and on a geometrical method of interpreting the equations of such circuits. Phil. Mag. (6) **25**, 567-592.

Das zur Analogie herangezogene mechanische System besteht aus einem auf Rädern ruhenden horizontalen Balken, an dem zwei Pendel befestigt sind. Die Pendel, deren Aufhängepunkte in der Längsachse des Balkens liegen, schwingen in der durch die beiden Aufhängepunkte gehenden Vertikalebene. Es zeigt sich, daß die Differentialgleichungen für die Bewegung dieses mechanischen Systems in völlige Übereinstimmung gebracht werden können mit denen des elektrischen Problems. Die rechnerische Verfolgung der Analogie mit allen ihren geometrischen Veranschaulichungen bildet den Gegenstand der Abhandlung.

Lp.

M. Vos. Über eine neue Form der Stoßerregung elektrischer Schwingungen. Diss. Marburg. 51 S. 8⁰; Jahrb. drahtl. Telegr. **7**, 307-350.

1. Es wird eine neue Anordnung zur Stoßerregung elektrischer Schwingungen mit Hülfe einer elektrodenlosen Geißlerröhre angegeben, die gleichzeitig als Kondensator im Stoßkreis eingeschaltet wird. 2. Vorteile dieser Schwingungserzeugung. 3. Ergebnisse der Untersuchungen mit dieser neuen Anordnung: Die Löschwirkung und der Nutzeffekt hängen von der Koppelung, dem Gasdruck und dem Funkenpotential stark ab; weniger Einfluß haben Elektrodenmaterial der Funkenstrecke und Kapazität im Stoßkreis. Günstigste

Koppelung zwischen Stoßkreis und Sekundärsystem; bei zu enger Koppelung tritt Rückzündung ein. 4. Der günstigste Nutzeffekt beträgt etwa 30%. Dieser geringe Wirkungsgrad gegen 80 bis 86% mit der Wienschen Löschröhre dürfte seinen Grund in der zu geringen Stromdichte und der damit verbundenen großen Ionisierungsarbeit in den Löschkondensatoren haben. Lp.

Fr. Kiebitz. Eine neue Methode zur Messung von Koppelungsgraden und Induktionsgrößen. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **15**, 1240-1246.

Die neue Methode, Koppelungsgrade und Induktionsgrößen zu bestimmen, beruht darauf, daß die Verkleinerung gemessen wird, welche die Periode eines Schwingungskreises erfährt, wenn der Kondensator des gekoppelten Kreises kurzgeschlossen wird. Lp.

E. Dibbern. Quantitative Untersuchungen über Koppelungswellen mittels des Helmholtzschen Pendelunterbrechers. Ann. der Phys. (4) **40**, 935-959.

Der Potentialverlauf in zwei magnetisch gekoppelten elektrischen Schwingungskreisen wird mittels des Helmholtzschen Pendelunterbrechers untersucht. Es ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit den bekannten theoretischen Formeln, die hauptsächlich im Anschluß an Drude zu Beginn der Arbeit übersichtlich zusammengestellt werden. Zö.

M. Vidmar. Transformatorstudien. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 1013-1022.

„Zusammenfassung: Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit zwei wichtigen Fragen: der Dimensionierung des Jochquerschnittes und der Wahl des Eisenbleches.

Es werden zu diesem Zwecke die Formeln für die Berechnung der Dimensionsgrößen des Transformators entwickelt unter der Voraussetzung, daß man die günstigste Jochdimensionierung angewandt hat. In der Folge wird die Abhängigkeit des Preises, der Abmessungen, der Kühlverhältnisse und insbesondere der Schenkelinduktion von der Jochdimensionierung genauer untersucht.

Von selbst ergibt sich daher eine praktische Lösung der Blechfrage, durch eine Praxis illustriert. Es ergibt sich auch eine Begrenzung der Eisenverluste nach oben aus Rücksicht auf die Induktion in den Schenkeln. Für diese außerordentlich wichtigen Grenzwerte wird eine praktisch brauchbare Näherungsformel angegeben, außerdem werden auch alle bereits entwickelten Dimensionierungsformeln in eine einfache, für die praktische Anwendung berechnete Form gebracht.

Den Schluß bildet die Untersuchung des möglichen Entwicklungsweges des modernen Transformatorenbaues und eine Studie über die Abhängigkeit des Preises von dem Verluste, also Preisbestimmung für unnatürliche Wirkungsgrade.“ Schr.

W. v. Rybczyński. Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie auf der Erdkugel. Ann. der Phys. (4) **41**, 191-208.

Im Anschluß an die Arbeit von H. March gleichen Titels (Ann. der Phys. **37**; F. d. M. **43**, 1025, 1912) wird die Formel für die Potentialfunktion

$$\Pi = -\frac{2k}{\varrho^2}\int_0^\infty \alpha\, d\alpha\, P^{\alpha}_{\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\,\frac{\zeta_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}{\zeta'_{\alpha-\frac{1}{2}}(\varrho)}$$

nochmals approximiert, aber da wegen der Multiplikation mit der stark oszillierenden Funktion $P(\cos\theta)$ sich für kleine Fehler in ζ/ζ' große absolute Fehler ergeben können, mit einem andern Näherungswert für ζ/ζ'. Es ist nämlich die Umgebung der Stelle $\alpha = \varrho$ und besonders die nächste Nullstelle der ζ'-Funktion berücksichtigt. Zu den von March gefundenen Werten der Potentialfunktion kommt auf diese Weise noch ein Zerstreuungsfaktor hinzu, dessen Zahlenkoeffizienten stark von der Art der Approximation des Integrals Π abhängen. Die Übereinstimmung der Formeln mit den Versuchen ist befriedigend.

Schließlich ist noch die Theorie für den Fall der endlichen Leitfähigkeit der Erde behandelt. Zö.

K. Wolf. Ausbreitung elektromagnetischer Wellen von einem Punkt oberhalb der Erdoberfläche. Wien. Ber. **122**, 197-231.

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen, z. B. von einem Luftschiff aus, wird im Anschluß an die Arbeit von Sommerfeld (F. d. M. **40**, 944, 1909 u. **41**, 976, 1910), der die Ausbreitung von ebener Erde aus behandelte, berechnet. Auch hier wird die Lösung der Differentialgleichungen des Problems in Form von bestimmten Integralen dargestellt. Diese werden funktionentheoretisch ausgewertet und in zur numerischen Berechnung brauchbare Ausdrücke umgeformt. Zö.

J. Salpeter. Das Reflexionsvermögen eines ionisierten Gases für elektrische Wellen. Physik. Zs. **14**, 201-203.

Der Begriff der Leitfähigkeit eines Gases erleidet für ein hochfrequentes Wechselfeld eine wesentliche Modifikation aus dem Grunde, weil der durch das Wechselfeld hervorgerufene Konvektionsstrom im allgemeinen gegen das Wechselfeld in der Phase verschoben wird. Die Leitfähigkeit eines Gases für ein hochfrequentes Wechselfeld ist somit erst zu definieren; in der Abhandlung ist der Versuch gemacht, die Konstanten, welche das Verhalten eines verdünnten, ionisierten Gases in einem hochfrequenten Wechselfelde charakterisieren, durch Druck und Ionenzahl des Gases auszudrücken. A. K.

E. H. Barton and W. B. Kilby. The effect of ionization of air on electrical oscillations and its bearing on long-distance wireless telegraphy. Phil. Mag. (6) **26**, 567-578.

In der Abhandlung „On the diurnal variations of the electric waves occurring in nature, and on the propagation of electric waves round the bend of the

earth (Lond. Roy. Soc. Proc. (A) **87**, 79-99, 1912) und in einem Vortrag vor der British Assoc. zu Birmingham hat W. H. Eccles verschiedene ungelöste Probleme der drahtlosen Telegraphie behandelt, so besonders die Frage nach dem Mechanismus der Ausbreitung der Ätherstrahlung rund um die gekrümmte Erdoberfläche in solchen Fällen, bei denen ungefähr ein Viertel ihres Umfanges überlaufen wird. Nach der von Eccles aufgestellten Theorie rührt die Biegung der Wellen um die Erde herum von einer größeren Geschwindigkeit der Fortpflanzung in den oberen Gebieten der Atmosphäre von der dort bestehenden Ionisierung her. Die experimentelle Untersuchung dieser von Eccles auch mathematisch gestützten Theorie ist von den Verfassern der vorliegenden Arbeit unternommen worden. Dabei wurde dann aber auch eine theoretische Untersuchung der Methode nötig, und auf sie möge nach den Zwecken des Jahrbuches aufmerksam gemacht werden. Lp.

FR. ZÁVIŠKA. Über die Beugung elektromagnetischer Wellen an parallelen, unendlich langen Kreiszylindern. Ann. der Phys. (4) **40**, 1023-1056.

In der Abhandlung wird eine exakte Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an mehreren parallelen Zylindern von kreisförmigem Querschnitt entwickelt; über den Abstand der Zylinder wird keine Voraussetzung gemacht, so daß auch die Wirkung der Zylinder aufeinander zur Geltung kommen kann. Hauptsächlich erstreckt sich die Behandlung auf die Beugung an zwei und drei Zylindern, weil bei wachsender Zylinderzahl die Rechnung recht unübersichtlich wird. Die einfallende Welle wird als eben und geradlinig polarisiert vorausgesetzt. Zwei Hauptfälle werden untersucht: 1. Die elektrische Kraft der einfallenden Welle verläuft parallel zu den Zylinderachsen. 2. Sie ist senkrecht zu ihnen. Durch Überlagerung beider Lösungen ergibt sich sofort der allgemeine Fall. Die Richtungsfortpflanzung der einfallenden Welle sei senkrecht zur Ebene der Zylinderachsen. Zur Vereinfachung der Rechnung wird noch vorausgesetzt, daß alle Zylinder in jeder Hinsicht übereinstimmen und gleichen Abstand haben. Zum Schluß wird auch die Beugung an zwei hintereinander stehenden Zylindern untersucht, wenn die Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle parallel zur Ebene der Zylinderachsen ist. Die Lösung dieses Falles ermöglicht die Erklärung einiger Abweichungen von den theoretischen Ergebnissen, die Großmann bei Messungen der Beugung an einem Zylinder beobachtet hatte. Lp.

C. W. OSEEN. Über die Beugung elektromagnetischer Wellen an einem geradlinigen Rande. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. **8**, Nr. 28, 14 S.

Poincaré hat die Hypothese aufgestellt (F. d. M. **41**, 972, 1910), daß das kontinuierliche Spektrum einen wesentlichen Einfluß auf die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen auf der Erde ausüben könne. Die einfachere Lösung des Sommerfeldschen Diffraktionsproblems des Verf. (F. d. M. **43**, 965, 1912) ermöglicht die Erledigung des von Poincaré angeregten Problems in einem Falle mit einfachen Mitteln. Die in der gegenwärtigen Abhandlung durchgeführte Untersuchung lehrt, daß in dem betrachteten Fall

ein Einfluß des kontinuierlichen Spektrums auf die Eindringung von E_x, H_z und H_y in den Schattenraum nicht stattfindet. Nach diesen Ergebnissen scheint es äußerst unwahrscheinlich, daß das kontinuierliche Spektrum in der Frage von der Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen um die Erde eine wesentliche Rolle spielen kann. Zufolge der Untersuchungen von Sommerfeld und seinen Schülern bedarf man auch nicht des kontinuierlichen Spektrums, um den Tatsachen gerecht zu werden.

Lp.

C. W. Oseen. Über die elektromagnetischen Schwingungen an dünnen Ringen. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. **9**, Nr. **12**, 30 S.

Die Veranlassung zu diesen Untersuchungen wurde durch einige im Physikalischen Institut zu Upsala gemachten Beobachtungen über den gegenseitigen Einfluß zweier geradlinigen, parallelen Oszillatoren aufeinander gegeben. Da eine mathematische Theorie für diese Anordnung zurzeit auf Schwierigkeiten stößt, hat der Verf. zunächst die einfachere Frage von den entsprechenden Erscheinungen bei parallelen Kreisringen von derselben Achse angegriffen. In § 1 wird für die elektromagnetischen Schwingungen an einem linearen Leiter, dessen Ohmscher Widerstand vernachlässigt werden kann, eine lineare Integraldifferentialgleichung aufgestellt. Aus ihr geht unmittelbar die angenäherte Gültigkeit der elementaren Schwingungstheorie hervor, ein in pädagogischer Hinsicht interessanter Umstand. In § 2 wird eine kleine Lücke der Rayleighschen Theorie ausgefüllt, indem explizite Formeln für die Wellenlängen der höheren Schwingungen eines dünnen Ringes berechnet werden. Der § 3 behandelt die Eigenschwingungen eines Systems von zwei parallelen, koaxialen, dünnen Ringen. In § 4 endlich werden die in § 3 gewonnenen Ergebnisse auf die Theorie der elektromagnetischen Resonanzerscheinungen angewandt.

Lp.

M. Siegbahn. Untersuchung über die Schwingung von Telephonmembranen. I. Ann. der Phys. (4) **42**, 689-728.

Ausführliche experimentelle Untersuchungen über die Schwingungen von Telephonmembranen, aus denen sich die Werte der Konstanten für die Form der Differentialgleichung ergeben, die die schwingende Membran einfach als schwingenden Massenpunkt auffaßt.

Zö.

W. Esmarch. Über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in dispergierenden Wellen. Ann. der Phys. (4) **42**, 1257-1272.

„Es wurden zwei Methoden entwickelt, welche gestatten, die beim Durchgang einer ebenen Welle in einem mit Elektronen beladenen Medium erregten Sekundärwellen zu berechnen. Die Superposition der primären Welle mit den von den Elektronen ausgesandten Wellen ergibt eine durchgehende Welle, deren Extinktion und Phasengeschwindigkeit mit den aus der gewöhnlichen Dispersionstheorie bekannten Werten übereinstimmt. Die reflektierte Welle wird ohne Benutzung von Grenzbedingungen erhalten.“ Die reflektierte Welle,

in der Phase und Energiestrom innerhalb des Mediums entgegengesetzte Fortpflanzungsrichtungen haben, scheint aus diesem Grunde für die Beobachtung bloß von der Grenzschicht auszugehen, nimmt aber in Wirklichkeit ihren Ursprung in allen Teilen des von der einfallenden Welle durchlaufenen Mediums, nicht etwa bloß in der Nähe der Grenzschicht. Zö.

E. SCHRÖDINGER. Notiz über die Theorie der anomalen elektrischen Dispersion. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **15**, 1167-1172.

Der Ausdruck, den Debije für den komplexen Brechungsexponenten erhalten hat (Physik. Zs. **13**, 97 u. 296, 1912), stimmt formal genau überein mit einer Formel, die Drude (Ann. der Phys. (3) **64**, 131, 1898) unter der Annahme einer aperiodisch gedämpften Elektronengattung abgeleitet hat. Da Debije dies nicht eigens betont hat, setzt der Verf. es in der vorliegenden Note auseinander und knüpft einige Bemerkungen daran. Lp.

A. GARBASSO. Eccitatori di Hertz con spettro d'emissione a più righe. Torino Mem. (2) **63**, 257-270.

Rechnerische Lösung von Fragen über Abstimmung von Sender und Empfänger in der drahtlosen Telegraphie nebst Vorschlägen zu der experimentellen Ausführung. Lp.

Lord RAYLEIGH. Die Wirkung von Verbindungsstellen auf die Fortpflanzung elektrischer Wellen längs Leitern. Physik. Zs. **14**, 313-317; Lond. Roy. Soc. Proc. (A) 88, 103-110.

Es handelt sich um folgendes Problem: Elektrische Wellen pflanzen sich im Außenraume eines Zylinders fort. Der Zylinder ist kein Vollzylinder, sondern eine unendlich dünne Zylinderschale, in der einen Richtung der Zylinderachse erstrecke sich dieselbe ins Unendliche. Koaxial mit der Zylinderschale sei ein zylindrischer Stab, welcher, aus dem freien Ende der ersteren herausragend, sich nach der andern Seite ins Unendliche erstreckt. Wie werden sich elektrische Wellen, welche längs der Zylinderschale ziehen, von dem freien Ende dieser letzteren an dem inneren Zylinder entlangziehen, und wie werden sie nach rückwärts in den zwischen dem inneren Zylinder und der Zylinderschale liegenden Raum reflektiert werden? Die Behandlung des Problems würde ohne spezialisierende Voraussetzungen schwer anzugreifen sein, Verf. vereinfacht sich die Aufgabe durch Annahme großer Wellenlängen und durch die Hinzunahme einer äußeren koaxialen Hülle, welche sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstreckt. Die Mitteilung in der Physik. Zs. ist eine Übersetzung einer im Jahre 1912 an die Royal Society, London, gesandten Mitteilung. A. K.

R. RÜDENBERG. Der Verlauf elektrischer Wellen auf Leitungen mit räumlich veränderlicher Charakteristik. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 421-429.

„Zusammenfassung: Während elektrische Wellen plötzliche Übergänge auf Leitungen mit anderer Induktivität und Kapazität nur unter erheblichen Reflexionsverlusten passieren können, durchlaufen sie Leitungen mit stetig veränderlicher Charakteristik ohne starke Verluste, sofern der Wechsel allmählich gegenüber der Länge der Wellen erfolgt.

Durch Aufstellung und Integration der strengen Wellengleichung für veränderliche Leitungen gelingt es, die Differentialgleichung für vollkommen reflexionsfreie Leitungen zu finden. . . . Der Verlauf und die Länge des reflexionsfreien Übergangsstückes ist unabhängig von der Form und Ausdehnung der durchlaufenden Wellen.“

Schr.

Br. Glatzel. Die Entwicklung der modernen Sendemethoden in der drahtlosen Telegraphie. Physik. Zs. **14**, 247-249.

Übersichtliche Zusammenstellung aller bisher in der Praxis der Wellentelegraphie verwendeten Methoden zur Erzeugung von Hochfrequenzenergie.

Zö.

Sir Oliver Lodge. On a dynamo for maintaining electrical vibrations of high frequency. With some notes on the transmission of waves in wireless telegraphy. Phil. Mag. (6) **25**, 757-791.

Zusammenfassung: Der erste Teil dieser Abhandlung gibt die Theorie des Goldschmidtschen Dynamos für eine beliebige Zahl von Umläufen bis zu einem Vergrößerungsverhältnis von 10. Der zweite Teil beschäftigt sich mit Hindernissen der Übermittlung elektrischer Wellen, herrührend von verschiedenen Arten der Trübung oder scheinbaren Trübung in der Atmosphäre. Hervorgehoben wird der wichtige Einfluß, den die gut leitende, mit Notwendigkeit auf einer gewissen Höhe vorhandene Schicht ausüben muß, mit Schwankungen, je nachdem sie gleichmäßig kugelgestaltig oder unregelmäßig gestaltet ist, nebst Bezugnahme auf die Verteilung und den Betrag der Ionisation. Es wird nahegelegt, daß der Sonnenschein bei dieser Schicht eine Rolle spielt, sei es durch Veränderung ihrer Gestalt durch Wärme, sei es durch Förderung ihrer Durchquerung durch eine allgemeine Versorgung mit β-Teilchen. Es wird auch darauf hingewiesen, daß unter der Einwirkung der Sonnenstrahlung aller Arten Elektronen plötzlich in genügender Menge frei werden können und dann manche neu vermuteten Arten atmosphärischer Trübung bewirken. — In einem Anhange werden die Gleichungen des Goldschmidtschen Dynamos noch eingehender behandelt.

Lp.

W. Dziewulski. Über den magnetischen Kerreffekt bei äquatorialer Magnetisierung. Physik. Zs. **14**, 485-489.

Der magnetooptische Kerreffekt ist in dem Falle der äquatorialen Magnetisierung (Kraftlinien normal zur Einfallsebene) besonders klein, und die ersten einigermaßen exakten Messungen sind erst vor kurzem von Ingersoll gemacht worden. Zum Vergleiche der Ingersollschen Resultate mit der Voigtschen Theorie entwickelt Verf. die Voigtschen Formeln für den ge-

nannten Fall besonders eingehend und vergleicht sie auch mit den früheren Theorien von Goldhammer, Drude, Wind, Leatham, die im übrigen alle zu wesentlich denselben Endresultaten führen. Die Übereinstimmungen mit den Ingersollschen Resultaten sind im allgemeinen recht gut, die geringen Abweichungen ohne größere Schwierigkeiten durch sekundäre Einflüsse, Verunreinigungen der benutzten Spiegeloberflächen und dergleichen, zu erklären. A. K.

E. Warburg. Bemerkungen zu der Aufspaltung der Spektrallinien im elektrischen Feld. Verhdl. Deutsche Physik. Ges. **15**, 1259-1266.

„Die Bohrsche Theorie (vgl. das vorstehende Referat) erklärt zwar die Wirkung magnetischer und elektrischer Felder auf die Emission von Spektrallinien bis zu einem gewissen Grade sogar quantitativ, aber keineswegs vollständig, und ist daher jedenfalls einer Modifikation oder Ergänzung bedürftig. Dabei scheint mir von Bedeutung zu sein, daß nach dieser Theorie der elektrische Effekt sich dem Planckschen Wirkungsquantum h proportional, der magnetische Effekt aber von h unabhängig ergibt. Hierdurch ist wahrscheinlich gemacht, daß der elektrische Effekt zu denjenigen Erscheinungen gehört, welche sich auf dem Boden der klassischen Elektrodynamik nicht erklären lassen, und dies halte ich für das wesentliche Ergebnis dieser Betrachtungen.“ Lp.

P. J. Nicholson. Elektronentheorie der Lichtempfindlichkeit des Selens. Physik. Zs. **14**, 1213-1217.

Verf. legt seinen Untersuchungen die Pfundsche Annahme zugrunde, daß die Leitfähigkeitsveränderungen des Selens, welche durch Strahlungen hervorgerufen werden, Folgen eines inneren photoelektrischen Effektes sind. Wie alle bisherigen derartigen Theorien leidet auch diese an der Einführung vieler willkürlicher Annahmen, welche durch die Erfahrung noch nicht genügend gestützt sind; aber sie ist scharfsinnig durchgeführt und verdient Beachtung. A. K.

A. Partzsch. Zur Theorie des lichtelektrischen Stromes in Gasen. Ann. der Phys. (4) **40**, 157-193. (Gekürzte Rostocker Dissertation.)

Der lichtelektrische Strom in Gasen wird, solange nur die negativen Ionen durch Stoß ionisieren, durch die Formel dargestellt: $i = i_0\, e^{\alpha l(1-V/v)}$. Hierin bedeutet i_0 den Strom im Vakuum, α die Anzahl der durch Zusammenstöße eines negativen Ions beim Passieren einer Gasstrecke von einem Zentimeter erzeugten Ionen, V die mittlere Ionisierungsspannung des betreffenden Gases, v die angelegte Potentialdifferenz in Volt und l den Abstand der parallelen Kondensatorplatten in Zentimetern. Im allgemeinen gilt die von Townsend aufgestellte Beziehung $\alpha/p = f(X/p)$, die für jedes Gas experimentell zu bestimmen ist. In Wasserstoff, Stickstoff und Luft läßt sich diese Funktion mit großer Annäherung durch die Townsendsche Formel darstellen: $d/p = e^{-NVp/x}$, wo N die Anzahl der Zusammenstöße eines Ions beim Durchlaufen einer Gas-

strecke von 1 cm beim Druck von 1 mm Hg ist. Der lichtelektrische Strom wird dann unter gewissen Einschränkungen durch die Formel wiedergegeben:

$$i = i_0\, e^{l(1 - V/v) p n \varepsilon}, \text{ wo } \varepsilon = e^{-NVlp/v}.$$

Die Bestimmung der Konstanten NV, V und N ergibt Zahlwerte, die in einer Tabelle zusammengestellt sind. Bei Annäherung an das Minimumpotential der Entladung tritt ein stärkeres Anwachsen des lichtelektrischen Stromes durch Mitwirkung des positiven Ions ein. Der Maximaldruck des lichtelektrischen Stromes wird in Richtung des kritischen Druckes der Glimmentladung verschoben. Lp.

L. Zehnder. Über die Strahlung der Gase. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **15**, 1317-1332.

Von den Betrachtungen ausgehend, die der Verf. in der Abhandlung veröffentlicht hat: Über Elektronen, Relativitätsprinzip und Äther (Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **14**, 438-448, 1912), erklärt er, daß er die jetzt herrschende Ansicht über die Atome nicht für wahrscheinlich halte; er neige zu der Ansicht, die Elektronen oder die Ätheratome, aus denen die Elektronen aufgebaut sein werden, seien durch elastische Kräfte an das Atom gefesselt, und diese elastischen Kräfte verbürgen die bestimmten Schwingungsdauern der von den Atomen unter sehr verschiedenen Bedingungen ausgestrahlten Lichtarten. Der Durchführung dieser Gedanken ist der Aufsatz gewidmet. Lp.

Weitere Literatur.

S. Arrhenius. Die Berechnung des elektrischen Leitungsvermögens in sehr verdünnten wässerigen Lösungen. Berlin: R. Friedländer u. Sohn. 12 S. 8⁰.

J. R. Ashworth. Note on the mean magnetic moment and mean energy of a vibrating magnet. Manchester Phil. Soc. Mem. and Proc. **57**, Nr. 4, 7 S.

C. W. Barlow. Mathematical physics. Volume I: Electricity and magnetism. London: Clive. 320 S. 8⁰.

E. E. Brooks and A. W. Poyser. Magnetism and Electricity. A manual for students in advanced classes. New York: Longmans. VIII + 634 S. 8⁰.

H. Busch. Stabilität, Labilität und Pendelungen in der Elektrotechnik. Leipzig: S. Hirzel. VIII + 246 S. gr. 8⁰.

P. Castells y Vidal. Las representaciones mecanicas de los fenomenos electricos. Barcelona. 29 S. 4⁰.

O. D. Chwolson Lehrbuch der Physik. Vierter Band: Die Lehre von der Elektrizität. Zweite Hälfte, erste Abteilung. Übersetzt von H. Pflaum und A. B. Fochringer. Braunschweig: Fr. Vieweg & Sohn. XII, 448 S. 8⁰.

L. Cohen. Formulae and tables for the calculation of alternating current problems. New York: McGraw-Hill. 282 S. 8⁰.

H. Du Bois. Theorie der Polarmaturen. Ann. der Phys. (4) **42**, 903-952.

Siehe F. d. M. **43**, 1007, 1912.

J. A. Fleming. Propagation des courants électriques dans les conducteurs téléphoniques et télégraphiques. Traduit par C. R a v u t. Paris: Gauthier-Villars. VII + 340 S. 8°.

C. L. Fortescue. Wireless telegraphy. Cambridge: University Press. 152 S. 16mo.

H. Frohman. Stromverlegung über und nach n Knotenpunkten. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 246-250, 273-276.

Formeln für die Verlegung einer Stromabnahmestelle über einen oder mehrere Knotenpunkte auf ein verästeltes System. Schr.

E. Gehrcke und R. Seeliger. Über Oberflächenladungen auf Leitern im Vakuum. Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. **15**, 438-450.

L. Graetz. Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus. In 5 Bd. IV. Bd. 1. Liefg. Leipzig: J. A. Barth. III + 270 S. Lex.-8°.

T. Gross. Elektrische Studien. Heft 1. Das elektromagnetische Kraftfeld. Leipzig: 267 S. 8°.

C. W. Hansel. Introductory electricity and magnetism. London: W. Heinemann. XV u. 373 S. [Nature **91**, 631.]

H. Hertz. Gesammelte Werke. Zweiter Band.: Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft. Dritte Auflage. Leipzig: J. A. Barth. VII + 296 S. 8°.

J. Herzog. Zur Netzspaltung. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 140-144, 163-167.

Betrachtungen über Stromverzweigung in elementarer Darstellung, auch für Handwerksleute geeignet. Schr.

R. H. Hough and W. M. Boehm. Elementary principles of electricity and magnetism for students in engineering. New York: The Macmillan Company; London: Macmillan and Co. VII u. 233 S. [Nature **91**, 502.]

P. Idrac. Sur les inégalités de la distribution du magnétisme terrestre. C. R. **157**, 1488-1490.

E. H. Koch. The mathematics of electricity. Wiley, Chapman and Hall. XVI u. 651 S.

J. Kunz. Détermination théorique de la variation de la masse de l'électron en fonction de la vitesse. Arch. des sc. phys. et nat. (4) **35**, 28-39.

J. L. Lacour and O. S. Bragstad. Theory and calculation of electric currents. Translated by S. P. S m i t h. London: Longmans. 494 S. 8°.

M. Lange. Beitrag zur Theorie der Verteilung der Elektrizität auf zwei leitenden Kugeln. Progr. Frankfurt a. M. 11 S. 8°.

E. Lecher. Einiges aus der Elektronentheorie. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 1126-1128.

Bericht über einen von E. L e c h e r am 19. November 1913 im Elektrotechnischen Verein in Wien gehaltenen Vortrag. Schr.

P. Lenard. Kinetische Theorie der positiven Strahlen. 4. Abhandlg. der Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. Heidelberg: C. Winter. 16 S. gr. 8°.

J. Lissner. Einige Beispiele zur Theorie der kollektorlosen Wechselstrommaschinen. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, 993-998, 1022-1026, 1038-1044, 1072-1076.

Strengere Ableitung der Hauptgleichungen für diese Maschinen. Parallelschaltung von Maschinen. Schr.

G. Lutze. Untersuchungen an langsamen elektrischen Schwingungen. Diss. Halle. 33 S. 4°.

S. Magrini. Esperienza dimostrativa della degradazione del potenziale elettrico. Nuovo Cimento (6) **6**, 173-178.

W. P. Maycock. A first book of electricity and magnetism. Fourth edition. London: Whittaker and Co. XXII u. 351 S. [Nature **91**, 56.]

O. Nairz. Einführung in die Elektrotechnik. Unter Zugrundelegung der Vorlesungen Slabys bearbeitet. Leipzig: J. A. Barth. VIII + 415 S Lex.-8°.

F. B. Pidduck. The abnormal kinetic energy of an ion in a gas. Lond. Roy. Soc. Proc. (A) 88, 296-302.

H. Poincaré. La dynamique de l'électron. Paris: Dumas. 64 S. 8°.

L. v. Putnoky. Über Potentialsprünge an der Grenzfläche zwischen Flüssigkeit und Gas. Diss. Karlsruhe. 66 S. 8°.

L. Roche. Sur la surface des ondes dans la polarisation rotatoire magnétique et dans quelques phénomènes plus généraux. Thèse. Paris: Gauthier-Villars. 99 S. 4°.

E. Rutherford. Radio-active substances and their radiations. Cambridge: Univ. Press. VII u. 699 S. [Nature **91**, 28-29.]

G. v. Sensel. Elektrizität u. Optik, behandelt vom Standpunkte der Elektronentheorie. Wien: A. Hölder. VI + 56 S. kl. 8°.

F. Spath. Theorie des elektrischen Gleichgewichtes in elementarer Behandlung. Progr. Salzburg. 51 S. 8°.

C. Störmer. Quelques théorèmes généraux sur le mouvement d'un corpuscule électrique dans un champ magnétique. Christiania Vendensk. Skrifter 1912, Nr. 7, 32 S.

J. P. Teixeira. Nota sobre a distribuição a intensidade constante de M. Boucherot. Ann. sc. Ac. Polyt. Porto 8, 116-118.

J. J. Thomson. Multiply-charged atoms. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 275-278.

L. Vegard. Zur Frage der Lichterzeugung durch Kanalstrahlen. Ann. der Phys. (4) **40**, 711-734.

J. Stark. Bemerkung zu vorstehender Arbeit des Herrn Vegard. Ann. der Phys. (4) **40**, 735.

Auseinandersetzungen bezüglich einer Kritik von J. Stark an einer Arbeit von L. Vegard in den vorjährigen Bänden der Ann. der Phys.

E. Rziha. Die Entwicklung des Elektrizitätswerkes. Elektrotechnik und Maschinenbau **31**, Festnummer, 7-12.

L. Kliment. Die Entwicklung der Wärmekraftmaschinen. Ebenda 13-18.

A. Budau. Die Entwicklung der Wärmekraftmaschinen und Wasserkraftanlagen. Ebenda 19-25.

K. Pichelmayer. Die Entwicklung des Elektromaschinenbaus. Ebenda 26-31.

E. Orlich. Die Entwicklung der elektrotechnischen Meßkunde. Ebenda 46-51.

J. Herzog. Die Entwicklung elektrischer Leitungsrechnungen. Ebenda 52-57.

Kurze, allgemein gehaltene Übersichten. Schr.

Kapitel 4.

Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

R. Blondlot. Einführung in die Thermodynamik. Mit Zusätzen und Verbesserungen des Autors versehene autorisierte deutsche Ausgabe der zweiten französischen Auflage, besorgt von C. Schorr und F. Platschek. Dresden und Leipzig: Theodor Steinkopff. VIII u. 102 S. gr. 8°.

„Die Aufgabe, den Anfänger in das Studium der Thermodynamik einzuführen, wird hier auf die Weise zu lösen versucht, daß sowohl zu Beginn ein allgemeiner Überblick über diese Disziplin gegeben wird, als auch im ganzen Verlaufe jederzeit auf das zu erreichende Ziel hingewiesen und der zu diesem Ziele führende Weg aufgezeigt wird. Mit besonderem Nachdruck wird der erfahrungsgemäße Ursprung der beiden Hauptsätze der Thermodynamik betont. Die mathematische Behandlung ist nach einheitlicher Methode durchgeführt, um das Gedächtnis so weit als möglich zu entlasten. ... Sowohl die Originalabhandlungen, als auch die Lehrbücher dieses Gebietes, insbesondere die autographierten Vorlesungen von G. Lippmann, wurden herangezogen. Bei der Entwicklung des Carnotschen Prinzipes wie auch bei der Definition und Bestimmung der absoluten Temperatur wird der von W. Thomson und Lippmann eingeschlagene Weg befolgt, der übrigens den Vorstellungen Carnots selbst am nächsten kommt. Einige andere Punkte sind wieder in einer von der allgemein üblichen etwas abweichenden Weise dargestellt worden, so die Definition der äußeren Arbeit, die strenge Begründung des Ausdrucks für die von einem Körper bei einer beliebigen unendlich kleinen Zustandsänderung aufgenommene Wärmemenge, die Ableitung der Bedingungen der Reversibilität." Über die Originalausgabe hat Ostwald so geurteilt: „So ist eine ausgezeichnete Einführung entstanden, die es wohl wert wäre, auch in deutscher Sprache herausgegeben zu werden. Denn wenn wir auch keinen Mangel an Werken gleichen Inhalts und vergleichbarer Güte leiden, so ist es doch erfahrungsgemäß für den Anfänger eine ausgezeichnete Sache, denselben Inhalt in verschiedener Form sich vermittelt zu sehen. Er lernt um so leichter das Wesentliche vom Unwesentlichen scheiden, was in diesen Dingen tatsächlich die größte Schwierigkeit ist." Die vorliegende deutsche Ausgabe erfüllt den von Ostwald ausgesprochenen Wunsch. Lp.

W. H. Macaulay. The laws of thermodynamics. Cambridge University Press. VIII + 71 S. 8⁰. Cambridge, Engineering Tracts, No. 2.

Der Leitfaden soll eine genaue und zusammenhängende Darstellung der grundlegenden Prinzipien der Thermodynamik geben sowie einen Abriß der die Theorie im besonderen anwendenden Methoden zur Ergänzung technischer Bücher über den Gegenstand. Vollständige Differentiale werden zuerst erklärt, dann wird der erste Hauptsatz entwickelt. Besondere Typen der Substanz werden zunächst behandelt, z. B. überhitzter Dampf, Drosseldampf, ein vollkommenes Gas. Dem Kapitel über den zweiten Hauptsatz ist eine geschichtliche Note angehängt. Die Entropie bildet den Lehrstoff für die beiden nächsten Kapitel; diese schließen mit einer Auseinandersetzung über die elektromotorische Kraft eines Akkumulators. Auf den letzten Seiten wird die Theorie der Entropie auf den Fall einer beliebigen Anzahl unabhängiger Veränderlichen ausgedehnt.

J. (Lp.)

W. Nernst. Zur neueren Entwicklung der Thermodynamik. Verhdl. Naturf.-Ges. (1912) Münster **1**, 100-116.

Der gegebene Überblick über die neuere Entwicklung der Thermodynamik faßt die „nunmehr bekannten drei Wärmesätze in folgende Thesen“: Es ist unmöglich, 1. eine Maschine zu bauen, die fortwährend Wärme oder äußere Arbeit aus nichts schafft; 2. eine Maschine zu konstruieren, die fortdauernd die Wärme der Umgebung in äußere Arbeit verwandelt; 3. eine Vorrichtung zu ersinnen, durch die ein Körper völlig der Wärme beraubt, d. h. bis zum absoluten Nullpunkt abgekühlt werden kann. Aus dem ersten Satze lassen sich alle Folgerungen ziehen, die das Gesetz von der Erhaltung der Energie in sich enthält. Aus dem zweiten Satze können wir die Richtigkeit der Fundamentalgleichung des zweiten Wärmesatzes ableiten, wenn wir den Begriff der Temperatur einführen. Aus dem dritten Satze können wir die mathematische Theorie des neuen (N e r n s t schen) Wärmesatzes erschließen, wenn wir die Erfahrung zu Hülfe nehmen, daß bei sehr tiefen Temperaturen die spezifische Wärme sehr klein wird.

Lp.

K. v. Wesendonck. Zur Thermodynamik. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **15**, 839-856.

Besprechung einer Reihe von Fragen, bei denen die hervorragendsten Forscher auf diesem Gebiete nicht übereinstimmen. Der Verf. findet die Aufklärung solcher Differenzpunkte etwa in der folgenden Betrachtung: „In Strenge ist kein elastischer Vorgang reversibel, sondern jede Deformation infolge einer Kraft hinterläßt, wenn die Kraft aufgehört hat, einen Rückstand, der aber durch Verkleinerung der Kraft in seinem Einfluß sehr herabgedrückt wird. Man wendet dann die Methoden der Thermodynamik auf denjenigen Teil des Vorganges an, der übrig bleibt, wenn jene Störung unendlich klein würde, d. h. man betrachtet die vorliegende Erscheinung als eine Superposition eines reversiblen und eines irreversiblen Prozesses und versucht, den ersten Teil allein den thermodynamischen Sätzen zu unterwerfen. So verfährt man bei der Betrachtung der Thermoelektrizität und gewisser Gebiete des Magnetismus. Solchen Betrachtungen entsprechend kann man allerdings die Allgemeingültigkeit der

Sätze der Thermodynamik in Zweifel ziehen; man ist ja so weit gegangen, die Anwendung von Kreisprozessen überhaupt als untunlich zu bezeichnen. Durch Einführung von Einzelkräften kann man aber doch wenigstens die prinzipielle Berechtigung thermodynamischer Behandlung auch solcher Fälle, wie sie Voigt erwähnt, dartun."

Lp.

C. v. Linde. Physik und Technik auf dem Wege zum absoluten Nullpunkte der Temperatur. München. 17 S. 4°. (Festrede, gehalten in der öffentlichen Sitzung der K. Akademie der Wissenschaften am 16. November 1912.)

Der verdienstvolle Forscher auf dem Gebiete der Kältetechnik schildert in dieser anmutenden Festrede, wie Physik und Technik wechselweise die Schritte getan haben, um sich dem absoluten Nullpunkte bis auf 1½° C genähert zu wissen. „Die Kältetechnik erscheint als eine Tochter, die das von der Mutter aufgedeckte Land bearbeitet und fruchtbar macht mit Werkzeugen, welche sie aus anderer Schule empfangen hat. In immer neue, noch dunkle Gebiete aber wird die Fackel getragen von der hohen Mutter mit der Devise: Rerum cognoscere causas".

Lp.

Esnault-Pelterie. Considérations sur les résultats d'un allégement indéfini des moteurs. Journ. de Phys (5) **3**, 218-230.

„Zahlreiche Schriftsteller haben die Reise des Menschen von einem Stern zu einem andern als Vorwurf zu einem Roman gewählt. Wenn sich nun zwar jedermann ohne langes Nachdenken und große Mühe von der damit verknüpften Unmöglichkeit überzeugt weiß, so hat man dem Anschein nach nie daran gedacht, nachzuforschen, welche physikalischen Anforderungen dabei zu erfüllen wären, und von welcher Größenordnung bei der Verwirklichung die ins Spiel kommenden Phänomene sein würden. Dies ist der alleinige Zweck der vorliegenden Arbeit, die nur eine Folge von Überlegungen ist, welche sich auf Berechnungen stützen."

Lp.

C. Wachtel. Bemerkungen zum zweiten Wärmesatz. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **15**, 364-368.

Mit Hülfe der neueren thermodynamischen Theorien ist es möglich, die untere Gültigkeitsgrenze des zweiten Wärmesatzes zu ermitteln, wenn man nur gewisse Unklarheiten in der Begriffsbestimmung der sogenannten absoluten Temperatur vermeidet. Es läßt sich dann ferner zeigen, daß diese untere Grenze des zweiten Wärmesatzes auch durch das Nernstsche Wärmetheorem bestimmt wird, und daß durch eine einfache Modifikation der Helmholtzschen Fundamentalgleichung der Thermodynamik eine zusammenfassende, gemeinsame Formulierung aller drei Hauptsätze erzielt wird.

Lp.

M. Pólányi. Eine neue thermodynamische Folgerung aus der Quantenhypothese. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **15**, 156-161.

„Die neueren Anschauungen von Nernst und Einstein führen zu dem Ergebnis, daß jeder kondensierte Körper einen positiven endlichen Entropiegehalt besitzt, und zwar ist $E_T^p = \int_0^T dQ/T$, wobei der Integrationsweg über beliebige, wenn nur kondensierte Zustände führen kann. Fügt man hierzu die Erfahrung, daß jeder nicht kondensierte Körper durch Entropieentnahme kondensiert werden kann, so erhält man den Satz, daß kein Körper weniger Entropie enthalten kann, als er im kondensierten Zustande bei $T = 0$ hat. Insbesondere muß also die Entropieabgabe, die man durch Kompression herbeiführen kann, sich bei fortgesetzter Kompression einem bestimmten Grenzwert nähern. Wir wollen den Nachweis versuchen, daß dieser Grenzwert gleich dem Entropiegehalt ist, berechnet vom kondensierten Zustande bei $T = 0$.“ Lp.

M. Born und Th. v. Kármán. Zur Theorie der spezifischen Wärme. Physik. Zs. **14**, 15-19.

Da die von Einstein im Anschluß an die Plancksche Quantentheorie aufgestellte Formel für die spezifische Wärme sich nicht bewährt hat und auch die später von Nernst und Lindemann gegebene Abänderung der Einsteinschen Formel nur ein vorläufiges Aushülfsmittel war, um die Erfahrungserscheinungen ein wenig besser darzustellen, haben gleichzeitig Debije und Born mit v. Kármán die theoretischen Grundlagen dadurch vertieft, daß sie die Einsteinsche Voraussetzung einer einzigen bestimmten Atomfrequenz fallen ließen und eine Mannigfaltigkeit von Eigenfrequenzen zugrunde legten, über welche zu summieren oder zu integrieren ist. Bezüglich der Theorie von Debije vgl. man F. d. M. **43**, 1037, 1912. Born und v. Kármán stützen sich auf die Theorie der Schwingungen in Raumgittern (vgl. F. d. M. **43**, 970, 1912). Die Übereinstimmung der schließlich erhaltenen Formeln mit der Erfahrung wird an dem Verhalten von Aluminium, Kupfer, Silber und Blei nachgewiesen. A. K.

M. Born und Th. v. Kármán. Über die Verteilung der Eigenschwingungen von Punktgittern. Physik. Zs. **14**, 65-71.

In der Theorie der spezifischen Wärme der Verf. (vgl. vorstehendes Referat) ist die Frage nach der Verteilung der Eigenschwingungen von Punktgittern grundlegend. Zur Erleichterung der mathematischen Analyse wird das aus einer endlichen Zahl von Punkten bestehende Gitter annähernd als ein Raumgitter mit unendlich vielen Gitterpunkten betrachtet und die Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Variablen angewandt. Die schließlich sich ergebende Verteilungsformel steht mit den von Debije erhaltenen Resultaten nicht in Widerspruch. A. K.

H. Thirring. Zur Theorie der Raumgitterschwingungen und der spezifischen Wärme fester Körper. Physik. Zs. **14**, 867-873.

Es wird gezeigt, daß die Born-Kármánsche Theorie der spezifischen Wärmen regulär kristallinischer Körper sich mit Hülfe von Reihenentwicklungen

vollständig durchrechnen läßt. Es wird die spezifische Wärme von Kupfer, Steinsalz und Sylvin bei tiefen Temperaturen berechnet, dabei ergeben sich Abweichungen von den beobachteten Werten bis höchstens 16%, die sich im übrigen auch noch in anderer Weise rechtfertigen lassen. A. K.

D. A. GOLDHAMMER. Zur Theorie der spezifischen Wärmen. Physik. Zs. **14**, 1185-1188.

D. A. GOLDHAMMER. Die Wärmestrahlung in äolotropen Körpern. Ebenda 1188-1189.

Verf. gelangt in einer neuen Weise zu der Formel, die Born und v. Kármán abgeleitet haben, und er stellt einen prinzipiellen Unterschied dieser Theorie von der Theorie Debijes fest. In der zweiten Mitteilung wendet er seine Methode auf die Wärmestrahlung in äolotropen Körpern an und gelangt zu einer Verallgemeinerung einer Formel v. Laues. A. K.

A. EUCKEN. Über die Berechnung spezifischer Wärmen aus elastischen Konstanten. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **15**, 571-577.

Gegen die von Debije und Born ausgeführten, scheinbar von Erfolg gekrönten Berechnungen werden Bedenken begründet, und aus den Betrachtungen wird die Folgerung gezogen: „Es ist gegenwärtig als wahrscheinlich anzusehen, daß der von der Theorie geforderte Zusammenhang zwischen Elastizität und Wärmeinhalt bei Kristallen (bei tiefer Temperatur) tatsächlich exakt besteht; ein definitives Urteil wird sich indessen erst nach der Berechnung der mittleren Schallgeschwindigkeit aus den einzelnen Schallgeschwindigkeiten abgeben lassen.“ Lp.

S. RATNOWSKY. Zur Theorie der festen Körper. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **15**, 75-91.

Die Formel für die spezifische Wärme, zu der Debije gelangt ist, indem er den N Atomen eines Körpers $3N$ Freiheitsgrade beilegt, so daß der Körper $3N$ verschiedene periodische Bewegungen mit $3N$ verschiedenen Eigenschwingungen ausführen kann, stimmt in ausgezeichneter Weise mit den im Nernstschen Laboratorium experimentell gefundenen Ergebnissen überein (F. d. M. **43**, 1037, 1912). Dieser Erfolg hat den Verf. veranlaßt, auch die kanonische Zustandsgleichung mit Hülfe der Annahme mehrerer verschiedener Schwingungszahlen abzuleiten. Lp.

R. ORTVAY. Zur Theorie der festen Körper. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **15**, 773-776.

Debije und Ratnowsky haben die Zustandsgleichung fester Körper in der Form $f(v, p, T) = 0$ angesetzt. „Es ist klar, daß diese Form für feste Körper jedenfalls zu speziell ist; denn der Zustand eines festen Körpers kann

durch Volumen, Druck und Temperatur nicht allgemein bestimmt werden. Um den Zustand eindeutig festzulegen, müssen wir an Stelle des Volumens die sechs Deformationsgrößen, an Stelle des Drucks die sechs Komponenten der inneren Spannung angeben. Die Beziehungen zwischen Spannung und Deformationsgrößen treten dann naturgemäß an Stelle der üblichen Zustandsgleichung der Flüssigkeiten. Dies wird in Anknüpfung an die Gedankengänge Debijes in der Note gezeigt. Lp.

H. Alterthum. Die relative Temperaturskala fester Körper. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **15**, 25-33.

H. Alterthum. Die Zustandsgleichung fester Körper. Ebenda 65-68.

In der ersten Arbeit wird gezeigt, daß sich die Temperaturabhängigkeit des Volumens vieler Metalle durch einen bis zum absoluten Nullpunkt konstanten Ausdehnungskoeffizienten darstellen läßt, wenn man statt der absoluten Temperatur den Energieinhalt nach der relativen Temperaturskala zählt, die durch eine mit den Versuchsergebnissen übereinstimmende Beziehung $\mathfrak{T} = f(\nu)$ gegeben ist. Dieser Begriff findet seine Stütze weniger in theoretischen Ableitungen als in verschiedenen Anwendungen auf den Energieinhalt fester Körper, der dadurch auf die einfache Form $3R\mathfrak{T}$ gebracht wird, d. h. N Atome eines Grammols eines festen Körpers haben im Mittel die Energie $3Nk\mathfrak{T}$.

In der zweiten Arbeit wird mit Hülfe der gefundenen Gleichungen die Abhängigkeit des Volumens fester Körper von Druck und Volumen $V_{\mathfrak{T};p} : \mathfrak{v}_{0;0}$ außer durch universelle Konstanten durch die Variabeln: Atomgewicht, Atomvolumen und Eigenfrequenz eindeutig bestimmt. Lp.

P. Ehrenfest. Bemerkung betreffs der spezifischen Wärme zweiatomiger Gase. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **15**, 451-457.

Unter Bezugnahme auf die auf S. 1037 angezeigte Abhandlung von Einstein und Stern gibt der Verf. kurz an, welchen c_R-Verlauf eine bestimmte andere Art der Berechnung liefert, die sich in statistischer Beziehung konsequent bis zu Ende durchführen läßt. Bemerkenswert ist jedenfalls, daß sich dabei das Anschmiegen unendlich hoher Ordnung an die horizontale Achse (bei $T = 0$) ganz ohne Einführung einer Nullpunktsenergie ergibt. Lp.

W. Nernst. Zur Thermodynamik kondensierter Systeme. Berl. Ber. 1913, 972-985.

Zunächst werden die von Helmholtz gegebenen allgemeinen Gleichungen besprochen und für den Fall konstanten äußeren Druckes umgeformt. Hierauf legt der Verf. die Ergänzungen dar, die unter Hinzuziehung des von ihm aufgestellten Wärmesatzes den erwähnten Gleichungen beizufügen sind. Die Behandlung der Zustandsgleichung, der chemischen und elektrochemischen Prozesse, der Magnetisierung, der Oberflächenspannung und der thermoelektrischen Phänomene ergibt sich einfach aus den erwähnten Formeln. Besonders wichtig ist der Einfluß der spezifischen Wärmen. Die Formeln werden einfach

und übersichtlich, wenn man allgemein die Voraussetzung einführt, daß bei tiefen Temperaturen die spezifischen Wärmen der dritten Potenz der absoluten Temperatur proportional sind, gleichgültig, unter welchem Druck sich die Stoffe befinden, ob sie magnetisiert sind usw. Lp.

P. Duhem. Sur la stabilité adiabatique de l'équilibre. C. R. **156**, 181-184.

Es sei U die innere Energie eines normal definierten Systems, S seine Entropie, Ω das Potential der äußeren Einwirkungen, E_0 ein Zustand des Systems, bei dem die betrachteten Größen die Werte U_0, S_0, Ω_0 haben. Dann bestehen die beiden schon von Gibbs aufgestellten Sätze: 1. Wenn S_0 ein Maximum ist unter den Werten, welche die Entropie der verschiedenen Zustände annimmt, bei denen die Summe $U + \Omega$ gleich $U_0 + \Omega_0$ für das in eine die Wärme nicht durchlassende Umhüllung eingeschlossene System ist, so ist der Zustand E_0 ein Zustand stabilen Gleichgewichts. 2. Wenn $U_0 + \Omega_0$ ein Minimum ist unter den Werten, welche die Summe $U + \Omega$, bezogen auf die verschiedenen Zustände, bei denen die Entropie den Wert S_0 hat, für das in eine die Wärme nicht durchlassende Umhüllung eingeschlossene System annimmt, so ist der Zustand E_0 ein Zustand stabilen Gleichgewichts. Mit Berücksichtigung der Note von Jouguet in C. R. **155**, 1493-1495 gemachten Bemerkungen gibt der Verf. einen von früheren Voraussetzungen absehenden allgemeineren strengen Beweis. Lp.

P. Duhem. Sur la croissance adiabatique de l'entropie. C. R. **156**, 284-286.

Wenn ein System in einer für Wärme undurchlässigen Hülle eingeschlossen ist, so hat jede tatsächliche, von einer Zähigkeitsarbeit begleitete Wandlung einen Zuwachs der Entropie als Folge. Der vom Verf. in seinem Traité d'énergétique **2**, 211 für diesen Satz gegebene Beweis wird jetzt vereinfacht. Lp.

P. Duhem. Sur deux inégalités fondamentales de la thermodynamique. C. R. **156**, 421-424.

In der Thermodynamik hat man zwei fundamentale Ungleichheiten, die mit den Vorstellungen von Clausius zusammenhängen; die adiabatische Zunahme der Entropie (vgl. das vorstehende Referat) ist ein besonderer Fall der einen dieser Ungleichheiten. Für die aus einer begrenzten Anzahl von Teilen zusammengesetzten Systeme, wenn jeder Teil eine gleichmäßige Temperatur besitzt, hat Jouguet diese Ungleichheiten mittels eines besonderen Postulates bewiesen (F. d. M. **34**, 846, 1903). Für die Systeme, über welche die Temperatur mit Stetigkeit verteilt ist, hat Duhem in seinem Traité d'énergétique **2**, 220-229, einen Beweis gegeben, der der Theorie der Wärmeleitung entlehnt ist. Jetzt gibt er einen Beweis dieser Ungleichheiten, der unabhängig von dieser Theorie ist und auf denselben Prinzipien beruht wie der jüngst gegebene Beweis für das adiabatische Anwachsen der Entropie. Lp.

P. Duhem. Sur la stabilité de l'équilibre thermique. C. R. **156**, 597-598.

Die Theorie der Wärmeleitung führt zu den Sätzen: Auf einem System, das in einer Umhüllung von gleichförmiger und fester Temperatur ϑ_0 enthalten ist, kann sich das Gleichgewicht nur herstellen, wenn die Temperatur ϑ in jedem Punkte den Wert ϑ_0 hat. Wenn, abgesehen von den Temperaturen, der Zustand unveränderlich gehalten wird, ist dieses Gleichgewicht stabil. Um die allgemeinen Sätze der Thermodynamik von der Theorie der Wärmeleitung unabhängig zu machen (vgl. die voranstehenden Referate), gibt der Verf. einen jene Theorie nicht benutzenden Beweis auch der angeführten Sätze. Lp.

Th. Peczalski. Relations entre les coefficients de dilatation et les coefficients thermodynamiques. C. R. **157**, 584-586.

Es wird gezeigt, wie man von der Gleichung $dt = \frac{dv}{v\alpha} + \frac{dp}{p\beta}$ (t Temperatur, v Volumen, p Druck, α und β die Ausdehnungskoeffizienten bei konstantem Volumen und konstantem Druck) zu Ausdrücken für alle thermodynamischen Koeffizienten gelangen kann. Die Behandlung führt zu Gleichungen der Adiabaten und zu der für die Schallgeschwindigkeit. Rtt.

Th. Peczalski. Relation entre la loi de compressibilité des gaz et les coefficients de dilatation. C. R. **156**, 1884-1886.

Von derselben Gleichung wie in der vorhergehenden Note ausgehend, zeigt der Verf., daß für Isothermen die Maxima oder Minima auftreten, sobald die beiden Ausdehnungskoeffizienten einander gleich sind. Rtt.

Th. Peczalski. Nouvelles formes de l'équation caractéristique des gaz. C. R. **157**, 113-115.

Es wird eine nicht einfache neue Zustandsgleichung aufgestellt, die sich nach einigen Vereinfachungen in der Form $p(v-b) = RTe^{-c/RTv}$ als verwandt mit der von Dieterici erweist. Rtt.

A. Timiriazeff. Über die innere Reibung verdünnter Gase und über den Zusammenhang der Gleitung und des Temperatursprunges an der Grenze zwischen Metall und Gas. Ann. der Phys. (4) **40**, 971-991.

Der von Kundt und Warburg für kleine Drucke festgestellte Temperatursprung beim Wärmetransport zwischen Gefäßwand und Gas, von ihnen selbst als Gleitung längs der Oberfläche fester Körper unter Abnahme der Bewegungsgröße erklärt, war von Smoluchowski (Ann. der Phys. **64**, 101-130; F. d. M. **29**, 787, 1898) näher untersucht. Die vorliegende Arbeit berichtet von weiteren Versuchen, den Zusammenhang zwischen Reibung und

Wärmeleitung bis zu großen Verdünnungen (0,001 mm) zu verfolgen. Für die Versuche war die schon von Kundt und Warburg sowie andern benutzte Methode der stationären Ablenkung gewählt; ein darauf beruhender Apparat wird eingehend beschrieben. Die theoretische Betrachtung schließt sich im wesentlichen an die Arbeiten von Smoluchowski an. Unter Benutzung der Maxwell-Boltzmannschen gastheoretischen Untersuchungen wird gezeigt, daß bei größeren Verdünnungen die Gleitung an der Oberfläche fester Körper der mittleren freien Weglänge direkt und somit dem Drucke umgekehrt proportional ist. wobei der benutzte Gleitungskoeffizient mit dem von Smoluchowski eingeführten Temperatursprungskoeffizienten in einfacher Beziehung steht. Die Versuche mit Luft und Kohlensäure stimmen mit den berechneten Werten gut zusammen. Rtt.

A. Einstein und O. Stern. Einige Argumente für die Annahme einer molekularen Agitation beim absoluten Nullpunkt. Ann. der Phys. (4) **40**, 551-560.

Ausgehend von der Planckschen Formel für die Energie eines Resonators, wird zunächst untersucht, inwiefern aus der Formel Schlüsse zu ziehen sind auf das Verhalten von Gebilden rotierender Gasmoleküle, deren thermische Bewegungen mit denen monochromatischer Gebilde Ähnlichkeit aufweisen, und bei denen die mittlere Frequenz mit der Temperatur veränderlich ist. Bei solchen Gebilden ist also in erster Linie die Annahme einer Nullpunktenergie auf ihre Berechtigung zu prüfen. Bei der Untersuchung der spezifischen Wärme des Wasserstoffes bei tiefen Temperaturen wird auf die Messungen Euckens Bezug genommen. Diese machen das Bestehen einer Nullpunktenergie von gewissem Betrage wahrscheinlich. Mit dieser Annahme ergibt sich ferner ein Weg zur Ableitung der Planckschen Strahlungsformel ohne Zuhülfenahme von Diskontinuitäten, wobei indessen zweifelhaft bleibt, ob alle Schwierigkeiten ohne die Annahme von Quanten sich beseitigen lassen. Rtt.

A. Petersen. Verfahren zur Messung schnell wechselnder Temperaturen. Diss. Techn. Hochsch. Berlin 36 S. 8°.

Das Verfahren ist besonders zum Messen der veränderlichen Temperaturen in Wärmemotoren bestimmt und benutzt das thermoelektrische Pyrometer von Le Chatelier und das Widerstandspyrometer von Siemens. Als Strommesser dient ein Saitengalvanometer, dessen Angaben photographisch fortlaufend aufgezeichnet werden. Die Schrift macht eingehende Mitteilungen über die Apparatur, ihre Eichung und Aufstellung und gibt als Beispiel die Anwendung auf einen Benzinmotor. In Frage kommen sowohl Messungen der Temperaturschwankungen des arbeitenden Mittels wie der Zylinderwandungen. Von Wert erscheinen die vorbereitenden Versuche über Einfluß der Drahtdicke auf die Trägheit der Temperaturmesser. Rtt.

A. Wassmuth. Über die Gewinnung der kanonischen Form der Zustandsgleichung aus der statistischen Mechanik. Wien. Ber. **122**, 651-666.

Planck hat darauf hingewiesen (F. d. M. **39**, 958, 1908), daß die kanonische Zustandsgleichung, welche die Entropie S als Funktion der Energie E und des Volumens V darstellt [$S = f(E, V)$], einen prinzipiellen Vorzug vor der gewöhnlichen Form [$p = F(T, V)$] aufweist. Er und nach ihm Keesom (F. d. M. **43**, 1058, 1912) haben zur Gewinnung dieser Form mit Erfolg Boltzmanns universelles Entropiegesetz $S = k \log W$ herangezogen. Der Verf. benutzt hierzu den Satz von Gibbs, nach dem für ein System von sehr vielen Freiheitsgraden die Entropie $S = \log$ Phasenvolumen $= \log \int d\lambda$ ist. Durch Bildung eines gewissen Mittelwertes im Sinne der statistischen Mechanik zeigt er, wie man zu diesem Ausdruck gelangen kann. Werden die n Molekeln des Gases, als gleichgroße Kugeln von gleicher Masse m mit den Koordinaten ihrer Mittelpunkte (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ... und den Geschwindigkeiten (x_1', y_1', z_1'); ... dargestellt, so erscheint die Entropie in der Form:

$$S = \log m^{3n} \int \ldots \int dx_1', dy_1' dz_1' \ldots dz_n' \int \ldots \int dx_1 \, dy_1 \ldots dz_n.$$

Dies ist tatsächlich schon die kanonische Form, indem das erste $3n$-fache Integral, das sich auf die Geschwindigkeiten $x_1', y_1', \ldots$ erstreckt und an der Hand eines Dirichletschen Integrals bestimmt werden kann, sich auch auf die Energie bezieht, während das zweite Integral von dem Volumen abhängt. Hieraus lassen sich für ideale und nicht ideale einatomige Gase die kanonischen Zustandsgleichungen, ferner aus $\partial S / \partial E_v = 1/T$ und $\partial S / \partial V_E = p/T$ die gewöhnlichen Zustandsgleichungen entwickeln. Unter Benutzung eines Kunstgriffes von Ornstein, der schon 1898 die statistische Mechanik zur Gewinnung der gewöhnlichen Zustandsgleichung herangezogen hat, gelingt es, auch die kanonische Zustandsgleichung für Reinganums Gesetz abzuleiten. Ein Schlußkapitel wird mittels eines Liouvilleschen Integrals, das eine Erweiterung des erwähnten Dirichletschen Integrals ist, der Mittelwert einer ganzen positiven Potenz der kinetischen Energie E_p in seiner Abhängigkeit von der Zahl der Freiheitsgrade direkt bestimmt.

Lp.

W. H. Keesom. Over de toestandsvergelijking van een ideaal éenatomig gas volgens de theorie der quanta. Amst. Ak. Versl. **22**, 98-108.

Die Anwendung der Quantentheorie auf ideale einatomige Gase nach Tetrode (Physik. Zs. **14**, 212-215, 1913) und nach Lenz (Physik. Zs. **14**, 262, 1913) beruht auf der Vorstellung, daß jede Hauptschwingung eines Gases in abgeschlossenem Gefäß ihre Energie in ganzen Energieelementen austauscht. Dann ergibt sich durch Betrachtung des Energieaustausches zwischen dem Gase und der Strahlung als wahrscheinlicher Wert des Energieelementes $\frac{1}{2}h\nu$, worin h die bekannte Plancksche Konstante bedeutet, ν die Frequenz der longitudinalen Wellen im Gase. Wie alsbald der Verf. der vorliegenden Arbeit geltend machte, ist der auf dem angedeuteten Wege hergeleitete Ausdruck für die mittlere Temperaturenergie mit den für Helium gefundenen Werten der Zustandsgleichung nur dann im Einklange, wenn eine Nullpunktenergie im Betrage von $\frac{1}{4} h\nu$ hinzugefügt wird, in Übereinstimmung mit den neueren Auffassungen von Planck. Mit dieser Ergänzung kann die Zustandsgleichung des idealen einatomigen Gases aufgestellt werden. In besonderen Abschnitten werden behandelt die Größe der Energieelemente, die Energie und Entropie des einatomigen Gases, der Druck und die spezifische Wärme bei hohen und

niederen Temperaturen, unter stetem Hinblick auf die Ergebnisse mit Helium.
Rtt.

W. H. Keesom. Über die Zustandsgleichung eines idealen einatomigen Gases nach der Quantentheorie. Physik. Zs. **14**, 665-670.

W. H. Keesom. Zur Theorie der freien Elektronen in Metallen. Physik. Zs. **14**, 670-675.

Verf. läßt sich von den Untersuchungen Debijes über die Zerlegung der Energie eines festen Körpers in Schwingungen eines bestimmten Spektrums leiten und überträgt diese Idee zusammen mit quantentheoretischen Vorstellungen auf einatomige Gase. Er findet bei dieser Behandlung, durch Aufstellung der Zustandsgleichung, daß der Druck stets größer ist als der Äquipartitionswert RT; bei hohen Temperaturen weicht er nur wenig davon ab und nähert sich ihm schließlich unbegrenzt; bei tiefen Temperaturen nähert sich der Druck, wenn das Gas dann noch stets als ideal betrachtet werden darf, einem Werte, der (außer vom Molekulargewicht) wohl von der Dichte, aber nicht von der Temperatur abhängt, dem Nullpunktsdruck. — In der zweiten Abhandlung werden diese Betrachtungen über einatomige Gase auf die Theorie der freien Elektronen in Metallen übertragen. Da die Frequenzen in einem derartigen Elektronengase bei derselben Größenordnung der Anzahl der Teilchen in der Volumeneinheit sehr viel höher werden als in den gewöhnlichen materiellen Gasen, so werden die für tiefe Temperaturen abgeleiteten Grenzgesetze für ein System freier Elektronen bis zu relativ viel höheren Temperaturen gelten können. Die Betrachtung des dynamischen Gleichgewichtes zwischen den freien Elektronen und den Elektronen in den Metallmolekülen führt zu der Annahme, daß bei tiefen Temperaturen die Zahl der freien Elektronen in der Volumeneinheit sich einem konstanten endlichen Wert nähert. Dasselbe ist auch dann der Fall mit der mittleren Geschwindigkeit der freien Elektronen. So wird man durch die Anwendung der Quantentheorie auf die freien Elektronen in einem Metall für tiefe Temperaturen zu den Annahmen über Elektronengeschwindigkeiten und -dichten geführt, welche Wien seiner Theorie der elektrischen Leitung zugrunde gelegt hat. Besondere Anwendungen werden auf die Theorie der Thermokräfte, des Peltier- und Thomson-Effektes gemacht. A. K.

E. Kohl. Über die Berechnung der inneren Energie aus der Zustandsgleichung. Monatsh. für Math. und Phys. **24**, 159-182.

In einer vorhergehenden Arbeit (F. d. M. **43**, 1035, 1912) hatte der Verf. eine Beziehung des reversiblen Druckes P zur inneren Energie U und dem Volumen V eines Körpers aufgestellt. Gegenstand der vorliegenden Arbeit bildet umgekehrt die Darstellung von U als Funktion von T und V, wenn für ein gegebenes Zustandsgebiet P als Funktion von T und V bekannt ist. Die Behandlung stützt sich auf die Annahme, daß die innere Verdampfungswärme aus dem Unterschiede der Energie der Flüssigkeit und der des Gases folgt. Die allgemeinen Rechnungsergebnisse werden in Anwendung auf vier Flüssigkeiten (Äthyläther, Wasser, Schwefelkohlenstoff und Äthylalkohol) näher besprochen.

Die Übereinstimmung der Rechnung mit den Beobachtungswerten wird vom Verf. als befriedigend angesehen. Rtt.

E. Kohl. Über eine Beziehung zwischen den beiden spezifischen Wärmen einiger fester Körper. Monatsh. f. Math. u. Phys. **24**, 197-208.

Es wird versucht, die Ergebnisse der vorstehend besprochenen Arbeit auch auf feste Körper anzuwenden, unter der zunächst willkürlichen Annahme, daß die Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes auch auf den festen und flüssigen Zustand übertragbar ist. Dem Verf. scheint für eine Reihe von Elementen eine Beziehung nach Art der von van der Waals tatsächlich zu bestehen. Rtt.

L. Schames. Zustandsgleichung, Zustandsdiagramm und Assoziationshypothese. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **15**, 1017-1026.

Über die Assoziationshypothese des Verf. vergleiche man F. d. M. **43**, 1046-1047, 1912. „Die Assoziationshypothese gibt eine Zustandsgleichung, die die Widersprüche der van der Waalsschen Gleichung mit der Erfahrung nicht zeigt. Sie führt uns zur Annahme einer idealen Flüssigkeit, für die das van der Waalssche Dampfdruckgesetz exakt gilt. Letzteres gibt uns eine Existenzbedingung für den wirklich flüssigen Zustand und veranlaßt uns zu einer Modifikation des Zustandsdiagramms. Dieses wiederum weist auf einen zweiten kritischen Punkt flüssig/fest für normale Substanzen hin, zu welchen bei sehr hohen Drucken auch Wasser zu zählen ist." Lp.

J. J. van Laar. Over eenige moeilijkheden en tegenstrijdigheden bij het opstellen der toestandsvergelijking. Amst. Ak. Versl. **21**, 1433-1449.

Um die beobachteten Abweichungen von der Grundgleichung von van der Waals zu erklären, kann die Größe b als Funktion von v (und vielleicht von T) aufgefaßt werden, und die Größe a als Funktion von v oder von T. In der Arbeit werden Beziehungen entwickelt, die sich aus den verschiedenen Möglichkeiten ergeben, und zum Schluß werden weitere Untersuchungen über die Temperaturabhängigkeit von a oder b und über die Art der Funktion $b = f(v)$ in Aussicht gestellt. Rtt.

E. H. Amagat. Sur les lois des états correspondants. C. R. **156**, 271-277.

Mit Hülfe einer bildlichen Darstellung wird gezeigt, daß für die korrespondierenden Punkte beliebiger Stoffe der gemeinsame Ausdruck pv/T gilt, wenn v das Volumen einer Grammolekel bedeutet. Rtt.

W. C. McL. Lewis. Internal pressure and latent heat of liquids. Phil. Mag. (6) **25**, 61-65.

Nachtrag zu der Note Phil. Mag. (6) **22**, 193-197 (F. d. M. **42**, 859, 1911) zufolge einer Kritik von Sukhodski in Phil. Mag. (6) **23**, 955, 1912. Lp.

I. Traube. Über den kritischen Zustand und die Kontinuitätstheorie. Verhdl. Deutsche Physik. Ges. **15**, 1219-1234.

In früheren Arbeiten hat der Verf. darauf hingewiesen, daß die Theorie von Andrews und van der Waals nicht überall mit dem Experiment im Einklang steht, und hat an die Stelle der Einphasentheorie eine Zweiphasentheorie gesetzt, bei der die kritische Temperatur als eine solche aufzufassen ist, wo zwei Phasen (Gasonen und Fluidonen) in jedem Verhältnis miteinander mischbar sind (F. d. M. **33**, 917, 1902). In der vorliegenden Abhandlung schließt sich der Verf. der Hypothese von De Heen an, daß die Fluidonen in bezug auf die Masse polymerisierte Gasionen sind, und gelangt zu dem Schluß: „Die Kontinuitätstheorie kann auch nach dieser Richtung nicht aufrechterhalten werden, und selbst van der Waals kann nach seinen neuesten Veröffentlichungen (Nobelpreisrede 1911) die Annahme nicht umgehen, daß eine Aggregation von Molekülen, eine sogenannte Scheinassoziation, vorhanden ist." Lp.

G. Tammann. Die Beziehungen der Volumenfläche zum Polymorphismus des Wassers. Gött. Nachr. 1913, 157-176.

Nach Amagat schien aus den bekannten Bestimmungen der Volumenfläche des Wassers zu folgen, daß dieses sich bei Drucken über 3000 kg ähnlich den normalen Flüssigkeiten verhalten würde. Nach Untersuchungen von Bridgman ist diese Extrapolation aber nicht zutreffend. Die Behandlung der Frage begegnet vor allem der noch bestehenden Unsicherheit, ob die Volumenfläche des Wassers durch Addition der partiellen Volumenfläche der einzelnen Molekelarten des Wassers dargestellt werden kann. Vor Entscheidung dieser Frage ist zu untersuchen, ob ein solches Additionsgesetz für die Mischungen von zwei Flüssigkeiten zutrifft. Der Verf. begründet nun, wie sich die Assoziation aus den Volumenflächen bestimmen und die Zählung der Molekelarten bei den assoziierten Flüssigkeiten bewirken läßt. Rtt.

G. Tammann. Zur Thermodynamik der Gleichgewichte in Einstoffsystemen. II. Ann. der Phys. (4) **40**, 297-326.

Die vorliegende Fortsetzung der früheren Arbeit (F. d. M. **42**, 974, 1911) beschäftigt sich mit dem Polymorphismus und untersucht im besonderen die Lage der Gleichgewichtskurven stabiler und instabiler Formen zueinander sowie die quantitativen Beziehungen zwischen der Lage der Gleichgewichtskurven einer Reihe von Formen verschiedener Stabilität. Wie sich zeigt, läßt die reine Thermodynamik Regeln über die Lage der Gleichgewichtskurven verschiedener Formen ableiten, die sich ihrer Stabilität nach unterscheiden; es ergeben sich aber auch die Grenzen der rein thermodynamischen Erkenntnis für den Polymorphismus. Die reine Thermodynamik kann beim Bestehen ver-

schiedener Formen Regeln über die Lage der Gleichgewichtskurven angeben, aber nicht die Tatsache des Polymorphismus beweisen, auch nichts über die Anzahl der Kristallgruppen eines Stoffes und die Zahl ihrer Glieder sagen. Hier haben Erfahrung und Atomistik ergänzend einzutreten. Vergl. F. d. M. **42**, 974, 1911. Rtt.

J. D. van der Waals. Opmerkingen over den gang van de veranderlijkheid van de grootheid *b* der toestandsvergelijking. Amst. Ak. Versl. **21**, 1074-1088.

Die Untersuchung benutzt eine Linie, die *b* als Funktion von *v* darstellt, bei großen Werten von *v* der *v*-Achse nahezu parallel ist, bei kleineren *v* eine zunehmende Verkleinerung von *b* anzeigt. Zur Erklärung dieses Verlaufes wird nach Ablehnen anderer Ursachen der Einfluß der Größe der Molekeln herangezogen, womit sich als Grenze von *b*, solange die Zustandsgleichung gelten kann, der kleinste Raum ergibt, in dem den Molekeln noch Bewegung möglich ist. Rtt.

J. D. van der Waals. Over het punt waarin de vaste toestand verdwijnt ter beantwoording van de vraag, in hoever dit punt vergeleken kan worden met het kritisch punt van een vloeistof. Men doet dit het gemakkelijkst met behulp der ψ-kromme. Amst. Ak. Versl. **21**, 1187-1188.

Wie in der Überschrift schon angedeutet, wird die Frage beantwortet mit Hülfe der ψ-Linie, die durch den Tripelpunkt gelegt wird. Rtt.

S. H. Shorter. On the application of the theory of chemical potential to the thermodynamical theory of solutions. Part III. The action of gravity on a solution. The solute potential. Phil. Mag. (5) **25**, 31-42.

Ein Satz von Gibbs über den Gegenstand lautet: Wenn eine Flüssigkeitsmasse unter dem Einfluß der Schwere im Gleichgewicht ist und dieselben unabhängig veränderlichen Komponenten durchweg hat, so sind die chemischen Potentiale für die einzelnen Komponenten konstant in jedem gegebenen Niveau und nehmen gleichmäßig ab mit wachsender Höhe, indem die Differenz der Werte der chemischen Potentiale für jede Komponente in zwei verschiedenen Höhen gleich der von der Schwerkraft geleisteten Arbeit ist, wenn eine Masseneinheit von dem höheren zu dem niederen Niveau fällt. Mit Hülfe dieses Satzes leitet der Verf. einen Ausdruck für den Konzentrationsgradienten in einer binären Flüssigkeitsmischung ab. Dann gibt er einen elementaren Beweis für den Satz in dem Falle eines zwei Komponenten enthaltenden Systems. Lp.

F. A. H. Schreinemakers. Evenwichten in ternaire stelsels. IV—X. Amst. Ak. Versl. **21**, 1103-1116, 1190-1204, 1419-1432; **22**, 8-21, 463-472, 558-570.

Die vorliegenden 7 Fortsetzungen der ausgedehnten Arbeit (F. d. M. **43**, 1052, 1912) bringen so viele Einzelheiten, daß zu ihrer Kenntnisnahme auf das Original verwiesen werden muß. Rtt.

A. Einstein. Déduction thermodynamique de la loi de l'équivalence photochimique. Journ. de Phys. (5) **3**, 277-282.

„Die Quantenhypothese hat dazu geführt, die folgende Beziehung zwischen den photochemischen Wirkungen und der sie erzeugenden Strahlung anzunehmen: Bei jeder elementaren photochemischen Erscheinung der Zerlegung einer Molekel durch die Strahlung wird der letzteren die Energie $h\nu$ entnommen, wo h die bekannte Konstante der Planckschen Formel ist und ν die Frequenz der wirkenden Strahlung. Wir beschäftigen uns hier mit diesem Gesetz, ohne uns auf den Standpunkt der Quantentheorie zu stellen; wir gehen im Gegenteil von einer mehr phänomenologischen Vorstellung aus, ohne eine Anschauung von dem Mechanismus der ins Spiel kommenden Wirkungen zu versuchen." Vergl. F. d. M. **43**, 970, 1912. Lp.

E. Baud. Relation entre la chaleur de formation des mélanges binaires liquides et leur composition. C. R. **157**, 849-850.

Für chemisch nicht aufeinander wirkende Flüssigkeiten wird die empirische Formel gegeben

$$q = kx(1 - x),$$

worin q die Mischungswärme, x die Konzentration und k eine Konstante bedeutet, die zwischen 1,32 und 1,36 liegt. Rtt.

J. Duclaux. Sur les éléments d'énergie. C. R. **156**, 142-144.

Nach der Regel von Pictet-Trouton tritt immer Absorption einer Wärmemenge kT ein, wenn eine Verbindung von Atomen oder Molekeln in umkehrbarer Weise bei der Temperatur T unterbrochen wird, wobei k eine von der Natur der Verbindung unabhängige Konstante bedeutet. Dafür findet der Verf. einen Zahlenwert, der mit dem in der Planckschen Gleichung für das Energieelement unter gewissen Annahmen nahezu übereinstimmt, woraus geschlossen wird, daß die Quantentheorie nur eine andere Form der Regel von Pictet-Trouton sei. Rtt.

W. J. Jones. Über die Beziehung zwischen geometrischer Form und Dampfdruck. Löslichkeit und Formenstabilität. Ann. der Phys. (4) **41**, 441-448.

Zu dem Satze von W. Thomson über den Einfluß der Oberflächenkrümmung auf den Dampfdruck bei Flüssigkeiten hat R. v. Helmholtz in seiner Dissertation 1885 (Ann. der Phys. 1886) einen strengen Beweis gegeben, indessen unter Beschränkung auf den einfachen Fall, wo die Tropfen

Kugelform haben. In der vorliegenden Arbeit wird der Satz verallgemeinert und auf Lösungen ausgedehnt. Dabei wird zunächst im Sinne von Gibbs dargelegt, daß bei Oberflächen, die feste Stoffe von Flüssigkeiten oder Gasen trennen, ein Analogon der Oberflächenspannung besteht, und dann wird die verallgemeinerte Formel gewonnen aus der Betrachtung von zwei ganz getrennten, mit dem Dampfe unter verschiedenen Drucken in Berührung stehenden gekrümmten Oberflächenelementen. Anwendungen sind angedeutet auf die Variation von Dampfdruck und Löslichkeit mit der Teilchengröße, auf Wärmetönung und Formenstabilität. Rtt.

E. Ariès. Sur les lois du déplacement de l'équilibre chimique à température ou pression constante. C. R. **157**, 1074-1077.

Betrachtungen über die bezüglichen Gesetze von Le Chatelier und van't Hoff, mit dem Hinweise, daß diese nicht nur für eine einzelne Reaktion gelten, sondern auch bei gleichzeitigem Bestehen anderer unabhängiger Reaktionen. Rtt.

Taffanel et Le Floch. Sur la combustion des mélanges gazeux et les retards d'inflammation. C. R. **156**, 1544-1547.

Taffanel. Sur la combustion des mélanges gazeux et les vitesses de réaction. C. R. **157**, 714-717.

Bei der Verbrennung von Gasgemischen sind Entzündungstemperatur, Verzögerung der Entzündung, Grenzen der Brennbarkeit und Geschwindigkeit der Fortpflanzung Funktionen der Reaktionsgeschwindigkeit. Mit Bezug auf vorhergehende Arbeiten und unter Benutzung gemeinsamer Ergebnisse der Verff. wird in der zweiten Mitteilung die Größe der Reaktionsgeschwindigkeit bei verschiedenen Temperaturen zu bestimmen versucht. Rtt.

E. Jouguet. Sur la propagation des déflagrations dans les mélanges gazeux. C. R. **156**, 872-875.

Unter der Voraussetzung, daß der Wärmeaustausch sich nur durch Leitung vollzieht, werden die permanenten Bewegungen eines brennbaren Gasgemisches in parallelen Schnitten untersucht, um zu einer ersten Annäherung einerseits beim Ausströmen der Mischung aus einer Mündung, anderseits bei der Fortpflanzung der Verbrennung in Röhren zu gelangen. Grundlagen der Untersuchung bilden die Gleichungen der Kontinuität, der chemischen Verbrennung, der Leitung und der Kompressibilität. Rtt.

E. Jouguet. Sur la propagation des déflagrations et sur les limites d'inflammabilité. C. R. **156**, 1058-1061.

Die Arbeit bildet eine Ergänzung der vorstehend angezeigten und behandelt nach einer allgemeinen Bemerkung über permanente Bewegungen den Fall, wo der Druck sich wenig ändert, und die Grenze der Entzündbarkeit. Rtt.

E. JOUGUET. Sur quelques propriétés des ondes de choc et de combustion. C. R. **157**, 545-547.

Ableitung des Satzes: Das Produkt aus den Geschwindigkeiten der Explosionswelle und derjenigen der langsamen Verbrennung liegt unterhalb des Quadrates der Schallgeschwindigkeit in dem Medium vorher. Lp.

O. M. CORBINO. Nuove ricerche sul calore specifico dei metalli a temperature elevate. Rom. Acc. L. Rend. $\mathbf{22}_1$, 430-437.

Die Arbeit bildet eine weitere Ausführung der vom Verf. 1912 (F. d. M. **43**, 1038) veröffentlichten Untersuchung. Mit Hülfe der Wheatstoneschen Brücke wird das Verhältnis der spezifischen Wärme zum Temperaturkoeffizienten des Metallfadens bestimmt. Die veränderlichen Werte werden photographisch festgelegt. Anwendung der Methode auf Platin wird in Aussicht gestellt (vgl. das folgende Referat). Rtt.

O. M. CORBINO. Thermo-kalorimetrische Untersuchungen am Platin bei hohen Temperaturen. Physik. Zs. **14**, 915-922.

Die Untersuchungen schließen sich an frühere Untersuchungen des Verf. (vgl. F. d. M. **43**, 1038, 1912) über die Erwärmung dünner Metalldrähte durch Wechselströme an. Seine Methoden gestatten die Bestimmung der spezifischen Wärmen der Metalle, die einen hohen Schmelzpunkt haben, bei hohen Temperaturen. Während die Abweichungen, welche sich gegen althergebrachte Auffassungen bei tiefen Temperaturen ergeben haben, durch die Quantentheorie eine gewisse Erklärung fanden, wird die Quantentheorie den Abweichungen, welche sich bei den vom Verf. an Platin angestellten Versuchen ergeben haben, nicht gerecht, und gerade die Untersuchungen bei hohen Temperaturen können theoretisch von der größten Bedeutung werden, um grundsätzliche Fragen zu entscheiden. A. K.

J. HAVLIČEK. Kritik der Wärmekraftmaschinen. Zeitschr. d. österr. Ingenieur- und Architektenvereins **65**, 689-692.

„Zusammenfassung: 1. Durch Verwendung einer Dampfspannung von zirka 204 Atm. und einer Überhitzung von zirka 700° C abs. kann der thermische Wirkungsgrad der Dampfmaschine auf zirka 43% gebracht werden. Dies entspricht gegenüber den gegenwärtigen Betriebsverhältnissen einer Kohlenersparnis von rund 32%. — 2. Weitere Steigerung des thermischen Wirkungsgrades ist für keine der verwendeten Maschinenarten praktisch möglich. Auch die Verwendung anderer Stoffe als Luft und Wasser gibt keinen besseren Wir-

kungsgrad. — 3. Ein wahrscheinlich allgemein gültiger Satz der Wärmelehre lautet: Die Wärmeeigenschaften aller Stoffe durch alle Aggregatzustände, Drucke und Temperaturen hindurch folgen einem gleichen, allgemein gültigen Gesetz. Das Entropiediagramm T, S, p oder v ist für alle Stoffe das gleiche; es müssen die Maßstäbe T, S, p oder v entsprechend geändert werden.“ Schr.

W. NUSSELT. Die Übertragung der Wärme bei der Bone-Schnabel-Feuerung. Zs. Bayer. Revisionsvereins 1913, 4 S. Fol.

Ausgehend von der Erkenntnis, daß die Übertragung der Wärme von den Heizgasen an die Kesselwand bei der Bone-Schnabel-Feuerung nach den Gesetzen der Wärmeleitung erfolgt, gibt der Verf. eine Formel an, die es gestattet, aus der Wärmeleitzahl des Füllstoffes der Heizröhre die ausgetauschte Wärme zu berechnen. Lp.

Weitere Literatur.

L. ARIÈS. Les faux équilibres chimiques et la thermodynamique. Paris: Hermann. 64 S. 8°.

F. AUERBACH. Die Weltherrin und ihre Schatten. Ein Vortrag über Energie und Entropie. 2. Aufl. Jena: G. Fischer. III + 74 S. gr. 8°.

H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM. Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre. III. Heft. Die ternären Gleichgewichte. 2. Teil. Systeme mit 2 und mehr Flüssigkeiten ohne Mischkristalle und ohne Dampf von F. A. H. Schreinemakers. Deutsch von J. J. B. Deuß. Braunschweig: F. Vieweg u. Sohn. XII + 348 S. gr. 8°.

C. BAULING. L'entropia e i diagrammi entropici. Con molte applicazioni numeriche. Livorno: Giusti. VI + 90 S. 8°.

H. BOUASSE. Cours de thermodynamique. 2e édition, complètement transformée et considérablement augmentée. 1re partie: Principes généraux, gaz et vapeurs. Tome II du Cours de physique. Paris: Delagrave. 462 S. 8°.

J. CASE. A synopsis of the elementary theory of heat and heat-engines. Cambridge: W. Heffer and Sons. III u. 65 S. [Nature **91**, 502.]

H. FUCHS und A. GÜNTHER. Beiträge zur Geschichte der Dampfmaschine in Böhmen. I. Eine Vorlesung Prof. Franz Anton v. Gerstners über Dampfmaschinen am Polytechnischen Institut in Prag im Jahre 1831. Rundschau für Technik und Wirtschaft **6**, 151-154.

Erhalten in einer Niederschrift des Mechanikers Domwald Božek, aufbewahrt im Technischen Museum in Prag. Schr.

G. A. GOODENOUGH. Principles of thermodynamics. Second edition, revised. London: Constable.

L. GUILLOT. Cours de mécanique. Tome 3: Chaudières à vapeur, machines à vapeur. Paris: Béranger. 414 S. 8°.

F. Malissart. Notions pratiques et indispensables de thermodynamique. Le Rœulx: Bouchat-Simon. 56 S. (1912).

C. Moritz. Les moteurs thermiques dans leurs rapports avec la thermodynamique. Paris: Gauthier-Villars. VI + 298 S. 8°.

W. Nernst. Theoretische Chemie vom Standpunkte der Avogadroschen Regel und der Thermodynamik. 7. Auflage. Stuttgart: Enke. XVI + 838 S. 8°.

W. Nernst. Experimental and theoretical applications of thermodynamics to chemistry. New Haven, Conn.: Yale University Press. 123 S. 12mo.

L. S. Ornstein. Remarques sur les rapports entre la méthode de Gibbs, celle du viriel et celle du chemin moyen dans la déduction de l'équation d'état. Arch. Néerl. (3) A **3**, 179-183.

L. S. Ornstein. Hétérogénités accidentelles dans les mélanges. Arch. Néerl. (3) A **3**, 184-195.

P. Ostertag. Berechnung der Kältemaschinen auf Grund der Entropiediagramme. Berlin: J. Springer.

J. R. Partington. A text-book of thermodynamics (with special reference to chemistry). London: Constable and Co. VIII u. 544 S. [Nature **92**, 265.]

M. Planck. Vorlesungen über Thermodynamik. 4. Aufl. Leipzig: Veit u. Co. VIII u. 288 S. gr. 8°.

M. Planck. Leçons de thermodynamique. Traduit sur la 3e édition allemande (augmentée) par R. Chevassus. Paris: Hermann. 315 S. 8°.

H. Pratolongo. Le variazioni di volume nei sistemi chimici imperfettamente isotermici. Lomb. Ist. Rend. (2) **45**, 953-960.

J. A. Randall. Heat: A manual for technical and industrial students. New York: John Wiley and Sons; London: Chapman and Hall. XIV u. 331 S. [Nature **91**, 502.]

C. A. M. Smith and A. G. Warren. The new steam tables: together with their derivation and application. With an introduction by Sir J. A. Ewing. London: Constable and Co. XII u. 101 S. [Nature **91**, 105-106.]

J. D. van der Waals. Contributions à la théorie des mélanges binaires. Arch. Néerl. (3) A **3**, 196-227.

J. D. van der Waals. Weiteres zur Zustandsgleichung. Leipzig: Akad. Verlags-Ges. 55 S. 8°.

E. Wertheimer. Elektromagnetische Theorie der Dämpfe mit spezieller Berücksichtigung des Wasserdampfes. Zürich.

G. Zerkowitz. Thermodynamik der Turbomaschinen. München: R. Oldenbourg. VIII + 173 S. gr. 8°.

B. Gastheorie.

E. Gehrcke. Bemerkung zum Geschwindigkeitsverteilungsgesetz. Verhdl. Deutsche Phys. Ges. **15**, 669-672.

Theoretische Überlegungen von der Strahlungstheorie her führen den Verf. zu dem Schluß, daß die Verteilungskurve auf seiten der großen Geschwindigkeitswerte relativ stärker abfallen sollte, als das Maxwellsche Gesetz angibt. Statt der nach Maxwells Gesetz konstruierten Kurve $y = x^2 e^{-0,58x^2}$ setzt der Verf. $y = x^4(e^{ax^2} - 1)$ und erhält für $a = 1$ eine in ihrem ersten Teile fast vollständig sich deckende Kurve mit der Maxwellschen. „Diese Gleichung wäre also eine versuchsweise an die Stelle der Maxwellschen gesetzte Verteilungsfunktion für den Fall stationären Gleichgewichtes zwischen mechanischer und elektromagnetischer Energie.“ Sie führt ohne Annahme von Energiequanten auf die Strahlungsformel, die Planck aus den Messungen von Lummer und Pringsheim entnommen hat. Lp.

K. F. Herzfeld. Bemerkungen zum Boltzmannschen Prinzip. Wien. Ber. **122**, 1553-1561.

Zuerst werden einige Einwände von Einstein gegen die übliche Ableitung des Boltzmannschen Prinzipes besprochen; hierauf wird eine Ableitung der gebräuchlichen Formel mit Hülfe zusammengesetzter Systeme gegeben, die von diesen Einwänden nicht getroffen wird. Dann wird das Verhältnis von dem wahrscheinlichen und dem mittleren Zustande kurz betrachtet und eine allgemeine Formel angesetzt zur Berechnung der Zahl aller gleich möglichen Fälle, die mit einer gegebenen Energie vereinbar sind. Zum Schluß wird eine Ergänzung einer früheren Arbeit gegeben (F. d. M. **43**, 1063, 1912). Lp.

Th. de Donder. Sur la répartition ergodique. Belg. Bull. Sc. 1913, 211-221.

Der Verf. beweist einen Satz, der die Ergebnisse Maxwells und Boltzmanns bezüglich der Verteilung der stationären ergodischen Zustände umfaßt. Dann stellt er die Identität dieser Verteilung und der von Gibbs in die statistische Mechanik eingeführten mikrokanonischen Verteilung fest. Mn. (Lp.)

Th. de Donder. Sur la formule générale de la théorie cinétique. Belg. Bull. Sc. 1913, 946-952.

Beweis auf Grund der Betrachtung der Integralinvarianten. Vergleichung mit den Beweisen von L. Boltzmann und H. A. Lorentz. Mn. (Lp.)

E. Henriot. Sur l’équipartition de l’énergie. Belg. Bul. Sc. 1913, 358-371.

Analytischer Beweis und Verallgemeinerung eines Satzes von Poincaré, der geometrisch von Jeans bewiesen ist: Zu verwerfen ist die Hypothese, daß die Gleichungen der Mechanik bei Anwendung auf ein System, das Vibrationsfrequenzen besitzt, die denen des Lichtes vergleichbar sind, einen letzten Jacobischen Multiplikator gleich Eins zulassen. Tut man dies nicht, so wird man zu Ergebnissen geführt, die der Erfahrung widerstreiten. Mn. (Lp.)

F. Y. Edgeworth. A variant proof of the distribution of velocities in a molecular chaos. Phil. Mag. (6) **25**, 106-109.

Bei der Ableitung des Maxwellschen Verteilungsgesetzes wünscht der Verf. die Heranziehung der „höheren Theorie der Wahrscheinlichkeit, die auf die Abweichungen von Mittelwerten Rücksicht nimmt“. Lp.

G. Baume. Sur quelques applications physico-chimiques de l'équation de répartition Maxwell-Berthoud. C. R. **157**, 774-776.

Die von Berthoud gegebene Form des Maxwellschen Verteilungsgesetzes, nach der die Geschwindigkeitsverteilung von der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen abhängt, ermöglicht eine einfache Erklärung der Änderungen der Reaktionsgeschwindigkeit mit der Temperatur. Die Darlegungen erhalten eine noch einfachere Form, wenn man die spezifische Wärme als Funktion der Temperatur einführt. Rtt.

A. Rosenthal. Beweis der Unmöglichkeit ergodischer Gassysteme. Ann. der Phys. (4) **42**, 796-806.

Vgl. das Referat über Plancherel F. d. M. **43**, 1056, 1912. Der Gedankengang des gegenwärtigen Beweises, dessen Ideen sich in ähnlicher Richtung bewegen, aber auch in wesentlichen Punkten davon verschieden sind, ist der folgende. „Zunächst können auf der $(2rN-1)$-dimensionalen Energiefläche immer Stücke abgegrenzt werden, die sich umkehrbar eindeutig und stetig auf $(2rN-1)$-dimensionale Würfel beziehen lassen (§ 1). Sodann kann mit Hülfe einer einfachen mengentheoretischen Betrachtung gezeigt werden, daß bei einem ergodischen System die durch die Systemkurve erzeugte Abbildung der Energiefläche auf die Zeitgerade im Widerspruch steht mit der Eindeutigkeit der Aufeinanderfolge der physikalischen Erscheinungen, d. h. mit dem Kausalitätsprinzip (§ 2) ... Die Möglichkeit der ergodischen Systeme ist gleichbedeutend mit der Existenz voneinander verschiedener Bahnkurven auf jeder Energiefläche; unser Beweis liefert uns noch mehr, nämlich den Nachweis der Existenz von sogar mehr als abzählbar vielen verschiedenen Bahnkurven auf jeder Energiefläche“. Lp.

M. Plancherel. Beweis der Unmöglichkeit ergodischer mechanischer Systeme. Ann. der Phys. (4) **42**, 1061-1063.

Der hier gegebene Beweis unterscheidet sich von dem ersten Beweise des Verf. und dem von A. Rosenthal (Referat vorstehend) dadurch, daß er nicht von den Brouwerschen Sätzen ausgeht, sondern auf der Theorie des Maßes der Punktmengen beruht. Lp.

H. Bolza, M. Born, Th. v. Kármán. Molekularströmung und Temperatursprung. Ein Beitrag zur kinetischen Theorie verdünnter Gase. Gött. Nachr. 1913, 221-235.

In der Abhandlung wird die Strömung in einem porösen Medium untersucht. Das Problem ist wesentlich identisch mit dem der Elektronenbewegung in Metallen und kann mit der von H. A. Lorentz angegebenen Methode behandelt werden. Mit Hülfe dieser Analogie erhält man aus den Lorentzschen Formeln für den Elektronenstrom und den Wärmestrom unmittelbar die entsprechenden Beziehungen zwischen Gasstrom und Wärmestrom einerseits, Druck- und Temperaturgefälle andererseits. Überträgt man die so gewonnenen Resultate auf die Strömung in Kapillaren und auf den Wärmeübergang zwischen Platten im hohen Vakuum, so erhält man (bis auf Zahlenfaktoren) die einfachsten Knudsenschen Formeln für die reine Molekularströmung und molekulare Wärmeleitung. Die Gesetze der Molekularströmung und der molekularen Wärmeleitung einerseits, der gewöhnlichen Gasdynamik und Wärmeleitung andererseits erscheinen somit als zwei Grenzfälle einer allgemeinen Theorie, die in der Abhandlung entworfen wird; dieselbe bietet auch die Möglichkeit weiterer Annäherungen von den beiden extremen Fällen aus. Am Schluß wird gezeigt, daß sich auch der Temperatursprung dieser Auffassung einordnen läßt, wenn man die feste Wand als poröses Material betrachtet, in dessen Hohlräume das Gas ein wenig eindringt (Adsorptionshypothese). Das Ziel ist, zu zeigen, was die Theorie ohne besondere Annahme über die Art der Reflexion der Molekeln an der Wand (wie sie von Knudsen und Smoluchowski gemacht sind) leistet. Man gelangt zu Resultaten, die zunächst höchstens der Größenordnung nach mit der Erfahrung stimmen. Die Theorie muß also verbessert werden.

Lp.

O. Stern. Zur kinetischen Theorie des Dampfdrucks einatomiger fester Stoffe und über die Entropiekonstante einatomiger Gase. Physik. Zs. **14**, 629-632.

Die reine Thermodynamik liefert die Temperaturabhängigkeit des Dampfdrucks eines festen Stoffes als Funktion seiner Verdampfungswärme und seiner spezifischen Wärme im festen und gasförmigen Zustande. Ein tieferes Eindringen läßt sich auf 2 Wegen ermöglichen, einmal durch die Anwendung der Quantentheorie und zweitens mit Hülfe gewisser Untersuchungen Boltzmanns aus dem Bereiche der statistischen Mechanik; beide Methoden werden hier angewandt, und es wird so auf zwei verschiedenen Wegen eine Formel für den Dampfdruck einatomiger fester Stoffe gewonnen, welche wesentlich mehr aussagt als die sich in der reinen Thermodynamik ergebende Formel; ferner wird auch die von Sackur und Tetrode aufgestellte Formel für die Entropiekonstante eines einatomigen Gases neu abgeleitet. A. K.

K. F. Herzfeld. Über die Zahl der freien Elektronen in Metallen. Physik. Zs. **14**, 1119-1122.

Verf. bedient sich der von O. Stern (s. vorstehendes Referat) ausgeführten theoretischen Untersuchungen zur Anwendung auf ein „Elektronengas“ und zieht aus der Theorie Folgerungen über die Zahl der freien Elektronen in Metallen. Diese Zahl ergibt sich bei diesen Untersuchungen, ähnlich wie bei früheren Untersuchungen, welche von ähnlichen kinetischen Betrachtungen ausgehen, als von der Größenordnung der Atomzahl selbst. A. K.

H. Tetrode. Bemerkungen über den Energieinhalt einatomiger Gase und über die Quantentheorie für Flüssigkeiten. Physik. Zs. **14**, 212-215.

Wenn die Nernstsche Vermutung zutrifft, daß die spezifische Wärme auch für Flüssigkeiten und Gase, ebenso wie für feste Körper, bei der Annäherung an den absoluten Nullpunkt der Temperatur der Null zustrebt, liegt es nahe, die Quantentheorie auch auf Flüssigkeiten und Gase anzuwenden. Der hier gemachte Versuch besteht darin, daß die Bewegungen von Flüssigkeiten in Schwingungen zerlegt gedacht werden; die Schwingungen oberhalb einer gewissen Schwingungszahl werden außer acht gelassen, und für die übrigen wird der Betrag $\frac{1}{2}h\nu/(e^{h\nu/kT}-1)$ an kinetischer Energie angesetzt. Dadurch verändern sich natürlich alle Resultate der gewöhnlichen hydrodynamischen Theorie; Verf. glaubt, daß sich manche Veränderungen schon bei gewöhnlicher Temperatur werden prüfen lassen; doch weist er selbst mit Recht auf das „Vorläufige“ seiner Betrachtungen hin. A. K.

E. Holm. Anwendung der neueren Planckschen Quantenhypothese zur Berechnung der rotatorischen Energie des zweiatomigen Gases. Ann. der Phys. (4) **42**, 1311-1320.

Zusammenfassung: 1. Der neueren Planckschen Formel der Energie eines linearen Resonators liegt in der Tat die Annahme zugrunde, daß der Resonator alle möglichen Energiebeträge annehmen kann, daß aber die Resonatoren, deren Energiebetrag innerhalb desselben „Elementargebietes der Energie“, d. h. im allgemeinen zwischen $(n-1)h\nu$ und $nh\nu$ liegt, gleichmäßig verteilt sind. 2. Unter Anwendung dieser modifizierten Quantenhypothese ergibt eine Berechnung der rotatorischen Molekularwärme eines zweiatomigen Gases, im Gegensatze zu dem Resultat von Ehrenfest, ein ununterbrochenes Anwachsen der Molekularwärme bei steigender Temperatur. Außerdem tritt eine Nullpunktsenergie zutage, deren Betrag zwei Drittel der von Einstein und Stern bei ihren vorläufigen Berechnungen bestimmten ausmacht. Bei Anwendung auf die Euckenschen Messungen am Wasserstoff bei niederen Temperaturen ergibt sich ein Molekülradius von etwa $0{,}65 \cdot 10^{-8}$ cm, wenn die Elementargebiete der rotatorischen Energie $\frac{1}{2}h\nu$ betragen (nach Ehrenfest), und von doppeltem Wert, wenn dieselben $h\nu$ ausmachen (nach Lorentz). Lp.

C. Wärmestrahlung und Wärmeleitung.

M. Planck. Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. Zweite, teilweise umgearbeitete Auflage. Leipzig: Johann Ambrosius Barth. XII u. 206 S. gr. 8°.

Die erste Auflage dieses Werkes ist F. d. M. **37**, 949, 1906 angezeigt worden. „Der Hauptmangel der ursprünglichen Darstellung bestand darin, daß sie mit den klassischen elektrodynamischen Gesetzen der Emission und Absorption begann, während sich herausstellte, daß, um den Messungen gerecht zu werden, die Annahme endlicher Energieelemente eingeführt werden muß, welche mit den Grundlagen der klassischen Elektrodynamik in direktem Widerspruch steht. ... Im Gegensatz dazu habe ich die neue Darstellung von vornherein so einzurichten gesucht, daß kein einziger der eingeführten Sätze an einer

späteren Stelle eingeschränkt oder gar abgeändert werden muß. Dadurch ist wenigstens der Vorteil erreicht, daß die Theorie, soweit sie hier vorgetragen ist, keinen inneren Widerspruch aufweist. . . . Die zahlreichen, zum Teil sehr wichtigen Anwendungen zu behandeln, welche die Quantenhypothese auf andern Gebieten der Physik bereits gefunden hat, habe ich hier nicht als meine Aufgabe betrachtet, noch weniger, mich mit allen abweichenden Ansichten auseinanderzusetzen. . . . Es wird noch der mühsamen, experimentellen und theoretischen Arbeit von Jahren und Jahrzehnten bedürfen, um auf dem neuen Terrain allmählich vorwärts zu kommen. Wer gegenwärtig der Quantentheorie seine Kraft widmet, muß sich einstweilen mit dem Bewußtsein begnügen, daß der volle Erfolg der aufgewendeten Arbeit wahrscheinlich erst einer späteren Generation zugute kommen wird.“

I. Grundtatsachen und Definitionen. II. Folgerungen aus der Elektrodynamik und der Thermodynamik. III. Entropie und Wahrscheinlichkeit. IV. System von Oszillatoren im stationären Strahlungsfelde. V. Irreversible Strahlungsvorgänge. — Verzeichnis der Schriften des Verf. über Wärmestrahlung und Quantenhypothese.

Lp.

J. D. van der Waals jr. Over de verdeelingswet der energie. Amst. Ak. Versl. **21**, 1093-1102, 1370-1375; **22**, 84-90, 473-475.

Zuerst geht der Verf. darauf aus, eine Form der Bewegungsgleichungen zu finden, die nicht auf die Äquipartition führt. Er setzt für die Energieverteilung die Planck sche Formel voraus und macht die Annahme, daß jeder Resonator für sich allein eine auffallende Strahlung von bestimmter Frequenz in schwarze Strahlung umsetzt. Der Vibrator befinde sich mit seinem Mittelpunkte an eine bestimmte Stelle eines von vollkommen spiegelnden Wänden umschlossenen parallelepipedischen Raumes gebunden. Ein monochromatischer Lichtstrahl, der den Vibrator streift, versetzt ihn in stationäre Schwingungen. Eine Koordinate bestimme die Amplitude des Lichtstrahls und die dadurch entstehende stationäre Schwingung des Vibrators. Außerdem hat der Vibrator eine Eigenkoordinate; ist diese Null, so ist die Bewegung des Resonators ganz durch die stationäre Strahlung bedingt. Eine Abweichung von Null bedeutet eine nicht durch das stationäre Strahlungsfeld bedingte Bewegung. Für die Hohlraumstrahlung werden in einem Würfel von 1 cm³ in üblicher Weise Koordinaten und Momente eingeführt und ein kanonisches Ensemble gebildet. Für die Phasenwahrscheinlichkeit wird aber nicht die Gibbs sche Formel gewählt, sondern

$$P = \exp \frac{1}{\theta} (\psi - \tfrac{1}{10} \sum q^2 - \tfrac{1}{16} \sum p^2) \cdot \varphi(q, \ldots, p),$$

wo q und p Koordinaten und Momente sind; $\varphi(q, \ldots, p)$ ist eine Funktion von Koordinaten und Momenten, welche die Abweichung von dem Falle des Geltens der Hamilton schen Gleichungen kennzeichnet. Für diese Funktion wird eine Integralgleichung hergeleitet. Die kanonischen Gleichungen gelten also nicht, mithin auch nicht das Prinzip der Erhaltung der Phase. Die anstatt des Liouville schen Theorems tretende Bedingung erhält ihre Fassung und die Bewegungsgleichungen des Elektrons werden zu der Funktion in Beziehung gesetzt.

In der zweiten Abhandlung zieht der Verf. nach den Ergebnissen der ersten Schlüsse über die Energieverteilung im Normalspektrum und über die Ge-

schwindigkeitsverteilung der Vibratoren, unter Hervorhebung des Unterschiedes zwischen der Quantentheorie in der Planckschen Form und den Entwicklungen dieser Arbeit. Ebenso nimmt er Stellung gegen die Sommerfeldsche Theorie der Aktionsquanten.

Ein Sonderfall der räumlichen Verteilung, wenn nämlich n_0 Teilchen sich in einem Raume v bewegen, ohne Kräften ausgesetzt zu sein, es sei denn, daß sie sich in einem Raume v von n_1 Volumeneinheiten befinden, bildet den Gegenstand der nächsten Abhandlung. In einem solchen Raume v wirke auf sie eine scheinelastische Kraft, in einer sie umgebenden Übergangsschicht eine abstoßende Kraft. Die radiale Geschwindigkeit wird im Mittel kleiner vorausgesetzt als gemäß der Äquipartition, die mittlere kinetische Energie als durch die Plancksche Formel gegeben. Es ergibt sich ein Resultat, das gewissermaßen mit dem Nernstschen Wärmesatz übereinstimmt, und die Abhängigkeit der Gleichgewichtskonstante von der Temperatur wird erörtert. Lp.

E. Warburg, G. Leithäuser, E. Hupka und C. Müller. Über die Konstante c des Wien-Planckschen Strahlungsgesetzes. Berl. Ber. 1913, 35-43; Ann. der Phys. (4) **40** 609-634.

Zur Bestimmung der Konstante c mit Isochromaten und Isothermen wurden von prismatisch zerlegter Hohlraumstrahlung bei zwei Temperaturen Isothermen spektralbolometrisch aufgenommen und außerdem Helligkeitsmessungen an der roten Wasserstofflinie $\lambda = 0{,}6563\mu$ bei diesen Temperaturen gemacht. Zum Unterschiede von früheren Messungen wurden die beiden Temperaturen nicht unabhängig voneinander bestimmt, sondern durch das Wiensche Verschiebungsgesetz verknüpft, wodurch sich eine starke Verminderung der Fehler ergibt. Namentlich aber wurden die Apparate zur prismatischen Zerlegung der Strahlung möglichst variiert und außer dem sonst benutzten Flußspatprismen auch Quarzprismen verwendet. Nach eingehender Mitteilung der Ergebnisse werden diese schließlich mit denen von Lummer, Pringsheim, Paschen, Wanner, Holborn u. a. kritisch verglichen. Rtt.

H. Weyl. Über die Randwertaufgabe der Strahlungstheorie und asymptotische Spektralgesetze. J. für Math. **143**, 177-202.

In einer vor kurzem erschienenen Abhandlung zur Theorie der Hohlraumstrahlung (J. für Math. **141**, 163-181; F. d. M. **43**, 1063, 1912) hat sich der Verf. mit der Integration der Differentialgleichung $\Delta\mathfrak{U} + \lambda\mathfrak{U} = 0$ in einem räumlichen Gebiete J beschäftigt, wenn an dem Rande O entweder die Bedingungen

$$1^0)\qquad \mathfrak{U}\ \text{normal},\ \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial n}\ \text{tangential},$$

oder

$$2^0)\qquad \mathfrak{U}\ \text{tangential},\ \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial n}\ \text{normal},$$

unter n die Innennormale verstanden, vorgeschrieben sind. Die vorstehenden Randwertaufgaben sind nun, worauf der Verf. seither aufmerksam geworden ist, nicht diejenigen, die in der Theorie der Hohlraumstrahlung maßgebend sind. Es handelt sich hier vielmehr darum, die Differentialgleichung $\Delta \mathfrak{E} + \lambda \mathfrak{E} = 0$ unter den Oberflächenbedingungen $\mathfrak{E}$ normal, $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$ zu integrieren. Die Behandlung dieses Problems bildet den Inhalt der vorliegenden Arbeit.

Es zeigt sich, daß es abzählbar unendlich viele Lösungen $\lambda = \sigma_i, \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_i(x, y, z)$ gibt. Alle σ_i sind, sofern O aus einer zusammenhängenden Fläche besteht, positiv. (Hat J aber $h+1$ Randkomponenten, so sind h Eigenwerte gleich Null.)

Unterhalb einer beliebigen Schranke liegen mindestens dreimal so viel σ_i als Eigenwerte des Problems $\Delta u + \lambda u = 0, u = 0$ auf J. Es gilt das asymptotische Gesetz

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n}{n^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{2\pi^2}{J}\right)^{\frac{2}{3}},$$

unter J das Volumen des Gebietes J verstanden. Ltn.

L. R. Ingersoll and O. J. Zobel. An introduction to the mathematical theory of heat conduction. With engineering and geological applications. Boston, New York, Chicago, London: Ginn and Co. VI u. 171 S.

In erster Stelle haben die Verf. danach gestrebt, den Gegenstand mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse des Lernenden zu behandeln, der weder die Zeit, noch die mathematische Schulung hat, um sich in größerer Länge mit ihm zu befassen. Zu diesem Zwecke werden weniger Musteraufgaben erledigt als in den größeren Lehrbüchern, und es wird weniger Gewicht gelegt auf solche rein mathematischen Herleitungen wie Einzigkeits-, Existenz- und Konvergenzsätze. Ein zweites Ziel besteht darin, klarer und eingehender, als offenbar bisher geschehen ist, die vielen Anwendungen durchzunehmen, deren die Ergebnisse fähig sind; denn in praktischer Tragweite steht dieses Gebiet ja hinter keinem andern in der mathematischen Physik zurück. Dieser Grundzug weckt und fesselt das Interesse des Lernenden, der nur allzu oft fühlt, daß vieles aus seiner vorausgegangenen mathematischen Schulung der Anwendung bar gewesen ist. Inhalt: Einleitung. Die Fouriersche Gleichung für Leitung. Der stetige Zustand. Eine Dimension. Der stetige Zustand. Mehr Dimensionen als eine. Periodischer Wärmefluß in einer Dimension. Fouriersche Reihen. Der lineare Wärmefluß. Der Wärmefluß in mehr Dimensionen als in einer. Die Eisbildung. J. (Lp.)

F. R. Berwald. Solution nouvelle d'un problème de Fourier. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. 9, Nr 14, 17 S.

„Bei der Behandlung einer allgemeinen Frage bin ich vor einem Jahre auf die folgende Lösung einer Aufgabe der analytischen Theorie der Wärmeleitung geführt worden, die von Fourier gelöst ist. Zwar hat sie nicht die Eleganz, auch nicht die Allgemeinheit der klassischen Behandlung; aber das darzulegende

Verfahren scheint mir nicht jedes Interesses bar zu sein wegen einer vermutlich neuen Anwendung der summierbaren Reihen. Es handelt sich nämlich um die Lösung eines Systems linearer Gleichungen von der Ordnung unendlich, welches dem ganz ähnlich ist, dessen Poincaré sich bedient hat, um die Schwierigkeit derartiger Fragen darzutun (F. d. M. **17**, 439, 1885). In meiner Auseinandersetzung kommt dann ein die summierbaren Reihen von besonderer Form betreffender Satz vor." Die Aufgabe lautet: Bei einem homogenen sphärischen Körper hängt die anfängliche Temperatur nur von dem Radius ab. Wir setzen übrigens voraus, daß sie eine gerade Funktion $U(r)$ sei, die holomorph ist für alle in Betracht kommenden r. An der Oberfläche wird die Temperatur 0 festgehalten. Die Temperatur $u(r, t)$ zu einer beliebigen Zeit t zu finden. Lp.

TH. DE DONDER. Sur le mouvement de la chaleur dans un corps athermane. C. R. **157**, 1400-1403.

In dem Zeitpunkte t ist die Wärmeenergie (vergleichbar einer Materie, die der Wärmefluß in ihrer Gesamtheit verschieben würde) in jedem im Innern des betrachteten Körpers herausgegriffenen Punkte (x, y, z) mit einer Geschwindigkeit v behaftet; der Verf. berechnet die drei Komponenten dx/dt, dy/dt, dz/dt dieser Geschwindigkeit, indem er die von Boussinesq in der Théorie analytique de la chaleur aufgestellten Gleichungen benutzt. Um sein Ziel zu erreichen, weist er darauf hin, daß $\int \varrho \, dx \, dy \, dz$ eine Integralinvariante der Wärmebewegung sein muß, wo ϱ die Dichte der Wärmeenergie vorstellt. Zufolge gewisser Theorien muß diese Dichte aber eine lineare Funktion der Temperatur sein. Nun wird gezeigt, daß diesen Bedingungen leicht genügt werden kann unter Berücksichtigung aller erhaltenen Resultate betreffs der Wärmeströme. Lp.

F. VERCELLI. Sulla determinazione dei coefficienti di conduttività termica mediante il raffredamento di sfere. Nuovo Cimento (6) **6**, 427-436.

Bei den Forschungen über die innere Temperatur von Bergen ist die genaue Kenntnis der Koeffizienten für die Wärmeleitung der die Bergmassen ausmachenden Materialien von großer Bedeutung, und bei der Forschung über die Abkühlung der Erde und der Planeten, als sphärische Massen betrachtet, bieten sich zwei Formeln dar, welche die innere Temperatur und den thermischen Oberflächengradienten einer Kugel geben, die sich unter gegebenen Bedingungen abkühlt; diese können also zweckmäßig dazu dienen, auf sie ein Meßverfahren für die Koeffizienten der Wärmeleitung zu gründen. Zuerst werden diese Formeln in Erinnerung gebracht; dann wird das daraus fließende Verfahren dargelegt und mit den Methoden verglichen, die bisher gebräuchlich waren, wenn der zu untersuchende Körper auf eine sphärische Gestalt zurückgeführt ist. Lp.

M. MILANKOWITSCH. Über ein Problem der Wärmeleitung und dessen Anwendung auf die Theorie des solaren Klimas. Zs. f. Math. u. Phys. **62**, 63-67.

Zuerst wird das Problem der Wärmeleitung behandelt: Eine der beiden Begrenzungsebenen einer unendlich ausgebreiteten Platte von endlicher Dicke wird auf einer konstanten Temperatur gehalten, während die andere periodischen Temperaturänderungen unterworfen ist, welche sich als Superposition zweier harmonischen Änderungen von verschiedener Periode darstellen lassen. Man soll die Temperaturschwankungen im Innern der Platte bestimmen. Nach Erledigung dieses Problems werden die gewonnenen Ergebnisse auf die Theorie des solaren Klimas angewendet, d. h. jenes hypothetischen Klimas, das sich auf der überall fest gedachten Erdoberfläche einstellen würde, wenn keine Atmosphäre vorhanden wäre. Der zweite Teil der Abhandlung befaßt sich mit der Bestimmung der Temperaturänderungen, die sich unter den angegebenen Bedingungen auf einer beliebig gewählten Stelle der Erdoberfläche einstellen würden. Hiernach vermindert die Wärmeleitung die Amplitude der Temperaturschwankungen, und ihr Einfluß kann unter Umständen sehr bedeutend sein. Während Trabert ohne Berücksichtigung dieses Einflusses, z. B. am Pole, zu Temperaturen zwischen — 273° und + 82° gelangt, ergeben sich bei Berücksichtigung der Wärmeleitung bedeutend geringere Temperaturschwankungen.

Lp.

H. Löschner. Der Wärmeeinfluß bei Längenmessungen mit metallenen Bändern und Stäben. Erste Mitteilung. Zur Temperaturbestimmung des Metalls. Österr. Wochenschrift f. d. öff. Baudienst. **19**, 38-42. (Hierzu Tafel 6 und 7.) Zweite Mitteilung: Lineare Wärmeausdehnungszahlen. Ebenda **19**, 681-688. (Hierzu Tafel 76, 77 und 78.)

I. (Einleitung.) II. Die Empfindlichkeit des Thermometers mit Metallhülse. III. Einfluß der Körperwärme auf Längenmessungen mit stählernen Normalmetern.

I. (Werte der Ausdehnungszahlen.) II. Ein Vorschlag für eine andere Ermittlungsweise der Ausdehnungszahl von Meßbändern. III. Die Eliminierung eines Fehlers in der Wärmeausdehnungszahl. IV. Eine indirekte Temperaturermittlung bei Längenmessungen mit metallenen Meßwerkzeugen von sehr verschiedener Ausdehnungszahl.

Schr.

Weitere Literatur.

T. J. Meyer. Reflexion langwelliger Wärmestrahlen an rauhen Flächen und Gittern. Diss. Berlin. 31 S. 8°.

V. Römer. Zur Theorie der Wärmestrahlung. Progr. Wien. 54 S. 8° (1912).

W. Wien. Sur les lois du rayonnement thermique. Traduit de l'allemand par M. Chevassus. Rev. scient. **19**, 42-48.

Zwölfter Abschnitt.

Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Kapitel 1.

Geodäsie.

B. Baillaud. Notice sur la 17e Conférence générale de l'Association géodésique internationale. Annuaire Bur. Longit. C, 34 S.

Dieser Bericht über die vom 17. bis 27. September 1912 in Hamburg abgehaltene Konferenz enthält einen Abriß der Geschichte dieser Vereinigung der Völker zur internationalen Erdmessung in den 50 ersten Jahren ihres Bestehens (1862—1912) und das Protokoll über die Verhandlungen. Lp.

Clairaut. Theorie der Erdgestalt nach Gesetzen der Hydrostatik. Herausgegeben von Ph. E. B. Jourdain und A. v. Oettingen. Leipzig: Wilhelm Engelmann. 162 S. 8⁰. Mit 54 Fig. im Text u. 1 Bildnis. (Ostwalds Klassiker, Nr. 189.)

Die berühmte Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrodynamique (Paris 1743, 2. Ausgabe Paris 1808) liegt nun auch in deutscher Übersetzung vor. „Clairaut gibt in ihr die bis dahin unbekannten allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht von Flüssigkeiten, sowohl der homogenen, als auch der heterogenen oder der aus einer beliebigen Anzahl zusammengesetzten Flüssigkeiten bei willkürlichen Annahmen über die den einzelnen ihrer Molekeln innewohnenden Kräfte und unter der Voraussetzung einer gegenseitigen Anziehung zwischen diesen Molekeln nach einem willkürlichen Gesetze. Nachher werden diese Gleichungen auf die Erde angewandt in der Annahme, sie werde aus einer Flüssigkeit oder auch aus unendlich vielen Flüssigkeiten gebildet, die alle um ein und dieselbe Achse kreisen, und nun wird bewiesen, daß die elliptische Gestalt die Gleichgewichtsbedingung der Niveauschichten befriedigt, wenn ihre Gestalt wenig abweicht von der sphärischen. Clairaut bestimmt die Elliptizitäten dieser Schichten und das Gesetz der Schwere an der Oberfläche der äußeren Schicht. Er gelangt zu den Ausdrücken für dieselben Größen in dem allgemeinen Fall, wenn die Erde aus einem elliptischen Kern bestände, der mit einer oder mehreren Flüssigkeiten bedeckt wäre, während der Kern selbst

aus elliptischen Schichten besteht, deren Gestalten und Dichtigkeiten vom Mittelpunkte bis zur Oberfläche sich wandeln, und so kommt er zu dem merkwürdigen Ergebnis: Man bezeichne mit E die Elliptizität der Erde oder den Überschuß der Länge der Äquatorachse über die der als Einheit genommenen Polarchse, mit C den Überschuß der Schwere an den Polen über die als Einheit angenommene Schwere am Äquator, endlich drücke man durch φ das Verhältnis der Zentrifugalkraft am Äquator zur Einheit der Schwere aus, dann ist die Summe $E + C$ bei allen Annahmen, die man über den inneren Bau der Erde machen kann, konstant, und zwar $= \frac{5}{2}\varphi$. Die Zunahme der Schwere vom Äquator bis zu den Polen ist das Produkt aus C und dem Quadrat des Breitensinus. Die Wichtigkeit aller dieser Ergebnisse und die Eleganz, mit der sie vorgetragen werden, stellen dieses Werk auf die Höhe der schönsten mathematischen Erzeugnisse. Clairaut legt in ihm eine Theorie der Kapillarwirkung vor, aber diese Theorie erscheint mir bedeutungslos. Die von Clairaut in seiner Theorie der Erdgestalt befolgte Methode ist zwar recht elegant, aber auf die Drehellipsoide beschränkt." (Laplace, Mécanique céleste. Oeuvres 5, 11—13.) Dieses Referat von Laplace über das Buch rechtfertigt die Aufnahme in die Sammlung von Ostwalds Klassikern, und seine Wiedergabe überhebt den Berichterstatter der Mühe, ein neues Referat anzufertigen. In bezug auf die Leistungen Clairauts in der Kapillaritätstheorie sagt Gauß (Werke 5, 31): „Die den Aufstieg oder die Senkung der Flüssigkeiten in den Kapillarröhren beherrschenden Kräfte hat zuerst der scharfsinnige Clairaut eindringlich und genau aufgezählt; da er aber das Kräftegesetz ganz unangerührt gelassen hat, so hat aus jener Aufzählung nichts Fruchtbares für die mathematische Erklärung der Erscheinungen erwachsen können."

Die Anmerkungen der Herausgeber liefern reichhaltige Verweise auf solche Schriften, die sich mit den in dem Buche berührten Fragen beschäftigt haben; die Kritik der nicht mehr anzuerkennenden Stellen wird in diesen Anmerkungen durch den Hinweis auf frühere Urteile in aller Kürze erledigt. Der Leser wird dadurch auf viele minder bekannte Arbeiten von neuem aufmerksam gemacht.

Lp.

E. Hegemann. Lehrbuch der Landesvermessung. Zweiter Teil. Mit 77 Textabbildungen. Berlin: Paul Parey. VIII u. 306 S. gr. 8°.

Den ersten Teil dieses Werkes konnten wir nur mit dem Titel anführen F. d. M. 37, 959, 1906. Die Absicht des Verf. geht dahin, die Theorien, welche die preußische Landesaufnahme bei ihren Werken anwendet, zur Darstellung zu bringen. Als Fortsetzung des ersten Teiles bringt das Kapitel I die Ableitung der geodätischen Linie. Daran schließt sich die Übertragung der geographischen Koordinaten, falls die Strecke s der geodätischen Linie $P_1 P_2$ und ihr Azimut T_1 im Punkte P_1 gegeben sind. Das Kapitel II handelt von den Normalschnitten, das Kapitel III von den zu benutzenden Formeln für die Interpolation. Die Gaußsche konforme Projektion wird im Kapitel IV dargestellt; sie findet bei der Landesvermessung gegenwärtig ausschließlich Verwendung. Einige Beispiele dienen zur Erläuterung. Zur Vervollständigung sind das Kapitel V über querachsige Koordinaten und das Kapitel VI über sphärische und sphäroidische konforme Kegelprojektion aufgenommen worden. Nach dem Kapitel VII über geodätische Dreiecke beschäftigen sich die Kapitel VIII und IX mit der

trigonometrischen Höhenmessung nebst dem Nivellement und den topographischen Aufnahmen. Die Ableitung der Gleichung der geodätischen Linie sowie die Refraktion sind einem Vortrage von Helmert entlehnt. Die Bezeichnungen der Punkte, ihrer Breite, Länge usw. stimmen mit denen der preußischen Landesaufnahme überein; in Teil I, wo dies nicht geschehen ist, soll die Änderung beim Erscheinen der nächsten Auflage gemacht werden. Der Anhang bringt mehrere Tafeln, die bei dem praktischen Gebrauch sehr nützlich sind. Die Ausstattung des Buches ist ausgezeichnet. Lp.

A. R. Hinks. Maps and survey. Cambridge: University Press. XVI u. 206 S. 8⁰. 24 Tafeln.

Diese Einführung in das Studium der Landkarten und die Verfahrungsarten bei dem Vermessungswesen, durch die sie zustande kommen, sollen die Nachfrage nach einem Buche befriedigen, das der mannigfaltigen Kunst des Vermessens gerecht wird und dessen Abfassung durch die lange Erfahrung einer Lehrtätigkeit auf dem Gebiete der Erdkunde an der Universität zu Cambridge dem Verf. nahegelegt wurde. Diese Behandlung des topographischen und geodätischen Meßwesens schließt sich eng an die Methoden an, die bei der Landesvermessung in Großbritannien, in Indien und bei der Militär-Ingenieurschule zu Chatham gebräuchlich sind. Das allgemeine Ziel des Buches kann aus den folgenden Kapitelüberschriften ersehen werden: Karten, Kartenlesen, Wegekreuzung, einfaches Feldmessen, Kompaß und Meßtisch zum Skizzieren beim topographischen Vermessen, geodätisches Messen, Meßinstrumente. J. (Lp.)

J. Frischauf. Die mathematischen Grundlagen der Landesaufnahme und Kartographie des Erdsphäroids. Stuttgart: Konrad Wittwer. 192 S. Lex.-8⁰.

„In diesem Werke hat der Verf. seine in den letzten fünf Jahren hauptsächlich in der deutschen und in der österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen gebrachten Aufsätze sowie seine in den Anmerkungen zu den Heften 177 und 184 von Ostwalds Klassikern niedergelegten Untersuchungen geodätischen Inhaltes durch Aufnahme der ergänzenden Abschnitte zum mathematischen Teile der Landesaufnahme und Kartographie erweitert und zu einem Lehrbuche ausgestaltet, zu dessen Verständnis die elementarsten Kenntnisse der höheren Mathematik hinreichen.“ (Aus der ausführlichen Anzeige in der Zs. f. Vermessw. **42**, 932—936 von S. Wellisch.) Lp.

O. Eggert. Die Größe der Erde. Zs. f. Vermessw. **42**, 751-753.

Aus dem Vortrage von F. R. Helmert: „Geoid und Erdellipsoid“ (Zs. d. Gesellsch. f. Erdkunde, Berlin 1913, 17—34) werden die aus sieben Messungen der Zeit nach Bessel folgenden Zahlen für die große Halbachse a und die Abplattung α mitgeteilt. Als beste Werte sind zurzeit anzusehen; $a = 6378388 \pm 53$ m, $1 : \alpha = 296{,}96 \pm 1,2$. Lp.

S. Wellisch. Über die Nomenklatur mathematisch-geodätischer Ausdrücke und deren Symbole. Österr. Zs. f. Vermessw. **11**, 265-275.

Zusammenstellung. Stichworte: Winkelfunktionen, Logarithmen, Erdgestalt, Abplattung, Krümmungshalbmesser, geographische Koordinaten, Vergrößerungsverhältnis, Azimutalwinkel. Schr.

A. Capilleri. Das Häufigkeitsgesetz des Ablesefehlers beim Noniustheodolit. Österr. Zs. f. Vermessw. **11**, 201-212.

Das Gesetz des Ablesungsfehlers wird durch ein gleichschenkliges Dreieck dargestellt. Der Fehler im Richtungswinkel der dritten Zugseite folgt mit großer Annäherung dem Gaußschen Fehlergesetz. Einfluß des Exzentrizitätsfehlers der Alhidade. Schr.

A. Viterbi. Sul trasporto delle coordinate geografiche e degli azimut lungo archi di geodetiche. Lomb. Ist. Rend. (2) **46**, 884-904.

„Die ungemein große Bedeutung, die in manchen Fragen der Geodäsie die Entwicklung eines Ausdrucks von der Form $(1 \pm l \sin^2 \psi)^m$ hat, wo m eine negative Zahl ist, ψ eine Variable, $l < 1$, nach Legendre-Besselschen Reihen, ist allbekannt. . . In meinem Lehrgang der theoretischen Geodäsie fiel mir ein, daß es wünschenswert sei, ein solches Verfahren in erster Linie anzuwenden, um die obere Grenze des Fehlers auszuwerten, mit dem die drei Unbekannten (Breite in einem der Endpunkte einer betrachteten Geodätischen des Besselschen Ellipsoids, Azimut daselbst für die nämliche Linie, Längendifferenz der beiden Endpunkte) behaftet sind. . . Zu dem Zwecke ist an diesem Verfahren, wie es gewöhnlich dargestellt wird, eine unbedeutende Abänderung vorzunehmen. Diese darzulegen sowie die Berechnung des Grades der Annäherung, den man mit dem so abgewandelten Verfahren erreicht, ist die Aufgabe des ersten Paragraphen des vorliegenden Aufsatzes. In den folgenden beiden Paragraphen wird ein Verfahren auseinandergesetzt, das dem Anscheine nach neu ist für die in Rede stehende Aufgabe. Es beruht ebenfalls auf dem Gebrauche einer anderen Entwicklung in eine Legendre-Besselsche Reihe, auf die immer das erwähnte Verfahren zur Bestimmung der oberen Grenze des Fehlers anwendbar ist, mit dem die durch Folgenäherungen bestimmten Unbekannten behaftet sind. Bei einem solchen Verfahren kann man geradenwegs mit der astronomischen (ellipsoidischen) Breite arbeiten, wie es bei der Methode von Legendre und Bessel mit der reduzierten Breite geschieht. Hoffentlich kann dieser Vorteil nicht als ungeeignet erscheinen, den Nachteil auszugleichen, der darin liegt, daß die hier auftretenden Reihen etwas weniger schnell konvergieren als die aus dem Legendre-Besselschen Verfahren sich ergebenden." Lp.

E. Benoit. Sur des formules dérivées de celles des ingénieurs géographes et appropriées au calcul des coordonnées des sommets d'une chaîne géodésique primordiale. C. R. **156**, 297-299.

Der Verf. hat die Puissantschen Formeln, die gewöhnlich bei den Triangulierungsrechnungen auf dem Ellipsoid gebraucht werden, durch Hinzunahme eines Korrektionsfaktors bedeutend verschärft. Während die erwähnten Formeln etwa noch 0″,01 geben, ist es nach den verbesserten Formeln möglich, die Genauigkeit von 0,001 Zentesimalsekunden in Länge und Breite zu erreichen für Seiten von etwa 80 km; mit anderen Worten, es werden die Glieder dritter Ordnung in der Entwicklung beibehalten. Lp.

E. Goedseels. Étude sur l'emploi des équerres topographiques dans les observations astronomiques et sur l'astrolabe à prisme. Brux. S. sc. (B) **37**, 331-340.

Vereinfachungen in den Rechnungen und in dem praktischen Gebrauche dieser Instrumente. Unter dem Gesichtspunkte der Praxis ist die Hauptbemerkung des Verfassers die folgende: die leuchtenden oder sichtbaren Strahlen, die durch ein gleichschenkliges festes topographisches Prisma eines Fernrohres gehen, dürfen nicht in einer Ebene des geraden Schnittes liegen.

Mn. (Lp.)

A. Tichy. Die nunmehr definitiv konsolidierte logarithmisch-tachymetrische Methode. Zeitschr. der österr. Ingenieur- und Architektenvereins **65**, 705-711, 721-728, 737-741.

„Das Wesen der Präzisionstachymetrie beruht auf einer bis an die äußerste Grenze des Erreichbaren und mit Vorteil praktisch Verwertbaren gediehenen Verfeinerung der optischen Längenmessung, gepaart mit einer ihm angemessenen Verfeinerung der Winkelmessung in Horizontal- und Vertikalebene. Zweck der Präzisionstachymetrie ist die vollständige Befreiung aller Arten praktischer Vermessungsaufgaben von den Schwerfälligkeiten einer mittels Aneinanderreihung von Gerätschaften zu bewerkstelligenden direkten Längenmessung und somit von allen sonst durch Terrainschwierigkeiten unausbleiblich erfolgenden Beeinträchtigungen der Dispositionsfreiheit und des Genauigkeitsgrades hinsichtlich der für die Gesamtmeßoperation grundlegenden polygonalen Züge und Hauptpunktnetze." Schr.

H. Löschner. Brachymetrische Winkelschätzung. Österr. Zs. f. Vermessw. **11**, 310-315.

Schätzung von Winkeln mit einem bei ausgestrecktem Arm quer zur Armrichtung in der Hand gehaltenen Maßstab. Die einem Winkel von 10° entsprechende Länge (rund 10 cm) heißt brachymetrische Konstante. Sie ist übrigens vom Höhenwinkel merklich abhängig. Schr.

H. Löschner. Tachymetrieren nach Schichtenlinien. Rundschau f. Technik u. Wirtschaft **6**, 163-165.

„. . . ein Verfahren, bei welchem jeder Punkt der Höhenkurve nicht vom Beobachter am Instrument und somit auch nicht mit Hülfe dieses der Auf-

nahme der Detailpunkte dienenden Instrumentes, sondern von dem die Auswahl der Detailpunkte treffenden Ingenieur mit Hülfe eines Freihandnivellierinstrumentchens (hand level) eingewiesen wird." Schr.

G. Kammerer. Th. Scheimpflugs Landvermessung aus der Luft. Intern. Archiv f. Photogrammetrie 3 (1911-1913), 196-226.

Übersicht über Scheimpflugs Arbeiten (über deren Prinzip vgl. F. d. M. **38**, 967-968, 1912). Schr.

E. Liebitzky. Studie zur Fuchsschen Theorie der Stereophotogrammetrie. Intern. Archiv f. Photogrammetrie 3 (1911-1913), 6-17.

Die Fuchssche Theorie befaßt sich mit den Fällen, in denen die Bedingung erfüllt wird, daß alle photographischen Platten bei der Aufnahme in einer Ebene liegen. Schr.

K. Fuchs. Die Noniusskala und ihre Verwendung im Komparator. Intern. Archiv f. Photogrammetrie 3 (1911-1913), 27-30.

Als Noniusskala wird eine Skala bezeichnet, die aus zwei gegenläufigen Skalen besteht, die von einem gemeinsamen Nullpunkt ausgehen, und deren Skalenteile sich wie 100 : 101 verhalten. Schr.

C. Pulfrich. Über eine einfache Vorrichtung zur Demonstration der Kurven gleicher Parallelen. Intern. Archiv f. Photogrammetrie 3 (1911-1913), 89-96.

Die Kurven werden als Ort von Schnittpunkten entsprechender Strahlen zweier Büschel bestimmt. Die beiden Büschel werden auf photographischen Platten als Negative festgelegt und diese mit den Schichtseiten aufeinander gelegt. Sämtliche Kurven der Schar erscheinen dann als Linien leuchtender Punkte.

Die Anwendung geschieht auf den Fall, daß die photogrammetrischen Aufnahmen nicht in derselben Ebene erfolgt sind. Schr.

Ig. Bischoff. Differentialformeln für einfaches Rückwärtseinschneiden. Zs. f. Vermessw. 42, 945-951.

In derselben Zeitschrift **23**, 204 ff., 1894 hat C. Runge eine analytische Lösung des Rückwärtseinschneidens gegeben, die, sofern nur die Koordinaten des gesuchten Punktes verlangt werden, unter Benutzung einer Rechenmaschine rascher und einfacher als die sonst üblichen Rechnungsverfahren der Aufgabe zum Ziele führt. Diese Rechnung läßt sich in der Weise umbilden, daß auch bei logarithmischer Rechnung die Richtungswinkel nicht erst nachträglich ermittelt werden müssen. Außerdem ergibt sich aber noch die Möglichkeit, direkte

Differentialbeziehungen zwischen den Änderungen der beiden gemessenen Winkel einerseits und jenen der Richtungswinkel und damit auch der Koordinaten andererseits aufzustellen. Lp.

S. Wellisch. Netzorientierung durch Einführung von Richtungsbedingungsgleichungen. Österr. Zs. f. Vermessw. **11**, 178-183.

Vereinfachung des Verfahrens bei Heranziehung der Besselschen Nullpunktkorrektion. Schr.

E. Doležal. Beitrag zum Rückwärtsschneiden. Österr. Zs. Vermessungsw. **11**, 241-245.

Wiedergabe einer Notiz von F. Čermák „Lösung des Pothenotschen Problems nach dem Tangentensatz" (aus dem Jahre 1907 stammend) mit einigen Bemerkungen. Schr.

A. Hillegaart. Formeln und Formulare für die Berechnung des Durchschnitts zweier Geraden und von Absteckungsmaßen bei Verwendung von Grenzpunktkoordinaten. Zs. f. Vermessw. **42**, 633-638, 665-672.

I. Berechnung des Durchschnittes zweier Geraden. II. Berechnung der Abszissen und Ordinaten durch Koordinaten gegebener Punkte auf eine beliebige Messungslinie. III. Berechnung der Absteckungselemente beim Kurvenmessen. Lp.

Werner. Punktbestimmung. Zs. f. Vermessw. **42**, 161-169.

Aufgabe. Ein Punkt P ist der horizontalen Lage und Höhe nach zu bestimmen gegen zwei der Lage und Höhe nach gegebene Punkte I und II. (Diese Aufgabe ist behandelt von Dock in der Österreichischen Zs. f. Vermessw. 8, 291 ff., wie der Verf. in einer Fußnote bemerkt). Lp.

Werner. Punktbestimmung durch Vertikalwinkelmessung. Zs. f. Vermessw. **42**, 241-253.

Sind drei Punkte der Lage und Höhe nach bekannt, so ist ein neuer Punkt P der Lage und Höhe nach vollständig bestimmt, wenn in ihm die Horizontalwinkel nach den drei gegebenen Punkten, sowie Höhenwinkel, resp. Zenitdistanz nach einem der drei gegebenen Punkte gemessen werden (Rückwärtseinschneiden). Irgendeine Kontrolle ist nicht vorhanden. — Der Punkt P ist der Lage und Höhe nach aber auch eindeutig bekannt, wenn in ihm die Höhenwinkel, resp. Zenitdistanzen nach drei der Lage und Höhe nach gegebenen Punkten gemessen werden (trigonometrisches Rückwärtseinschneiden). Durch die Behandlung des zweiten Falles ergibt sich, daß die Rechnung weniger einfach

als im ersten ist, der erreichbare Genauigkeitsgrad aber nahezu derselbe; sie kann also eine geeignete Kontrolle des ersten Verfahrens abgeben. Lp.

E. HEGEMANN. Günstige Lage der Punkte bei Hansens Problem mit überschüssigen Messungen. Zs. f. Vermessw. **42**, 401-407.

Es handelt sich um die Aufgabe von Hansen, zwei Neupunkte durch Winkelmessungen zu bestimmen, welche nur auf diesen ausgeführt werden. Die Winkelmessung erstreckt sich für jeden der beiden Punkte nach dem anderen und nach Festpunkten. Es sollen Richtungsmessungen vorliegen. Lp.

THIE. Beitrag zur Plankopfbreitenberechnung. Zs. f. Vermessw. **42**, 377-384.

Der Verf. benutzt einen Punkt, den er in seinem Aufsatz Zs. f. Vermessw. 37, 401—405, 1908: „Trapezflächenformel, auf beliebige Vierecke angewandt", Trapezpunkt genannt hatte. Es ist dies ein Punkt auf einer der Vierecksseiten, dessen rechtwinkliger Abstand von der Gegenseite, mit der halben Summe beider Seiten multipliziert, den Flächeninhalt des Vierecks ergibt. Jedes Viereck hat also vier solcher Punkte, auf jeder Seite je einen. Nach Ableitung von Eigenschaften dieser vier Punkte wird ihre Verwendung zu der Plankopfbreitenberechnung gelehrt. Lp.

A. PFISTER. Zur Geschichte des Rheinisch-Westfälischen Katasters. Johann Jakob Vorlaender — ein Vorkämpfer des preußischen Vermessungswesens. Zs. f. Vermessw. **42**, 1-7, 40-49 57-70, 81-94, 113-129.

Einleitendes. „Viele Landmesser in Rheinland und Westfalen werden nicht nur den Wunsch, sondern oft geradezu das praktische Bedürfnis haben, sich über die ganze Anlage des Urkatasters und seinen ursprünglichen wahren Wert zu unterrichten. Möge die vorliegende Arbeit zu weiteren vermessungsgeschichtlichen Studien anregen und dazu beitragen, das Andenken an einen rastlosen preußischen Katastergeodäten, der in weiten Kreisen der Fachgenossen nicht so bekannt ist, wie er es verdient, wachzuhalten."

I. Aus Vorlaenders Lebensgang. Vorlaender wurde zu Allenbach, Regierungsbezirk Arnsberg, als Sohn eines Forstverwalters am 3. Okt. 1799 geboren, bestand 1819 zu Fulda das kurhessische Staatsexamen für Forstkandidaten, 1820 zu Arnsberg die Feldmesserprüfung, erhielt nach wechselnder Verwendung 1824 die Leitung des Katasterwesens im Regierungsbezirk Minden, seit 1828 als Obergeometer, wurde 1833 daselbst Katasterinspektor und trat 1878 in den Ruhestand, starb 1886 am 10. März in Minden. Außer Aufsätzen in der Zeitschrift für Vermessungswesen und in Schlömilchs Zs. f. Math. und Phys. hat er 1871 eine Anleitung zum Feldmessen (Berlin, Weidmann) herausgegeben.

II. Ältere bei den rhein.-westfäl. Katastervermessungen nutzbar gemachte Hauptdreiecksnetze. III. Des Obergeometers Vorlaender amtliche trigonometrische Tätigkeit bis etwa zum Jahre 1829. IV. Vorlaenders außeramt-

liche Arbeiten nach der Methode von Karl Friedrich Gauß. Die Triangulierung erster Ordnung des Regierungsbezirks Minden. Neubearbeitung des trigonometrischen Netzes zweiter Ordnung des Regierungsbezirks Minden. Trigonometrische Höhenmessungen.

„Vorlaender hat, als einer der ersten der Unseren, erfolgreich versucht, die Landmeßkunst wissenschaftlich zu betreiben. Er hat ein Beispiel hinterlassen und als erster den einzig möglichen Weg gesucht und angebahnt, auf dem die preußische Katastervermessung und Landmessung einige Jahrzehnte später eine ersprießliche Entwicklung erreicht hat, und der, will man von der Zukunft noch mehr erhoffen, nie verlassen werden darf." Lp.

N. Jadanza. Determinazione geodetica di alcuni punti nella valle del Sangone. Torino Mem. (2) **63**, 219-256.

Ausführliche Darstellung der Arbeiten zur geodätischen Bestimmung von neun Punkten in dem Tale Sangone bei Mailand, ausgeführt in den Jahren 1909 bis 1911 zur Kontrolle und Ergänzung älterer Messungen aus dem Jahre 1878, die durch das militärgeographische Institut vorgenommen waren. Lp.

G. Albenga. Problemi economici di tracciamento. I problemi di Launhardt e di v. Schrutka. Torino Atti **48**, 69-76.

Kurzer Hinweis auf die von Launhardt (Theorie des Trassierens, 1887) und von Schrutka (Österr. Wochenschr. f. d. öff. Baudienst 1911, S. 581; F. d. M. **42**, 1911, 1000) behandelten Trassierungsprobleme mit Heranziehung mechanischer Analogien (Kräftepolygone und Seilkurven). Schr.

R. Goldberg. Einschaltung von Geraden in bestehende Gleisbögen. Zs. d. österr. Ing.- und Archit.-Vereins. **65**, 457-458. (Hierzu eine Bemerkung von L. Herzka S. 654.)

Ist R der Krümmungsradius, $2p$ die Länge des verlangten Geradenstücks, s die größte Gleisverschwenkung, so ist $\varrho = (p^2 + s^2)/2s$ die notwendige Verringerung des Krümmungsradius in den beiden Anschlußbogen, $\alpha = \arcsin p/\varrho$ deren Zentriwinkel und 2α der Zentriwinkel der umzulegenden Gleisbogen. Angenähert kann $\varrho = p^2/2s$ gesetzt werden. Die Einschaltung von Übergangskurven wird noch gestreift. Schr.

Weitere Literatur.

H. G. van de Sande Bakhuyzen. Internationale Erdmessung. Verhandlungen der vom 17. bis 27. September 1912 in Hamburg abgehaltenen Siebzehnten Allgemeinen Konferenz. I. Teil: Sitzungsberichte und Landesberichte über die Arbeiten in den einzelnen Staaten. Mit lithographischen Tafeln und Karten. Berlin: Georg Reimer. 468 S. 4°.

H. Adams. Practical surveying and elementary geodesy. London: Macmillan XII + 276 S. 8°.

S. M. Barton. Elements of plane surveying, including leveling. Revised edition. Boston: Heath. VIII + 255 S. 8°.

E. Benoit. Formules nouvelles pratiques de calcul des coordonnées géographiques des points d'une chaîne géodésique. Paris: Gauthier-Villars. 40 S. 8°.

A. v. Böhm. Zur Berechnung der Konstanten des Besselschen Erdsphäroids. Zz. f. Vermessw. **42**, 540-543.

J. Frischauf. Erwiderung. Ebenda, 543-545. Polemik über den vorjährigen gleichbetitelten Aufsatz von Frischauf (F. d. M. **43**, 1065, 1912).

W. Bowie. Determination of time, longitude, latitude and azimuth. Fifth edition. Washington. 177 S. 4°. (Coast and geodetic survey.)

G. Boyelle et T. Duboscq. Traité de géodésie tachéométrique. 2e édition complètement refondue. Paris: Hermann. 400 S. 8° (1912).

G. M. Bruno. Geometría y nociones de agrimensura, levantamento de planos y nivelación. 3a edición revisada y aumentada. Paris: Procuraduria general. 392 S. 16mo.

Deubel. Berechnung des unvollkommenen Bogenschnitts mit graphischer Ausgleichung. Zs. f. Vermessw. **42**, 385-386.

H. J. Heuvelink. Bestimmung des regelmäßigen und des mittleren zufälligen Durchmesser-Teilungsfehlers bei Kreisen von Theodoliten und Universalinstrumenten. Zs. f. Vermessw. **42**, 441-452.

H. Hohenner, Dietze. Eine neue Vorrichtung zur Berechnung barometrisch gemessener Höhenunterschiede mit dem gewöhnlichen Rechenschieber. Zs. f. Vermessw. **42**, 306-309, 517.

E. v. Hammer. Bemerkungen zu dem Aufsatz S. 306-309. Ebenda, 719-720.

H. Hohenner. Beitrag zur Bestimmung der Ablesegenauigkeit des Fennelschen Noniusmikroskops. Zs. f. Vermessw. **42**, 484-487.

H. Kaiser. Tafeln zur Ermittlung der Verbesserung an geneigt gemessenen Entfernungen. Österr. Zs. f. Vermessw. **11**, 169-178.

K. Lüdemann. Ermittlung einer Fehlergrenze für die Messung von Polygonstrecken in ungünstigem Gelände mit 5-m-Latten. Zs. f. Vermessw. **42**, 273-282.

G. A. T. Middleton. Surveying and surveying instruments. 3rd edition, revised and enlarged. New York: Macmillan 176 S. 12mo.

M. Petzold. Übersicht der Literatur für Vermessungswesen vom Jahre 1912. Zs. f. Vermessw. **42**, 817-830, 849-861, 873-887, 905-916.

L. Rousselet. Mécanique, électricité et construction appliquées aux appareils de levage. Tome II. Paris: Dunod et Pinat. VI + 752 S. 8°.

P. Werkmeister. Tafeln für die Genauigkeit, mit der bei exzentrischer Winkelmessung die Zentrierungselemente zu ermitteln sind. Zs. f. Vermessw. **42**, 689-694.

Kapitel 2.

Astronomie.

Annuaire pour l'an 1914, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques. Paris: Gauthier-Villars. 502 + 8 + 107 + 34 + 42 Seiten 16mo.

Nach den stehenden reichhaltigen astronomischen Angaben enthält der Jahrgang 1914 des Kalenders gemäß dem seit 1912 eingeführten Wechsel ein weitgehendes Verzeichnis physikalischer und chemischer Konstanten. Die wissenschaftlichen Beigaben sind: P. Hatt, De la déformation des images dans les lunettes. G. Bigourdan, Le jour et ses divisions. Les fuseaux horaires et l'Association internationale de l'heure. B. Baillaud, Notice sur la Conférence générale de l'Association internationale. Lp.

Dr. Doliarius (Joh. Ed. Böttcher). Alle Jahreskalender auf einem Blatt. Leipzig: B. G. Teubner.

Man liest aus der Ostertabelle für das fragliche Jahr (zwischen 1582 bis 2000 für den Gregorianischen Kalender und 1470 bis 2000 für den Julianischen Kalender) das Datum des Ostersonntags ab und legt dann nach der angegebenen Anweisung einen Rahmen auf die Tafel der Daten; so ist der Kalender für das betreffende Jahr fertig, nur in den durch ein * kenntlich gemachten Schaltjahren ist zu jedem Januar- und Februar-Datum 1 zu addieren. Sehr handlich und praktisch. Dz.

G. Bigourdan. Le jour et ses divisions. Les fuseaux horaires et l'Association internationale de l'heure. Annuaire Bur. Longit. 1914 B, 107 S.

Der lehrreiche Artikel zerfällt in zwei nahezu gleich lange Abschnitte. Der erste Abschnitt (Kap. I) gibt eine geschichtliche Übersicht über die Einteilung der Tageszeit von den ältesten uns überlieferten Nachrichten an bei den verschiedenen Völkern: Babyloniern, Ägyptern, Indern, Hebräern, Persern, Griechen, Römern, anderen Völkern, sowie über die hierzu benutzten Mittel; ferner über die Festsetzung des Tagesbeginnes und über die Vereinigung des astronomischen und des bürgerlichen Tages. Der zweite Abschnitt umfaßt die drei Kapitel: II. Die Stundenzonen. III. Die Stundenübermittelung. IV. Die internationale Zeitkonferenz. Aus ihnen erfährt der Leser alles, was über den Zweck, die Entstehung und die Sicherung dieser neuesten Einrichtung wissenswert ist. Lp.

A. Wilkens. Neue Prinzipe und Methoden zur geographischen Ortsbestimmung. Astr. Nachr. **195**, 49-94.

Enthält eine ausführliche Diskussion einer neuen Methode geographischer Ortsbestimmung, die sich auf folgende zwei Prinzipe gründet:

1. Verwendung der Koordinatengeschwindigkeiten statt der Koordinaten selbst.

2. Bestimmung des parallaktischen Winkels aus der Winkeldifferenz photographischer Sternspuren. Fr.

E. Bianchi. Il problema della variazione delle latitudini. Boll. Mathesis 5, 14-33, 122-135.

Zusammenfassender Bericht über die sogenannten Breitenstörungen und die Wanderungen der Erdpole auf der Erdoberfläche, deren Theorie bis auf Euler zurückgeht, welcher bekanntlich für die als starr angenommene Erde einen sich in etwa 305 Tagen vollziehenden Umlauf der Pole um ihren mittleren Ort (die Trägheitspole) in seiner Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum berechnet hat. In Wirklichkeit kommen aber die Deformationen der Erdkruste und wahrscheinlich die Wasserbewegungen im Erdinnern sehr in Betracht, so daß die Theorie erheblich schwieriger wird. Nach Ableitung der analytischen Formeln für die Breitenstörungen berichtet Verf. über frühere vergebliche Versuche, sie zu messen, die zuerst von Bessel im Jahre 1842 gemacht worden sind. Erst gegen Ende des vorigen Jahrhunderts sind eigens zu diesem Zweck Breitenmessungen an verschiedenen Orten zu verschiedenen Zeiten ausgeführt worden; diese haben dann zu dem internationalen Breitendienst des geodätischen internationalen Instituts zu Potsdam geführt, der nun beschrieben wird. Dann kommt der Verf. ausführlich auf das Zusatzglied zu sprechen, das von Kimura eingeführt worden ist, auf die Periode von Chandler und verschiedene Hypothesen zur Erklärung der Eigentümlichkeiten dieser Erscheinung.

Zum Schluß bespricht Verf. die Aufgaben, welche das Problem des Breitendienstes noch in Zukunft zu lösen haben wird. Denn noch sei manches nicht aufgeklärt, wie es bei einer so feinen Bewegung, die nur durch die besten und schärfsten Meßinstrumente verfolgt werden kann, angesichts der Unsicherheiten der Theorie kaum anders zu erwarten ist. Dz.

Gernez. Tracé et usage des cartes pour la navigation orthodromique construites sur les plans tangents aux pôles. C. R. **156**, 445-447.

Projektion der Erdkugel vom Mittelpunkt aus auf die Tangentialebene in einem Pol. Dann werden die größten Kreise in Geraden und die kürzesten Abstände in Strecken abgebildet. Lösung der Schiffahrtsprobleme (Kurs, Abstand) mit einer orthodromischen Karte. Dz.

Arnaud. Sur la réfraction astronomique sous un angle quelconque. C. R. **156**, 1962-1964.

In einem vorangehenden Artikel hatte der Verf. zur Bestimmung des Wertes der astronomischen Strahlenbrechung die Formel erhalten:

$$\sigma = \gamma_0 \int_0^L \left(1 - \frac{x}{\eta} \cot V - \frac{x}{279}\right)^{m-1} dx,$$

wo der Wert von L durch die Formel gegeben ist:

$$L = q \cot V \left(\sqrt{1 + \frac{2\eta}{q} \operatorname{tg}^2 V} - 1 \right).$$

Bei der Fehlergrenze von 0,″1 ist es angemessen, für die Zenitdistanz V vier Intervalle zu nehmen. Dz.

O. FIGUR. Erdrotation und Lichtfortpflanzung. Progr. (Nr 172) IX. Realsch. Berlin 1913, 28 S.

Der geozentrische Standpunkt des Ptolemaeus führt zu Paradoxen, z. B. daß das Licht des Sirius, der 8,6 Lichtjahre von uns entfernt ist, sich mehr als 3000 mal immer enger um die Erde wickelt. Die heliozentrische Theorie kennt diese Paradoxen nicht, doch ist sie einseitig und vorurteilsvoll. Verf. erläutert dies an dem sogenannten kinematischen Relativismus, während das Relativitätsprinzip abgelehnt wird. Dz.

P. GUTHNICK. Astronomische Kriterien für die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von der Bewegung der Lichtquelle. Astr. Nachr. **195**, 265-270.

De Sitter hatte (Physik. Zs. **14**, 429 u. 1267, 1913) gezeigt, daß die spektroskopischen Doppelsterne ein zuverlässiges Kriterium für die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit abgeben. Der Verf. untersucht nun die Frage, ob auch dann, wenn die Lichtgeschwindigkeit nicht durch einfache Superposition der Geschwindigkeit der Lichtquelle über die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit zustande kommt, sondern die Geschwindigkeit der Lichtquelle nur mit einem kleinen Faktor eingeht, ob auch dann die spektroskopischen Doppelsterne unzweideutig auf das Fehlen eines solchen Einflusses hinweisen. In der Tat ist das nicht der Fall. Die Bahnen der spektroskopischen Doppelsterne enthalten Anomalien, die sich durch eine Veränderlichkeit der Lichtgeschwindigkeit deuten lassen. Fr.

H. CHRÉTIEN. Sur l'analyse statistique des amas d'étoiles. C. R. 157 1047-1050.

Anwendung der Hermiteschen Polynome

$$U_m(x) = e^{x^2} \cdot \frac{d^m (e^{-x^2})}{dx^m}$$

auf eine Integralformel von v. Zeipel für die Dichtigkeiten in Sternhaufen. Durch Entwickelung nach diesen Polynomen wird die Integration „mit einem Federstrich" geleistet. Dz.

H. SEELIGER. Über die Abhängigkeit der Verteilung der Sterne von verschiedenen Spektraltypen und der mittleren Parallaxen der Sterne von der galaktischen Breite. Astr. Nachr. **193**, 161-176.

Eine stellarstatistische Untersuchung, in der gezeigt wird, inwieweit man durch eine geeignete Wahl der Dichtigkeitsfunktion der Sternverteilung, einer Funktion, die nur von der Entfernung und galaktischen Breite abhängt, und einer Häufigkeitsfunktion der absoluten Helligkeiten der Sterne verschiedene Resultate stellarstatistischer Abzählungen, so z. B. die Abhängigkeit der mittleren Parallaxen der Sterne von der galaktischen Breite und die Verteilung der verschiedenen Spektralklassen innerhalb der Milchstraße gewinnen kann. Fr.

H. Seeliger. Über die Verteilung der Sterne von verschiedenen Spektraltypen. Astr. Nachr 194, 137 143.

Die Arbeit ist eine Fortführung der verschiedenen Untersuchungen des Verf. über das vorliegende Problem. Er vergleicht speziell seine Ansätze aus einer früheren Arbeit (Referat vorstehend) mit entsprechenden Ansätzen von Schwarzschild und findet, daß beide Ansätze die Abzählungen von Pickering fast gleich gut darstellen. Sodann werden einige Spezialfragen gestreift und Nebenresultate angeführt; so wird das anormale Verhalten der Sterne vom Spektraltypus M auf eine Abhängigkeit der Leuchtkraft von der Eigenbewegung hingewiesen und die Abhängigkeit der mittleren Parallaxen von der galaktischen Breite untersucht. (Ref. aus A. J. 1913.) Fr.

H. Seeliger. Über die Abhängigkeit der Geschwindigkeit der Sterne von ihrer Masse. Astr. Nachr. 194, 273-278.

Die Arbeit weist auf eine Analogie zwischen der kinetischen Gastheorie und der Dynamik einer Sternwolke hin. Speziell wird die Frage studiert, inwiefern ein Zusammenhang zwischen den mittleren Geschwindigkeiten der Sterne und ihrer Masse zu erwarten ist. Fr.

E. v. d. Pahlen. Über die Anwendbarkeit der Extinktionstheorie von Laplace auf das polychromatische Licht der Sterne. Astr. Nachr. 193, 49-56.

Der Verf. zeigt, daß der Einfluß der Verschiedenheiten der atmosphärischen Absorption des Lichtes verschiedener Wellenlängen sowie der Einfluß der Zusammensetzung des Sternlichtes so gering sind, daß sie nicht imstande sind, die durch die monochromatische Laplacesche Theorie gegebene funktionale Abhängigkeit zwischen der Gesamtschwächung des Sternlichtes und der Zenitdistanz merklich zu modifizieren. Fr.

J. W. Nicholson. A possible extension of the Spectrum of hydrogen. Monthly Notices 73, 382-385.

Die Unmöglichkeit, eine ganze Anzahl von Linien in den Spektren der Wolf-Rayet-Sterne zu identifizieren, veranlaßt den Verf., die Serienformeln, welche die Balmersche Serie und die von Pickering gefundene

Serie liefern, zu ergänzen, um noch weitere Zusatzlinien, die möglicherweise dem Wasserstoff in einem uns nicht bekannten Zustande angehören, zu gewinnen. Fr.

A. N. Panoff. L'attraction universelle considerée comme fonction du temps. Astr. Nachr. **194**, 17-27.

Fußend auf folgenden zwei Postulaten: 1. der ganze Weltraum ist mit einer isotropen Materie (Äther) erfüllt; 2. die Gegenwart eines materiellen Punktes erzeugt einen Gravitationskraftfluß, der sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet, werden verschiedene Aufgaben behandelt, wie die gegenseitige Anziehung materieller Punkte, die Anziehung eines materiellen Punktes durch einen Körper, das Problem der zwei Körper usw. Die Untersuchung entspricht den analogen der Elektronentheorie, wenn man die retardierten Potentiale aufstellt. (Ref. aus A. J. 1913.) Fr.

A. Graeg. Energy in planetary motion. Nature **91**, 581-582.

Für die elliptische Planetenbewegung gilt der Satz: Das zeitliche Mittel der kinetischen Energie, genommen für einen Umlauf in der Bahn, ist die Hälfte des entsprechenden zeitlichen Mittels der potentiellen Energie, die bei dem Übergang aus dem Unendlichen in den Abstand r einer Kreisbahn verbraucht wird. Lp.

A. Teodosiu. Sur la méthode de Gauß-Gibbs pour la détermination des orbites des corps célestes. Belg. Bull. Sc. 1913, 223-226.

Nach einem einzigen vom Verf. durchgeführten Zahlenbeispiel führt dieses Verfahren schneller zum Ziel als das Gaußsche. Mn. (Lp.)

A. O. Leuschner. On the Laplacean orbit methods. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 209-217.

„Der Zweck dieses Artikels ist, kurz auseinanderzusetzen, bis zu welcher Ausdehnung die von Laplace in seiner Mécanique céleste, Tome I, Livre 2 vorgetragenen Prinzipien zur Herleitung vorläufiger Bahnen von Kometen, kleinen Planeten und Trabanten praktisch nutzbar zu machen sind. Dank ihrer theoretischen Eleganz hat die Laplacesche Methode die Aufmerksamkeit der Forscher zu verschiedenen Zeiten, aber mit unbedeutendem Erfolge gefesselt. Bei dem Versuche, seine Prinzipien auf die Gestaltung praktischer Bahnmethoden anzuwenden, sind Mathematiker und Astronomen auf Schwierigkeiten gestoßen, die zum Aufgeben der Laplaceschen Methode zugunsten der üblicheren Methoden geführt haben... Es liegt aber in meiner Absicht, zu zeigen, daß die erwähnten Schwierigkeiten in Wahrheit nicht vorhanden sind oder ohne Anstrengung zu überwinden sind, und daß die Laplaceschen Prinzipien sich in Bahnmethoden umgestalten lassen, die größere Wirksamkeit

haben als die gewöhnlich gebräuchlichen.“ Neben den diesem Zwecke dienenden Ausführungen sind die Entgegnungen auf die Angriffe gegen die Laplacesche Methode zu erwähnen, besonders gegen die Abhandlung von Bauschinger in der H. Weber-Festschrift (F. d. M. **43**, 1084, 1912). Lp.

W. Gyllenberg und S. Wicksell. Die analytische Lösung des Bahnbestimmungsproblems in ihren numerischen Anwendungen. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. 8, Nr. 29, 68 S.

In der Abhandlung „Die analytische Bestimmung des Bahnbestimmungsproblems“ (Meddel. Lunds Astr. Observ. **45**, **46**, **47**) hat Charlier gezeigt, wie man nach der Untersuchung Lagranges rein analytisch ohne irgendeine Annäherung die Lösung des Bahnbestimmungsproblems herstellen kann. Die von Charlier benutzten Entwickelungen in Potenzreihen werden in der vorliegenden Arbeit zu Gliedern höherer Ordnung weiter berechnet, und um näher untersuchen zu können, wie die Methode sich numerisch gestaltet, und inwiefern die höheren Potenzen einwirken, haben die Verf. die Bahnen einer Anzahl von Kometen und Planeten berechnet. Außerdem wird das Resultat der Bahnberechnung einiger Planeten und Kometen mit längeren und kürzeren Bogen zwischen den Beobachtungen gegeben. Lp.

P. Harzer. Über eine kurze Methode der Bestimmung einer Planetenbahn nach drei Beobachtungen bei den gewöhnlichen kleinen und mäßigen Zwischenzeiten. Astr. Nachr. **195**, 345-358.

Wie der Verf. zeigt, kann die Berechnung einer Planetenbahn aus drei Beobachtungen vereinfacht werden, wenn der heliozentrische Winkel zwischen der ersten und dritten Beobachtung nicht größer als 25° und die Zwischenzeit zwischen der ersten und zweiten Beobachtung möglichst gleich derjenigen zwischen der zweiten und dritten Beobachtung ist. Zum Schluß prüft er die Brauchbarkeit seiner Formeln an einem Beispiel (694 Ekard). Fr.

L. Picart. Sur le calcul d'une orbite circulaire à l'aide d'une seule observation photographique. C. R. **157**, 1503-1505.

Die Photographie liefert einen Strich, dessen Anfangspunkt und Endpunkt der Anfangszeit und Endzeit der Expositionsdauer entsprechen. Man hat also zwei Lagenbestimmungen zu zwei verschiedenen Zeiten auf derselben Platte vereinigt und kann daher die Elemente einer vorausgesetzten Kreisbahn berechnen und so für längere Zeiten durch Extrapolation die Lage des Planetoiden bestimmen, als es durch gewöhnliche lineare Extrapolation möglich ist. Die bisher ziemlich bedeutende Anzahl von Fällen, daß der Planetoid nachher nicht wiedergefunden und verfolgt werden konnte, ließe sich so erheblich vermindern. Dz.

H. v. Zeipel. Sur le calcul des opérateurs de Newcomb. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. 8, Nr. 19, 9 S.

Die Newcombschen Operatoren $\Pi_q^m(\beta, \gamma)$ werden nach Poincaré, Leçons de mécanique céleste, durch die Gleichung definiert:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^\beta e^{i\gamma(v-M)} = \sum \Pi_q^m(\beta, \gamma)\, e^m\, e^{iqM}$$

$$(q = -\infty, \ldots + \infty, m - |q| = 0, 2, 4, \ldots + \infty).$$

Die Einführung dieser Multiplikatoren hat die analytische Entwicklung der Störungsfunktionen sehr vereinfacht. Der Verf. gibt einige rekurrente Beziehungen, die zu beträchtlicher Vereinfachung bei der Berechnung dieser Operatoren dienen, besonders wenn ihr Grad hoch ist. Außerdem schlägt er ein Verfahren zur endgültigen Berechnung der Operatoren $\Pi_{q \cdot q'}^{m \cdot m'}$ vor, das die Umrechnung der expliziten Newcombschen Ausdrücke in Zahlen auf die Hälfte bis auf ein Drittel der Arbeit vermindert. Lp.

F. Hopfner. Über eine Verallgemeinerung der relativen kanonischen Koordinaten von Jacobi. Astr. Nachr. **195**, 256-262.

Jacobi ist durch eine lineare Substitution von den kartesischen Koordinaten dreier Körper zu gewissen relativen kanonischen Koordinaten übergegangen. Verf. untersucht die Frage, welchen Bedingungen die lineare Substitution allgemein unterliegen muß, um zu Koordinaten der besonderen Eigenart wie die Jacobischen zu führen. Fr.

K. Bohlin. Sur le développement des intégrales du problème des trois corps. Uppsala: Almqvist u. Wiksells, 28 S.

Unter Bezugnahme auf frühere Arbeiten des Verf. sowie von Jacobi, Radau, Poincaré und anderen werden Entwickelungen des Radiusvektors, bezogen auf den Schwerpunkt, gebracht, besonders im Anschluß an den v. Haerdtlschen Fall des Dreikörperproblems. Dz.

F. R. Moulton. Relations among families of periodic orbits in the restricted problems of three bodies. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 182-187.

Für die Untersuchung periodischer Bahnen bei dem beschränkten Dreikörperproblem, wo ein infinitesimaler Körper den Anziehungen zweier endlichen Massen unterliegt, die sich in Kreisbahnen umwälzen, werden die grundlegenden zu diskutierenden Gleichungen kurz zusammengestellt, und dann werden elf Theoreme aneinander gereiht, für deren Beweise der Verf. auf ein in dem Carnegie-Institut in Washington erscheinendes Buch verweist. Zuletzt werden fünf Fälle retrogerader Bewegungen besprochen. Sieben Zeichnungen dienen zur Erläuterung. Lp.

C. A. Åkesson. Über die Anwendung der Methode von Hill-Delaunay auf den Hestiatypus. Ark. f. Mat., Astr. och Fys 8, Nr. 25, 27 S.

Die Abhandlung von Hill, an die der Verf. anknüpft, ist betitelt: On the extension of Delaunay's method in the lunar theory of the general Problem of planetary motion" (Amer. Math. Soc. Trans. **1**, 205-242; F. d. M. **31**, 890, 1900). Hill hat seine Methode auf Planeten von dem Hekuba-Typus angewandt (Verhältnisse zwischen den mittleren Bewegungen des Jupiters und des kleinen Planeten = 112). Der Verf. wendet jetzt dieselbe Methode auf den Hestiatypus ($\mu = 1/3$) an. Um eine Vorstellung von der erforderlichen Zahlenrechnung zu geben, führt er ein vollständiges Zahlenbeispiel an dem Planeten (495) Eulalia durch, dessen mittlere Bewegung gleich 910,″12 ist.

Lp.

A. Wilkens. Über die praktische Verwendung der Poincaréschen periodischen Bahnen im Sonnensystem. Astr. Nachr. **195**, 385-411.

Die praktische Verwendung der von Poincaré aufgestellten periodischen Lösungen für die Bahnberechnung kleiner Planeten, die zuerst von Simonin in Angriff genommen wurde, und zwar für den Planeten „Hekuba", leidet noch an mannigfachen prinzipiellen Schwierigkeiten, speziell hervorgerufen durch den Umstand, daß die Exzentrizität der Jupiterbahn nicht von Anfang an gleichberechtigt neben der des Planetoiden eingeführt wird. Der Verf. weist in der Einleitung auf diesen Umstand hin und deutet einen Ausweg an. Der eigentliche Inhalt der Abhandlung ist der Nachweis, daß man in mehreren Fällen (Hestiatypus) genäherter Kommensurabilität von einer gewöhnlichen Poincaréschen Lösung wirklich ausgehen kann, wie die Diskussion der Variationsgleichung zeigt, auch wenn man von Anfang an die mit e und e' multiplizierten Glieder der Störungsfunktion, resp. die mit e^2, ee', e'^2 multiplizierten Glieder im Falle des Typus $\frac{p+2}{p}$ usf. als gleichberechtigt betrachtet. Bei der zu Anfang angedeuteten Verallgemeinerung des Simoninschen Ansatzes, auf die der Verf. später zurückkommen will, geht man, im Gegensatz zu dem hier betrachteten Falle, des Anschlusses an eine periodische Bahn verlustig.

Fr.

H. R. Willard. On a family of oscillating orbits of short period. Monthly Notices **73**, 471-484.

Eine Untersuchung über die möglichen kurzperiodischen Schwingungen eines unendlich kleinen Körpers um den Librationspunkt, der durch die dritte Ecke des von der Sonne, dem Jupiter und dem Planetoiden gebildeten gleichseitigen Dreiecks definiert ist.

Fr.

W. W. Heinrich. Über einen Spezialfall des Dreikörperproblems. Astr. Nachr. **194**, 209-210.

Enthält eine kurze Bemerkung zu einer Arbeit von F. J. Linders (Arkiv

för Mat. **4**, Nr. 20; F. d. M. **39**, 1000, 1908) über die Bewegung eines Planeten in der Nähe eines Lagrangeschen Dreieckspunktes. Fr.

W. W. Heinrich. Über gewisse Ungleichheiten im asteroidischen Problem. Astr. Nachr. **194**, 209-218.

Die vom Verf. aufgeworfene Fragestellung bedeutet eine Erweiterung des sogenannten problème restreint auf das gewöhnliche asteroidische Problem unter Berücksichtigung der Exzentrizität des störenden Planeten. Es gelingt dem Verf., in erster Annäherung durch Differentialgleichungen, die denen der freien und erzwungenen Schwingung analog gebaut sind, die auftretenden Ungleichheiten der Bewegungsvorgänge zu beherrschen. Fr.

F. Kepiński. Über die periodischen Lösungen jupiternaher Planetoiden. Astr. Nachr. **194**, 49-78. (Inaug.-Diss. Berlin.)

An der Spitze der Untersuchung steht die Forderung: Exzentrizität der Jupiterbahn $e' \neq 0$. Von dieser Forschung ausgehend, werden

1. die Unmöglichkeit analytischer Lösungen im Bereich der Poincaréschen periodischen Lösungen für den Typus $\frac{p+1}{p}$ nachgewiesen;
2. die Anfangskonstellationen, die zu periodischen Lösungen führen, erweitert;
3. für den Fall $\frac{p+2}{p}$ periodische Schwankungen der elliptischen Elemente innerhalb der Periode der Poincaréschen Lösungen durch kurzperiodische Glieder diskutiert und für den Fall 5/3 durchgerechnet.

Fr.

V. Heinrich. Über die periodischen Bahnen des Librationszentrums L_4. Prag. Ber. 1913, Nr. 3, 23 S.

Die periodischen Bahnen der Jupitergruppe wurden in der ersten Näherung von F. J. Linders untersucht (Ark. för Math., Astron. och Fys. **4**; F. d. M. **39**, 1000). Der Verf. untersucht diese Bewegungen genauer. Pe.

J. Chazy. Sur certaines trajectoires du problème des n corps. C. R. **157**, 688-691.

Man kann den Differentialgleichungen in kartesischen Koordinaten durch Ausdrücke von der Form

$$x_i = \alpha_i t^{2/3},\ y_i = \beta_i t^{2/3},\ r_i = \gamma_i t^{2/3}$$

genügen, wenn α_i, β_i, γ_i einem System algebraischer Gleichungen genügen. Dazu gibt es Nachbarlösungen einmal nach steigenden, das andere Mal nach fallenden Potenzen von t; im ersteren Falle stürzen die Körper mit unendlich großen Geschwindigkeiten zusammen, im letzteren entfernen sie sich mit immer mehr abnehmenden Geschwindigkeiten.

Es können aber nur einige der Körper zusammenstürzen, z. B. nur zwei. Dann reduziert sich die Zahl der willkürlichen Konstanten, wie Sundman und Levi-Civita gezeigt haben. Schließlich werden noch die Fälle $n = 3$ und $n = 4$ abgehandelt.
Dz.

J. Chazy. Sur les points singuliers de l'intégrale générale du problème des n corps. C. R. **157**, 1398-1400.

Vergleiche das vorstehende Referat. Der Verf. nimmt Lösungen von der Form:

$$v = At + B \log t + C + \varepsilon(t),$$

wo A, B, C Konstanten sind und $\varepsilon(t)$ Potenzreihen von $\log t/t$ und $1/t$ bedeuten. So werden die hyperbolischen Trajektorien erweitert. Zum Schluß werden einige Sätze über unmögliche Vorgänge im Problem der n Körper angegeben.
Dz.

H. Block. Sur l'énergie des nébuleuses et le principe de Carnot. C. R. **157**, 101-103.

Weiterführung und Bestätigung von Berechnungen, welche Schwarzschild über die Energievorgänge in Nebelflecken im Astrophysical Journal **37** nach der Theorie von Arrhenius angestellt hat.
Dz.

J. Proudman. Note on the pressure of radiation on a small reflecting sphere. Monthly Notices **73**, 535-539.

Da die numerischen Berechnungen des Koeffizienten des Strahlungsdruckes von Schwarzschild und Nicholson nicht in völliger Übereinstimmung sind, unternimmt der Verfasser eine neue Rechnung. Er findet die Resultate von Nicholson bestätigt bis auf die Formel für den maximalen Strahlungsdruck; hier gelangt er zu einem wesentlich kleineren Wert für den Zahlkoeffizienten der Formel als Nicholson.
Fr.

Cz. Białobrieski. Über das thermodynamische Gleichgewicht einer freien Gaskugel. Krak. Anz. (A) 1913, 264-290 (Polnisch).

Der Verf. erörtert die Bedeutung des Strahlungsdruckes für das thermodynamische Gleichgewicht einer gravitierenden Gaskugel. Als Beispiel solcher Gaskugeln können nämlich Sonne und Planeten betrachtet werden, insofern man ihr Inneres als gasförmig annimmt (?). Jedes Element einer solchen Kugel hat dann bestimmten Druck, bestimmte Dichte und Temperatur. Es ist die Aufgabe der Theorie, diese Größen als Funktionen der Entfernung vom Mittelpunkte der Kugel darzustellen. Es wird dabei gewöhnlich adiabatisches Gleichgewicht vorausgesetzt. Der Verf. behauptet, daß in einer Gasmasse zweierlei Arten von Druck zu unterscheiden sind: einerseits kommt der Molekulardruck, anderseits der Strahlungsdruck aller oberhalb des absoluten Null-

punktes temperierten Körper in Betracht. Er nimmt an, daß (im Falle genügend dichter Gaskugeln) die Gasschichten absolut schwarz sind, und leitet eine ziemlich komplizierte Differentialgleichung ab. In zwei Fällen läßt sich diese Gleichung vereinfachen. Der Verfasser beschränkt sich auf die Diskussion dieser Spezialfälle. Die Betrachtungen führen zu dem Schluß, daß der Strahlungsdruck desto größere Bedeutung gewinnt, je dichter das Gas, je größer der Radius und die mittlere Dichte der Gaskugel ist (vgl. das folgende Referat).

S. L.

T. Bialobjeski. Sur l'équilibre thermodynamique d'une sphère gazeuse libre. Krak. Anz. (A) 1913, 264-290.

Die Theorie des thermodynamischen Gleichgewichtes einer Gaskugel ist, wie der Verfasser in einem aperçu historique angibt, Gegenstand der Forschung gewesen; hier wird die Bedeutung des Strahlungsdruckes für Kugeln von so großen Dimensionen wie Sonne und Fixsterne dargelegt. Die Formeln führen auf eine Differentialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} + \omega^2 u^3 = 0,$$

die schon von Emden angenähert integriert worden ist. Anwendung auf die Sonne und den Doppelstern ζ Herkules.

Der Schlußparagraph behandelt den Fall konstanter Dichte, in welchem der Strahlungsdruck eine noch bedeutendere Rolle spielt (vgl. das vorstehende Referat).

Dz.

E. Lemke. Über die Differentialgleichungen, welche den Gleichgewichtszustand eines gasförmigen Himmelskörpers bestimmen, dessen Teile gegeneinander nach dem Newtonschen Gesetze gravitieren. Journ. für Math. 142, 118-145.

Die Untersuchung knüpft an die frühere Arbeit des Verf. an: „Über das Gleichgewicht kosmischer Gasmassen" (J. für Math. 124, 143—152; F. d. M. 32, 936, 1901). Die behandelte Aufgabe wird so formuliert: Im Raume ist eine Anzahl fester Körper von unveränderlicher Lage und endlicher Gesamtmasse gegeben. Dazwischen breitet sich ein homogenes Gas aus, das dem Mariotte-Gay-Lussacschen Gesetze unterworfen ist, und dessen Teile gegeneinander und gegen die festen Körper nach dem Newtonschen Gesetze gravitieren. Es sind die Bedingungen anzugeben, die Druck und Temperatur des Gases in jedem Punkt des Raumes erfüllen müssen, damit Gleichgewicht besteht.

Unter der Voraussetzung, daß die Flächen konstanten Druckes und konstanter Temperatur Kugeln sind, gehen die in der früheren Arbeit gegebenen Differentialgleichungen in gewöhnliche über. Zwei Spezialfälle der Temperaturverteilung innerhalb der Gaskugel werden genauer untersucht: 1. Die absolute Temperatur ist einer Potenz der Entfernung vom Zentrum der Gaskugel proportional; 2. zwischen Druck, Dichtigkeit und Temperatur bestehen die Gleichungen, die einer adiabatischen Zustandsänderung des Gases entsprechen.

Bei der ersten Hypothese genügt der Logarithmus des Druckes einer Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d^2u}{d\varrho^2} + \frac{\varkappa}{\varrho}\frac{du}{d\varrho} = -2\lambda e^u,$$

wo $\varkappa$ und λ Konstanten sind. Durch eine einfache Transformation geht diese Differentialgleichung in die von Appell und R. Liouville behandelte Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = c_0 + 3\,c_1\,y + c_2\,y^2 + c_3\,y^3$$

über (c_k spezielle Funktionen von x). Ist die absolute Temperatur der ersten Potenz der Entfernung proportional, so lautet die Gleichung:

$$\frac{d^2u}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{du}{d\varrho} = -2\lambda e^u,$$

die, wie Poincaré gezeigt hat, in enger Beziehung zu der Theorie der Fuchsschen Funktionen steht. Die Darlegung dieser Zusammenhänge bildet den Inhalt der ersten Kapitel der Abhandlung. In einigen Fällen gelingt es, die Integrale in geschlossener Form darzustellen; aber im allgemeinen muß man Reihenentwicklungen herleiten, die in der Umgebung einer singulären Stelle konvergieren.

Wenn man von der zweiten Hypothese ausgeht, so erhält man Differentialgleichungen von ganz anderer Form. Während Helmholtz bei der Behandlung dieses Problems sich mit Näherungsformeln begnügt hat, wird in den letzten Kapiteln der Abhandlung die Frage von einem allgemeineren Standpunkte aus erörtert und insbesondere festgestellt, ob es möglich ist, unter den angegebenen Voraussetzungen eine obere Grenze für die Atmosphäre der Erde anzunehmen: „Im Falle des konvektiven Gleichgewichtes ist eine obere Grenze der Atmosphäre möglich. Ihre Höhe hängt von der Wahl der Anfangsbedingungen ab.“

Lp.

J. H. Jeans. Gravitational instability and the nebular hypothesis. Lond. Phil. Trans. (A) **213**, 457-485.

Unsere Kenntnisse über das Verhalten rotierender astronomischer Materie beruhen auf den Untersuchungen von Jacobi, Poincaré und Darwin; diese Untersuchungen beziehen sich einzig auf eine vollkommen homogene und nicht zusammendrückbare Materie. Des Verf. Problem zielt dahin, zu prüfen, ob das Verhalten einer rotierenden Masse aus zusammendrückbarer, heterogener Masse sich von dem der nicht zusammendrückbaren homogenen Masse weit entfernt. Die Teile der Arbeit sind: 1. Einleitung. 2. Medium, bei dem der Druck eine Funktion der Dichte ist. 3. Das Laplacesche Gesetz. 4. Geringe Rotation. 5. Zylindrische Massen in Rotation. 6. Eine rotierende, nahezu kugelige Masse mit hoher innerer Temperatur. 7. Keine Rotation. 8. Langsame Rotation. 9. Zusammenfassung und Schluß.

Lp.

H. Janne. Extension de la méthode de Laplace due à G. Herglotz. Brux. S. sc. (B) **37**, 118-152. (P. Duhem, Rapport. (A), 65-66.)

Janne vervollständigt die Arbeit von Herglotz über die Gestalt eines Planeten (vgl. F. d. M. **36**, 1008, 1905), von dem man voraussetzt, er sei aus einer festen elastischen, isotropen, in Strenge nicht zusammendrückbaren Masse gebildet (was, wie Duhem sagt, in der Natur wohl nicht vorkommt). Die Untersuchung von Janne ist mit großer Sorgfalt und recht vollständiger Berücksichtigung der Bibliographie durchgeführt. Mn. (Lp.)

Ch. Nordmann. Sur le rendement lumineux du corps noir aux températures élevées et sur celui des étoiles. Première application à Arcturus et Véga. C. R. **156**, 664-666.

Vgl. Nordmann, Sur l'éclat intrinsèque du Soleil (C. R. **150**, 449, 1910). Verf. leitet mit seiner Theorie aus den Messungen Nicols und den photometrischen Messungen zu Potsdam und Harvard für Vega eine Temperatur von 12 200 ° und für Arcturus von 3400 ° ab. Dz.

É. Belot. Extension d'une théorie de Faye et application au mode de formation du système planétaire. C. R. **157**, 1374-1376.

Die Fayesche Theorie nimmt das Sonnensystem uranfänglich als einen kugelförmigen Nebel von Radius R an mit dem Dichtigkeitsgesetz

$$\varrho = \varrho_0 \left[1 - K \left(\frac{r}{R}\right)^n\right]$$

Verfasser knüpft an diese Theorie einige Bemerkungen, um dann an Stelle der Kugeln Zylinder zu setzen, welche ihm für die Kosmogonie geeigneter erscheinen. Dz.

R. du Ligondès. Sur la possibilité d'une région circulaire de pesanteur constante en dehors de l'équateur à l'intérieur d'une masse chaotique ellipsoïdale. Brux. S. sc. (B) **37**, 425-435. (H. Janne. Rapport. (A), 125-132).

Der Aufsatz des Verf. ist ein Nachtrag zu seinem Buche: „Formation mécanique du système du monde“ (Paris, 1897). Es soll, wenigstens in zwei Fällen, die Bildung kleiner Planeten oder Trabanten von starker Neigung analytisch erklärt werden. Der Berichterstatter hat das Buch und den Aufsatz inhaltlich treu zusammengefaßt und die Bibliographie der kosmogonischen Theorien seit Laplace hinzugefügt. Mn. (Lp.)

E. W. Brown. Periodicities in the solar system. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **1**, 81-92.

Ein zusammenfassender Bericht über die Methoden zur Ermittelung der periodischen Erscheinungen im Sonnensystem. Vier Richtungen der hierauf abzielenden Forschung werden unterschieden. Zuerst wünschte man nur die Bewegungen und Lagen der Glieder des Sonnensystems für einen beliebigen Zeitpunkt der Vergangenheit oder der Zukunft zu erfahren. Die zahlische Behandlung der Probleme der Gravitation war somit der erste und vornehmste Zweck. Die hierzu benutzten Methoden mit dem Ziel, harmonische oder teilweise harmonische Reihen bis zu dem verlangten Grade der Genauigkeit aufzustellen. Es kam hauptsächlich auf geeignete Endformeln für die Berechnung an. Um die Frage der Konvergenz der erhaltenen Reihen kümmerte sich der praktische Astronom nicht. Auf der zweiten Stufe der Entwicklung folgte nun vom logischen Gesichtspunkte aus die Prüfung der Reihen und Formeln. Hierzu sind die aus dem praktischen Bedürfnisse entstandenen älteren Methoden unbrauchbar, und es mußten neue gesucht werden, die ihrerseits keinen besonderen Wert für Zahlenrechnungen mehr besaßen. Durch sie kamen aber die Fragen der Stabilität zur Behandlung. Eine dritte Forschungsrichtung zielt auf die Entdeckung möglicher Arten der Bewegung unter dem Gravitationsgesetze ab. Der vierte Zweig der Forschung ist die Untersuchung der Eigenschaften der Differentialgleichungen, die bei den Problemen der Himmelsmechanik auftreten. Nach diesem ersten allgemeinen Überblick geht der Redner zur genaueren Besprechung der vielen Probleme über und verweilt besonders länger bei seinem eigenen Forschungsgebiet, der Theorie der Bewegung des Erdmondes und der hierbei aufzuspürenden Periodizitäten. Lp.

H. H. TURNER. On the expression of sun-spot periodicity as a Fourier sequence and on the general use of a Fourier sequence in similar problems. Monthly Notices 73, 714-731.

Eine in der Astronomie öfter auftretende Aufgabe ist die Bestimmung der Periodizität einer von der Zeit abhängenden Erscheinung. Die von Schuster vorgeschlagene Methode der Periodogramme sucht der Verf. zu verbessern, und zwar durch eine spezielle und praktische Einteilung der die Beobachtungen umfassenden Zeit in Unterabteilungen (Periodenlängen). Sodann gibt er ein Verfahren an zur Berechnung der Koeffizienten der zu einer Periodenlänge gehörenden Fourier-Reihe. Fr.

H. H. TURNER. On double lines in periodograms. Proc. 5. Intern. Math. Congr. 2, 177-181.

Bei der Aufspürung von Schwingungen oder Periodizitäten eines Massensystems muß man nach einer Bemerkung von Schuster vor allem vorgefaßte Vorstellungen über wahrscheinliche besondere Werte abtun und alle Perioden (innerhalb offensichtiger Grenzen) ununterschiedlich untersuchen. Die Schädlichkeit der Nichtbeobachtung dieser Warnung wird durch einige Beispiele belegt und der zu befolgende vorurteilsfreie Gang an zwei astronomischen Aufgaben erläutert. „Die Punkte, auf welche die Aufmerksamkeit der Mathematiker passend zu lenken ist, sind erstens die Evidenz für Gruppen von Periodizitäten in manchen Fällen und ihre Möglichkeit in anderen, zweitens die skizzierte Methode bei ihrer Aufspürung.“ Lp.

M. A. Blagg. On a suggested substitute to Bode's law. Monthly Notices 73, 414-422.

Die Verf. entwickelt eine empirische Formel, welche die Entfernungen der Planeten von der Sonne besser darstellt als das Bodesche Gesetz. Die Abweichungen der tatsächlichen Abstände von den durch die neue Formel gelieferten zeigen einen systematischen Verlauf, der sich in gleicher Weise auch bei den Jupitersatelliten wiederfindet. Auch für Saturn und Uranus kann man die Abstände ihrer Trabanten durch eine ebensolche Formel darstellen.

Fr.

C. V. L. Charlier. Über das Bodesche Gesetz und die sogenannten intramerkuriellen Planeten. Astr. Nachr. 193, 269-272.

Poincaré hat gezeigt, daß im Rahmen der Laplaceschen Hypothese über die Entstehung des Sonnensystems das Bodesche Gesetz aussagt, daß in gleichen Zeitintervallen die Ringe vom Urnebel abgestoßen worden sind. Der Verf. knüpft an dieses Resultat an und tritt einem Mißverständnis entgegen, als wenn man das Bodesche Gesetz beliebig über die Merkursdistanz hinaus fortsetzen könne. Merkur muß als „Grenzplanet" aufgefaßt werden, entstanden durch den Zusammenstoß vieler vom Urnebel abgelösten Planeten, deren Bahnen sich sehr nahe lagen. Wenn noch innerhalb der Merkurbahn Reste dieser Planetenschar zu erwarten sind, so sind dieselben voraussichtlich in der Nachbarschaft der Lagrangeschen Librationspunkte zu suchen.

Fr.

H. Nies. Über eine Gesetzmäßigkeit der Planetenrotation. Zs. f. Math. u. Phys. 61, 426-430.

Durch langjährige vergleichende Rechnungen findet der Verf., daß der Ausdruck

$$\frac{(M/n)\,\gamma^2 tg\delta \cdot a^3}{g^2 \sqrt{2\pi R/U}}$$

für alle Planeten und den Mond einerlei Wert hat. Es bedeuten M die Masse, m Dichte, δ Achsenneigung, a große Bahnachse, U Umdrehungszeit, R Halbmesser, g Beschleunigung an der Oberfläche und γ die Beschleunigung, welche die Einheit der anziehenden Masse der Einheit der angezogenen erteilt.

Auszunehmen ist Saturn, für welchen noch ein Faktor $\left(\frac{R}{R_1}\right)^3$ hinzutritt, R_1 Abstand der äußersten Ringpunkte.

Die Formel ist vorläufig rein empirisch, aber auffallend genau, so daß der Verf. hinter ihr eine noch zu findende Theorie vermutet.

Dz.

H. Nies. Über eine Gesetzmäßigkeit der Planetenrotation. Astr. Nachr. 195, 7-8.

Verf. leitet zwei empirische Gesetze für die Rotationen der Planeten ab:
1. Jeder Körper, der unter der Einwirkung einer Zentralbeschleunigung

und einer Eigengeschwindigkeit eine geschlossene Kegelschnittbahn beschreibt, rotiert während dieses Laufes mit gleichbleibender Geschwindigkeit um eine Achse, die weder senkrecht auf der Bahnebene stehen, noch in ihr liegen kann.

2. Die Rotationsgeschwindigkeit eines Äquatorpunktes ist direkt proportional dem Quadrate der größten Projektion seines parallel zur Bahnebene auf der Rotationsachse projizierten Abstandes vom Planetenmittelpunkte und umgekehrt proportional dem Quadrate der großen Bahnachse und der vierten Potenz der Dichte des rotierenden Körpers.

Fr.

R. du Ligondès. La rotation des planètes et la théorie des marées. Rev. des qu. sc. (3) **23**, 579-597.

Unzulänglichkeit der Erklärung der Rotation der Planeten in ihrer Herleitung aus der angenommenen Existenz der Sonnengezeiten.

Mn. (Lp.).

A. A. Michailoff. Zur Theorie der Sonnenfinsternisse. Astr. Nachr. **196**, 233-246.

In der vorliegenden Arbeit zeigt der Verf., „wie man durch kleine Abänderungen im Rechnungsverfahren ohne wesentliche Vergrößerung der Arbeit auch solche Angaben, wie Positionswinkel der Kontakte und Moment der Maximalphase, in eine Karte bringen kann, so daß dieselbe eine Vorausberechnung der Finsternis für alle in der Karte verzeichneten Städte vollständig ersetzt".

Fr.

H. Prey. Bemerkungen zu Hansens „Theorie der Sonnenfinsternisse". Astr. Nachr. **196**, 97-102.

Enthält eine Untersuchung des Verlaufs der Kurve größter Phase im Horizont, veranlaßt durch die Auffindung eines geringfügigen Versehens in den entsprechenden Untersuchungen von Hansen.

Fr.

D. Brunt. Anomalous dispersion in solar phenomena. Monthly Notices **73**, 568-600.

Eine ausführliche kritische Untersuchung über den Einfluß der anomalen Dispersion auf die Erscheinungen in der Sonnenatmosphäre. Die Verf. zeigt, daß im Rahmen der drei bisher herangezogenen Hypotheser, nämlich des isothermischen, adiabatischen oder Strahlungsgleichgewichtes der Sonne die bei den Fraunhoferschen Linien, Protuberanzen, Sonnenflecken beobachteten Erscheinungen nicht auf eine Wirkung der anomalen Dispersion zurückzuführen sind. Überhaupt ist es im Rahmen dieser drei Annahmen nicht möglich, die beobachtete Höhe der Sonnenatmosphäre zu erklären. Es müssen also neben den Gravitationskräften noch andere Kräfte, z. B. Strahlungsdrucke, beim Aufbau der Atmosphäre eine bedeutsame Rolle spielen.

Fr.

R. S. Capon. Note on the possibility of refraction by the solar atmosphere. Monthly Notices **73**, 361-369, 732-734.

An der Hand von Greenwicher Sonnenfleckbeobachtungen wird die Frage nach dem Einfluß der Refraktion in der Sonnenatmosphäre auf die scheinbare Bewegung der Flecke studiert. Solche Einflüsse sind: Breitenzunahme mit Annäherung des Fleckes an den Zentralmeridian, Veränderungen der Winkelgeschwindigkeit des Fleckes, ferner Vergrößerung des scheinbaren Sonnenradius und Ablenkung der Lichtstrahlen.

Der zweite kürzere Aufsatz ist ein Nachtrag zum ersten; enthält Hinweise auf frühere Untersuchungen der gleichen Frage und zeigt, daß zur Erklärung der beobachteten Breitenänderungen auch noch bestimmt orientierte Eigenbewegungen der Flecken angenommen werden müssen. Fr.

G. Gouy. Sur la théorie de la photosphère gazeuse. C. R. **156**, 852-855.

„Ich habe zu zeigen versucht, daß die der Beschauung zugänglichen Teile der Sonne wahrscheinlich durch Gase und sehr verdünnte Dämpfe gebildet werden" (C. R. **154**, 1764-1767; **155**, 22-26, 115-118, 1912).

Diese Theorie wird hier weiter verfolgt. Dz.

G. Gouy. Des conditions d'équilibre de l'atmosphère solaire, eu égard à la force répulsive de la radiation. C. R. **157**, 186-191.

Wenn man allein auf die Schwerkraft und das Mariottesche Gesetz Rücksicht nähme, so würde z. B. für Wasserstoff von 3000° der Druck bei einem Niveauunterschied von 32 km sich auf die Hälfte reduzieren und von 5000 km daher auf $2^{-156} = 10^{-47}$, also so gut wie 0. Trotzdem zeigt sich in dieser Höhe das Wasserstoffspektrum immer noch intensiv.

Daher geht Verf. auf den Strahlungsdruck ein und zeigt, daß dieser nach den Strahlungsgesetzen bei gewissen Annahmen sogar 47 mal so groß werden könnte als die Schwerkraft, das Gas daher vollständig aus der Sonne entweichen müßte. Aber auf der Sonne liegen die Verhältnisse anders, und wenn uns auch manches noch unbekannt ist, so könnte doch der Strahlungsdruck die Schwere beinahe aufheben und so die ungeheure Höhe der Wasserstoffgase von 5000 km ihre Erklärung finden, selbst im Gleichgewichtszustand, also abgesehen von Konvektionsströmen. Dz.

D. Brunt. The general magnetic field of the Sun. Astr. Nachr. **196**, 169-178.

Die Tatsache, daß es Hale gelungen ist, die Existenz eines allgemeinen magnetischen Feldes auf der Sonne nachzuweisen, und zwar von viel geringerer Intensität als solche in den Sonnenflecken beobachtet sind, veranlaßt den Verf., verschiedene der bestehenden Theorien, die ein solches Feld auf der Sonne annehmen, auf Grund der Messungen von Hale einer Probe zu unterwerfen. Er findet, daß die Theorien, welche das Feld durch Rotation elektrischer Ladungen auf der Sonne erklären wollen, nicht den Messungen gerecht werden

können. Setzt man jedoch voraus, daß Wirbel einer bestimmten Polarität auf jeder Hemisphäre der Sonne überwiegend vorhanden sind, und daß die Poren der Oberfläche elektrische Ladungen von der Größenordnung der in den Flecken vermuteten sind, dann meint der Verf. eine befriedigende Darstellung der Beobachtungen erwarten zu können. Fr.

H. Chrétien. Sur le champ magnétique général du Soleil. C. R. **156**, 192-194.

Im Bulletin de la Société astronomique de France **23**, 280-287, 325-331, 1909 hat Verf. dieses Feld unter der Annahme bestimmt, daß die Sonne als eine Masse rotiere. Da aber die Winkelgeschwindigkeit von der heliographischen Breite abhängt, so wird das magnetische Potential entsprechend schwieriger. Es wird nach Kugelfunktionen entwickelt, deren Koeffizienten unter Annahme des Rotationsgesetzes von Faye unter Beschränkung auf die niedrigsten Glieder numerisch bestimmt werden. Dz.

O. Zanotti Bianco. Le idee di Lagrange, Laplace, Gauß e Schiaparelli sull' origine delle comete. Memoria storica. Torino Mem. (2) **63**, 59-110.

Der Verf. gibt eine historische Übersicht der Meinungen, die im Laufe der letzten hundert Jahre nicht bloß von den im Titel genannten Forschern ausgesprochen sind, sondern von allen Gelehrten dieses Zeitraumes, die sich mit jener Frage beschäftigt haben. Während Schiaparelli der Ansicht war, daß die Kometen ihre Entstehung außerhalb des Sonnensystems haben, verteidigte Faye die andere, daß die Kometen ebenso aus dem Urnebel des Sonnensystems hervorgegangen sind wie die Planeten, und H. Poincaré stimmte ihm bei. Danach waren die Kometenbahnen ursprünglich Ellipsen, und nur durch Störungen könnten sie in Parabeln und Hyperbeln verwandelt sein. Lp.

C. Störmer. Sur un problème important dans la physique cosmique. C. R. **156**, 450-453, 536-539.

Einige neue Ergebnisse zu dem vom Verf. schon früher (F. d. M. **42**, 1010, 1911) behandelten Problem: „Die Bewegung eines elektrisierten Körpers in dem Felde eines Elementarmagneten zu finden unter der Voraussetzung, daß der Körper auch der Einwirkung einer Zentralkraft unterworfen ist, die von den Magneten ausgeht und dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportional ist.“

Zu der zweiten Note werden in drei Figuren Niveaulinien angegeben und eine Reihe kosmischer Probleme namhaft gemacht (Kometen, Zodiakallicht, Saturnringe usw.), in welchen das Problem eine Rolle spielt. Dz.

A. Wilkens. Über die kosmogonische Bedeutung der durch die Auflösung der Kometen entstehenden Bewegungsanomalien. Astr. Nachr. **196**, 57-64.

Verf. zeigt, daß durch den stetigen Massenverlust der Kometen säkulare Änderungen der Bahnelemente resultieren, speziell eine säkulare Vergrößerung der Exzentrizität, was auf eine Zugehörigkeit der Kometen zum Sonnensystem von Anfang an hinweisen würde. Demgegenüber betont Th. Banachiewicz in einer kurzen Zuschrift „Zur Frage der Herkunft der Kometen" (**196**, 291; vgl. Erwiderung von Wilkens S. 322), daß der von Wilkens aufgedeckte Effekt praktisch viel zu klein sei, um kosmogonisch eine Rolle zu spielen.

Fr.

C. de Kirwan. Les mondes présents, passés ou futurs. Rev. des qu. sc. (3) **23**, 598-614.

Eine verständige Berichterstattung über ein Buch von Moreux: „Les astres sont-ils habités?" Der Verf. des Artikels und der des Buches scheinen beide nicht die Arbeiten von Plaßmann über den Gegenstand zu kennen.

Mn. (Lp.).

Weitere Literatur.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Prof. J. Molk et pour ce qui concerne l'astronomie sous la direction scientifique de Prof H. Andoyer. Tome VII (1. vol.). K. Schwarzschild. Fasc. 1. Leipzig: B. G. Teubner, S. 1-224. gr. 8⁰.

O. A. Åkesson. Formler och Exempel till sfärisk Astronomi. Lund, IV + 102 S. 8⁰.

M. F. Albrecht und C. S. Vierow. Lehrbuch der Navigation und ihrer mathematischen Hülfswissenschaften. Zehnte Auflage, bearbeitet von G. Holtz. Berlin. 8⁰.

S. Arrhenius. Das Werden der Welten. Aus dem Schwed. von L. Bamberger. Leipzig: Akadem. Verlagsgesellsch., XI + 231 S. gr. 8⁰.

A. Auwers. Bearbeitung der Bradleyschen Beobachtungen an den alten Meridianinstrumenten der Greenwicher Sternwarte. 2. Bd. Leipzig: W. Engelmann, 60, 313 S.

A. Baumann. Der Planet Mars. Forschungen. Zürich: Müller, Werder u. Co., 64 S. gr. 8⁰.

C. Bertin. La table de point sphérique ou essai d'une navigation sans logarithmes. Paris: Imhaus u. Chapelot. 36 S. 8⁰. (Revue maritime.)

A. A. Bielopolsky. Die gegenwärtigen Probleme der Astronomie. St. Petersb. Ak. Bull. 1913, 131-152. (Russisch.)

K. Bohlin. Über die Phaskoeffizienten der Integralentwickelungen e. Bahn. 2. Mittlg. Berlin: R. Friedlander & Sohn, 18 S. 8⁰.

F. Butavand. Les lois empiriques du système solaire et les harmoniques tourbillonnaires. Paris: Gauthier-Villars. 50 S. 8⁰.

W. W. Campbell. Stellar motions; with special reference to motions determined by means of the spectrograph. New Haven, Conn.: Yale University. X + 328 S. 8⁰.

E. Cortese. Planetologia. Milano: Hoepli VII + 387 S. 24mo. (Manuali Hoepli, Nr. 397 u. 398.)

Delaunay. Études astronomiques. Lois sur les distances des satellites, forces répulsives des astres, etc. Paris. 64 S. 8°. (1912.)

K. Ensmenger. Die absolute Bewegung der Himmelskörper. Frankfurt a. M.: A. Kullmann, 27 S. 8°.

Fassbinder. Sur la dynamique des systèmes variables et la rotation de la Terre. Thèse. Paris: Gauthier-Villars. 57 S. 4°.

J. C. Fergusson. Percentage compass for navigators, surveyors, and travellers. London: Longmans Green and Co. [Nature **91**, 241.]

R. Fischer. Die Verschiedenheit der Sonnentage. Zs. f. d. Realschulw. 38, 462-466.

Diskussion auf Grund der wirklichen Bewegung der Erde. Schr.

V. Gama. Algunas observaciones sobre el método de Laplace para la determinación de las órbitas de los cometas. Mexico Soc. Antonio Alzate **31**, 341-373 (1912).

V. V. Heinrich. Ein Beitrag zur Theorie der oszillierenden Darwinschen Satelliten. Časopis **42**, 175-183, 407-425. (Böhmisch.)

K. Kržiwanek. Analytische Darstellung der Ungleichheiten in der Bewegung des Mondes. Teschen: Prochaska. 31 S. 8°.

W. Láska. Lehrbuch der Astronomie und der mathematischen Geographie. Zweiter Teil: Praktische und theoretische Astronomie. Bremerhaven: L. v. Vangerow. VIII + 164 S. 8°.

K. Laves. A new theorem concerning the motion of two satellites of finite masses circulating in nearly commensurate motions of type $\frac{1}{2}$ about a central and homogeneous body of ellipsoidal shape. Amer. Math. Soc. Bull. (2) **20**, 78.

S. V. Orloff. Über die Berechnung der Masse der Kometenkerne nach ihrem Glanze. St. Petersb. Ak. Bull. 1913, 257-292. (Russisch.)

M. Moye. Astronomie: Observations, théorie et vulgarisation générale. Paris: Doin. XX + 399 S. 18mo.

L. Picart. Calcul des orbites et éphémérides. Paris: O. Doin et Fils. (Encyclopédie scientifique publiée sous la direction du Dr. Toulouse.)

P. Pizzetti. Principî della teoria meccanica della figura dei pianeti. Pisa: Spoerri. XIII + 251 S. 8°.

H. Poincaré. Leçons sur les hypothèses cosmogoniques professées à la Sorbonne. Rédigées par H. Vergne. 2e édition, avec un portrait et une notice sur Henri Poincaré, par E. Lebon. Paris: A. Hermann. 70 + 294 S. 8°.

K. Popoff. Sur le mouvement de (108) Hécuba. Thèse. Paris: Gauthier-Villars. 58 S. 4°.

P. Puiseux. La réaction des planètes sur le soleil. Rev. scient. **19**, 545-554.

J. Renner. Stereographische Azimutal-Distanzkarten. Progr. Graz. 9 S. 8°.

P. Reynard. La rotation des astres déduite de l'attraction. Paris. 36 S. 8°. (1912.)

C. Schilling. Breusings nautische Tafeln. Im Verein mit O. Fulst und H. Meldau herausgegeben. 10. Aufl. Leipzig: M. Heinsius Nachf., XVIII + 265 S. Lex. 8°.

O. Schrader. Die bedeutenden Sonnenfinsternisse und die großen Mondfinsternisse für Mitteleuropa, besonders für Deutschland in der Zeit von 2166-3045. Berlin: Stankiewicz. 137 S. 8°.

P. Thompson. Navigation. A method of finding a ship's position at sea by one observation only. New York: Longmans. 56 S. 8°.

M. Vincent. Les dépressions sidérales. Nouvelle hypothèse sur la constitution de la matière et la mécanique céleste. Paris: Fischbacher. V + 100 S. 16mo.

D. F. Wilson. Tables for the computation of the Jupiter perturbations of the group of small planets whose mean daily motions are in the neighborhood of 750″. Stockholm. 58 S. 4°. (1912.)

M. Wolf. Stereoskopbilder vom Sternhimmel. I. Serie. 4. Aufl. Leipzig: J. A. Barth, 12 Taf., IV + 19 Bl. n. S. 18 × 9 cm.

Kapitel 3.

Mathematische Geographie und Meteorologie

P. Gast. Eine Bemerkung über die mathematische Form der Kartenfläche. Zs. f. Vermessw. **42**, 713-716.

Die Annahme der Kartenfläche als Ebene ist zulässig, aber nicht notwendig. Im Sinne der angewandten Geometrie ist es für die Strenge der Problemstellung gleichgültig, ob die Kartenfläche als Ebene oder beispielsweise als Sphäroidfläche angesehen wird. Dies wird zahlenmäßig für die Maßstäbe 1 : 25 000 bis 1 : 1 000 000 nachgewiesen. Eine solche Auffassung führt zu einer sehr einfachen Behandlung des Kartenentwurfes bei jenen Maßstäben.

Lp.

H. Capelle. Die mathematische Geographie und ihre Nutzanwendung. Berlin: E. S. Mittler & Sohn. IV + 268 S. 8°.

Das Buch ist hauptsächlich für den Gebrauch an nautischen Schulen bestimmt. Sein Ziel ist, Verständnis für die Vorgänge in unserm Weltall zu vermitteln, soweit sie ein allgemeines Interesse haben und für Ortsbestimmungen auf See in Betracht kommen. Sowohl am Text wie an den Figuren erkennt man, daß der Verf. nicht Mathematiker ist. 52 stereoskopische Tafeln sollen die räumliche Vorstellung unterstützen.

Ba.

C. Schoy. Vermischte Aufgaben der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie mit vollständigen Lösungen. Zum Gebrauch für den Unterricht an höheren Schulen sowie beim Selbststudium. Hamburg: Henri Grand. IV + 89 S. 4°. Mit 24 Fig. auf 1 Tafel.

Inhalt: I. Bestimmung der geographischen Breite. Aufg. 1—17. II. Anwendung der Hyperbelfunktionen zur Auflösung einiger Aufgaben der astronomischen Geographie. Aufg. 18—22. III. Sphärische Maxima und Minima. Aufg. 23—32. IV. Zeit- und Ortsbestimmungen sowie diesen verwandte Probleme. Aufg. 33—43. V. Geometrische Örter. Aufg. 44—55. Jede Aufgabe ist vollständig gelöst. Zuweilen sind auch Zahlenbeispiele hinzugefügt. Zum größten Teil sind die Aufgaben solche, die in der Geschichte eine Rolle gespielt haben. Deshalb sind solchen Aufgaben geschichtliche und literarische Bemerkungen beigegeben unter genauer Angabe der benutzten Quellen. Für den Lehrer, der über den Gegenstand zu unterrichten hat, ist eine solche Sammlung natürlich sehr wertvoll. Manche Lösungen gehen über das übliche Schulpensum allerdings hinaus; einige dürften wegen ihrer Länge sich nicht zur Bearbeitung eignen. Jedenfalls kann das Buch dazu anregen, die behandelten und andere verwandte Fragen in den Unterricht der obersten Klasse einzufügen und damit den Blick der Schüler auf die die Gestirne und die Erde beherrschenden allgemeinen Gesetze zu lenken und sie so aus der irdischen Enge in höhere freiere Regionen zu erheben. Lp.

H. Janne. Sur la rigidité du globe. Brux. S. sc. (A) **37**, 133-137.

Vergleichung und Beurteilung der vier gebräuchlichen Methoden zur Beantwortung dieser schwierigen Frage. Sie beruhen nacheinander auf den folgenden Messungen: 1. Amplitude der organischen Gezeiten; 2. Lotabweichungen; 3. Schwankungen der geographischen Breite; 4. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenwellen. Mn. (Lp.).

C. Somigliana e F. Vercelli. Sulla previsione matematica della temperatura nei grandi trafori alpini. Torino Mem. (2) **63**, 327-377.

V. Reina e G. Cassinis. Determinazioni di gravità relativa compiute nel 1912 a Roma, Arcetri, Genova, Vienna e Potsdam. Rom. Acc. L. Mem. (5) **9**, 851-839, 3 Taf.

Die Arbeiten wurden mit einem Sterneckschen Pendelapparat neuer Konstruktion ausgeführt, an welchem mannigfache Verbesserungen nach vorherigen Beratungen, besonders auch mit dem General v. Sterneck ausgeführt waren. Die Schrift berichtet über alle Eigentümlichkeiten der verwendeten Apparate, die Ausführung der Beobachtungen und ihre rechnerische Verwertung; es ist unmöglich, auf die feinen Einzelheiten der musterhaft durchgeführten Arbeit einzugehen. Wir beschränken uns darauf, die Endergebnisse für die Beobachtungsorte anzugeben; zunächst ihre geographischen Koordinaten: Breite φ, Länge λ östlich von Greenwich, Höhe H in Metern über dem Meeresspiegel:

	φ	λ	H
Potsdam	52° 22,′9	13° 4,′1	83,4
Wien	48° 12,′7	16° 21,′6	181,6
Genua	44° 29,′2	8° 55,′0	97,5
Arcetri	43° 45,′2	11° 15,′2	183,8
Livorno	43° 32,′0	10° 18,′5	5,6
Rom	41° 53,′5	12° 29,′7	49,3

Die beobachtete Schwere g, die reduzierte Schwere g' nach Faye, g'' nach Bouguer, g''' nach Hayford, die normale Schwere γ und die Anomalien $g'-\gamma, g''-\gamma, g'''-\gamma$ in Zentimetern gehen aus der folgenden Tafel hervor. Die für Potsdam früher durch absolute Bestimmung erhaltene Zahl bildet die Grundlage.

	g	g'	g''	g'''	γ	$g'-\gamma$	$g''-\gamma$	$g'''-\gamma$
	980 cm +							
Potsdam	1,275	1,301	1,294		1,277	0,024	0,017	
Wien	0,860	0,916	0,897		0,906	0,010	— 0,009	
Genua	0,557	0,587	0,579	0,617	0,569	0,018	0,010	0,048
Arcetri	0,491	0,547	0,530	0,572	0,503	0,044	0,027	0,069
Livorno	0,534	0,536	0,536	0,555	0,483	0,053	0,053	0,072
Rom	0,367	0,382	0,378	0,395	0,335	0,074	0,043	0,060

Lp.

Prince B. Galitzin. The principles of instrumental seismology. Proc. 5. Intern. Math. Congr. 1, 109-131.

Ein sehr eingehender Bericht über den gegenwärtigen Stand und die zu lösenden Aufgaben der Bebenforschung, die zu ihrer Arbeit der Beihülfe der Mathematiker bedarf. „Die Forschung über die Bewegungen der Erdoberfläche bringt eine ganze Kette rein mathematischer Probleme mit sich; auf einige von ihnen werde ich im Laufe meines Vortrages hinweisen. Zu ihrer Lösung bedürfen die Bebenforscher höchst dringend der wissenschaftlichen Unterstützung der Mathematiker.“ Bekanntlich beziehen sich die meisten dieser zu beantwortenden Fragen auf Probleme der Elastizitätstheorie.

Lp.

R. Spitaler. Die Achsenschwankungen der Erde als Ursache der Auslösung von Erdbeben. Wien. Ber. 122, 479-501.

Wenn die Polbewegung schnelle Richtungsänderungen erfährt, so werden in der Erdkruste Spannungen ausgelöst, die nach überschläglicher Rechnung sehr wohl starke Erdbeben zur Folge haben können. Dies wird genauer ausgeführt und an den Erdbeben von Francisco, Messina und anderen erläutert.

Dz.

H. Benndorf. Über die Bestimmung von Azimut und scheinbarem Emergenzwinkel longitudinaler Erdbebenwellen. Wien. Ber. 122, 169-188.

Verf. bespricht zunächst eine Methode von Galitzin, aus Aufzeichnungen dreier Seismographen Azimut und scheinbaren Emergenzwinkel zu bestimmen, um dann eine Reihe von Untersuchungen anzustellen, „die den Zweck haben, Azimut und Emergenzwinkelbestimmungen einfacher zu gestalten, und außerdem geeignet sind, gewisse Fragen der Seismometrie zu beantworten“.

Dz.

L. Grunmach. Experimentaluntersuchung zur Messung von Erderschütterungen. Verh. d. Ver. z. Bef. d. Gewerbfl. 1913, 61-80, 157-172.

Fortsetzung des zusammenfassenden Generalberichtes über die im Auftrage der Provinzialverwaltung Schlesiens ausgeführte Untersuchung zur Messung der an der Queistalsperre bei Marklissa durch den Wasserabsturz hervorgerufenen Erschütterungen. Angabe der Apparate (Dreipendelapparat und Horizontalpendel), der Registrierungsmethoden und der Ergebnisse.

Dz.

A. v. Anderkó. Die Wärmebewegung im pseudo-isotropen Erdboden. Meteorol. Zs. 30, 580-589.

„Die periodischen Änderungen der Temperatur im Erdboden stellt man gewöhnlich durch Kurvensysteme dar, die den Fourierschen Sätzen genügen würden, wenn der Erdboden isotrop wäre. Diese Bedingung ist selten erfüllt, weil die meteorologischen Faktoren, insbesondere der Niederschlag, den Isotropismus der oberen Schichten aufheben. Eine homogene, wasserdurchlässige Schicht, die ohne jene Faktoren isotrop wäre, nennt der Verf. pseudoisotrop. Die Summe der Einflüsse äußert sich in Abweichungen von den Fourierschen Sätzen, und zwar sowohl in den Amplituden und Phasen, als auch in den Veränderungen der Wärmekapazitäten und der Wärmeleitung. Der theoretischen Bestimmung solcher „Deviationen“ ist der Artikel gewidmet.

Lp.

A. Blondel. Sur la théorie des marées. Toulouse Ann. (3) 3, 151-207.

Die Theorie der Gezeiten ist wesentlich von Poincaré gefördert worden, dessen allgemeine Untersuchungen hier vorausgesetzt werden für den Fall eines verhältnismäßig engen Kanals von veränderlicher Tiefe, der nach Poincaré besonderes Interesse bieten kann durch Aufschlüsse über die noch wenig bekannte Rolle der Reibung. Dann wendet Verf. die Theorie auf das Rote Meer an, das wegen der Enge der Straße von Bab el Mandeb bei Perim nahezu als geschlossen gelten kann. Dazu sind selbstverständlich sehr umfangreiche numerische Rechnungen neben den theoretischen Formeln nötig.

Der Vergleich von Rechnung und Beobachtung zeigt erhebliche Unterschiede, die nur auf die Reibung zurückgeführt werden können, da bei einem so verhältnismäßig kleinen Wassergebiet das Ebben und Fluten der festen Erdkruste kaum in Betracht kommt.

Verf. hat vor, die hier vorliegende umfangreiche Arbeit mit Rücksicht auf die Reibung zu wiederholen, um womöglich Ziffernwerte zu erhalten, welche vielleicht auch allgemein in der Theorie von Nutzen sein können, die ja in mancher Hinsicht abgeschlossen ist, aber doch von Fall zu Fall mit Konstanten

rechnen muß, welche zurzeit nur erst der Beobachtung zugänglich sind. Dz.

A. E. H. LOVE. Notes on the dynamical theory of the tides. Lond. M. S. Proc. (2) **12**, 309-314.

„Der Hauptzweck dieser Note ist, eine einfache Methode ausfindig zu machen, um die ursprünglich von Hough angegebenen Resultate zu erhalten.“ (S. S. Hough: The application of harmonic analysis to the dynamical theory of the tides, London Phil. Trans. R. Soc. Part I **189** (A) 1897. Part II **198** (A) 1898; F. d. M. **28**, 862, 1897 u. **29**, 651, 1898.)

Es werden nach H. Lamb die Differentialgleichungen der Bewegung aufgestellt, worauf nach Annahme einer periodischen Lösung die Beziehungen der Koeffizienten folgen. Dz.

A. E. H. LOVE. The application of the method of W. Ritz to the theory of the tides. Proc. 5. Intern. Math. Congr. **2**, 202-208.

Zuerst wird die bekannte Ritzsche Methode beschrieben und dann darauf hingewiesen, daß Poincaré in den Leçons de mécanique céleste **3**, 297-303 (1910) diese Methode auf die dynamische Theorie der Gezeiten angewandt hat. Der Verf. setzt eine Methode des Vorgehens auseinander, die sich von der Poincaréschen Art nur wenig unterscheidet; er beschränkt die Untersuchung auf das Problem der freien Schwingungen einer Wasserfläche von gleichförmiger Tiefe, die eine rotierende Kugel bedeckt. Das Wasser wird als reibungslos behandelt. Das Problem ist nach einer anderen Methode schon von S. S. Hough behandelt worden (F. d. M. **38**, 862, 1897 u. **39**, 651, 1898). „Die Vergleichung der durch die gegenwärtige Methode zu erhaltenden Ergebnisse mit den von ihm erhaltenen ermöglicht es, mit größerer Zuversicht an Probleme zu gehen, die sich auf Wasserflächen von veränderlicher Tiefe, eingeschlossen in feste Umgrenzungen, beziehen.“ Am Schluß der Mitteilung bemerkt der Verf.: „Somit sieht man, daß in dem zur Erörterung stehenden Problem die Ritzsche Methode ganz rasch die schon bekannten Ergebnisse liefert.“ Lp.

J. PROUDMAN. On some cases of tidal motion of rotating sheets of water. Lond. M. S. Proc. **12**, 453-473.

Das Problem der freien Gezeitenbewegungen einer rotierenden Wasserfläche in Gestalt eines Kreissektors war von Lamb gestellt worden.

Nach Aufstellung der allgemeinen Bedingungen, welche zuerst von Lord Kelvin betrachtet worden sind, und deren Anwendung auf eine nahezu kreisförmige Wasserfläche werden die Grenzformen für erzwungene Gezeiten bestimmt, wenn die Periode der störenden Kraft unbegrenzt an Dauer zunimmt. Dann wird die Grenzform bestimmt für ein Rechteck und endlich für eine verhältnismäßig kleine Kreisfläche auf einer Kugel, was vielleicht für kleine Seen auf der Erdoberfläche anwendbar sein könnte. Dz.

E. Fichot. Sur la production des marées statiques de la deuxième sorte dans un océan répondant à une loi quelconque de profondeur. C. R. **156**, 211-213.

In der Note Phil. Mag. (6) **5**, 136-141 (F. d. M. **34**, 857, 1903) „On the theory of the fortnightly tide" sagt Lord Rayleigh, die genannten, für die statischen Gezeiten zweiter Art charakteristischen Strömungen könnten nicht in einem Ozean entstehen, der durch kontinentale, nicht nach den Parallelen gerichtete Schranken begrenzt ist. Diesen Ausspruch berichtigt der Verf. durch Prüfung seiner Begründung. „Im allgemeinen steht nichts der Erzeugung einer statischen Flut entgegen, deren Abweichung von der eigentlichen Gleichgewichtsflut von dem Gesetz der Tiefe und von der Verteilung der Kontinente abhängt." Lp.

R. v. Sterneck. Zur Theorie der Gezeiten des Mittelmeeres. Wien. Ber. **122**, 299-364.

Ausführliche Theorie der gezwungenen und freien Schwingungen. Beobachtung und Rechnung zeigen, daß das Mittelmeer am besten in vier Teile geteilt wird. Erstens das westliche Becken, in welchem der Gezeitenverlauf entgegen der Annahme von G. H. Darwin erheblich durch das Ein- und Ausströmen der Wasser in der Straße von Gibraltar beeinflußt wird. Zweitens das sizilische Meer. Drittens das östliche Becken. Viertens das Adriatische Meer, für welches die genauesten und zahlreichsten Beobachtungen vorliegen. Aus der Formel der Japaner Honda, Terada, Yoshida, Isitani für die Schwingungsdauer eines länglichen Wasserbeckens um eine quer durch dasselbe gehende Knotenlinie, die hier freilich stark modifiziert werden muß, leitet der Verfasser eine Periode von 12,3 Stunden ab, die so gut mit der Periode der erzwungenen Ebbe und Flut übereinstimmt, daß, wie schon G. H. Darwin vermutet hat, eine Art Resonanz sich einstellen muß, die auch vollauf durch die Beobachtungen bestätigt wird, die eine etwa neunmal so große Flut zeigen, als sie sonst zu erwarten wäre.

Verf. geht auch auf die noch sehr wenig durch Beobachtung erforschten Gezeiten des Schwarzen Meeres ein unter Annahme einer ungefähr von Nord nach Süd gerichteten Knotenlinie der freien Schwingungen. Dz.

K. Sano. On the seiches of lake Tôya. Tokyo Math. Ges. (2) **7**, 17-22.

Der See ist nahezu kreisförmig und hat in der Mitte eine Insel. Zur Vereinfachung der Rechnung wird die Tiefe als konstant angenommen, worauf zunächst die Differentialgleichungen nebst Grenzbedingungen aufgestellt und durch Zylinderfunktionen zweiter Art gelöst werden. Es folgt die numerische Berechnung der Konstanten und der Schwingungsperioden, welche recht gut mit den Beobachtungen stimmen. Dz.

E. M. Wedderburn. Temperature observations in Loch Earn, with a further contribution to the hydrodynamical theory of the temperature seiches. Edinb. Roy. Soc. Trans. 48, 629-695.

Zum Teil experimentelle Untersuchungen. Eine modifizierte Theorie (vgl. „The hydrodynamical theory of seiches", Edinb. Roy. Soc. Trans. **41**, 599. „Hydrodynamical theory of temperature. Oscillations", Edinb. Roy. Soc. Trans. **47**, 628; F. d. M. **42**, 1021, 1911) gibt Resultate für die Periode der Seiches, die innerhalb 5 Prozent mit der beobachteten Periode übereinstimmen. J.

A. Bemporad. La teoria dell' assorbimento atmosferico in base a particolari ipotesi sulla trasparenza dell' aria a varie altezze. Napoli Rend. (3) **19**, 236-270.

Der von Cantone abgefaßte Bericht über diese Arbeit lautet: Die Abhandlung hat den Zweck, einen neuen Beitrag zur Theorie der Auslöschung zu liefern unter der Annahme, daß der Absorptionskoeffizient c eine Funktion der Dichte der Schichten ist, durch welche der von dem Sterne ausgehende Lichtbündel geht. Auf diese Weise hat man es nicht mehr mit der Größe zu zu tun, die bei der gewöhnlichen Theorie die von den Strahlen durchlaufene Luftmasse bildet; sondern an ihre Stelle tritt eine unter dem formalen Gesichtspunkte gleichwertige Größe, die deshalb optische Masse genannt werden kann; sie hängt offensichtig von der Hypothese ab, die über das Gesetz der Veränderlichkeit von c gemacht wird. Durch Überlegungen, die in einer anderen Arbeit gemacht sind, wird der Verf. dazu geführt, c als proportional der vierten Potenz der Dichte anzunehmen, und von dieser Hypothese ausgehend, gelingt es ihm, mittels mühevoller Rechnungen die Tabellen herzustellen, die es ermöglichen, durch doppelte Interpolation die optische Masse auszuwerten, die willkürlich gewählten Höhen und Zenitdistanzen entspricht. Die Lösung des Problems, das vornehmlich die Bestimmung der sogenannten Solarkonstante betrifft und die Erforschung der äußerst wichtigen Erscheinungen der veränderlichen Sterne, ist, wie der Verf. selbst bemerkt, nicht die gesuchte; einerseits wird dem beträchtlichen Einfluß des atmosphärischen Staubes keine Rechnung getragen, andererseits ist die Hypothese über das Gesetz der Veränderlichkeit von c im Grunde willkürlich. Immerhin hat die Arbeit Interesse, weil in ihr der Versuch auf einem Wege gemacht ist, wie man zu einer befriedigenderen Lösung gelangen kann, als der ist, den man bisher notgedrungen einschlug." Lp.

C. Bellia. Saggio di una formola per rappresentare l'intensità della radiazione solare a diverse altezze e a diverse inclinazioni. Nuovo Cimento (6) **5**, 381-385.

Durch theoretische Überlegungen gelangt der Verf. zunächst zu der Formel $\ln q = \ln A - \frac{1}{5} h \varepsilon^m B^5$ (q die Intensität der Sonnenstrahlung, h die Höhe der Beobachtungsstelle, ε die Dicke der durchlaufenen Luftschicht, B der atmosphärische Druck, A eine Konstante). Durch Übergang zu gemeinen Logarithmen geht die Formel hervor: $\log q = a - c \varepsilon^m B^5$, wo a und c zu bestimmende Konstanten bezeichnen. Diese Formel stimmt aber schlecht mit den Beobachtungen; daher fügt der Verf. nach dem Vorgange von Bemporad (F. d. M. **38**, 975, 1907) zur Berücksichtigung der Absorption das empirische

Glied $-b\varepsilon$ hinzu, so daß die Formel erhalten wird: $\log q = a - b\varepsilon - c\varepsilon^m B^5$. Aus den Beobachtungen von K. Ångström wird der Wert von m als $\frac{1}{2}$ bestimmt. Setzt man in der Formel B konstant, so folgt $\log q = a - b\varepsilon - c'\varepsilon^m$, die Bemporadsche Formel. Die hiernach bestimmte Solarkonstante fällt zwischen 1,76 und 1,86, also zu klein aus. Lp.

R. Emden. Über Strahlungsgleichgewicht und atmosphärische Strahlung. Münch. Ber. 1913, 55-142.

Einleitung. In einer ruhenden Gasmasse sind unendlich viele Anordnungen von Dichte, Druck und Temperatur möglich, die den Bedingungen mechanischen Gleichgewichtes genügen. Handelt es sich jedoch um eine Gasmasse, deren Elemente nach den Gesetzen der Temperaturstrahlung leuchten und absorbieren, während Wärmeaustausch durch Konvektion ausgeschlossen, durch Leitung hinreichend klein sein soll, so wird ein Gleichgewichtszustand ausgesondert, der vom Verf. als Strahlungsgleichgewicht bezeichnet wird, und der dadurch ausgezeichnet ist, daß ein jedes Teilchen denselben Betrag an Energie ausstrahlt, den es durch Zustrahlung der übrigen Teilchen und etwa vorhandener äußerer Strahlungsquellen gewinnt. Anders ausgedrückt: Strahlungsgleichgewicht ist vorhanden, wenn durch Strahlung und Absorption die Temperatur der Teilchen und deshalb auch die Massenanordnung nicht geändert werden. Grundbedingung ist stets Gleichheit der Mengen abgegebener und gewonnener Strahlung, unabhängig von ihrer Zusammensetzung nach Wellenlängen, Polarisationszustand und Strahlungsrichtung. Auf diesen Gleichgewichtszustand hat zuerst Schwarzschild (F. d. M. **37**, 970, 1906) aufmerksam gemacht; eine andere Arbeit von E. Gold (F. d. M. **40**, 1021, 1909) geht von ähnlichen Gesichtspunkten aus. Über diese Arbeiten wird in §§ 2 und 3 gehandelt.

Der Verf. behandelt das Strahlungsgleichgewicht einer Atmosphäre, d. h. einer Gasmasse, die entweder die äußeren Partien einer Gaskugel bildet oder auf einer starren Kugel aufliegt. Die Niveauflächen sind dann Kugelflächen; ihre Radien werden so groß angenommen, daß mit genügender Genauigkeit von der Krümmung abgesehen und ein ebenes Problem behandelt werden kann. Druck, Dichte und Temperatur ändern sich dann nur in Richtung der Achse, der Vertikale. Jede horizontale Schicht strahlt gemäß ihrer Temperatur ebensoviel Energie aus, als sie durch Zustrahlung der übrigen Schichten und äußere Strahlungsquellen gewinnt.

Es liegt die Versuchung nahe, anzunehmen, daß bei diesem Gleichgewichtszustand die beiden Energieströme, die eine horizontale Schicht abwärts und aufwärts durchsetzen, sich gleich sein müssen. Tatsächlich benutzt auch Gold diese Gleichheit neben dem erstgegebenen Kriterium zur Bestimmung des Strahlungsgleichgewichts. Allein wie in einer Metallplatte bei linearem Temperaturgefälle ein Wärmetransport durch Leitung stattfinden kann, ohne daß die Temperaturen sich ändern, ist bei geeigneter Temperaturverteilung auch Energietransport durch Strahlung bei Konstanz der Temperaturen möglich. Kennzeichen des Strahlungsgleichgewichtes ist deshalb lediglich die Tatsache, daß durch Strahlung und Absorption kein Gasteilchen seine Temperatur ändert.

Die vorliegenden Untersuchungen beschäftigen sich in erster Linie mit

dem Strahlungsgleichgewicht der Erdatmosphäre; sie bezwecken einen Beitrag zur Klärung der Frage: Sind die Temperaturen der oberen Inversionsschicht in erster Linie durch Strahlungsvorgänge erklärbar? Die Antwort fällt bejahend aus.

§ 1. Die effektive Erdtemperatur und die Absorption diffuser Strahlung. § 2. Strahlungsgleichgewicht bei grauer Strahlung. § 3. Die Untersuchungen von W. J. Humphreys und E. Gold. § 4. Die Integralgleichung des Strahlungsgleichgewichts. § 5. Das Strahlungsgleichgewicht der Atmosphäre und die Temperatur der oberen Inversion. § 6. Die Strahlung der Atmosphäre. Lp.

K. Schwarzschild. Bemerkung zur Berechnung des Strahlungsgleichgewichtes der Atmosphäre. Meteorol. Zs. **30**, 454-456.

In der vorstehend angezeigten Arbeit hat Emden „eine Idealisierung des Problems eingeführt, welche die Wirklichkeit in den Hauptzügen wiedergibt und sich dabei rechnerisch gut behandeln läßt". Der Zweck des Verf. ist, „eine kleine Verallgemeinerung der Emdenschen Ableitungen mitzuteilen, die sich vielleicht für die weitere Untersuchung der Temperaturverteilung in der Atmosphäre als nützlich erweisen dürfte". Lp.

M. P. Rudzki. Von der Strahlung der Luft. Meteorol. Zs. **30**, 458-459.

Durch eine auf einer partiellen Differentialgleichung beruhende Rechnung findet der Verf. den Absorptionskoeffizienten der Luft $\alpha = 0{,}536.10^{-4}$, will ihm aber keine besondere Bedeutung zuerkennen. Lp.

F. Richarz. Über Erweiterungen und Bestätigungen meiner Erklärung des Lichtmaximums beim Brockengespenst und um den Korbschatten eines Ballons. Meteorol. Zs. **30**, 501-502.

Das Prinzip der Erklärung (vgl. F. d. M. **43**, 1101, 1912) ist folgendes: Für das in den Nebel eindringende Licht verdecken sich die Teilchen zum Teil gegenseitig. Ebenso würden auch für irgendeine Blickrichtung sich Teilchen gegenseitig verdecken. Die Schwächung des in irgendeiner Richtung erblickten, von dem Nebel reflektierten Lichtes setzt sich daher zusammen aus der Schwächung durch die gegenseitige Verdeckung beim Eindringen und durch die gegenseitige Verdeckung beim Herausdringen. Stimmen beide Richtungen überein, so kommen für den Fall der Zurückwerfung in der umgekehrten Richtung des Hineindringens keine neuen gegenseitigen Verdeckungen von Teilchen mehr hinzu, so daß in dieser Richtung ein Maximum der Intensität des reflektierten Lichtes eintritt. Eine Bestätigung dieser Erklärung wurde durch die „Aufnahmen von hellen Ringen und Säulen um den Ballonschatten und deren künstliche Nachbildung" von K. Stuchtey geliefert (S. 565, 568 beschrieben). Lp.

W. A. Jenkins. On a new method of determining the horizontal intensity of the earth's magnetic field. Phil. Mag. (6) **26**, 752-774.

Das Prinzip dieser neuen Methode ist die Erzeugung eines bekannten Feldes, das dem der Erde entgegengesetzt und doppelt so groß ist. Der Gleichung der beiden Felder, von denen das eine von der Erde herrührt, das andere von der Vereinigung dessen von der Erde und des erzeugten, wird durch die Gleichheit der Schwingungen desselben Magnets bestimmt, wenn das angewandte Feld da ist oder nicht, und das angewandte Feld wird durch das Messen des es erzeugenden Stromes bestimmt. Die an sich experimentelle Arbeit ist naturgemäß von vielen theoretischen Betrachtungen durchsetzt. Lp.

Kr. Birkeland. Sur la conservation et l'origine du magnétisme terrestre. C. R. **157**, 275-277.

Verf. sucht die Entstehung und Erhaltung des Erdmagnetismus mit Hülfe der Kathodenstrahlen zu erklären, die von der Sonne ausgehen. Sa.

H. Kennedy, The large ions in the atmosphere. Dublin: Roy. Soc. Acad. **32**, 1-6.

Fortsetzung der Experimentalarbeit von J. A. McClelland und H. Kennedy. „The large ions in the atmosphere". Dublin Roy. Soc. Acad. **30**, 72-91; F. d. M. **43**, 1102, 1912. J.

V. Bjerknes. Dynamische Meteorologie und Hydrographie. Autorisierte deutsche Ausgabe der von der Carnegie Institution of Washington herausgegebenen Dynamic Meteorology and Hydrography. I. Teil: Statik der Atmosphäre und der Hydrosphäre von V. Bjerknes und J. W. Sandström. 125 + 36 + 30 + 22 S. 4°. 1912. Mit Atlas von 60 Tafeln. II. Teil: Kinematik der Atmosphäre und der Hydrosphäre von V. Bjerknes, Th. Hesselberg und O. Devie. Deutsche Übersetzung von F. Kirchner. 172 S. 4° u. 84 Textabbildungen, 1913. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn.

I. Teil. 1. System der Einheiten. 2. Die Schwere und ihr Potential. 3. Spezifisches Volumen und Dichte der atmosphärischen Luft und des Seewassers. 4. Grundzüge der Hydrostatik. 5. Ideale Gleichgewichtszustände in der Atmosphäre. 6. Praktische Lösung der hydrostatischen Aufgabe für die Atmosphäre. 7. Synoptische Darstellung der Felder des Druckes und der Masse in der Atmosphäre. 8. Praktische Lösung der hydrostatischen Aufgabe für die See. 9. Synoptische Darstellung der Felder für Druck und Masse in der See.
II. Teil. Es handelt sich hier um ein förmliches Lehrbuch. Der Verf. entwickelt die Methoden zum Studium der Strömungsvorgänge. Auf eine Darstellung der graphischen Rechnungsarten, Algebra, Differentiation und Integration an skalaren und vektoriellen Feldern folgt die eingehende Behandlung

der Vertikalbewegung. Zur Prognose aus der Geschwindigkeitsdarstellung wird die Kontinuitätsgleichung benutzt, mit der sich die Massenverlagerung in der Atmosphäre vorausbestimmen läßt. Nachdem dann noch umgekehrt aus Anfangs- und Endzustand die Beschleunigung der bewegten Teile auf kinematischer Grundlage zu ermitteln gelehrt ist, bilden interessante Beispiele atmosphärischer und ozeanischer Bewegung den Schluß (nach Fortschr. d. Phys. **48**$_3$ u. **49**$_3$). Lp.

V. Bjerknes. Die Meteorologie als exakte Wissenschaft. Antrittsvorlesung, gehalten am 8. Januar 1913 in der Aula der Universität Leipzig. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn. 16 S. 8°.

Als erster Inhaber des neuen Lehrstuhles der Geophysik an der Leipziger Universität erläutert der Redner die zu beachtenden Gesichtspunkte an der Physik der Atmosphäre. Zum Vergleiche der Entwicklung der Meteorologie zu einer exakten Wissenschaft wird die Entwicklung der rein beobachtenden Astronomie zu einer Himmelsmechanik herangezogen. „Das Problem von der strengen Vorausberechnung, das wir schon seit Jahrhunderten in der Astronomie gelöst haben, müssen wir jetzt in allem Ernst in der Meteorologie angreifen. . . . Offenbar wird man bei einem Problem dieser Art nicht mit den gewöhnlichen mathematischen Methoden auskommen. Von analytischer Darstellung der Resultate der Beobachtung und darauffolgender analytischer Integration der Gleichungen kann nicht die Rede sein. Wie man die Beobachtungen durch Karten darstellt, muß man alle mathematischen Rechenoperationen zu graphischen Operationen mit Karten umformen. Wir haben uns in dieser Weise die Anfangsgründe einer graphischen Mathematik entwickelt, durch die wir die eine Karte aus der anderen ableiten, genau wie man sonst durch Rechnung die eine Gleichung aus der anderen ableitet.“ Lp.

V. Bjerknes. Das CGS-System und die Meteorologie. Meteorol. Zs. **30**, 67-71.

Der Artikel ist zur Widerlegung der Angriffe bestimmt, die gegen den Beschluß der Internationalen Kommission für wissenschaftliche Luftschiffahrt gerichtet sind, den Luftdruck in Baren, Dezibaren, Zentibaren, Millibaren zu messen (vgl. F. d. M. **43**, 1099, 1913). Der Vorschlag soll das CGS-System in seiner Anwendung auf die Meteorologie konsequent durchführen. Da diese Änderung aber in der synoptischen Meteorologie bei dem allgemeinen Übergang zu diesem System erhebliche Kosten und Übelstände verursacht, so empfiehlt der Verf., ein Anhänger dieser Umwandlung, vorläufig dies nur für die Aerologie zu tun, bis „das Britische Reich und die Vereinigten Staaten zu dem metrischen System übergehen“. Lp.

G. T. Walker. Über die proponierte Änderung der Maße in der Meteorologie. Meteorol. Zs. **30**, 198-201.

Der „Director general of observatories“ lehnt die Einführung der Millibare und der dynamischen Meter in die Meteorologie entschieden ab und legt in dem vorliegenden, aus dem Englischen übersetzten Rundschreiben die Gründe für seine Ablehnung dar. Lp.

G. VON DEM BORNE. Das Variometerprinzip und seine Anwendung in der Meteorologie. Meteorol. Zs. **30**, 201-203.

Bei den als Variometer oder als Variograph bezeichneten Instrumenten beeinflußt die zu messende variable Größe zwei Indikatoren, den einen von großer, den zweiten von möglichst kleiner Trägheit. Der erste stellt sich mit kleinen Abweichungen in die Nähe eines Mittelwertes ein, dessen Frist mit wachsender Trägheit zunimmt. Der zweite folgt den Schwankungen um so genauer, je geringer seine Trägheit ist. Zur Ablesung gelangt die Differenz der Einstellungen der beiden Indikatoren. Der Verf. erörtert zunächst die Konstruktion und die Theorie seines Barovariometers und legt dann die Grundzüge der Ausführung von Anemo- und Thermovariometern dar. Lp.

W. KÖPPEN. Durchschnittliche Abweichung, Asymmetrie und Korrelationsfaktor. Meteorol. Zs. **30**, 113-121.

Die Meteorologen wenden aus praktischen und sehr einleuchtenden Gründen zur Verarbeitung ihres gewaltigen Zahlenmaterials nicht die Fehlerausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate an, sondern haben andere, einfachere Wege zu diesem Zwecke ersonnen, deren Wert nicht allgemein erkannt wird, die auch nicht allgemein bekannt und gebraucht sind.

Sind von einer meteorologischen Zahlenreihe die vier Größen bestimmt: n = Gesamtzahl, S = Gesamtsumme, n_u = Anzahl der Zahlen unter dem Mittel, S_u = Summe der Zahlen unter dem Mittel, so ergibt sich eine Reihe zur Charakteristik der Erscheinung wichtiger Werte: 1. Das arithmetische Mittel $M = S/n$; 2. die Zahl der Fälle n, diese gibt zugleich das Gewicht des Resultates M an; 3. die durchschnittliche absolute Abweichung $D = 2\,\frac{M n_u S_u}{n}$. 4. die Asymmetrie $A = \frac{1}{n}\,(n - 2n_u)$.

„Diese vier Größen M, n, D und A bestimmen die Hauptzüge einer meteorologischen Erscheinung genügend; ihre allgemeine Einführung in die Veröffentlichungen ist zu wünschen, soweit nicht n schon aus anderen Angaben selbstverständlich ist.“

Die Verwendung wird an einem praktischen Beispiel erläutert. Lp.

W. KÖPPEN. Zusammenhang der Luftdruckabweichungen über Island, den Azoren und Europa. Meteorol. Zs. **30**, 121-125.

Der Aufsatz ist aus den Annalen der Hydrographie, Februarheft 1913, abgedruckt als Beispiel der Anwendung des im vorstehenden Referate an-

gedeuteten Verfahrens. In ihm ist der Anschaulichkeit halber nicht nur die Ableitung des Korrelationsfaktors, sondern auch die Darstellung der Einzelzahlen auf graphischem Wege geschehen. Lp.

V. LÁSKA. Zur Korrelation. Meteorol. Zs. **30**, 558-560.

Zu den beiden vorstehend angezeigten Aufsätzen von Köppen bemerkt der Verf., daß der effektive Wert des Korrelationsfaktors gleich dem Werte des Satzes $2E^2/e = \pi$ der Methode der kleinsten Quadrate ist (E der mittlere, e der durchschnittliche Fehler); dieser Satz gilt, sobald im gegebenen Falle die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zulässig sein soll. Sowie diese Gleichung eine zwar notwendige, aber nie eine hinreichende Bedingung für die Anwendbarkeit der Methode der kleinsten Quadrate darstellt, ist auch der Korrelationsfaktor für den Zusammenhang zweier Reihen eine notwendige, aber nie eine hinreichende Bedingung. Wie diese zu bestimmen ist, wird an einem einfachen Beispiel gezeigt, das für die Meteorologie von fundamentaler Bedeutung ist. Lp.

F. M. EXNER. Über Luftdruckschwankungen in der Höhe und am Erdboden. Meteorol. Zs. **30**, 429-436.

Dines hat 1912 in einer statistischen Arbeit festgestellt, daß die Mitteltemperatur der untersten 9 km der Atmosphäre in einer sehr engen Beziehung zu dem Luftdruck in 9 km steht; der Korrelationsfaktor beträgt 0,90 bis 0,96. Einem hohen Druck in 9 km entspricht also hohe Lufttemperatur darunter und umgekehrt. Der Druck am Boden erscheint als Effekt des Druckes in der Höhe, nicht aber als Effekt der Temperatur der unteren 9 km. Wer den Bodendruck als Temperatureffekt aufgefaßt wissen will, könne, wie Shaw in einem Vorwort zu der Arbeit von Dines ausführt, nicht recht haben. Exner meint, man dürfe mit der Ableugnung des Temperatureffektes nicht zu weit gehen. Es handle sich vielmehr darum, die Ursache der Veränderungen des Druckes in 9 km Höhe zu suchen; diese werde man zweifellos sehr häufig in Temperaturschwankungen über dieser Höhe finden. Der Artikel ist der theoretischen Untersuchung dieser Frage gewidmet und betont die Wichtigkeit weiterer Beobachtungen in der Höhe von 12 km. Zu der Sache äußern sich dann weiter v. Hann (S. 561-562), Köppen (S. 562-563), Exner selbst (S. 563-564), v. Hann (S. 564-565). Lp.

M. MÖLLER. Zum täglichen Gang der Windstärke hoher Luftschichten und dessen ursächlicher Erforschung. Meteorol. Zs. **30**, 93-95.

Auf die Bemerkung von Hann (**29**, 462 derselben Zs.), daß die Ursache der täglichen Periode der Windstärke nicht genau bekannt ist, erörtert der Verf. die eine „Beziehung, die zwischen dem täglichen Gang der Windstärke hoher Luftschichten und der Erwärmung unterer Luftmassen am Tage gegenüber nächtlicher Abkühlung zweifellos bestehen muß“, und bezieht sich auf seine kleine Schrift „Weltamt für Wetterkunde“. Lp.

F. Pockels. Zur theoretischen Berechnung der Temperaturverteilung in der freien Atmosphäre bei Föhn. Meteorol. Zs. **30**, 216-222.

Der Artikel wendet sich gegen die theoretischen Betrachtungen von H. v. Ficker in der Abhandlung über „Temperatur und Feuchtigkeit bei Föhn in der freien Atmosphäre" (Wien. Ber. **121**, 1225-1243, 1912), insbesondere gegen die dort gemachte Annahme, daß die Stromlinien von einer endlichen, sogar relativ geringen Höhe oberhalb des Kammes an ungestört horizontal geradlinig verlaufen. „Es ist kein Grund einzusehen, weshalb das Einbiegen der Stromlinien in das Tal von einer gewissen endlichen Höhe an vollständig aufhören soll. Vielmehr ist von vornherein zu erwarten, daß diese Einbiegung ganz allmählich mit zunehmender Höhe abnimmt und erst in sehr großen Höhen praktisch unmerklich wird. In welcher Weise diese Abnahme oder überhaupt Änderung der Stromlinien mit der Höhe erfolgt, darüber müssen die Gleichungen der Hydrodynamik Aufschluß geben. Der Zweck der folgenden Zeilen ist, zu zeigen, wie sich in speziellen Fällen das Problem lösen läßt, und was auf Grund dieser Lösung für die Temperaturverteilung in der freien Atmosphäre des Gebirges folgt." Lp.

A. Defant. Die Veränderungen in der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre in den gemäßigten Breiten der Erde. Meteorol. Zs. **30**, 58-66, 126-138.

Der Verf. stellt am Schluß seiner Abhandlung die Beobachtungstatsachen und die Ergebnisse der Theorie zusammen:

„Vor allem sehen wir, daß sich 1. die aus den Niederschlagsschwankungen abgeleiteten, nach Osten sich fortpflanzenden Wellen theoretisch vollständig begründen lassen; namentlich die Tatsache, daß die Länge der einzelnen Wellen aliquoten Teilen des Umfanges der Erde in den einzelnen Breiten sehr nahe kommt, steht im vollen Einklange mit den Ergebnissen der Theorie. 2. Auch die an sich sonst auffallende Erscheinung, für die überhaupt eine Erklärung schwer gefunden werden konnte, daß nämlich die vorkommenden Wellen dieselbe mittlere Geschwindigkeit besitzen, folgt direkt als Hauptresultat aus der entwickelten Theorie. 3. Nach der Theorie muß die Geschwindigkeit aller Wellen eine jährliche Periode mit einem Maximum im Winter und einem Minimum im Sommer besitzen; sie muß über Kontinenten größer, über Ozeanen kleiner sein; auch die Amplitude der Jahresschwankung soll über Kontinenten größer als über Wasserflächen sein. Alle diese Folgerungen aus der Theorie haben wir aber aus den Beobachtungen vollkommen in dieser Form ableiten können; immer fanden wir Verhältnisse, die mit der Theorie in vollstem Einklange stehen. — Aber auch die theoretischen quantitativen Werte der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten zeigen genügende Übereinstimmung mit den tatsächlich beobachteten." Lp.

W. Köppen. Über potentielle Temperatur und Luftmischung. Meteorol. Zs. **30**, 175-180.

Ein bisher ungedruckter Nachtrag zu dem Vortrage des Verf. in dem Hamburger Zweigverein der Deutschen Meteorologischen Gesellschaft vom 30. Juli

1888 über das Verhältnis zwischen Gewitterbö, Tornado, Druck und Temperatur; diese Veröffentlichung soll „anregend wirken und vielleicht auch die Kontinuität der Entwicklung in der Meteorologie etwas fördern". Lp.

WILHELM SCHMIDT. Schweben von Teilchen in Luftwirbeln. Meteorol. Zs. **30**, 171-174.

Ein Versuch, durch ein anschauliches Gedankenexperiment das Schweben kleiner Staubteilchen und Tröpfchen in der Luft durch Luftwirbel mit horizontaler Achse qualitativ und quantitativ begreiflich zu machen, und dadurch meteorologische Erscheinungen, wie die Bildung von Hagel, zu erklären. Lp.

A. ARNDT. Über die Bora in Noworossisk. Meterol. Zs. **30**, 295-302.

A. ARNDT. Über unabhängige Regressionslinien. Meteorol. Zs. **30**, 397.

Der Marhoter Paß liegt rund 400 m über der meteorologischen Hauptstation von Noworossisk am kaukasischen Ufer des Schwarzen Meeres und etwa 2½ km von Noworossisk. Der durch den Paß mit Orkangewalt oft bis 40 mps. brausende Luftstrom ist die eigentliche direkte Ursache der Bora, eines Fallwindes. Die Differenz des Luftdruckes zwischen der Paßhöhe und der Stadt beträgt bei solchen Gelegenheiten bis 8 mm Hg. Durch theoretische Untersuchung der Erscheinung nach Wrangel und Margules kommt der Verf. zu dem Ergebnis: Die Druckerhöhung während der Bora ist eine Folge des dynamischen Druckes der Strömung vom Paß und nicht durch den Fall der Luftmassen erzeugt. Es wäre daher sehr wünschenswert, Vertikalanemometer in Noworossisk zu haben. Die weitere Erörterung zeigt, daß immer noch ein Gradient zwischen Paßhöhe und Stadt von etwa 1 mm in Betracht zu ziehen ist. Hierdurch wird die Erscheinung erklärt, daß es während der Bora Momente gibt, wo der Druck auf der Paßhöhe 1 mm höher ist als im Hafen; alles in allem ein verwickelter Fall von Luftmassen mit starken Wirbelerscheinungen. Die Notiz auf S. 397 beseitigt einen von Pearson (Phil. Trans. 1898) und Hooker (Quart. J. Roy. Met. Soc. 1908) gemachte Einschränkung bei der von ihnen bewirkten Einführung der auch jetzt von Arndt benutzten Regressionslinien. Lp.

Weitere Literatur.

A. BLUDAU. Die Kartenprojektionen in elementarer Behandlung. Düsseldorf: L. Schwann. V + 72 S. gr. 8.

G. EFFERT. Mathem. Geographie, für den Unterricht an höh. Lehranst. bearb. 4. Aufl. München: J. Lindauer, IV + 80 S. 8°.

A. EVERETT. The halo in the ricefield and the spectre of the Brocken. Nature **90**, 570-571.

J. EVERSHED. Luminous halos surrounding shadows of heads. Nature **90**, 592.

L. L. FERMOR. Luminous halos surrounding shadows of heads. Nature **90**, 592-593.

O. FISHER, H. F. PARSONS, L. DONCASTER. Luminous balos surrounding shadows of heads. Nature **20**, 621-622. Worthington Ebenda 647.

Unter anderem Verweis auf Benvenuto Cellini, Buch I, Kap. 128.

J. HANN. Lehrbuch der Meteorologie. Zweite, unter Mitwirkung von R. Süring umgearbeitete Auflage. Erste Lieferung. Leipzig: Tauchnitz.

E. HÜBNER. Beitrag zur Theorie der isostatischen Schwerebeschleunigung. Diss. Berlin. 51 S. 8⁰.

R. T. A. INNES. Note on the Newcomb operators in the development of the perturbative function. Trans. South Africa Roy. Soc. **3**, 337-339.

W. HILLERS. Über eine leicht beobachtbare Luftspiegelung bei Hamburg und die Erklärung solcher Erscheinungen. Unterrichtsbl. f. Math. **19**, 21-38.

A. HOLMES. The age of the Earth. London and New York: Harper and Brothers. XII u. 196 S. [Nature **91**, 343.]

M. MILANKOWITSCH. Beitrag zur mathematischen Theorie des Klimas. Belgrad Akad. **87**, 136-130. (Serbisch, 1912.)

E. WEIGHARDT. Mathematische Geographie. Vierte, verbesserte und vermehrte Aufl. Bühl: Konkordia. 48 S. 8⁰.

E. WETZEL. Astronomische Geographie. Umgearbeitet von W. Mewius. Siebente, vermehrte und verbesserte Aufl. Bielefeld: Velhagen & Klasing VI + 188 S. 8⁰.

N. J. ZINGER. Über die Abbildung der ellipsoidischen Erdoberfläche auf eine Kugel mit Erhaltung der Inhalte oder der Konformität der unendlich kleinen Figuren. St. Petersb. Akad. Bull. 1913, 383-404. (Russisch.)

Anhang.

H. BOSMANS. L'histoire des mathématiques chinoises et japonaises par Yoshio Mikami. Rev. des qu. sc. **24**, 611-613.

Mikami beweist sich als schlecht über die europäischen Gelehrten unterrichtet, die auf die chinesische Mathematik Einfluß gehabt haben.
Mn. (Lp.).

H. BOSMANS. Grégoire de Saint Vincent. Biogr. nation. de Belgique **21**, 141—170.

Gregorius von Sanct Vincentius, geboren zu Brügge am 8. September 1584, gestorben zu Gent am 27. Januar 1667, in den Jesuitenorden 1605 in Rom eingetreten, wo er ein Schüler von Clavius war, ist besonders durch seinen Folianten von 1250 Seiten bekannt: „Problema austriacum plus ultra Quadratura Circuli" (Antwerpen 1647). Huygens und andere haben die vermeintlichen Kreisquadraturen von Gregorius von St. Vincentius widerlegt; allein sein Buch enthält: 1. Unzählige Eigenschaften der Kegelschnitte. 2. Beweis der Gleichheit der Bogenlänge der Parabel und der Archimedischen Spirale. 3. Ein geometrisches Äquivalent zu der Reihe für $\log(1+x)$. 4. Endlich und vor allem allgemeine Sätze über die Grenze einer Summe unendlich kleiner Größen, die den größten Einfluß auf Huygens, Newton, Leibniz gehabt haben (vgl. F. d. M. **42**, 5, 1911). Mn. (Lp.).

H. BOSMANS. Sarasa. Biogr. nation. de Belgique **21**, 389-393.

Alphonse Antoine de Sarasa, geboren zu Nieuport am 31. Oktober 1617, gestorben zu Antwerpen am 1. Juli 1667, ein Jesuit, verteidigte die Kreisquadratur von Gregorius von St. Vincentius gegen Mersenne in einer Schrift von 35 Folioseiten: Solutio problematis a R. P. Marino Mersenno minimo propositi, 1649. Mn. (Lp.).

A. FAVARO. François Blondel et ses études sur les Nuove Scienze de Galilée. Rev. des qu. sc. **24**, 353-380.

Eine etwas langatmige Biographie von François Blondel, dem französischen Professor der Mathematik und Ingenieur, einem Freunde von Viviani. Er hatte die Mechanik Galileis sich gut zu eigen gemacht, wie dies seine

Schriften über die Kunst des Bombenwerfens beweisen. In einem Punkte hat er sie verbessert; er wies nach, daß die Gestalt eines Balkens von gleichem Widerstande nicht dieselbe ist, wenn er auf zwei Stützen ruht, wie in dem Falle, wenn er nur an einem Ende in einer Mauer befestigt ist. Mn. (Lp.).

J. Neuberg. Jean Pierre Schmit. Biogr. nation. de Belgique **21**, 734-736.

J. P. Schmit, geboren zu Luxemburg am 1. Mai 1817, gestorben zu Brüssel am 15. März 1903, war Repetitor (1836-1868), dann Professor (1868-1880) der darstellenden Geometrie an der Universität von Lüttich. Er hat einen Cours de géométrie descriptive veröffentlicht (Liége, Desoer, 1868-1874, 307 S. gr. 8°, 474 Fig. auf Tafeln) und verschiedene Studien über Hygiene. Mn. (Lp.).

J. Neuberg. Nicolas Constant Schmit. Biogr. nation. de Belgique **21**, 736-737.

Geboren zu Brüssel am 8. März 1832, gestorben ebenda am 6. Februar. 1879, Professor an der Universität von Brüssel von 1858 bis 1879, hat außer seiner Inauguraldissertation von 1858 kaum etwas Mathematisches veröffentlicht. Mn. (Lp.).

J. Neuberg. Antoine Prosper Schorn. Biogr. nation. de Belgique **21**, 949-951.

A. P. Schorn, geb. zu Luxemburg am 11. Juni 1830, gestorben zu Lüttich am 16. Juni 1898, war Repetitor (1866-1880), dann Professor (1880-1894) der darstellenden Geometrie an der Universität von Lüttich. Er hat 1878-1882 und 1893 eine „Géométrie descriptive appliquée" (Schatten, Steinschnitt, Perspektive) veröffentlicht. Mn. (Lp).

Université de Gand. Liber Memorialis. Notices biographiques. Tome VI. Faculté des Sciences et Écoles spéciales du Génie civil et des Arts et Manufactures. Faculté de Médecine. Gand: Vanderporten. VI + 618 S. 4°.

Lebensläufe aller Professoren der naturwissenschaftlichen und der medizinischen Fakultät der Universität von Gent seit ihrer Gründung 1817 bis zum 1. Januar 1913. Die Lebensläufe der verstorbenen Professoren sind im allgemeinen von ihren Nachfolgern verfaßt, die der lebenden sind kurze, meistens von ihnen selbst gelieferte Lebensbeschreibungen nebst einem vollständigen Verzeichnis ihrer Schriften. Mn. (Lp.).

E. Mansion. J. Ch. Hauff. Lib. Mem. Univ. Gent **2**, 9-10.

Karl Hauff, geboren zu Stuttgart am 21. April 1766, gestorben zu Brüssel am 24. Dezember 1846, war Professor der Physik und Chemie an der

Universität von Gent 1817-1830. In der Mathematik veröffentlichte er Untersuchungen über die Theorie der Parallelen (1819, 1821), von denen Gauß mit Recht gesagt hat, daß sie unter aller Kritik stehen. Man verdankt Hauff eine deutsche Übersetzung der geometrischen Bücher von Euklid (Marburg, 1798 u. 1807) sowie des Buches von Carnot über die Infinitesimalrechnung (Frankfurt, 1800). Mn. (Lp.).

P. Mansion. J. G. Garnier. Lib. Mem. Univ. Gent. **2**, 11-13.

Garnier, geboren am 13. September 1766 zu Reims, gestorben zu Brüssel am 20. Dezember 1840; nachdem er unter verschiedenen Titeln mit der École Polytechnique zu Paris und der École Militaire zu Saint-Cyr in Zusammenhang gewesen war, wurde er von 1817 bis 1830 Professor an der Universität Gent. Er hat dort die elementare und die höhere Mathematik, die reine und die angewandte Mechanik, die elementare und die mathematische Astronomie gelehrt. Er veröffentlichte Handbücher der Arithmetik, der Algebra, der Geometrie, der Trigonometrie, der analytischen Geometrie, der Differential- und der Integralrechnung, der Statik; sie hatten fast alle mehrere Auflagen. Er ist der Haupterneuerer des Studiums der höheren Mathematik in Belgien gewesen und hat zu Schülern fast alle gehabt, die nach 1830 auf diesem Felde einigen Ruf hatten. Vor seiner Übersiedelung nach Belgien hatte er das mathematische Genie von Fourier und Poisson erkannt.

Mn. (Lp.).

P. Mansion. J. A. Timmermans. Lib. Mem. Univ. Gent **20**, 45-47.

Alexis Timmermans, geboren zu Brüssel am 22. August 1801, gestorben zu Gent am 2. September 1864, war Professor der Infinitesimalrechnung und der analytischen Mechanik an der Universität zu Gent von 1835 bis 1864. Er hat veröffentlicht: Traité de calcul différentiel et de calcul intégral (zwei Ausgaben 1854, 1860). Traité de mécanique rationnelle (zwei Ausgaben 1855, 1862). Verschiedene Abhandlungen. Die eigenartigsten sind ein Essai de géométrie analytique (Lille, 1828) und ein Beweis des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten, abgeleitet aus dem Kräfteparallelogramm von Simon Stevin (Belg. Bull. 1846). Mn. (Lp.).

P. Mansion. A. H. E. Lamarle. Lib. Mem. Univ. Gent **2**, 87-91.

Ernest Lamarle, geboren zu Calais am 16. September 1806, starb zu Douai am 14 März 1875. Er war Studieninspektor und Professor des Konstruktionskursus für Hochbau an der École du Génie civil zu Gent von 1838 bis 1867. Er hat besonders über die Infinitesimalrechnung und ihre Anwendungen auf die Theorie der Kurven und Oberflächen geschrieben. Wir führen an: Étude approfondie sur deux équations fondamentales du calcul différentiel (Belg. Mem. Ac. in 4° **29**, 1855). — Exposé géométrique du calcul différentiel et intégral (ebenda, Collection in 4°, **11** u. **12**). Er greift zu sehr auf die Anschauung zurück; indem er aber bei dem tieferen Eindringen die Existenz des Differentialquotienten der stetigen Funktionen zu beweisen sucht,

macht er als erster 1855 den Unterschied der oberen und unteren Schranken (bornes) der Verhältnisse $\triangle y : \triangle x$ für positives oder negatives $\triangle x$.

Mn. (Lp.).

P. Mansion. E. J. Boudin. Lib. Mem. Univ. Gent **2**, 107-110.

Emmanuel Boudin, geboren zu Nivelles am 28. Februar 1820, gestorben zu Gent am 26. April 1893, war Professor an der Genter Universität von 1846 bis 1892 (Hydraulik, Technologie der elementaren Handwerke und des mechanischen Entwerfens, Stabilität der Konstruktionen, Wahrscheinlichkeitsrechnung). Seine „Leçons sur la stabilité des constructions" haben drei Auflagen erlebt (1884, 1887, 1890). Seine „Leçons de calcul des probabilités" sogar vier (1865, 1870, 1886, 1889); sie sind beachtenswert wegen ihrer Klarheit und wegen der Anordnung des Stoffes. Mn. (Lp.).

E. Fagnart. F. Dauge. Lib. Mem. Univ. Gent **2**, 116-122.

Félix Dauge, geboren zu Brüssel am 24. Mai 1829, gestorben zu Gent am 25. Juli 1899, ist Professor an der Universität zu Gent von 1858 bis 1898 gewesen (Astronomie, mathematische Methodenlehre, analytische Geometrie, höhere Algebra). Veröffentlichungen: 1. Cours de méthodologie mathématique (zwei Ausgaben 1883, 1896). Außer der Erörterung der grundlegenden Prinzipien der Mathematik enthält das Buch eine Einleitung in die höhere Zahlentheorie und die höhere Geometrie. 2. In der belgischen Akademie eine sehr originelle Mitteilung: „Sur la parallaxe de profondeur des tâches solaires".

Mn. (Lp.).

E. Mansion. Mathias Schaar. Lib. Mem. Univ. Gent **2**, 123-128; Biogr. nation. de Belgique **21**, 554-557.

Mathias Schaar, geboren zu Luxemburg am 28. Dezember 1817, gestorben zu Nizza am 26. April 1867, war in der Mathematik ein Autodidakt. Professor für mathematische Methodik, analytische Geometrie und Astronomie an der Genter Universität war er von 1854 bis 1857; — für Astronomie, Infinitesimalrechnung und Wahrscheinlichkeitsrechnung an der Universität von Lüttich von 1857 bis 1864; — dann wieder in Gent für Infinitesimalrechnung und analytische Mechanik von 1864 bis 1867. Er hat in der belgischen Akademie eigenartige Untersuchungen über die Theorie der Eulerschen Integrale und der quadratischen Reste veröffentlicht. Mn. (Lp.).

P. Mansion. Charles Bergmans. Lib. Mem. Univ. Gent **2**, 187-189.

Charles Bergmans, geboren zu Gent am 18. August 1830, gestorben ebenda am 29. Oktober 1909. Er war in dieser Stadt Professor am Cellège Ste. Barbe 1854-1860, am Athénée Royal von 1860-1893, Repetitor an der technischen Anstalt 1862-1863, mit der Abhaltung von Übungen in der elementaren Mathematik bei der naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität beauftragt von 1882-1893. Er hat für verschiedene Zeitschriften geschrieben

und geschätzte Lehrbücher der elementaren Arithmetik und Algebra veröffentlicht. Das erste Kapitel seiner Premières notions d'algèbre (Gent, 1889) ist die einfachste Einführung in diese Wissenschaft, die wir kennen. Sein Traité d'arithmétique élémentaire (Gent, 1893) enthält originale Noten über die Geschichte des Rechnens, die wert sind, erhalten zu werden.

Mn. (Lp.).

A. Demoulin. Junius Massau. Lib. Mem. Univ. Gent 2, 250-257.

Junius Massau, geboren zu Gosselies am 9. April 1852, gestorben zu Gent am 10. Februar 1909, war Professor der theoretischen Mechanik von 1878 bis 1909, der graphischen Statik von 1892 bis 1909 an der Universität von Gent. Man verdankt ihm sehr eigenartige Arbeiten über die „Intégration graphique et ses applications" (1877-1889, 1900-1904). In ihnen findet man u. a. das allgemeine Prinzip der Nomographie, wie M. d'Ocagne ausdrücklich anerkannt hat. In seinem „Cours de mécanique" gebraucht er die Vektoren in einer Form, deren methodischen Wert eine dreißigjährige Erfahrung erwiesen hat. Dieser Lehrgang hat zu Lebzeiten des Verf. drei Auflagen gehabt (1882, 1883, 1891-1896). Eine vierte erscheint, von seinen Schülern besorgt (Statik 1911, Kinematik 1913).

Mn. (Lp.).

P. Mansion. J. J. Sylvester (1814-1897). Rev. des qu. sc. (3) **23**, 568-579.

Biographie. Besprechung der vier Bände der Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester, herausgegeben von Baker, 1904 bis 1912. Angabe seiner Hauptentdeckungen und seiner eigenartigsten Ansichten.

Mn. (Lp.)

E. Doležal. Ministerialrat Professor Dr. W. Tinter Edler von Marienwil †. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Vereins **65**, 25-27.

W. Tinter, geb. 1839 zu Jauernig in Österr.-Schlesien, 1864 Assistent, 1869 Privatdozent an der Technischen Hochschule in Wien, 1870 Professor an der Militärakademie, 1873 an der Technischen Hochschule in Wien zuerst für praktische Geometrie, dann für sphärische Astronomie und höhere Geodäsie, 1910 in den Ruhestand getreten und geadelt, † 18. Dezember 1912. Mit Bild.

Schr.

E. Doležal. Ministerialrat Professor Dr. Wilhelm Tinter Edler von Marienwil †. Österr. Zs. f. Vermessw. **11**, 2-3.

Biographie im 8. Jahrgang dieser Zeitschrift (1910). Tinter, der inzwischen in den Ruhestand getreten war, starb, 73 Jahre alt, am 18. Dezember 1912.

Schr.

Weitbrecht. Nachruf für Direktor W. von Schlebach. Zs. f. Vermessw. **42**, 34-39 (mit Bild).

Geb. 13. August 1847 in Rot am See (württ. Oberamt Gerabronn), studierte in Stuttgart das Baufach, bestand 1868 die erste höhere Staatsprüfung, machte den Feldzug 1870/71 gegen Frankreich mit, wurde seit 1871 als Repetent und Assistent am Polytechnikum zu Stuttgart verwendet, ging 1874 als Lehrer für praktische Geometrie an das Technikum zu Winterthur, 1877 als Professor für geodätische und mathematische Fächer an die Baugewerkschule zu Stuttgart, wurde 1884 technischer Vorstand des Katasterbureaus und technisches Mitglied des Steuerkollegiums zu Stuttgart und rückte durch verschiedene Ämter auf bis zum Range eines Oberfinanzrates 1898, war seit 1901 hauptamtlicher Vorstand der topographischen Abteilung des Statistischen Landesamtes, seit 1909 Direktor in der geologischen Abteilung. Er starb nach längerem Leiden am 9. Dezember 1912. Lp.

H. Bosmans. Les écrits chinois de Verbiest. Rev. des qu. sc. (3) **24**, 272-298.

Ergänzungen und Berichtigungen zu der vom Verf. 1912 veröffentlichten Biographie (F. d. M. **43**, 13, 1912), veranlaßt durch die Veröffentlichung des Sinologen Van Hée in den Mélanges publiés par la Société d'Émulation de Bruges: „Ferdinand Verbiest: Écrits chinois" (1913).

Mn. (Lp.).

Lotz, Eggert, Hüser. Regierungs- und Obersteuerrat Steppes †. Zs. f. Vermessw. **42**, 794-795.

Kurzer Nachruf des Vorstandes des Deutschen Geometervereins für Karl Adolf Steppes, geb. zu Wertheim in Baden 24. Juni 1843, gest. 26. September 1913 zu München. Lp.

E. Doležal. K. Steppes †. Österr. Zs. f. Vermessw. **11**, 354-355.

K. Steppes, Vermessungsgeometer, gestorben 26. September 1913 in München. Schr.

E. Engel. Theodor Tapla. Österr. Zs. f. Vermessw. **11**, 105-107.

Theodor Tapla, geboren 1853 zu Skotschau in Österr.-Schlesien, Teilnehmer am Okkupationsfeldzug in Bosnien 1878; 1884 a. o., 1891 o. Professor f. Geodäsie und darstellende Geometrie an der Hochschule f. Bodenkultur in Wien, gestorben am 20. Februar 1913. Schr.

Wł. Natanson. Einige Worte zum Andenken an August Witkowski. Wiad. Mat. **17**, 196-201. (Polnisch.)

Gedächtnisrede, gehalten auf der dem verstorbenen bedeutenden Gelehrten gewidmeten Trauersitzung der Kopernikusgesellschaft polnischer Naturforscher am 12. Juni 1913 in Krakau (vgl. S. 35 dieses Bandes). A. R.

S. Dickstein. A. W. Witkowski (12. Okt. 1853 bis 21. Jan. 1913). Wiad. Mat. 17, 189-193. (Polnisch.)

Nachruf der Redaktion mit einer Photographie des Gelehrten. Unveränderte Wiedergabe der am 12. Juni 1913 von S. Dickstein bei der Trauersitzung in Krakau gehaltenen Rede. A. R.

K. Zakrzewski. Die wissenschaftliche Tätigkeit von August Witkowski. Wiad. Mat. 17, 211-224. (Polnisch.)

Gedächtnisrede, gehalten am 12. Juni 1913 in Krakau, in der die bedeutendsten wissenschaftlichen Arbeiten des Verstorbenen besprochen werden. A. R.

M. Grotowski. August Witkowski. Wektor 2, 449-462. (Polnisch.)

Ausführliche Besprechung der Arbeiten des verstorbenen Physikers.

A. W. Witkowski, geboren 1853 in Brody in Galizien, erhielt seine wissenschaftliche Ausbildung in Krakau, in Berlin bei H. Helmholtz und in Glasgow bei Lord Kelvin. Im Zeichen dieser beiden großen Physiker stehen auch seine Erstlingsarbeiten, von denen folgende hervorzuheben sind. Zunächst eine Arbeit über Polarisationsströme in den Abhandlungen der Krakauer Akademie, sodann eine gleichfalls von der Akademie herausgegebene Arbeit über die beim Benetzen fester Körper entstehende Wärme, die sich auf die Ideen von Helmholtz in der Thermodynamik gründen. Im Jahre 1888 übernahm Witkowski die Lehrkanzel für Physik an der Krakauer Universität als Nachfolger des berühmten Gelehrten v. Wróblewski und widmete sich seither der Erforschung der Eigenschaften der Gase, insbesondere bei niedrigen Temperaturen. Er schrieb in den Abhandlungen der Krakauer Akademie über die Dilatation der Luft und über die spezifischen Wärmen der Gase. Bedeutend sind ferner seine Untersuchungen über den Joule-Kelvin-Effekt, die Abkühlung der Gase bei irreversibler Abkühlung, bedeutend auch seine Experimente über die Eigenschaften des Wasserstoffes bei niedrigen Temperaturen, über die Eigenschaften des flüssigen Sauerstoffes, über die Schallgeschwindigkeit in komprimierter Luft usw. Seine Lehrtätigkeit gipfelt in der Verfassung eines ausgezeichneten dreibändigen Werkes: „Grundlagen der Physik", das zu den besten physikalischen Lehrbüchern der Weltliteratur gehört. Endlich veröffentlichte Witkowski in Warschau ausgezeichnete mathematisch-physikalische Tabellen. Diese rastlose Tätigkeit des als Lehrer hochverdienten, als Mensch hochgeschätzten Gelehrten fand am 21. Januar 1913 durch einen frühen Tod ihr vorzeitiges Ende. A. R.

J. Thirion. Aristarque de Samos, à propos d'un livre récent. Rev. des qu. sc. (3) 24, 90-126.

Kritische Besprechung des Buches von Heath: „Aristarchus of Samos, the ancient Copernicus" (vgl. S. 56 dieses Bandes). Gelegentlich weist der Verf. auf manche Schnitzer in den Ausdeutungen der Geschichte von Ari-

starchos hin. Wenn Heath nicht mit Schiaparelli übereinstimmt, stellt sich Thirion im allgemeinen auf die Seite von Heath. Mn. (Lp.).

L. Van Hée. La notation algébrique en Chine au XIIIe siècle. Rev. des qu. sc (3) **24**, 374-387.

Der Verf., ein Sinologe und nicht ein Mathematiker, macht uns mit den algebraischen Bezeichnungen von Tchou-Che-Kié (nach Mikami Chu Shih-chieh) bekannt, dem hervorragendsten chinesischen Mathematiker des dreizehnten Jahrhunderts. Die Chinesen können gleichzeitig vier Unbekannte gebrauchen, die sie mit ihren Koeffizienten an die vier Seiten eines zentralen Gehäuses setzen, das von einem besonderen Zeichen besetzt wird. Wir bezweifeln stark, daß der chinesische Verfasser Gleichheiten mit der Null allein geschrieben habe, selbst, wenn man es so verstehen will, in dem zweiten Gliede einer Gleichung, wie Van Hée es annimmt (vgl. Mikami, The development of mathematics in China and Japan, Leipzig 1912, S. 91, Lp.).

Mn. (Lp.).

A. Shinomiya. Das kaihô-tetsujutsee. Tôdoku Math. J. **4**, 54-67. (Japanisch.)

Das Verfahren zur Auflösung einer Zahlengleichung zweiten Grades und höherer Grade in der alten japanischen Mathematik (Rev. sem. **22**$_2$, 16).

Lp.

J. Grabowski. Die Arithmetica linearis von Benedikt Herbest. Cracoviae 1577. Krak. Abhdl. (3) **13**, 401-415.

Der Verf. dieser Arithmetik war im XVI. Jahrhundert Professor an der Krakauer Universität und veröffentlichte im Jahre 1561 diese Arithmetik, die dann mit gewissen Änderungen in zweiter Auflage im Jahre 1577 erschienen ist. Die erste Auflage ist bereits mehrfach besprochen worden, dagegen noch nicht die zweite. Dieselbe enthält nicht mehr die sogenannten kaufmännischen Regeln der ersten Ausgabe, dagegen ist das Ziffernrechnen ausführlicher dargestellt. An den Stoff der Arithmetik und an diese Unterschiede zwischen den beiden Ausgaben knüpft der Verf. eine Untersuchung über den Rechenunterricht an den Schulen des XVI. Jahrhunderts. (Vgl. die Anzeige S. 45 dieses Bandes.)

A. R.

H. Bosmans. Sur quelques exemples de la méthode des limites chez Simon Stevin. Brux. S. sc. (B) **37**, 171-199.

H. Bosmans. Les démonstrations par l'analyse infinitésimale chez Luc Valerio. Brux. S. sc. (B) **37**, 211-228. (Mansion, Rapports (A), 66-67, 101.)

Die Werke von S. Stevin, die vlämisch 1586, lateinisch 1608, französisch 1634 veröffentlicht sind, und die lateinisch abgefaßten Schriften von Valerio

über den Schwerpunkt (1604) und über die Quadratur der Parabel (1606) enthalten allgemeine Lehrsätze über die Untersuchung der Grenze einer unbeschränkt wachsenden Zahl unendlich kleiner Größen. Die beiden unabhängig voneinander arbeitenden Mathematiker (Valerio hat den vlämischen Text Stevins nicht lesen können) sind sich der allgemeinen Tragweite ihrer Methode bewußt. Grégoire de S. Vincent hat die Schriften von Stevin und Valerio gekannt und sie im VII. Buch seines „Opus geometricum“ benutzt, welches Werk offensichtlich auf Newton gewirkt hat, der, genau wie Grégoire de S. Vincent, allgemeine Sätze gibt, die denen von Stevin und Valerio ähneln. Es besteht also Stetigkeit und nicht ein unvermittelter Sprung in der Geschichte der Grenzmethode. Mn. (Lp.).

M. Horton und E. Wiedemann. Avicennas Lehre vom Regenbogen nach seinem Werke al Schifâ. Mit Bemerkungen von E. Wiedemann. Meteorol. Zs. **30**, 533-544.

In dem philosophischen Werke Kitâb al Schifâ hat Ibn Sînâ (Avicenna, 980-1037) neben Metaphysik, Logik und Ethik die Naturwissenschaften eingehend behandelt. In den beiden dem Halo und dem Regenbogen gewidmeten Kapiteln wird zunächst die Lehre vom Sehen behandelt. In dem vorliegenden Aufsatze wird der Inhalt der beiden Kapitel, an manchen Stellen stark gekürzt, aber meist mit den Worten Avicennas wiedergegeben. Am Schluß bemerkt Wiedemann: „Aus den Entwicklungen geht hervor, daß Avicenna sich im großen und ganzen an die Anschauungen des Aristoteles usw. anschließt und wie sie die Reflexion an ebenen Flächen zur Erklärung der Erscheinung des Regenbogens benutzt. Er wird darin weit von Kamâl al Dîn al Fárisi überholt. Besonders zu beachten ist, daß Avicenna den Sitz des Regenbogens nicht in die Wolke selbst, sondern vor sie in den feinen Dunst verlegt. Die Beobachtungen, die dies stützen sollen, sind sehr sorgfältig diskutiert. Interessant ist zu sehen, daß Avicenna nicht von blindem Autoritätsglauben erfüllt ist, sondern die Sätze der Peripatetiker mehrfach kritisiert.“ Lp.

Feldhaus. Zur Geschichte des ältesten Fernrohrs. Zs. f. Vermessw. **42**, 422-424. (Aus den Quellenforschungen zur Geschichte der Technik und Naturwissenschaften).

Nach einer Stelle bei William Bourne (Mathematiker, † 1583), veröffentlicht von James O. Halliwell in „Rara Mathematica“, London 1839, S. 39-47, ist Leonhard Digges († 1571), der auch das Wort Theodolit zuerst gebraucht hat, nach einem Hinweis von Carl Graf von Klinckowstroem in München als der Erfinder des ersten Spiegelteleskopes anzusehen. Die Beweisstelle der Schrift von Bourne wird in deutscher Übersetzung mitgeteilt. Lp.

H. F. Baker. The place of pure mathematics. Rep. Brit. Ass. **83**, (Birmingham), 367-376.

Eröffnungsrede des Vorsitzenden der Abteilung A (Mathematik und Physik). In der Einleitung wirft der Redner die Fragen auf: „Was bedeutet das

Thema? Um was kann es sich handeln, wenn nicht uranfänglich die Richtung auf die Erörterung der Gesetze der Naturerscheinungen gegeben wird? Was für Dinge sind es, die allein die Gedanken einer Lebenszeit beschäftigen können? Ich beabsichtige, dies ganz unpassend dadurch zu beantworten, daß ich einige der breiteren Ausgänge des gegenwärtigen Interesses vorführe.“ Die einzelnen Teile der Rede sind dann überschrieben: Präzision der Definitionen. Variationsrechnung. Nichteuklidische Geometrie. Gruppentheorie. Theorie der algebraischen Funktionen. Theorie der Funktionen komplexer Variabeln: Differentialgleichungen. Zahlentheorie.

„Von allem, was von den geistigen Tätigkeiten als am besten vergewissert gilt, am sichersten, am bestimmtesten dasteht, was am längsten und allgemeinsten gilt, was am tiefsten und am weitesten reicht, von diesen Tätigkeiten ist die reine Mathematik das Symbol und die Summe.“ Lp.

H. Dingler. Über die logischen Paradoxien der Mengenlehre und eine paradoxienfreie Mengendefinition. Zs. f. positivische Philos. **1**, 8 S. Sonderdruck.

„Die sämtlichen Paradoxien der Mengenlehre kommen zustande, indem ein Mengenbegriff durch synthetische Definition gebildet wird und sich nun als widerspruchsvoll erweist.“

„Nun bedarf jeder solcher Begriff eines Existenzbeweises. Mache ich die Annahme, irgendeine Menge M von Dingen der Eigenschaft F (welcher Begriff nach Voraussetzung existiert) umfasse einmal alle diese Dinge, dann führt dies zu einem Widerspruch. Folglich ist diese Annahme falsch, und es enthält keine Menge von Dingen der Eigenschaft F jemals alle diese Dinge.“

„Die bekannten Paradoxien der Mengenlehre sind lediglich solche Nichtexistenzbeweise und lassen sich meist in die Form eines indirekten Beweises dafür bringen, daß die Annahme, die betreffende Menge enthalte einmal alle Dinge der betreffenden Art, falsch sei.“

Die vom Verf. aufgestellte Definition, die aber erst durch vorangegangene Begriffsbestimmungen ihre Bedeutung erhält, lautet: „Jede Gesamtheit von irgendwelchen Dingen nennen wir eine Menge, mit dem Hinzufügen, daß, falls diese Gesamtheit keine einfache Menge ist, sie eines Existenzbeweises bedarf.“ In dieser Weise kann man „den ursprünglichen Cantorschen Mengenbegriff beibehalten“.

Lp.

Th. de Donder. Introduction à la théorie des invariants intégraux. Belg. Bull. Sc. 1913, 1043-1073.

Um die Schwierigkeiten zu vermeiden, welche die Theorie der Integralinvarianten bietet, wenn man sie auf die Theorie der vielfachen Integrale in einem Überraum stützt, setzt der Verf. einen anderen Gang auseinander, indem er von der Untersuchung der multilinearen Differentialformen ausgeht.

Mn. (Lp.).

M. Lecat. Sur les permanents. Brux. S. sc. (B) **37**, 436-455.

Den Permanenten (Determinanten mit r Indexen), bei denen alle Glieder das Vorzeichen + haben, sind manche Eigenschaften gemeinsam mit den wirklichen Determinanten; sie unterscheiden sich in anderen, manchmal schwierig zu fassenden. Der Verf. beweist besonders eine Reihe von solchen der letzteren Art; die Bezeichnungen sind aber so verwickelt, daß es unmöglich ist, irgendeine von ihnen anzuführen. Mn. (Lp.).

M. Lecat. Sur la multiplication des déterminants. Brux. S. sc. (B) **37**, 285-291.

Der Verf. hat in einer der belgischen Akademie überreichten, noch nicht veröffentlichten Abhandlung das Produkt zweier Determinanten ungerader Klassen (r, s) gefunden. Hier gibt er eine alle Fälle umfassende Formel, also selbst wenn rs gerade ist, und davon verschiedene, wegen der Verwickelung der Sätze und der Bezeichnungen äußerst abstrakte Anwendungen. Mn. (Lp.)

E. Dumont. Cours d'arithmétique théorique pratique suivi d'une Note sur les théories logiques des nombres. Bruxelles: De Boeck; Paris: Vuibert. XVI + 265 S. 8°.

Zusammenfassung einer von P. Mansion in Mathesis **35** [(4) **5**], 79-85, 1915, veröffentlichten Beurteilung: Das Buch von Dumont beruht auf einer zerbröckelnden Grundlage; der Verf. bringt nämlich den Zahlbegriff in Abhängigkeit von dem der geometrischen Größe, der doch ohne jenen Zahlbegriff selbst in Wahrheit undefinierbar ist. Die Ordnung des Stoffes ist in manchen Abschnitten seltsam; so geht die Kombinatorik den Operationen mit den ganzen Zahlen voran. Der Stil ist zuweilen vernachlässigt. Um ein klassisches Werk zu sein, ist es viel zu lang, zu sehr gespickt mit algebraischen und anderen Symbolen. Trotz alledem wird dieser Lehrgang solchen Lehrern von Nutzen sein, die imstande sind, die dem Anschein nach geometrischen Beweise des Verf. in rein arithmetische zu verwandeln. Die Schlußnote dürfte für manchen gewisse arithmetisierende Bestrebungen der Neuzeit über die Prinzipien der Mathematik enthüllen. Mn. (Lp.).

L. Aubry. Un théorème d'arithmétique. Mathesis **33** [(4) **3**], 33-35.

Ist A teilerfremd mit N und $B/\sqrt{N}$ nicht ganz zahlig, so läßt sich $Ax - Nz = By$ ganzzahlig in x, y, z auflösen, wenn A, B, N ganze Zahlen sind. Die Lösungen liegen zwischen $+\sqrt{N}$ und $-\sqrt{N}$. Mn. (Lp.).

P. Mansion. Sur les recherches de Laplace relatives à la théorie des erreurs. Brux. S. sc. **37** (B), 107-117 (E. Goedseels, Rapport (A) 67-69); Mathesis **33** [(4) **3**], Suppl. 4, 11 S.

Darlegung der drei Methoden (Minimalmethode des größten Fehlers, Lagenmethode, Methode der kleinsten Quadrate) bei Laplace in der Mécanique céleste und in der Théorie analytique des probabilités; Kritiken von

Gauß und von Goedseels. Vergleichung der drei Methoden an Beispielen; Unbestimmtheit der drei Methoden bei Vertauschung der Unbekannten. Eine bessere Methode wäre eine solche, die alle gegebenen Gleichungen in bezug auf alle gesuchten Unbekannten auflöste und einsichtig einen Mittelwert unter den gefundenen Lösungen auswählte. Mn. (Lp.).

Ad. Hiller. Lohnsysteme und Selbstkostenberechnung. (Vortrag.) Mitt. des deutschen Ing.-Ver. in Mähren **6**, 75-82.

Kritische Besprechung der Lohnsysteme: Zeitlohn, Stücklohn, Zulagen, Prämiensystem. Aufstellung eines Lohnsystems: $L = ml_0 t + \mu H \frac{t_0 - t}{t_0}$, wo l_0 Lohn für die Zeiteinheit, t_0 normale, t wirkliche Arbeitszeit, H höchster Lohn, m Aufbesserungsfaktor, μ Zahlenfaktor. Schr.

F. Wolters. Éléments de mathématiques supérieures. Cours professé à l'École préparative du Génie civil. Tome I. Gand: F. et R. Buyk Frères. (Autographie in 4⁰ de 466 pages.)

Ein für Techniker bestimmter Lehrgang über die algebraische und die infinitesimale Analysis, der ohne Übertreibung peinlich in bezug auf Strenge ist. 1. Funktionen. 2.—5. Theorie der Grenzen nebst Anwendungen. 6. Imaginäre Zahlen. 7.—8. Determinanten, lineare Gleichungen. 9.—10. Exponentiale und logarithmische Funktionen. 11. Maxima und Minima. 12. Unendlichklein. 13.—14. Stetigkeit, Abgeleitete, Differentiale, Ableitung. 15. Integrale. 16.—18. Funktionen von einer Funktion, zusammengesetzte und implizite Funktionen. 19. Höhere Abgeleitete, partielle Abgeleitete. 20. Rechnung mit Differentialen. 21. Zerlegung der rationalen Brüche. 22. Prinzipien der algebraischen Gleichungen. 23. Graphische Lösungen der Gleichungen. 24.—26. Reihentheorie. 27. Sätze von Taylor und Maclaurin. 28. Integrationsmethode. 29.—30. Geometrische Anwendungen. 31. Angenäherte Berechnung der bestimmten Integrale. 33. Planimeter. Mn. (Lp.).

W. von Dyck. Über die singulären Stellen der Differentialgleichungen erster Ordnung zweiten Grades. Verhdl. Naturf. Ges. 1912 (Münster) $\mathbf{2}_1$, 5-6.

Hinweis auf die Ergebnisse der vom Verf. angeregten Dissertation von J. Weigel, die in Leop. Nova Acta **96**, 279-343 erschienen ist (F. d. M. 43, 403, 1912). Lp.

G. Pesci. Studio comparativo sulle ordinarie tavole logaritmo-trigonometriche. Nota quinta. Considerazioni secondarie. — Nota sesta. Tavole logaritmo-trigonometriche proposte. Suppl. al Period. **16**, 49-53, 82-87.

Fortsetzung und Schluß des berichtenden Artikels, über den F. d. M. 43, 227, 1912 das Nötige gesagt ist. Lp.

A. M. Nell. Fünfstellige Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Funktionen. Neubearb. von L. Balser. 14. Aufl. Gießen: E. Roth, VI + 86 S. 8°.

Von der 13. Aufl. weicht die vorliegende außer durch Anbringung einiger Berichtigungen durch Hinzufügung einer Sterntafel sowie einer solchen für die Sternzeit am Mittag ab. Ba.

R. Haussner. Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen, in zwei Farben zusammengestellt von H. Schubert. Neue Ausg. Berlin u. Leipzig: G. J. Göschen, 175 S. 8°.

Ganz neu sind die Tafeln der Additionslogarithmen, der Subtraktionslogarithmen und der natürlichen Logarithmen. Aber auch die andern Tafeln haben mannigfache Verbesserungen und Erweiterungen erfahren. Dies gilt vor allem für die Tafel der geographischen Örter, der Konstanten der Erde und der Zeitgleichungen; letztere sind für die Jahre 1913 und 1914 angegeben. Ba.

K. Treven. Der Gebrauch des logarithmischen Rechenschiebers und des Präzisionsschiebers. Wien u. Leipzig: Fr. Deuticke. 28 S. gr. 8°.

Dieser Abdruck aus dem Rulfschen Lehrbuch der Mathematik für höhere Gewerbeschulen gibt die üblichen Regeln für die Benutzung des Rechenstabes nebst Begründung des Verfahrens. Sk.

P. Werkmeister. Rechenschieber zur Berechnung von Funktionen mit drei, vier und fünf Veränderlichen. Zs. f. Math. u. Phys. **62**, 93-106.

Um eine Relation $f(x) = \varphi_1(a) + \varphi_2(b) + \varphi_3(c)$ auf einem Rechenschieber darzustellen, kann man φ_1 und f auf dem Stab, φ_2 und φ_3 auf der Zunge, oder φ_1 und f auf dem Stab, φ_2 auf der Zunge, φ_3 auf dem Läufer verzeichnen, oder man kann $\varphi_1(a) + \varphi_2(b) = \psi(a, b)$ durch eine binäre Skala darstellen und diese wieder auf dem Stab oder auf der Zunge oder auf dem Läufer anbringen. Verschiedene Möglichkeiten ergeben sich noch, indem man den Läufer auch in der Querrichtung verschiebbar machen kann. Mit Hilfe der binären Skala kann auch noch die allgemeinere Form $f(x) = \varphi_1(a, b) + \varphi_2(c)$ ohneweiters dargestellt werden.

Eine ähnliche Diskussion wird für vier und fünf Variabeln durchgeführt. Schr.

P. Werkmeister. Ein neuer Rechenapparat für Maschinenbau und Elektrotechnik. Zs. f. Math. u. Phys. **61**, 326-328.

Beschreibung eines von Schleicher & Schüll in Düren in den Handel gebrachten kreisförmigen Rechenschiebers mit einer Glasscheibe für die beweglichen Skalen. Außer den gewöhnlichen Operationen löst er verschiedene Aufgaben über Tourenzahlen, Nutzeffekt, Kupferkabel usw. Schr.

Weitere Literatur.

M. Sono. On transitive groups viewed from group-characteristics. Kyôto Mem. Coll. Univ. 4, 271-313.

P. Mansion. Sur les exceptions apparentes au théorème de Jacques Bernoulli. Brux. S. sc. (A) 37, 137-139.

Die Ausnahmen rühren von einer fehlerhaften Auslegung des Satzes her.
Mn. (Lp.).

P. Mansion. Sur les recherches de Laplace relatives à la théorie des erreurs. Mathesis 33 [(4) 3], Suppl. 4, 11 S. Vgl. oben S. 1112.

A. Wallich. Betriebsorganisation mit besonderer Berücksichtigung des Taylorschen Verfahrens. Rundsch. f. Technik u. Wirtschaft 6, 92-94, 112-114, 130-132. Hierzu Taf. IV.

Zeitlohn und Stücklohn. Prämienlohnverfahren. Taylors Arbeiten. Kritik.
Schr.

D. Jackson. A formula of trigonometric interpolation. Amer. M. S. Bull. (2) 20, 68.

A. R. Schweitzer. The general logical significance of uniformity of convergence of series. Amer. M. S. Bull. (2) 20, 72.

I. J. Schwatt. The summation of a type of a family of trigonometric series. Phil. Mag. (6) 26, 895-898.

I. J. Schwatt. A method for the summation of a type of infinite series. Phil. Mag. (6) 26, 898-902.

L. L. Silvermann. On the definition of the sum of a divergent series. Columbia, Mo.: University of Missouri. 100 S. 8°. (The University of Missouri Studies. Math. Ser. Vol. I, Nr. 1.)

R. Reismann. Die graphische Behandlung von Zinseszins- und Rentenaufgaben. Zs. f. math. und naturw. Unterr. 44, 549-551.

C. G. Wetzel. Unterrichtsbriefe zur Einführung in die höhere Mathematik. Zweite bis achte Lieferung. Neunte bis sechzehnte Lieferung. Wien: Hartleben.

A. Sainte-Laguë. Notions de mathématiques. Avec préface de G. Koenigs. Paris: A. Hermann. VII + 512 S. 8°.

C. Jordan. Cours d'analyse de l'École Polytechnique. 3e édition, revue et corrigée. Tome II: Calcul intégral. Paris: Gauthier-Villars. 712 S. 8°.

A. Caprilli. Nuove formole d'integrazione. Livorno: Belforte. VII + 178 S. 16mo.

H. de Morin. Les appareils d'intégration. Intégrateurs simples, planimètres, intégromètres, intégraphes et courbes intégrales, analyseurs harmoniques. Paris: Gauthier-Villars. IV + 208 S. 8°.

Van der Flit. Über die angenäherte Berechnung der Flächen und der Integrale. St. Petersb. Polyt. Inst. Ann. 19, 159-204. (Russisch.)

K. Wallner. Die Funktion $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{3i}}{(3i)!}$ und ihre Abgeleiteten. Progr. Rothenburg o. T. 72 S. 8⁰.

Falk. Über eine symmetrische Darstellung einiger in der Theorie der elliptischen Funktionen vorkommenden Wurzelgrößen. 8⁰.

F. Schuh. Sur quelques formules approximatives pour la circonférence du cercle et sur la cyclométrie de Huygens. Arch. Néerl. (3) A **3**, 1-178.

F. Auerbach und R. Rothe. Taschenbuch für Mathematiker u. Physiker. 3. Jahrg. 1913. Leipzig: B. G. Teubner. X + 463 S. kl. 8⁰. Referat F. d. M. **42**, 1029, 1911.

H. C. E. Martus. Mathem. Aufgaben z. Gebrauche in den obersten Klassen höh. Lehranstalten. IV. Teil: Ergebnisse der Aufg. des III. Teils. 3. Aufl. Dresden: C. A. Koch, 245 S. 8⁰.

H. Edenhofer. Lösungen der Diplomvorprüfungsaufgaben aus allen Fächern d. höh. Mathem. sowie d. darst. Geom. ab 1907 inkl. der Aufgaben letzten Semesters. München (Agnesstr. 49): Selbstverlg., III + 141 S. Lex. 8⁰.

A. Schülke. Aufgaben-Sammlg. aus der reinen u. angewandten Mathematik. II. Teil. 2. Aufl. Ergebnisse. Leipzig: B. G. Teubner. 91 S. gr. 8⁰.

W. Jordan. Opus palatinum. Sinus u. Cosinustafeln von 10″ zu 10″. Hrsg. v. weiland W. Jordan. 2. ber. Aufl. Hannover: Hahn. Lex. 8⁰.

Barlow. Tables des carrés, cubes, racines carrés, racines cubiques et inverses. Paris: Dunod et Pinat. 8⁰.

Breusing. Logarithmen des Semiversus. Neu zusammengest. u. hrsg. im Verein mit O. Fulst u. H. Meldau von C. Schilling. Leipzig: H. Heinsius Nachfl., IV + S. 81-132. Lex. 8⁰.

Logarithmentafel, 7- u. 11-stellige. (Nach Ferrol.) Für die Westentasche. 2. Aufl. Bonn: F. J. Huthmacher. 35 S. 16⁰.

L. Jelinek. Mathematische Tafeln für techn. Anstalten. 6. Aufl. Unveränd. Abdruck d. 3. Aufl. Wien: A. Pichlers Wwe. u. Sohn. 174 S. u. S. 177-223. 8⁰.

F. W. Küster. Logarithmische Rechentafeln f. Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner u. Physiker. 13. neu berechnete Aufl. Leipzig: Veit & Co. 107 S. kl. 8⁰.

G. De La Lande. Tavole di logaritmi, estese a sette decimali da F. G. Marie. Napoli: Morano. XII + 208 S. 16mo.

W. R. Longley. Tables and formulas for solving numerical problems in analytical geometry, calculus and applied mathematics. Boston: Ginn. V + 31 S. 12mo.

K. Mönkemeyer. Vollständige vierstellige Logarithmentafel, z. Gebrauch für Schule u. Praxis zusammengestellt. Frankfurt a. M.: M. Diesterweg. 110 S. 8⁰.

A. Schleussinger. Tafel mit gekürzten Zahlenwerten zum Quadrieren und Radizieren. Zs. f. Vermessw. **42**, 417-422.

P. Schulz. Fünfstellige logarithmische u. trigonometrische Tafeln m. Hilfstabellen f. das numerische Rechnen. Nürnberg: C. Koch. 112 S. gr. 8⁰.

F. A. WESTRICK. Fünfstellige Logarithmen, f. den Schulgebrauch zusammengestellt. 4. Aufl. Münster: Aschendorff. II + 125 S. gr. 8°.

H. ZIMMERMANN. Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte. 7. Aufl. Ausg. A. Berlin: W. Ernst & Sohn. XXXIV + 204 S. gr. 8°.

H. R. KEMPSE. The engineer's year book of formulae, rules, tables, data and memoranda, for 1913. London: Lockwood. 1588 S. 8°.

A. A. ATKINSON. Electrical and magnetical calculations for the use of electrical engineers. 4th edition, revised. New York: Van Nostrand. X + 310 S. 12mo.

G. W. RICHARDSON. The slide-rule simplified. Chicago: G. D. Clougher. 52 S. 4°.

Namenregister.

Berichtigungen.

S. 20 Zeile 19 v. o. statt 1811 lese man 1911.
„ 39 „ 14 „ „ „ Marie lese man Maire.
„ 166 „ 12 „ u. „ Milleh lese man Miller.
„ 735 „ 1 „ o. „ Simandt lese man Simandl.
„ 994 „ 17 „ u. „ Elektrizitätsleistung lese man Elektrizitätsleitung.
„ 1055 „ 15 „ „ „ raffredamento lese man raffreddamento.

Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik

begründet
von
Karl Ohrtmann und **Felix Müller.**

Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung von **Albert Wangerin, Erich Salkowski, Arthur Korn** sowie der **Berliner Mathematischen Gesellschaft**

herausgegeben
von
Emil Lampe.

Band 44. Jahrgang 1913.
(In 3 Heften.)
Heft 1.



Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1916.

Bogen 1 bis 34.



